中華民國第51屆中小學科學展覽會

作品說明書

國小組　數學科

080407

約分的好幫手

學校名稱：高雄市橋頭區仕隆國民小學

作者：	指導老師：
小六 陳　潔	黃安佳
小六 李盛馨	馬櫻芳
小六 陳昱佑	
小六 蔡幸吟	

關鍵詞：求餘數、最大公因數、輾轉相除法

約分的好幫手

壹、 摘要

希望找出最快的約分方式，所以先找出兩數相除後所得到的餘數，發現餘數和兩數的最大公因數有很大的相關性，餘數的因數中包含了最大公因數，同時餘數還可代表兩數中的大數再和小數繼續求取餘數，或找最大公因數，得到的餘數可以簡化求最大公因數的過程。同時和輾轉相除法比較，可更快找出最大公因數，或者更快判斷出兩數是否互質。並且在求取多個複雜的數字的最大公因數時，也可快速的簡化，而不需要兩兩以輾轉相除法求之。此種求餘數法是在約分時的最佳幫手。

貳、 研究動機

我們在學分數的約分時，每次遇到很大的數字時，遇到公因數中的質數若是大於 20 時，就會很頭大，因為要用好幾個質數去除，所以都會算很久。所以我們就問老師，我們是否可以有更簡單的方式來計算，結果老師向我們介紹了輾轉相除法，我們算了之後覺得很有趣，就希望能知道它的原理，但老師的解釋方式對我們來說實在很難，所以我們希望能用試驗的方式找出它的原理，同時也希望找出可以更快更簡便的方式來找公因數。

參、 研究目的

一、找出兩數相除後的關係。

二、了解餘數和最大公因數的關係。

三、利用餘數的因數判斷最大公因數。

四、比較求餘數法和輾轉相除法的差別及方便性。

五、是否可用求餘數法找出多個數的最大公因數。

六、是否可使數字複雜的分數約分更簡化。

肆、 研究設備及器材

紙、筆、尺

伍、 研究過程或方法

我們先將 a,b 兩個數字之間的關係可能為以下幾種情形：

首先我們先假設 a ＞ b

（１） a 是 b 的倍數。所以（ a ， b ）＝ b ，那麼 a ÷ b 就能整除。

（２）ａ和ｂ互質，所以（ａ，ｂ）＝１，

（３）ａ和ｂ有大於１的最大公因數ｇ，ａ＝ｋｇ，ｂ＝ｈｇ，所以（ｋ,h）=1

我們知道 a 和 b 若是相差１時，兩數必定互質。而如果 a＝b×p+1 也一定是互質。所以就先來看看兩數相除後餘 1 時，兩數是否為互質。我們先以較小的數字來做測試。

一、　討論兩數相除後的關係。

表一

兩數	除式	商	餘數	最大公因數	特點關係
(6,2)	6÷2	3	0	3	整除
(6,3)	6÷3	2	0	2	整除
(6,4)	6÷4	1	2	2	最大公因數和餘數相同
(6,5)	6÷5	1	1	互質	餘 1

兩數	除式	商	餘數	最大公因數	特點
(7,2)	7÷2	3	1	互質	餘 1
(7,3)	7÷3	2	1	互質	餘 1
(7,4)	7÷4	1	3	互質	
(7,5)	7÷5	1	2	互質	
(7,6)	7÷6	1	1	互質	餘 1

兩數	除式	商	餘數	最大公因數	特點
(8,2)	8÷2	4	0	2	整除
(8,3)	8÷3	2	2	互質	
(8,4)	8÷4	2	0	4	整除
(8,5)	8÷5	1	3	互質	
(8,6)	8÷6	1	2	2	最大公因數和餘數相同
(8,7)	8÷7	1	1	互質	餘 1

兩數	除式	商	餘數	最大公因數	特點
(9,2)	9÷2	4	1	互質	餘 1
(9,3)	9÷3	3	0	3	整除
(9,4)	9÷4	2	1	互質	餘 1
(9,5)	9÷5	1	4	互質	
(9,6)	9÷6	1	3	3	最大公因數和餘數相同

(9,7)	9÷7	1	2	互質	
(9,8)	9÷8	1	1	互質	餘 1

兩數	除式	商	餘數	最大公因數	特點
(10,2)	10÷2	5	0	2	整除
(10,3)	10÷3	3	1	互質	餘 1
(10,4)	10÷4	2	2	2	最大公因數和餘數相同
(10,5)	10÷5	2	0	5	整除
(10,6)	10÷6	1	4	2	最大公因數和餘數不同
(10,7)	10÷7	1	3	互質	
(10,8)	10÷8	1	2	2	最大公因數和餘數相同
(10,9)	10÷9	1	1	互質	餘 1

兩數	除式	商	餘數	最大公因數	特點
(11,2)	11÷2	5	1	互質	餘 1
(11,3)	11÷3	3	2	互質	
(11,4)	11÷4	2	3	互質	
(11,5)	11÷5	2	1	互質	餘 1
(11,6)	11÷6	1	5	互質	
(11,7)	11÷7	1	4	互質	
(11,8)	11÷8	1	3	互質	
(11,9)	11÷9	1	2	互質	
(11,10)	11÷10	1	1	互質	餘 1

結果：

1. 由上可知，只要兩數相除後餘 1 的話，兩數就是互質。
2. 若是兩數能整除，則最大公因數就會是除數本身。
3. 有些餘數和最大公因數剛好相同，有些雖然不同但似乎有些關係。
4. 與質數相除的數都會有餘數，同時餘 1 的數比較多。
5. 而餘 1 的一般是除數的倍數與被除數差 1，所以兩數都會互質。

二、設定兩數是不能整除但沒有互質的數，取來相除後做比較餘數和最大公因數的關係。

表二

兩數	除式	商	餘數	最大公因數	餘數與最大公因數
(6,4)	6÷4	1	2	2	相同
(8,6)	8÷6	1	2	2	相同
(9,6)	9÷6	1	3	3	相同
(10,4)	10÷4	2	2	2	相同
(10,6)	10÷6	1	4	2	不同
(10,8)	10÷8	1	2	2	相同
(14,10)	14÷10	1	4	2	不同
(18,10)	18÷10	1	8	2	不同
(18,12)	18÷12	1	6	6	相同
(18,14)	18÷14	1	4	2	不同
(18,15)	18÷15	1	3	3	相同
(21,12)	21÷12	1	9	3	不同
(21,15)	21÷15	1	6	3	不同

表三

兩數	兩數的公因數	餘數	餘數的因數	和餘數的因數是否相似
(10,6)	1,2	4	1,2,4	是
(14,10)	1,2	4	1,2,4	是
(18,10)	1,2	8	1,2,4,8	是
(18,14)	1,2	4	1,2,4	是
(21,15)	1,3	6	1,2,3,6	是
(21,12)	1,3	9	1,3,9	是

結果：

1. 發現所有的餘數都沒有 1，可見兩數相除餘 1 時，兩數應爲互質。
2. 餘數和最大公因數相同的數很多。
3. 餘數和最大公因數不相同的兩數，其餘數的因數中包含了兩數的公因數，可見若是兩數沒有互質時，其餘數有可能是兩數最大公因數的倍數。

三、若是兩數互質時，其餘數和最大公因數的比較。

表四

兩數	除式	商	餘數	最大公因數	餘數和兩數的公因數是否相同
(7,4)	7÷4	1	3	1	不同
(7,5)	7÷5	1	2	1	不同
(7,6)	7÷6	1	1	1	相同
(8,3)	8÷3	2	2	1	不同
(8,5)	8÷5	1	3	1	不同
(8,7)	8÷7	1	1	1	相同
(9,5)	9÷5	1	4	1	不同
(9,7)	9÷7	1	2	1	不同
(9,8)	9÷8	1	1	1	相同
(10,7)	10÷7	1	3	1	不同
(10,9)	10÷9	1	1	1	相同

結果：

1. 除後的餘數只有 1 是兩數的公因數。
2. 除了餘 1 的數和最大公因數相同，其他餘數的公因數都只有 1 和最大公因數相同。

四、計算差別較小的兩數（大數小於小數的 2 倍），是否可以餘數方式找最大公因數。

以 100 以內的數字做比較。大數的值小於小數的 2 倍，同時爲非互質及倍數的數。因爲餘數剛好就是大小兩數的差值。

表五

兩數	兩數的公因數	餘數	餘數的因數	有幾個相同的因數	和公因數個數是否相同
(100,60)	1,2,4,5,10,20	40	1,2,4,5,8,10,20,40	6	否
(100,64)	1,2,4	36	1,2,3,4,6,9,12,18,36	3	否
(100,75)	1,5,25	25	1,5,25	3	是
(100,80)	1,2,4,5,10,20	20	1,2,4,5,10,20	6	是
(100,88)	1,2,4	12	1,2,3,4,6,12	3	否
(100,95)	1,5	5	1,5	2	是
(84,56)	1,2,4,7,14,28	28	1,2,4,7,14,28	6	是
(84,48)	1,2,3,4,6,12	36	1,2,3,4,6,9,12,18,36	6	否
(81,57)	1,3	24	1,2,3,4,6,8,12,24	2	否
(56,49)	1,7	7	1,7	2	是

(56,42)	1,2,7,14	14	1,2,7,14	4	是
(56,36)	1,2,4	20	1,2,4,5,10,20	3	否
(45,27)	1,3,9	18	1,2,3,6,9,18	2	否

表六

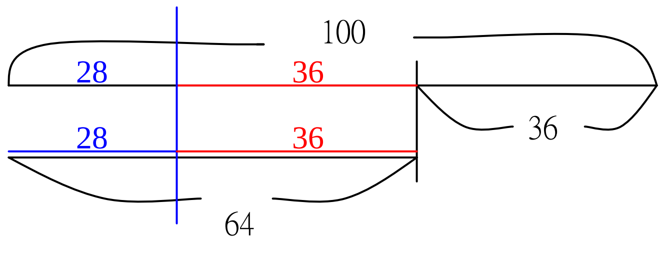
兩數	餘數	兩數除以餘數的再餘數		再餘數是否相同	再餘數	兩數的最大公因數
(100,60)	40	100÷40=2..20	60÷40=1..20	是	20	20
(100,64)	36	100÷36=2..28	64÷36=1..28	是	28	4
(100,88)	12	100÷12=8..4	88÷12=7..4	是	4	4
(84,48)	36	84÷36=2..12	48÷36=1..12	是	12	12
(81,57)	24	81÷24=3..9	57÷24=2..9	是	9	3
(56,36)	20	56÷20=2..16	36÷20=1..16	是	16	4
(45,27)	18	45÷18=2..9	27÷18=1..9	是	9	9

結果：

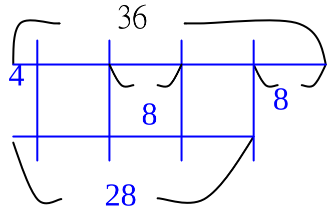
1. 兩數的公因數均可以在餘數的因數中找到，可見餘數真的會是最大公因數的倍數。
2. 由綠色數字中發現，有些兩數的最大公因數剛好就是餘數，這時兩數都是餘數的倍數。
3. 餘數的倍數和兩數之任一數相除後的「再餘數」是相同的，所以可以發現餘數乘上不同的數再加上某數就可以得到兩數。
4. 黃色部份是「再餘數」(也就是兩數除以餘數後的餘數)剛好就是兩數的最大公因數。當「再餘數」可以整除餘數時，就表示「再餘數」是兩數的最大公因數。

五、兩數除以餘數後的「再餘數」和兩數的最大公因數是否有關係？

我們以圖式的方式來分析兩數和餘數的關係。



我們發現因爲 100 和 64 的差值是 36，所以兩數同除以 36 時，就會餘 28。所以要能整除 100 和 64 時，只要求取 28 和 36 的最大公因數就可以整除 100 和 64 兩數。故利用上面相除的方式看看能不能找到 28 和 36 的最大公因數。

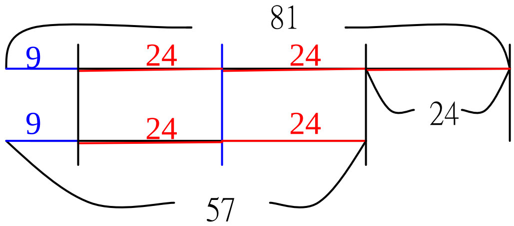


由圖上可知 8 是 4 的倍數，所以最大公因數爲 4。

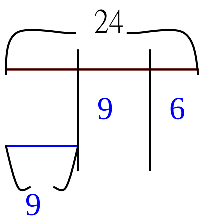
表七

兩數	兩個餘數	除式	商	餘數	最大公因數	餘數是否爲最大公因數
(100, 64)	(36,28)	36÷28	1	8	4	否
(100, 64)	(36,8)	36÷8	4	4	4	是
(100, 64)	(28,8)	28÷8	3	4	4	是
(81,57)	(24,9)	24÷9	2	6	3	否
(81,57)	(24,6)	24÷6	4	0	3	否
(81,57)	(9,6)	9÷6	1	3	3	是
(56,36)	(20,16)	20÷16	1	4	4	是

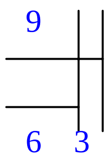
以(81,57)來畫圖表示：



24 並不是 9 的倍數，所以必須求(24,9)的最大公倍數，利用上述和餘數相除的方式，我們將 24 和 9 分別除以 6。



24 原本就是 6 的倍數，但 9 並不是，所以必須再求(9,6)的最大公因數。



結果：

1. 由(100, 64)的求餘數過程中，我們發現兩數相除的餘數和除以餘數的餘數可以簡化 100 和 64 而求其最大公因數，而得到的 36 和 28 也可以用求餘數的方式，再簡化爲 8 和 4，8 除以 4 整除，表示 8 是 4 的倍數，而得到最大公因數 4。
2. 由(81,57)的求餘數過程中，我們發現因爲上述我們只單純討論兩數的差別必須是大數小於小數的兩倍，而 24 和 9 的差已大於兩倍，因此由上圖我們可知若是大數大於小數的兩倍時，就必須找餘數和小數之間的差値，可能才會找到最大公因數。
3. 由(56,36)的求餘數過程中，我們發現餘數 20 和兩數除以餘數後的餘數 16 相差 4，剛好可以整除 20 和 16，所以最大公因數爲 4。

4. 由此可知求兩數的餘數時，若是一直無法得到最大公因數，則就要以餘數和較小的數再相除，以求得兩數的最小差值，才會找到最大公因數。

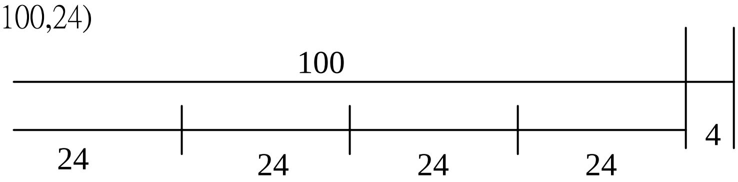
六、當大數大於小數的兩倍時，是否可用求餘數的方式找到最大公因數？

以 100 以內的數字做比較。大數的值小於小數的 2 倍，同時爲非互質及倍數的數。

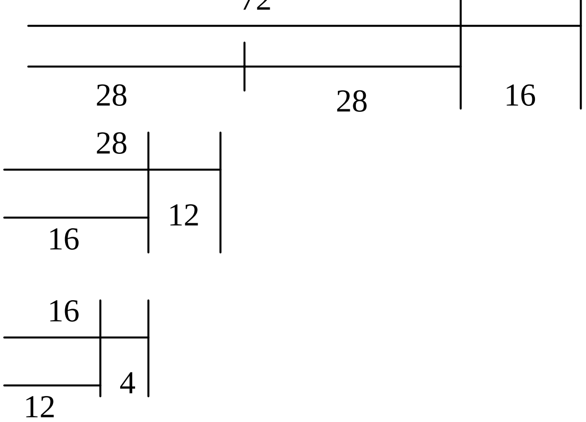
表八

兩數	兩數的公因數	餘數	因數	有幾個相同的因數	因數和公因數的個數是否相同
(100,24)	1,2,4	4	1,2,4	3	是
(93,12)	1,3	9	1,3,9	2	否
(72,28)	1,2,4	16	1,2,4,8,16	3	否
(56,21)	1,7	14	1,2,7,14	2	否
(48,9)	1,3	3	1,3	2	是
(45,18)	1,3,9	9	1,3,9	3	是
(36,14)	1,2	8	1,2,4,8	2	否

(100,24)



(72,28)



結果：

1. 兩數的公因數和餘數的因數類似，有些相同，有些則是包含在餘數因數之中。
2. 由上面(100,24)的餘數 4，發現當 100 除以 24 時，所得的餘數剛好就是兩數的最大公因數。
3. 而(72,28)的餘數是 16，表示 72 減 16 後就是 28 的倍數，所以要找兩數的最大公因數，也就是 16 和小數 28 的最大公因數，而 28 和 16 的餘數是 12，所以可以餘數的方式再找出 12 和小數 16 的餘數 4，而 4 就剛好可以整除兩數，因此 4 就是 72 和 28 的最大公因數。
4. 因此我們推測若是兩數互質，兩數的最大公因數爲 1，所以餘數可能就剛好是 1，這樣

表示兩數的圖示可能就只能切割到 1 才會將兩數等分。

七、互質的兩數相除後的餘數是否會是 1？

我們先設定兩數均爲質數。　　　　　　　表九

兩數	兩數的公因數	餘數	餘數是否爲 1	小數和餘數	相除後的餘數	是否爲 1	小數和餘數	相除餘數	是否爲 1	最終餘數
(2,3)	1	1	是							1
(2,5)	1	1	是							1
(3,5)	1	2	否	(3,2)	1	是				1
(3,7)	1	1	是							1
(5,7)	1	2	否	(5,2)	1	是				1
(5,11)	1	1	是							1
(5,17)	1	2	否	(5,2)	1	是				1
(5,23)	1	3	否	(5,3)	2	否	(3,2)	1	是	1
(5,29)	1	4	否	(5,4)	1	是				1
(11,37)	1	4	否	(11,4)	3	否	(4,3)	1	是	1
(11,57)	1	2	否	(11,2)	1	是				1
(13,43)	1	4	否	(13,4)	1	是				1
(17,61)	1	10	否	(17,10)	7	否	(10,7)	3	否	1
(19,83)	1	7	否	(19,7)	5	否	(7,5)	2	否	1
(23,97)	1	5	否	(23,5)	3	否	(5,3)	2	否	1

設定兩數的其中一數爲質數，但都互質。　表十

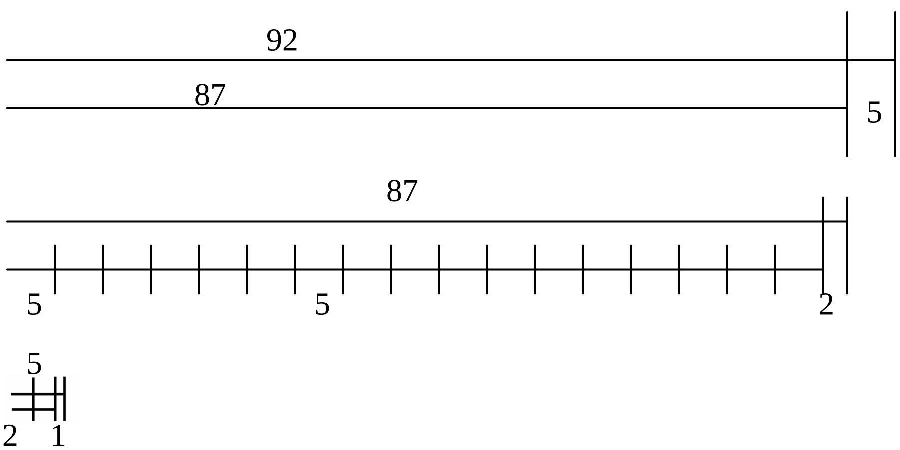
兩數	兩數的公因數	餘數	餘數是否爲 1	小數和餘數	相除後的餘數	是否爲 1	小數和餘數	相除餘數	是否爲 1	最終餘數
(2,19)	1	1	是							1
(3,26)	1	2	否	(3,2)	1	是				1
(5,12)	1	2	否	(5,2)	3	否	(2,3)	兩數均爲質數		1
(7,26)	1	5	否	(7,5)	2	否	(5,2)	兩數均爲質數		1
(8,13)	1	5	否	(8,5)	3	否	(5,3)	兩數均爲質數		1
(6,17)	1	5	否	(6,5)	1	是				1
(11,40)	1	7	否	(11,7)	4	否	(7,4)	3	否	1
(13,56)	1	4	否	(13,4)	1	是				1
(17,78)	1	10	否	(17,10)	7	否	(10,7)	3	否	1
(19,45)	1	7	否	(19,7)	5	否	(7,5)	兩數均爲質數		1

(25,67)	1	17	否	(25,17)	8	否	(17,8)	1	是	1
(31,88)	1	26	否	(31,26)	5	否	(26,5)	1	是	1
(53,98)	1	45	否	(53,45)	8	否	(45,8)	5	否	1

設定兩數都不是質數，但都互質。　　表十一

兩數	兩數的公因數	餘數	餘數是否爲 1	小數和餘數	相除後的餘數	是否爲 1	小數和餘數	相除餘數	是否爲 1	最終餘數
(15,14)	1	1	是							1
(26,35)	1	9	否	(26,9)	8	否	(9,8)	1	是	1
(32,85)	1	21	否	(32,21)	11	否	(21,11)	10	否	1
(34,57)	1	23	否	(34,23)	11	否	(23,11)	兩數均爲質數		1
(16,77)	1	13	否	(16,13)	3	否	(13,3)	兩數均爲質數		1
(49,87)	1	38	否	(49,38)	11	否	(38,11)	5	否	1
(45,68)	1	23	否	(45, 23)	22	否	(23,22)	1	是	1
(52,87)	1	35	否	(52,35)	17	否	(35,17)	1	是	1
(55,72)	1	17	否	(55,17)	4	否	(17,4)	1	是	1
(57,98)	1	41	否	(57,41)	16	否	(41,16)	9	否	1
(64,95)	1	31	否	(64,31)	2	否	(31,2)	兩數均爲質數		1
(74,93)	1	19	否	(74,19)	17	否	(19,17)	兩數均爲質數		1
(75,82)	1	7	否	(75,7)	5	否	(7,5)	兩數均爲質數		1
(87,92)	1	5	否	(87,5)	2	否	(2,5)	兩數均爲質數		1

以(87,92)圖示



結果：

1. 兩數爲質數必定會互質，計算後發現兩數的最終餘數也爲 1。
2. 兩數的其中一數爲質數時，計算後發現餘數也會出現質數，那就表示最終餘數必爲 1。
3. 我們發現兩數均不是質數但爲互質時，餘數若是出現質數，而小數並不是質數的倍數時，則表示最終的餘數必爲 1。
4. 圖示發現兩數互質時，相除後所求的最終餘數都是 1，因爲沒有其他的數可以等分兩數。

八、比較傳統的輾轉相除法。

老師告訴我們傳統都是使用輾轉相除法來求最大公因數，我們發現我們求餘數的方法和輾轉相除法相似，所以我們要來比較看看。

求餘數法：將兩數相除後，若是整除就表示大數是小數的倍數，小數就是最大公因數，若是不能整除，就將小數和餘數相除，依循相同的方式，若是餘數爲質數，又不能整除小數，則表示兩數互質。若是餘數較簡單，可快速找出餘數的質因數，利用質因數開始去除小數，若是能整除就表示此因數爲兩數的質因數，將可整除的質因數相乘，就是最大公因數。

輾轉相除法：方式和我們的求餘數法相同，但是要一直求餘數到餘數爲 0，表示最大公因數爲上一個餘數。若是得到 1，表示兩數互質。

我們先以兩位數來比較：

找(84,49)的最大公因數

84÷49 = ···35

35=5×7　49 不能被 5 整除，

49 可被 7 整除，

所以(84,49)的最大公因數是 7。

	84	49	
1	49	35	1
	35	14	
2	28	14	2
	7	0	

找(81,57)的最大公因數

81÷57 = …24

57÷24 = …9

9=3x3，24 可被 3 整除，

所以(81,57)的最大公因數是 3。

	81	57	
1	57	48	2
	24	9	
2	18	6	2
	6	3	
2	6		
	0		

三位數：

找(849,357)的最大公因數。

849÷357 = …135

357÷135 = …87

87=3x29

29 不能整除 135，3 可以。

所以(849,357)的最大公因數是 3。

	849	357	
2	714	270	2
	135	87	
1	87	48	1
	48	39	
1	39	36	4
	9	3	
3	9		
	0		

找(957,528)的最大公因數。

957÷528 = …429

528÷429 = …99

99=3x3x11

9 不能整除 429，3 和 11 都可以。

所以(849,357)的最大公因數是 33。

	957	528	
1	528	429	1
	429	99	
4	396	99	3
	33	0	

四位數：

找(6578,2394)的最大公因數。

6578÷2394 = …1790

2394÷1790 = …604

1790÷604 = …582

604÷582 = …22

22=2x11，582÷2 可整除，582÷11 不可整除

所以(6578,2394)的最大公因數是 2。

	6578	2394	
2	4788	1790	1
	1790	604	
2	1208	582	1
	582	22	
26	572	20	2
	10	2	
	10		
	0		

找(8647,7583)的最大公因數。

8647÷7583 = …1064

7583÷1064 = …135

1064÷135 = …119

135÷119 = …16

16=2x2x2x2

2 不能整除 119，

所以(8647,7583)的最大公因數是 1。

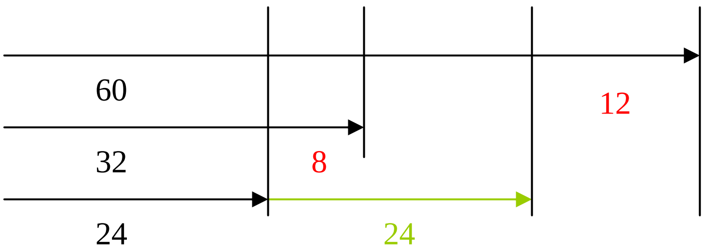
	8647	7583	
1	7583	7448	7
	1064	135	
7	945	119	1
	119	16	
7	112	14	2
	7	2	
3	6		
	1		

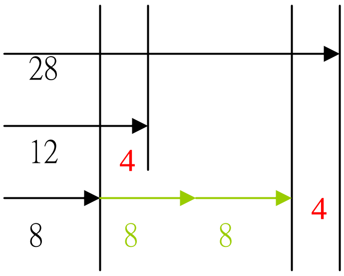
結果：

1. 兩數的最大公因數愈快算出，則我們的求餘數法和輾轉相除法就愈相同。
2. 橘線表示以輾轉相除法的方式算時，我們的求餘數法在橘線時就可以較快判斷出兩數是否為質數，及其最大公因數，而以下的算式就可以省略了。
3. 若是餘數的質因數都無法整除小數，則表示兩數為互質。

九、是否和利用求餘數法找出多個數之間的最大公因數。

以(24,60,32)的圖示為例，





我們將三數中的兩個較大的數除以最小的數而得到餘數，再將兩個餘數和最小的數結合後，再以相同的方式求兩個餘數，再和餘數中的最小數結合，來試試看餘數是否找得到最大公因數。

先以有大於 1 的最大公因數的三數做計算。　　　表十二

三數	最大公因數	兩個餘數	餘數和小數	兩個再餘數及小數	最終小數	和最大公因數是否相符
（4,8,10）	2	8÷4=…0 10÷4=…2	（0,2,4）	（0,0,2）	（0,0,2）	是
（18,24,30）	6	30÷18=…12 24÷18=…6	（12,6,18）	（0,0,6）	（0,0,6）	是
（28,49,91）	7	91÷28=…7 49÷28=…21	（7,21,28）	（0,0,7）	（0,0,7）	是
（48,36,56）	4	56÷36=…20 48÷36=…12	（20,12,36）	（8,0,12）	（0,0,4）	是
（84,56,98）	14	98÷56=…42 84÷56=…28	（42,28,56）	（14,0,28）	（0,0,14）	是
（765,465,975）	15	765÷465=…300 975÷465=…45	(300,45,465)	（30,15,45）	（0,0,15）	是
（876,378,804）	6	876÷378=…120 804÷378=…48	（120,48,378）	（42,24,48）	（0,0,6）	是

以三數中有兩數互質或是兩兩不互質，但最大公因數仍為 1 的情形做計算。　　表十三

三數	最大公因數	兩個餘數	餘數和小數	兩個再餘數及小數	最終小數	和最大公因數是否相符
（6,8,21）	1	8÷6=…2 21÷6=…3	（3,2,6）	（1,0,2）	（0,0,1）	是
（18,25,30）	1	30÷18=…12 25÷18=…7	（12,7,18）	（5,4,7）	（0,0,1）	是
（28,39,91）	1	91÷28=…7 39÷28=…11	（7,11,28）	（4,0,7）	（0,0,1）	是
（48,77,56）	1	56÷48=…8 77÷48=…29	（8,29,48）	（5,19,8）	（0,0,1）	是
（84,135,98）	1	135÷84=…51 98÷84=…14	（51,14,84）	（9,0,14）	（0,0,1）	是
（806,465,975）	1	806÷465=…341 975÷465=…45	(26,45,15)	（11,0,15）	（0,0,1）	是
（897,378,804）	1	897÷378=…149 804÷378=…48	（149,48,378）	（42,5,48）	（0,0,1）	是

多個有大於 1 的最大公因數的數。　　　表十四

三數	最大公因數	兩個餘數	餘數和小數	兩個再餘數及小數	最終小數	和最大公因數是否相符
（6,15,21,27）	3	15÷6=…9 21÷6=…3 27÷6=…3	（9,3,3,6）	（3,0,0,3）	（0,0,0,3）	是
（125,75,300,250）	25	300÷75=…0 125÷75=…50 250÷75=…25	（0,50,25,75）	（0,0,0,25）	（0,0,0,25）	是
（65,52,78,91,117）	13	65÷52=…13 78÷52=…26 91÷52=…39 117÷52=…65	（13,26,39,65,52）	（0,0,0,0,13）	（0,0,0,0,13）	是
（324,486,192,396,288）	6	324÷192=…132 486÷192=…102 396÷192=…12 288÷192=…96	（132,102,12,96,192）	（0,0,6,0,12）	（0,0,6,0,0）	是
（49832,58348,16704,23404,94332,37868）	4	49832 ÷ 16704 =…16424 58348 ÷ 16704 =…8236 23404 ÷ 16704 =…6700 94332 ÷ 16704 =…10812 31468 ÷ 16704 =…14764	（16424, 8236, 6700, 10812, 14764 , 16704）	（3024,1536, 4112,3304, 1364,6700）	（0,0,0,0,,0,4）	是

結果：

1. 當餘數爲 0 時，表示此被除數是除數的倍數，所以在求餘數時，不當作是最小數，而直接不必計算，因其共同的因數已包含在另一個除數之中。
2. 我們發現求得的餘數都有和最大公因數相同的因數存在。
3. 餘數有助於簡化各數，使數字變簡單後就很容易找到最大公因數。
4. 有比 1 大的最大公因數的各數求餘數到最後，都可以被最後的小數所整除。
5. 當各數的最大公因數是 1 時，求餘數到最後，所出現的最後小數爲 1。
6. 當各數求得的餘數中有互不能整除的質數時，表示這些數的最大公因數爲 1。
7. 求餘數的方式確實可以找到多個數的最大公因數。

十、利用求餘數法來探討以輾轉相除法求多數的最大公因數的可能性。

我們利用輾轉相除法的方式將多個數放入其中，找出最小數，再將其他的數除以最小數得餘數，再由所有的餘數中找出最小數，將其他的數再除以最小的餘數，如此類推，若是遇到整除時，則再算其他的餘數，直到所有其他的數均被某一數整除，餘數爲 0 時，則此數即爲所有數的最大公因數。

152152=2x2x2x7x11x13x19

379316=2x2x7x19x23x31

227240=2x2x2x5x13x19x23

318060=2x2x3x3x15x19x31

112860=2x2x5x11x19x27

76＝2x2x19

152152	379316	227240	318060	112860
112860	338580	225720	225720	112480
39292	40736	1520	92340	380
38000	39520	1520	91200	380
1292	1216	0	1140	0
1140	1140		1140	
152	76		0	
152				
0				

紅色數字爲五個數字中的最小值，所以用它去除其他的數。得到最後的最小值，可以整除其他的數的就是所有數字的最大公因數。

結果：

1. 由上可知只要了解求餘數的原理，應用在輾轉相除法上，確實可利用輾轉相除法的技巧來算多個數的最大公因數。

十一、　是否可使數字複雜的分數約分更簡化。

設定二位數、三位數、四位數的分數來比較，約分的過程是否有更簡便。

表十五

分數	算法	過程	計算是否簡便
$\frac{84}{91}$	傳統約分	84=2x2x3x7　兩數分別測試除以 2,3,7	
	求餘數約分	91÷84=1…7　7=1x7，兩數只需測試除以 7	是
$\frac{51}{85}$	傳統約分	51=17x3，85=5x17,數字難以直接推算出,需判斷。	
	求餘數約分	85÷51=…34,34=2x17,51 只能被 17 整除。(52÷34=…17 也可)	是
$\frac{27}{63}$	傳統約分	27=9x3，63=9x7　數字可直接推算出。	是
	求餘數約分	63÷27=2…9，9=3x3 可由餘數 9,3 去推算。(27 可被 9 整除)	
$\frac{117}{153}$	傳統約分	117 及 153 都是 3 的倍數，約分後爲 39 及 51，再約分。	
	求餘數約分	153÷117=36，36=4x9，４不能除，直接以 117 除以 9 測試。	是
$\frac{483}{552}$	傳統約分	同時除以 2 得 $\frac{207}{276}$，276=2x2x3x23，測試 2,3,4,6,23。	
	求餘數約分	552÷483=1…69，483÷69=7，可知 69 可以約分。	是
$\frac{123}{743}$	傳統約分	123=3x41，743 除以 3,41 做測試。	
	求餘數約分	743÷123=6…5，5 不能整除 123，5 爲質數，兩數互質。	是
$\frac{589}{837}$	傳統約分	利用輾轉相除法求最大公因數。求至 248÷93,93÷62,62÷31。	
	求餘數約分	837÷589=…248, 589÷248=…93，93=3x31，以 3,31 測試 248。	是
$\frac{3276}{8645}$	傳統約分	利用輾轉相除法求至 1183÷910 餘 273, 910÷273 餘 91,273÷91。	
	求餘數約分	8645÷3276 餘 2093, 3276÷2093, 餘 1183, 2093÷1183 餘 910, 910= 2x5x91,1183÷91 整除。	是

結果：

1. 求餘數法是個需要去分解判斷的約分方式，若是能由餘數中快速分解出容易判斷的數字就能愈快得到結果，若是不能時，也能用一步一步的找餘數方式去找出約分的數。
2. 不同的數字節省的時間不同，若是輾轉相除法就可很快找出的最大公因數，則求餘數法就不能少多少時間，若是輾轉相除法要算很多時，運用求餘數法就可更快些。
3. 傳統約分方式，我們常會去判斷兩數的質因數，再去一個一個約分，常常遇到某些質數沒想到或想不出來，就不會約了，同時老師也說輾轉相除法一般國小程度是不會教的，所以每次遇到要約分或通分時，就會花很多時間。求餘數法確實使計算更簡便。
4. 三位數的約分，常要靠 2,3,5,11 的快速判斷方式的經驗判斷，若有其他質因數，就要慢慢嘗試，四位數以上就一定要用輾轉相除法才行，但因爲求餘數法的方式簡單易懂，所

以就不一定要學會輾轉相除法了。

陸、討論

一、兩數若是互質時，相除後的餘數及再餘數將會是 1。

二、沒有互質的兩數，相除後所得到的餘數包含有兩數共同的因數。

三、當一開始的餘數不是兩數的最大公因數時，仍可再求餘數和較小的餘數，最後會發現餘數若能整除小數時，則此餘數就是兩數的最大公因數。

四、若是兩數相除後所得到的最終餘數是 1 時，表示兩數互質，其最大公因數只有 1。

五、餘數的方法和輾轉相除法作法相同，但求餘數的過程中若是發現餘數已簡化為較少質因數時，就可以這些質因數去判斷最大公因數，所以可以簡化輾轉相除法，同時也比較容易懂。

六、在求餘數時，若發現不能整除小數的餘數是質數，則表示兩數必定互質，所以就可以不必再計算。

七、一般輾轉相除法難用於多個數求最大公因數，而求餘數法卻可以，同樣是將所有的數和最小數相除而得到餘數，再將所有的餘數和小數放在一起，去找出所有的數和餘數中的最小數相除的餘數，到最後若發現某數可以將其他的數整除，則此數就是最大公因數。

八、我們發現以圖示的方式可以很輕鬆的了解只要將大數除以小數時，餘數是大數和小數倍數的差值，所以只要再求餘數和小數的最大公因數，就是兩數的最大公因數。這樣計算的好處就是可以不斷的簡化兩數，直到最後就可以很容易找出最大公因數。

九、而應用在求多個數的最大公因數時，原理也是先簡化各大數求得餘數，餘數再和小數一起找出最大公因數，當數字簡單時，尋找最大公因數自然就會比較快，而不須要以輾轉相除法兩兩去求，最後再一起算其最大公因數。

柒、結論

一、以前老師教我們輾轉相除法時，我們對其原理及計算方式不甚了解。經過這次的研究，由求餘數的過程中，我們可以清楚的了解輾轉相除法是利用求餘數的方式而得，同時還可以藉由其原理，達到簡化算式的方式，而不需要像以往那樣，需要算到最後才能得到最大公因數。

二、在求多數的最大公因數時，以往我們總認為沒有辦法直接利用輾轉相除法的方式一個式子求得，但是若將求餘數的原理用在輾轉相除法上，則輾轉相除法也可以將多個數字的最大公因數求出。

三、我們曾經在網站上尋找輾轉相除法的原理，但每個描述的方式都很複雜，我們都無法理解。但是在求餘數的過程中，我們知道兩個數若是有個大於 1 的最大公因數時，則其相除後的餘數就是小數的倍數和大數之間的差值，大數減掉小數的倍數後的差值，就可用來代表大數，再以差值和小數去相除，以此類推，將可找到可以整除兩數的餘數，則此餘數也必能將大小數整除。

四、只要能克服尋找最大公因數的方法，分數的約分也會變得更加簡單及快速。

五、雖然我們國小程度的約分一般不會有太大的數字，但若是遇到數字的質因數爲較大的數時，就會很難判斷，同學們也常因此而苦惱，利用求餘數的方式讓我們發現其實判斷質因數再也不是一件難事了。

捌、 參考資料及其他

一、康軒出版，數學領域。第十冊第一單元：分數的乘法。
二、康軒出版，數學領域。第九冊第四單元：因數與倍數。
三、康軒出版，數學領域。第十一冊第一單元：最大公因數與最小公倍數。
四、康軒出版，數學領域。第十一冊第二單元：分數的除法。
五、中華民國第四十五屆中小學科學展覽會。國小組。數學科。互質製造機。
六、中華民國第四十四屆中小學科學展覽會。國小組。數學科。質因數判別法。

【評語】080407

作者們對於輾轉相除法求兩數的最大公因數的原理給出了自己的詮釋，對於如何進一步的簡化計算過程也提出了一些建議從簡單的例子出發，透過一些現象的觀察，提出猜測修正結果，最後可以清楚的說明結論，可說已經掌握了從事研究工作的基本準則，非常難得。可惜的是，探討的是早已廣為人知的結果。作者們只是重現了這個結果被發現的過程，如果能選擇一個好問題，以作者們所顯現的潛力，應該會有不錯的表現。