

# 中華民國第 51 屆中小學科學展覽會 作品說明書

---

國小組 數學科

080406

三十六計，『跳』為上

學校名稱：桃園縣中壢市新街國民小學

作者：  小五 馬譽恒  小五 陳麗同  小五 張靖柔  小五 王俊皓	指導老師：  蘇旭榮
---	------------------

關鍵詞：排序遊戲、跳島戰術、反證法

## 壹、 摘要

本文所探討的是一種有趣的排序遊戲。在我們發現其中的數學規律性後，並利用遊戲技巧定義出「跳島戰術」，換句話說，當移動過程符合跳島戰術，將可得到最少移動次數步驟，其最少移動次數的公式：

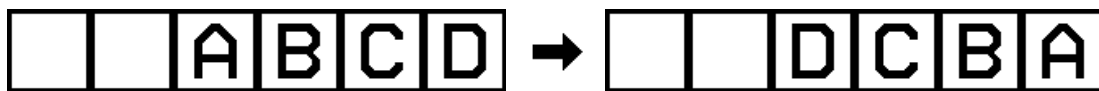
※當符合（空格數/字母數） $\leq 1/2$ 時，奇數個字母為 $\frac{N^2 + 3N - 8}{2}$ 次；偶數個字母為 $\frac{N(N+1)}{2}$ 次。

此外，嘗試以數據推導出解題公式(p.11)後，再找出移動步驟之規律證明(p.9~p.12)，希望獲得公式的正確性，最後更反證法(p.17~p.25)，試圖以足夠的數據證明公式的正確性。反證法發現，當違反「跳島戰術」的任何移動方式與技巧，皆無法獲得更少的步驟數，因此更可推論證明出遊戲公式之正確性，獲得破解本排序遊戲的最佳策略。

## 貳、 研究動機

每每上數學課時，導師總是喜歡出一些有趣的數學問題，來激盪我們的腦力，其中一個問題讓我們印象深刻，遊戲內容如下：

下面有六個方格，其中四格按順序排上 A、B、C、D 四個英文字母，另外兩格為空格，依照移動規則，在原來的四個格子，將順序變成 D、C、B、A，試問最少要移動幾個步驟？



配合已經學過南一版數學(十)「怎樣列式」，我們幾個同學便利用課餘時間，找老師驗證答案，大家也有相同的疑問想做進一步的探討。

於是我們就針對這個排序遊戲做各種研究，並試圖做出研究結論。在研究的過程中，老師提醒我們歷年科展針對排序遊戲的研究不勝枚舉，因此我們提出歷屆相關研究如下，並釐清我們的研究價值。

編號	屆別組別	得獎名次	主題名稱	研究主要內容
1	34屆高小組	全國第二名	毛毛蟲變蝴蝶~排序遊戲的新發現	針對排序遊戲作更深入的探討，該作品中對兩邊棋子數不相等的部分做了完整的探討，並歸納出公式，是以往不曾被研究過的新題材。
2	36屆高小組	全國第一名	翻來覆去乾坤轉~翻硬幣遊戲的新發現	針對各種情形作多元的探討，利用數據規律性推導出最低步公式。
3	43屆國小組	全國第二名	最佳全翻位的探討	內容延伸36屆「翻來覆去乾坤轉~翻硬幣遊戲的新發現」，討論情形較為完整。

4	45屆 國小組	全國 第三名	翻出一片天	內容相似43屆「最佳全翻位的探討」，發現遊戲規律，歸納出各種情形的解題策略。
---	------------	-----------	-------	--

※ 與歷屆科展的研究價值與差異：

1. 題目為老師設計原創。
2. 遊戲過程中大膽定義「跳島戰術」以檢驗各種情形的正確性。
3. 除推導出最少移動次數的公式外，利用數學規律性作較嚴謹的證明。
4. 利用反證法，當違反跳島戰術的任何解題策略，皆無法找出更少移動次數。
5. 以數學方法獲得跳島戰術的完整性與公式的正確性。

參、 研究目的

- 一、完成這個遊戲最少的移動步驟。
- 二、利用排序遊戲移動的最少次數、技巧，推導此遊戲之規律性及公式，並嘗試用較嚴謹的數學方法證明，與多元反證法，以確保公式正確性。
- 三、定義數學遊戲之技巧，並可利用數學方法改進或設計排序遊戲。
- 四、將結論推廣至一般排序遊戲。

肆、 研究設備及器材

- 一、以厚紙板製成的遊戲紙卡操作
- 二、移動過程紀錄表
- 三、移動次數統計表

伍、 研究過程或方法

※ 完成這個遊戲最少的移動步驟

方法：依次從字母數 2 個、3 個、4 個、5 個、6 個...14 個等，實際操作多次，並利用遊戲技巧來定義「跳島戰術」，接著討論空格數為一個、左右各空一格、空格數隨字母數增加等情形，並詳細將移動過程加以紀錄。如下列五個表格所示：

【】為最少次數。

※ 原題最左邊空格數 2 個 (利用對稱法已知空格放置最右邊的答案相同)

字母 個數	學生				跳/走
	最少 次數	學生甲	學生乙	學生丙	
A、B	【3】	【3】	【3】	【3】	1/2
A、B、C	【5】	【5】	【5】	【5】	3/2
A、B、C、D	【10】	【10】	【10】	【10】	6/4

A、B、C、D、E	【16】	【16】	【16】	【16】	10/6
A、B、C、D、E、F	【21】	【21】	【21】	【21】	15/6
A、B、C、D、E、F、G	【31】	【31】	【31】	【31】	21/10
A、B、C、D、E、F、G、H	【36】	【36】	【36】	【36】	28/8
A、B、C、D、E、F、G、H、I	【50】	【50】	【50】	【50】	36/14
A、B、C、D、E、F、G、H、I、J	【55】	【55】	【55】	【55】	45/10
A、B、C、D、E、F、G、H、I、J、K	【73】	【73】	【73】	【73】	55/18
A、B、C、D、E、F、G、H、I、J、K、L	【78】	【78】	【78】	【78】	66/12
A、B、C、D、E、F、G、H、I、J、K、L、M	【100】	【100】	【100】	【100】	78/22
A、B、C、D、E、F、G、H、I、J、K、L、M、N	【105】	【105】	【105】	【105】	91/14

※ 最左邊空格數 1 個 (利用對稱法已知空格放置最右邊的答案相同)

字母 個數	學生 最少 次數	學生				跳/走
		學生甲	學生乙	學生丙	學生丁	
A、B		【3】	【3】	【3】	【3】	1/2
A、B、C		【5】	【5】	【5】	【5】	3/2
A、B、C、D		【10】	【10】	【10】	【10】	6/4
A、B、C、D、E		【16】	【16】	【16】	【16】	10/6
A、B、C、D、E、F		【21】	【21】	【21】	【21】	15/6
A、B、C、D、E、F、G		【31】	【31】	【31】	【31】	21/10
A、B、C、D、E、F、G、H、I、J、K、L、M、N		【105】	【105】	【105】	【105】	91/14

※ 空格數 2 個，最左邊最右邊各 1 個，且 2 個空格均需使用

字母 個數	學生 最少 次數	學生				跳/走
		學生甲	學生乙	學生丙	學生丁	

A、B	5	5	5	5	
A、B、C	7	7	7	7	
A、B、C、D	【10】	【10】	【10】	【10】	6/4
A、B、C、D、E	【16】	【16】	【16】	【16】	10/6
A、B、C、D、E、F	【21】	【21】	【21】	【21】	15/6
A、B、C、D、E、F、G	【31】	【31】	【31】	【31】	21/10
A、B、C、D、E、F、G、 H、I、J、K、L、M、N	【105】	【105】	【105】	【105】	91/14

※ 最左邊空格數 3 個，且 3 個空格均需使用

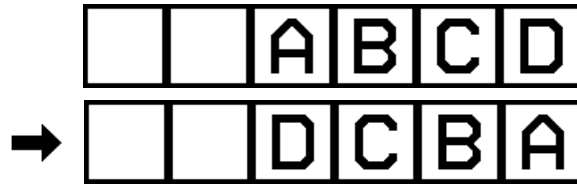
字母 個數	學生 最少 次數	學生				跳/走
		學生甲	學生乙	學生丙	學生丁	
A、B、C、D		12	12	12	12	
A、B、C、D、E		18	18	18	18	
A、B、C、D、E、F		【21】	【21】	【21】	【21】	15/6
A、B、C、D、E、F、G		【31】	【31】	【31】	【31】	21/10
A、B、C、D、E、F、G、 H、I、J、K、L、M、N		【105】	【105】	【105】	【105】	91/14

※ 最左邊空格數 4 個，且 4 個空格均需使用

字母 個數	學生 最少 次數	學生				跳/走
		學生甲	學生乙	學生丙	學生丁	
A、B、C、D、E、F		23	23	23	23	
A、B、C、D、E、F、G		33	33	33	33	
A、B、C、D、E、F、G、H		【36】	【36】	【36】	【36】	28/8
A、B、C、D、E、F、G、 H、I、J、K、L、M、N		【105】	【105】	【105】	【105】	91/14

一、研究主題

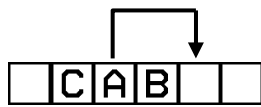
如下圖，有六個方格，其中四格按順序排上 A,B,C,D 四個字母，請依照下列移動規則，在原來的四個格子，將順序變成 D,C,B,A，試問最少要移動幾個步驟？



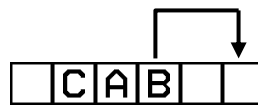
【移動規則】

- (一)每個步驟只能移動一個字母。
- (二)可以向左或向右走一格到相鄰的空格子裡。
- (三)可以向左或向右跳越緊鄰的一個字母後，移動到空的格子裡。
- (四)所有空格子至少被使用一次。

圖例：



正確跳法



錯誤跳法



錯誤跳法

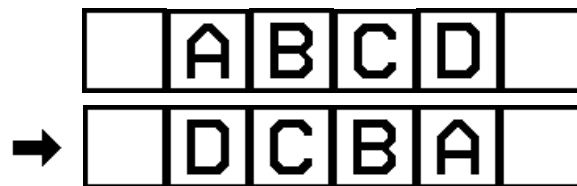
延伸子題(一)：

如下圖，有五個方格，其中四格按順序排上 A,B,C,D 四個字母，請依照下列移動規則，在原來的四個格子，將順序變成 D,C,B,A，試問最少要移動幾個步驟？【移動規則不變】



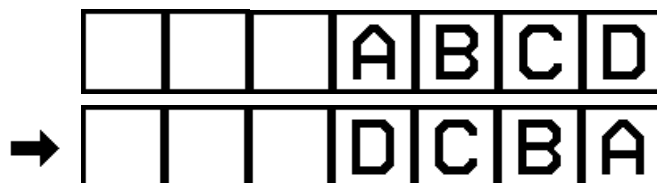
延伸子題(二)：

如下圖，有六個方格，其中四格按順序排上 A,B,C,D 四個字母，請依照下列移動規則，在原來的四個格子，將順序變成 D,C,B,A，試問最少要移動幾個步驟？【移動規則不變】



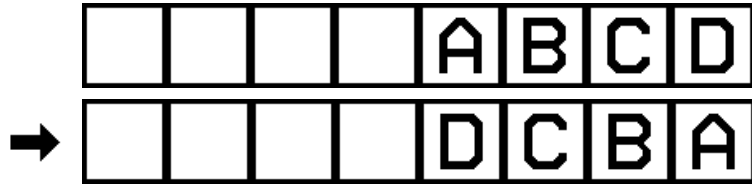
延伸子題(三)：

如下圖，有七個方格，其中四格按順序排上 A,B,C,D 四個字母，請依照下列移動規則，在原來的四個格子，將順序變成 D,C,B,A，試問最少要移動幾個步驟？【移動規則不變】



延伸子題(四)：

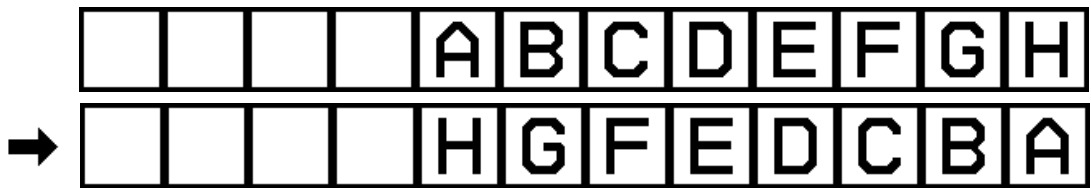
如下圖，有八個方格，其中四格按順序排上 A,B,C,D 四個字母，請依照下列移動規則，在原來的四個格子，將順序變成 D,C,B,A，試問最少要移動幾個步驟？【移動規則不變】



驗證題：

如下圖，有十二個方格，其中八格按順序排上 A,B,C,D,E,F,G,H 八個字母，請依照下列移動規則，在原來的八個格子，將順序變成 H,G,F,E,D,C,B,A，試問最少要移動幾個步驟？

【移動規則不變】



二、研究過程

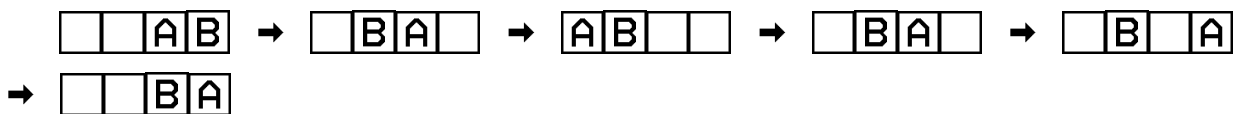
(一)、原題目

我們從兩個字母開始討論至十四個字母以獲得移動規律、遊戲技巧與最少移動次數，並定義出「跳島戰術」，以利討論空格數不同的情形。(僅以二~七個字母示例)

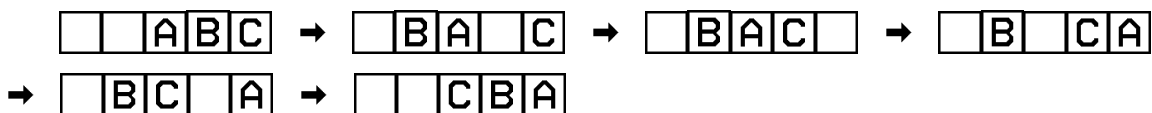
1. 討論兩個字母的情形。做法：(先移動 B，共移動三次)



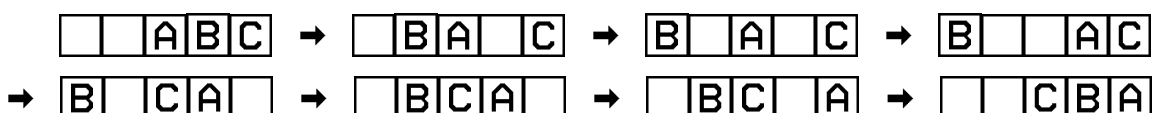
※ 當兩個空格皆須使用時。做法：(先移動 B，共移動五次)



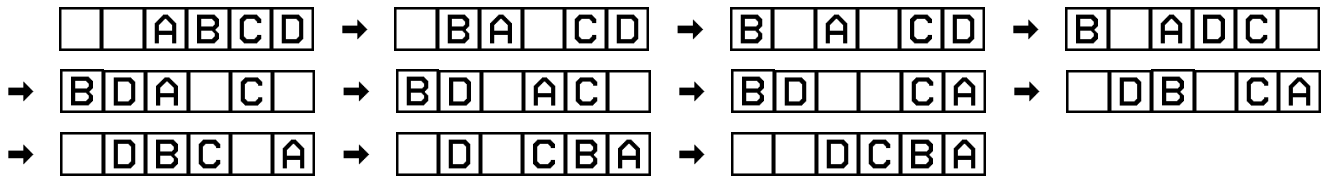
2. 討論三個字母的情形。做法：(先移動 B，共移動五次)



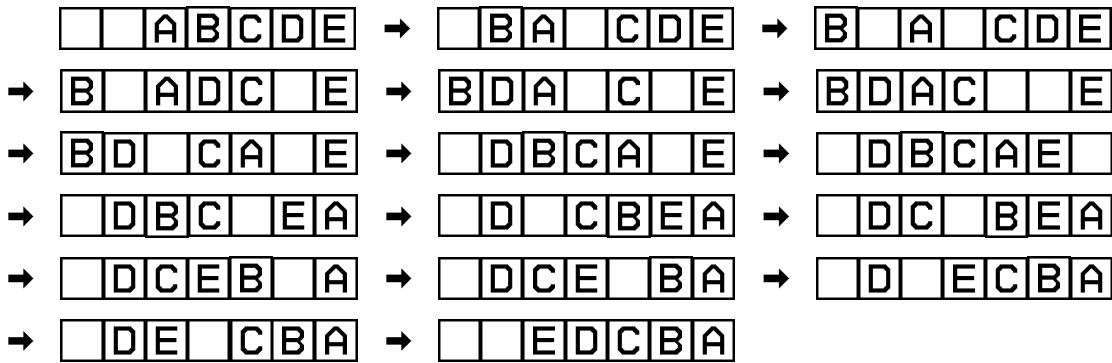
※ 當兩個空格皆須使用時。做法：(先移動 B，共移動七次)



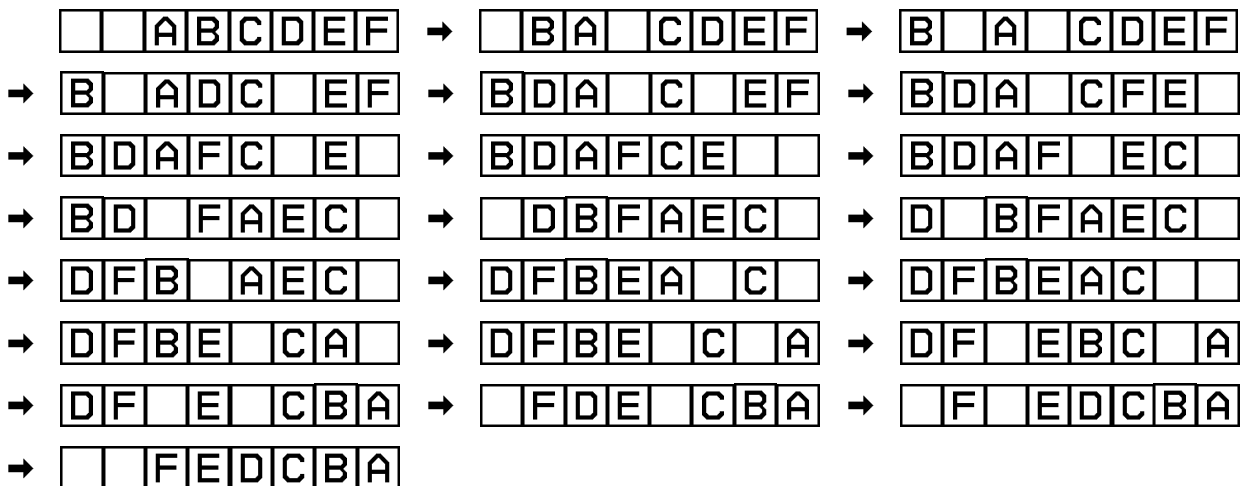
3. 討論四個字母數的情形，即原題意。做法：(先移動 B，共移動十次)



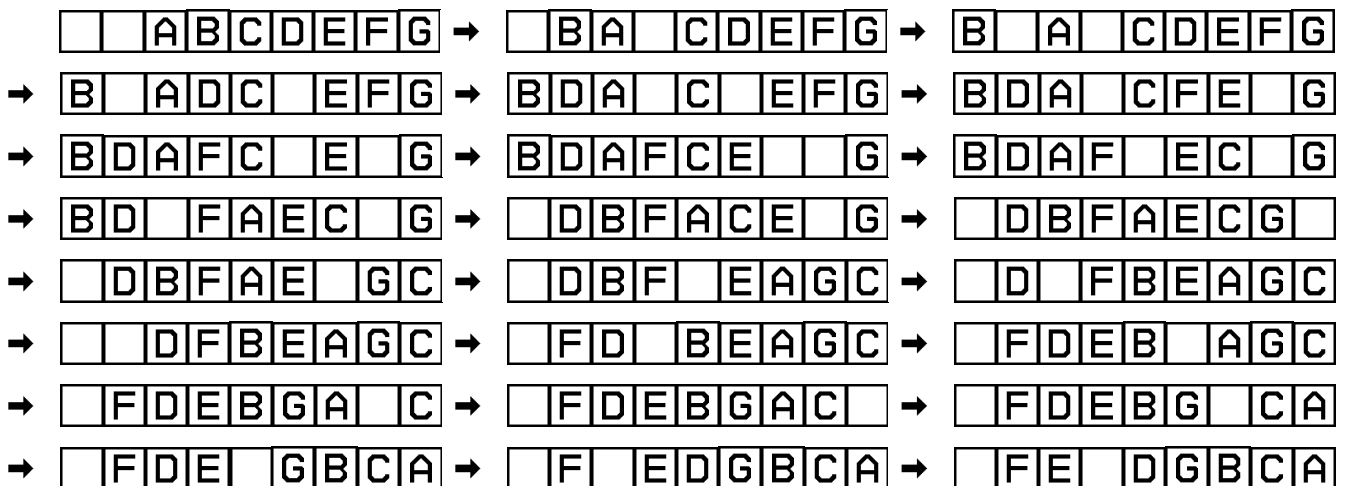
4. 討論五個字母數的情形。做法：(先移動 B，共移動十六次)



5. 討論六個字母數的情形。做法：(先移動 B，共移動二十一次)



6. 討論七個字母數的情形。做法：(先移動 B，共移動三十一一次)





→ 

	F	E	G	D		B	C	A
--	---	---	---	---	--	---	---	---

 → 

	F	E	G	D	C	B		A
--	---	---	---	---	---	---	--	---

 → 

	F	E	G	D	C		B	A
--	---	---	---	---	---	--	---	---

→ 

	F	E	G	D		C	B	A
--	---	---	---	---	--	---	---	---

 → 

	F	E	G		D	C	B	A
--	---	---	---	--	---	---	---	---

 → 

	F		G	E	D	C	B	A
--	---	--	---	---	---	---	---	---

→ 

	F	G		E	D	C	B	A
--	---	---	--	---	---	---	---	---

 → 

		G	F	E	D	C	B	A
--	--	---	---	---	---	---	---	---

※ 定義遊戲技巧「跳島戰術」，以獲得最少移動次數：

- 一、先移動 B。
- 二、跳的連續次數  $\geq$  空格數。
- 三、跳的總步驟數  $>$  走的總步驟數。  
(跳一格等於走兩格，盡量用跳的以減少總步驟數)
- 四、( 空格數 / 字母數 )  $\leq 1/2$  。
- 五、走的目的是在於產生連續跳或移至目標位置。

## (二)、延伸子題一

我們從兩個字母開始討論至十四個字母，在符合「跳島戰術」的定義下獲得最少移動次數。  
(僅以二~七個字母示例)

1. 討論兩個字母的情形。做法：(先移動 B，共移動三次)

	A	B
--	---	---

 → 

B	A	
---	---	--

 → 

B		A
---	--	---

 → 

	B	A
--	---	---

2. 討論三個字母的情形。做法：(先移動 B，共移動五次)

	A	B	C
--	---	---	---

 → 

B	A		C
---	---	--	---

 → 

B		A	C
---	--	---	---

 → 

B	C	A	
---	---	---	--

 → 

B	C		A
---	---	--	---

→ 

	C	B	A
--	---	---	---

3. 討論四個字母數的情形。做法：(先移動 B，共移動十次)

	A	B	C	D
--	---	---	---	---

 → 

B	A		C	D
---	---	--	---	---

 → 

B	A	D	C	
---	---	---	---	--

 → 

B	A	D		C
---	---	---	--	---

→ 

B		D	A	C
---	--	---	---	---

 → 

	B	D	A	C
--	---	---	---	---

 → 

D	B		A	C
---	---	--	---	---

 → 

D	B	C	A	
---	---	---	---	--

→ 

D	B	C		A
---	---	---	--	---

 → 

D		C	B	A
---	--	---	---	---

 → 

	D	C	B	A
--	---	---	---	---

4. 討論五個字母數的情形。做法：(先移動 B，共移動十六次)

	A	B	C	D	E
--	---	---	---	---	---

 → 

B	A		C	D	E
---	---	--	---	---	---

 → 

B	A	D	C		E
---	---	---	---	--	---

 → 

B	A	D	C	E	
---	---	---	---	---	--

→ 

B	A	D		E	C
---	---	---	--	---	---

 → 

B		D	A	E	C
---	--	---	---	---	---

 → 

	B	D	A	E	C
--	---	---	---	---	---

 → 

D	B		A	E	C
---	---	--	---	---	---

→ 

D	B	E	A		C
---	---	---	---	--	---

 → 

D	B	E	A	C	
---	---	---	---	---	--

 → 

D	B	E		C	A
---	---	---	--	---	---

 → 

D		E	B	C	A
---	--	---	---	---	---

→ 

D	E		B	C	A
---	---	--	---	---	---

 → 

D	E	C	B		A
---	---	---	---	--	---

 → 

D	E	C		B	A
---	---	---	--	---	---

 → 

D	E		C	B	A
---	---	--	---	---	---

→ 

	E	D	C	B	A
--	---	---	---	---	---



□ A B C D E → □ E D C B A

過程：跳跳走 跳跳走 跳跳走 跳跳走 跳跳走 跳跳走

□ A B C D E F → □ F E D C B A

過程：跳跳走 跳跳走 跳跳走 跳跳走 跳跳走 跳跳走 跳跳走

□ A B C D E F G → □ G F E D C B A

過程：跳跳走 跳跳走 跳跳走 跳跳走 跳跳走 跳跳走 跳跳走 跳跳走

□ A B C D E F G H → □ H G F E D C B A

過程：跳跳走 跳跳走 跳跳走 跳跳走 跳跳走 跳跳走 跳跳走 跳跳走

□ A B C D E F G H I → □ I H G F E D C B A

過程：跳跳走 跳跳走 跳跳走 跳跳走 跳跳走 跳跳走 跳跳走 跳跳走 跳跳走

□ A B C D E F G H I J → □ J I H G F E D C B A

過程：跳跳走 跳跳走 跳跳走 跳跳走 跳跳走 跳跳走 跳跳走 跳跳走 跳跳走 跳跳走

□ A B C D E F G H I J K → □ K J I H G F E D C B A

過程：跳跳走 跳跳走 跳跳走 跳跳走 跳跳走 跳跳走 跳跳走 跳跳走 跳跳走 跳跳走 跳跳走

□ A B C D E F G H I J K L → □ L K J I H G F E D C B A

過程：跳跳走 跳跳走 跳跳走 跳跳走 跳跳走 跳跳走 跳跳走 跳跳走 跳跳走 跳跳走 跳跳走 跳跳走

**A B C D E F G H I J K L M** → **M L K J I H G F E D C B A**

過程：跳跳跳跳跳跳走 跳跳跳跳跳跳走 跳跳跳跳跳跳走  
跳跳跳跳跳跳走 跳跳跳跳跳跳走 跳跳跳跳跳跳走  
跳跳跳跳跳跳走 跳跳跳跳跳跳走 跳跳跳跳跳跳走  
跳跳跳跳跳跳走 跳跳跳跳跳跳走 跳跳跳跳跳跳走  
跳跳跳跳走 走走走走走走走 跳

**A B C D E F G H I J K L M N** → **N M L K J I H G F E D C B A**

過程：跳跳跳跳跳跳走 跳跳跳跳跳跳走  
跳跳跳跳跳跳走 跳跳跳跳跳跳走  
跳跳跳跳跳跳走 跳跳跳跳跳跳走  
跳跳跳跳跳跳走 跳跳跳跳跳跳走  
跳跳跳跳跳跳走 跳跳跳跳跳跳走  
跳跳跳跳跳跳走 跳跳跳跳跳跳走

- (2) 發現奇數個字母與偶數個字母兩者獨立的規律性，如上所畫底線。
- (3) 公式推導：(假設字母數為  $N$  個，最少移動次數為  $B_N$ )

奇數：

$$B_N = \left[ \left( \frac{N-1}{2} + 1 \right) (N-1) + \frac{N-3}{2} + (N-3) + 1 \right] = \frac{N^2 + 3N - 8}{2}, \text{ 當 } N \text{ 為奇數 } (N > 1)$$

偶數：

$$B_N = \left( \frac{N}{2} + 1 \right) \times \frac{N}{2} + \left( \frac{N-2}{2} + 1 \right) \times \frac{N}{2} = \frac{N(N+1)}{2}, \text{ 當 } N \text{ 為偶數}$$

**(4) 利用數學規律性證明**

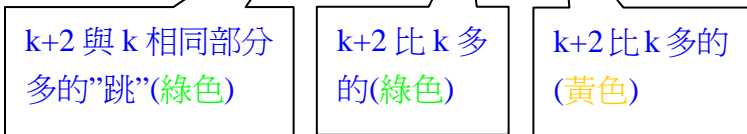
奇數：

當  $N=3$ ， $B_3=5$ ，等式成立

假設  $N=k$  時， $B_k = \frac{k^2 + 3k - 8}{2}$  等式成立，

$$\text{則 } B_{k+2} = B_k + (k-1) + 2 \left( \frac{k+1}{2} + 1 \right) + 3 = \frac{k^2 + 3k - 8}{2} + (k-1) + 2 \left( \frac{k+1}{2} + 1 \right) + 3 = \frac{(k+2)^2 + 3(k+2) - 8}{2}$$

等式成立。



偶數：

當  $N=2$ ， $B_2=3$ ，等式成立

假設  $N=k$  時， $B_k = \frac{k(k+1)}{2}$  等式成立，

$$\text{則 } B_{k+2} = B_k + \left(\frac{k}{2} + \frac{k}{2}\right) + \left(\frac{k+2}{2} + 1\right) + \left(\frac{k}{2} + 1\right) = \frac{k(k+1)}{2} + \left(\frac{k}{2} + \frac{k}{2}\right) + \left(\frac{k+2}{2} + 1\right) + \left(\frac{k}{2} + 1\right) = \frac{(k+2)(k+3)}{2}$$

等式成立。

k+2 與 k 相同部分多的“跳”(藍色+紅色)

k+2 比 k 多的(紅色)

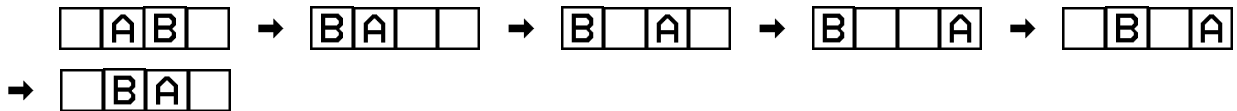
k+2 比 k 多的(藍色)

※ 發現證明後，似乎可以確定公式的正確性。

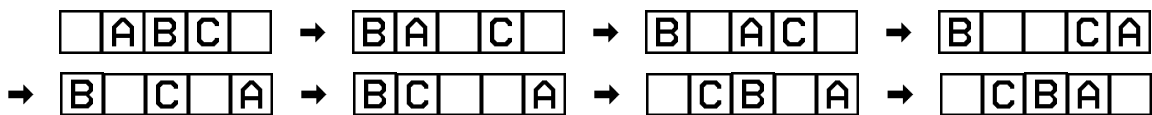
### (三)、延伸子題二

我們從兩個字母開始討論至十四個字母，在符合「跳島戰術」的定義下獲得最少移動次數。(僅以二~七個字母示例)

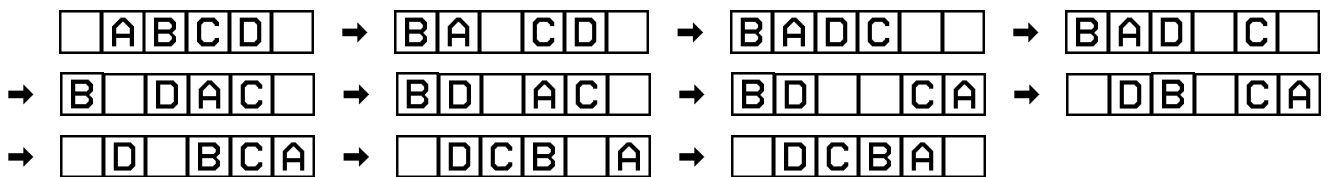
1. 討論兩個字母的情形。做法：(先移動 B，共移動五次)



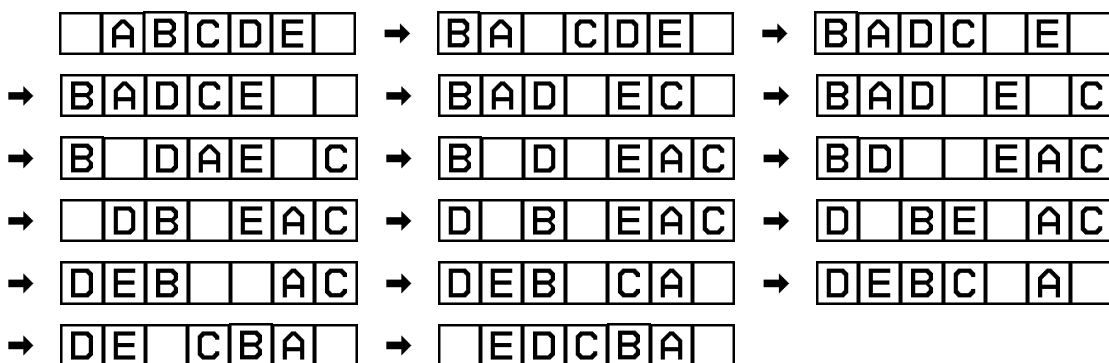
2. 討論三個字母的情形。做法：(先移動 B，共移動七次)



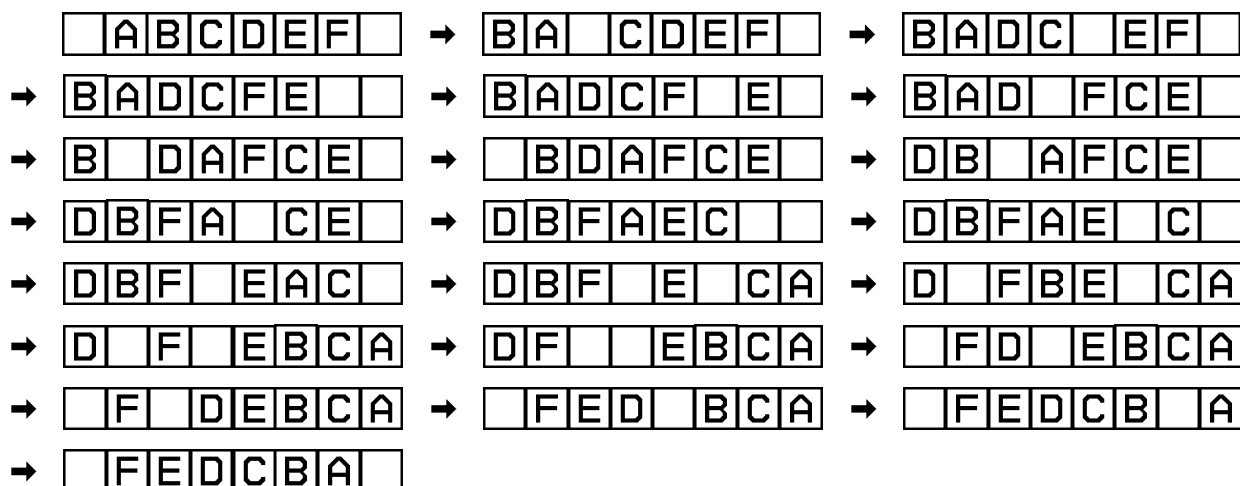
3. 討論四個字母數的情形。做法：(先移動 B，共移動十次)



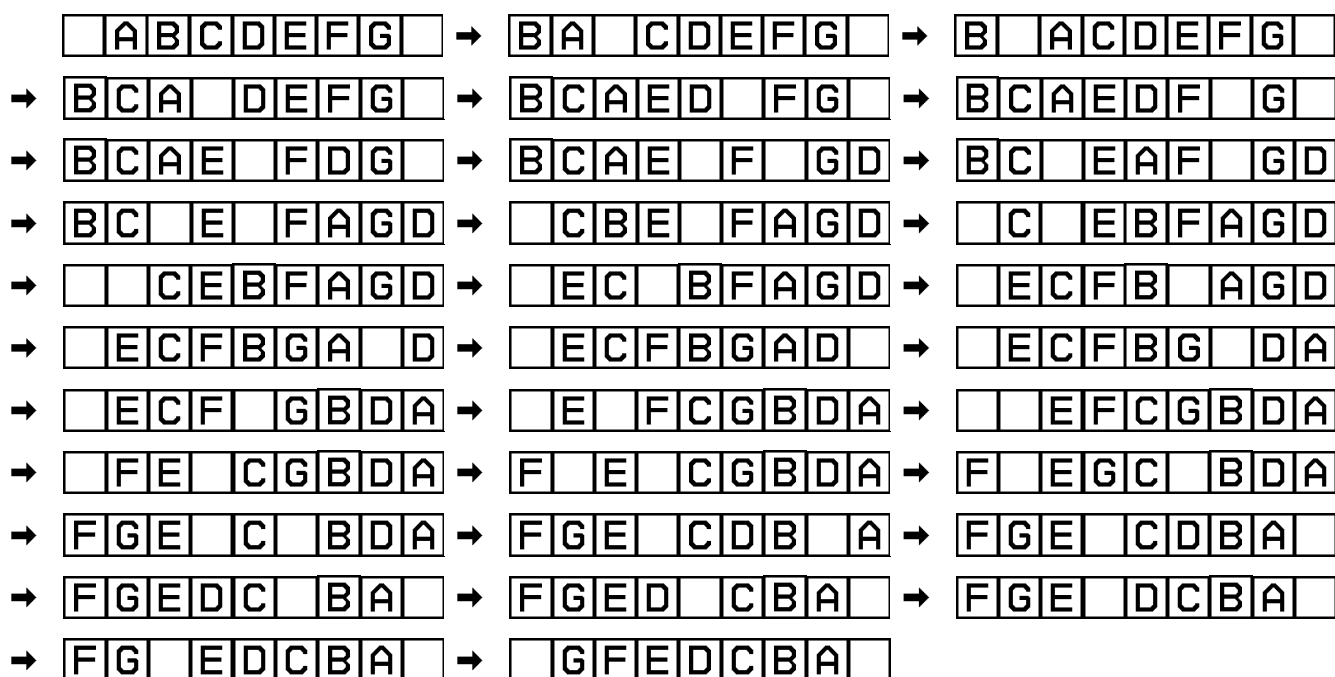
4. 討論五個字母數的情形。做法：(先移動 B，共移動十六次)



5. 討論六個字母數的情形。做法：(先移動 B，共移動二十一次)



6. 討論七個字母數的情形。做法：(先移動 B，共移動三十一一次)

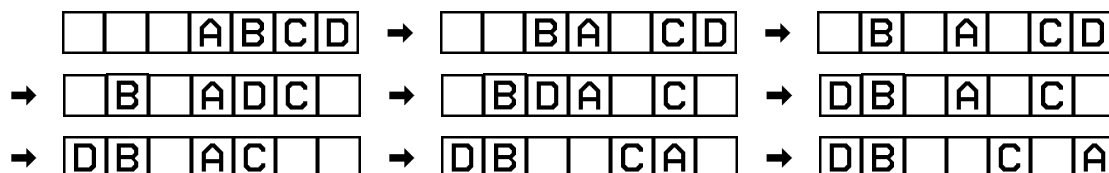


(四)、延伸子題三

因發現空兩格時，字母數二個與三個已無法做出最少移動次數，所以我們從四個字母開始討論至十四個字母，在符合「跳島戰術」的定義下獲得最少移動次數。

(僅以四~七個字母示例)

1. 討論四個字母數的情形。做法：(先移動 B，共移動十二次)



→ 

	B	D		C		A
--	---	---	--	---	--	---

 → 

		D	B	C		A
--	--	---	---	---	--	---

 → 

			D		C	B	A
--	--	--	---	--	---	---	---

  
 → 

			D	C	B	A
--	--	--	---	---	---	---

2. 討論五個字母數的情形。做法：(先移動 B，共移動十八次)

		A	B	C	D	E
--	--	---	---	---	---	---

 → 

		B	A		C	D	E
--	--	---	---	--	---	---	---

 → 

	B		A			C	D	E
--	---	--	---	--	--	---	---	---

  
 → 

	B		A	D	C		E
--	---	--	---	---	---	--	---

 → 

	B	D	A		C		E
--	---	---	---	--	---	--	---

 → 

D	B		A		C		E
---	---	--	---	--	---	--	---

  
 → 

D	B			C	A		E
---	---	--	--	---	---	--	---

 → 

	B	D		C	A		E
--	---	---	--	---	---	--	---

  
 → 

	B	D		C	A	E	
--	---	---	--	---	---	---	--

 → 

	B	D		C		E	A
--	---	---	--	---	--	---	---

 → 

		D	B	C		E	A
--	--	---	---	---	--	---	---

  
 → 

		D		C	B	E	A
--	--	---	--	---	---	---	---

 → 

		D	C		B	E	A
--	--	---	---	--	---	---	---

 → 

		D	C	E	B		A
--	--	---	---	---	---	--	---

  
 → 

		D	C	E		B	A
--	--	---	---	---	--	---	---

 → 

		D		E	C	B	A
--	--	---	--	---	---	---	---

 → 

		D	E		C	B	A
--	--	---	---	--	---	---	---

  
 → 

			E	D	C	B	A
--	--	--	---	---	---	---	---

3. 討論六個字母數的情形。做法：(先移動 B，共移動二十一次)

		A	B	C	D	E	F
--	--	---	---	---	---	---	---

 → 

		B	A		C	D	E	F
--	--	---	---	--	---	---	---	---

 → 

	B		A			C	D	E	F
--	---	--	---	--	--	---	---	---	---

  
 → 

	B		A	D	C		E	F
--	---	--	---	---	---	--	---	---

 → 

	B	D	A		C		E	F
--	---	---	---	--	---	--	---	---

 → 

D	B		A		C		E	F
---	---	--	---	--	---	--	---	---

  
 → 

D	B		A		C	F	E	
---	---	--	---	--	---	---	---	--

 → 

D	B		A	F	C		E	
---	---	--	---	---	---	--	---	--

 → 

D	B	F	A		C		E	
---	---	---	---	--	---	--	---	--

  
 → 

D	B	F	A			C	E	
---	---	---	---	--	--	---	---	--

 → 

D	B	F	A		E	C		
---	---	---	---	--	---	---	--	--

 → 

D	B	F	A	E		C		
---	---	---	---	---	--	---	--	--

  
 → 

D		F	B	E		C		A
---	--	---	---	---	--	---	--	---

 → 

D		F		E	B	C		A
---	--	---	--	---	---	---	--	---

 → 

D		F		E		C	B	A
---	--	---	--	---	--	---	---	---

  
 → 

	D	F		E		C	B	A
--	---	---	--	---	--	---	---	---

 → 

		F	D	E		C	B	A
--	--	---	---	---	--	---	---	---

 → 

		F		E	D	C	B	A
--	--	---	--	---	---	---	---	---

  
 → 

			F	E	D	C	B	A
--	--	--	---	---	---	---	---	---

4. 討論七個字母數的情形。做法：(先移動 B，共移動三十一一次)

		A	B	C	D	E	F	G
--	--	---	---	---	---	---	---	---

 → 

		B	A		C	D	E	F	G
--	--	---	---	--	---	---	---	---	---

  
 → 

		B		A	C	D	E	F	G
--	--	---	--	---	---	---	---	---	---

 → 

		B	C	A		D	E	F	G
--	--	---	---	---	--	---	---	---	---

  
 → 

	C	B		A		D	E	F	G
--	---	---	--	---	--	---	---	---	---

 → 

	C	B		A		D	E	F	G
--	---	---	--	---	--	---	---	---	---

  
 → 

C		B		A	E	D		F	G
---	--	---	--	---	---	---	--	---	---

 → 

C		B	E	A		D		F	G
---	--	---	---	---	--	---	--	---	---

  
 → 

C	E	B		A		D		F	G
---	---	---	--	---	--	---	--	---	---

 → 

C	E	B		A		D	G	F	
---	---	---	--	---	--	---	---	---	--

  
 → 

C	E	B		A	G	D		F	
---	---	---	--	---	---	---	--	---	--

 → 

C	E	B	G	A		D		F	
---	---	---	---	---	--	---	--	---	--

  
 → 

C	E	B	G		A	D		F	
---	---	---	---	--	---	---	--	---	--

 → 

C	E	B	G			D	A	F	
---	---	---	---	--	--	---	---	---	--

  
 → 

C	E	B	G			D		F	A
---	---	---	---	--	--	---	--	---	---

 → 

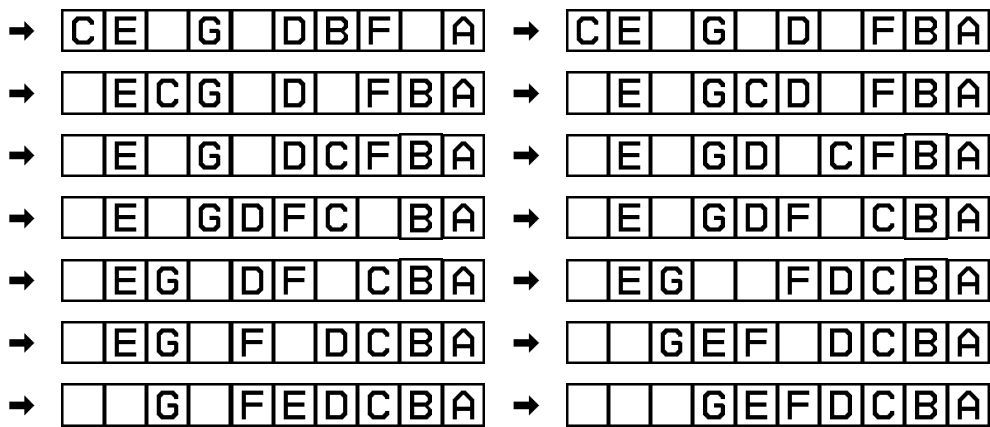
C	E	B	G		D			F	A
---	---	---	---	--	---	--	--	---	---

  
 → 

C	E	B	G		D		F		A
---	---	---	---	--	---	--	---	--	---

 → 

C	E		G	B	D		F		A
---	---	--	---	---	---	--	---	--	---

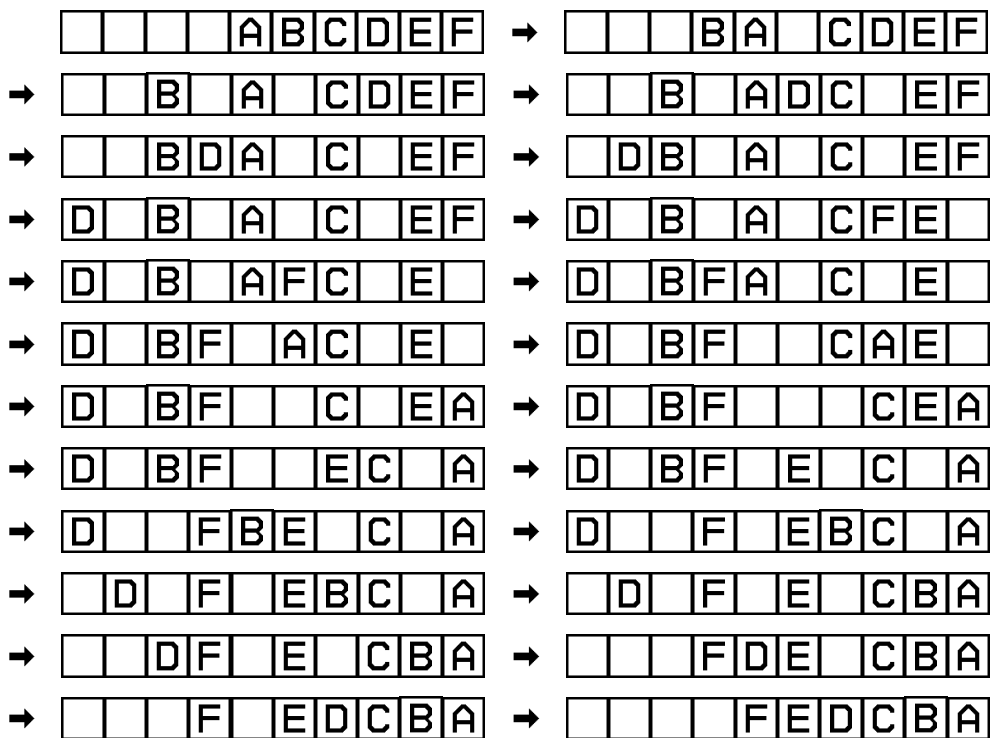


(五)、延伸子題四

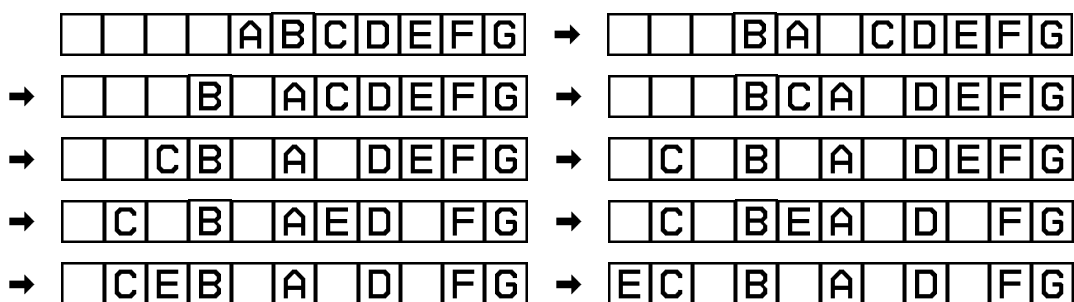
因發現空三格時，字母數四個與五個已無法做出最少移動次數，所以我們討論六個至十四個字母，在符合「跳島戰術」的定義下獲得最少移動次數。

(僅以六、七個字母示例)

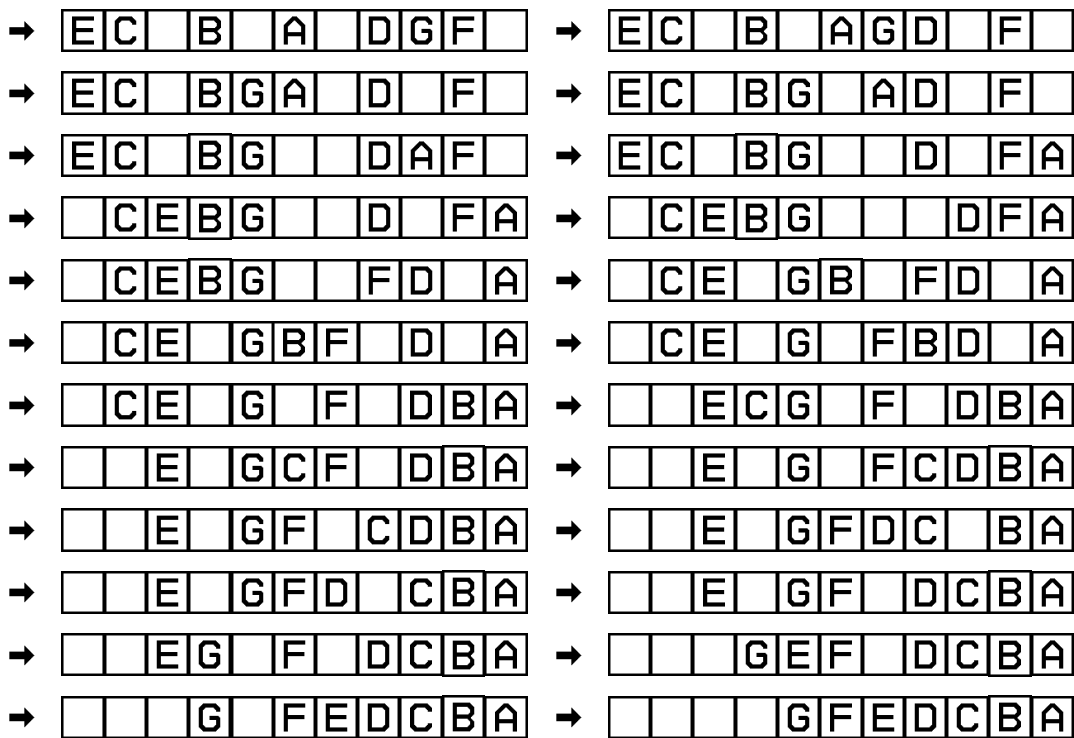
1. 討論六個字母的情形。做法：(先移動 B，共移動二十三次)



2. 討論七個字母的情形。做法：(先移動 B，共移動三十三次)



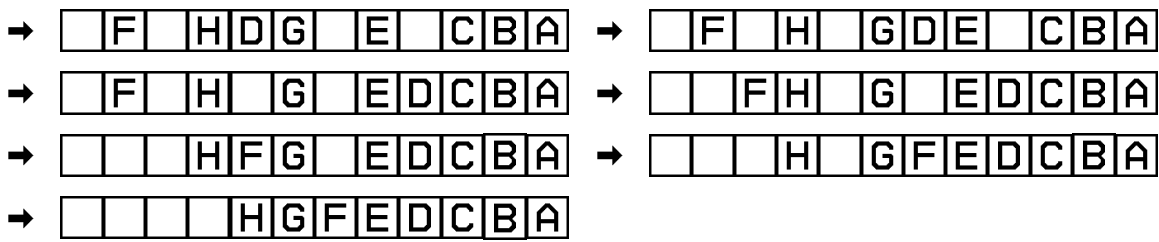




(六)、驗證題(討論八至十四個字母，僅以八個字母示例)

討論八個字母的情形。做法：(先移動 B，共移動三十六次)





※ 符合公式中， $N=8$  時， $B_8=36$ ，為最少移動次數。

(七)、反證法

目的：在延伸子題一所推導出的公式，利用其數學規律性證明，並發現其他的子題最少移動次數亦與公式結果相符，但老師卻質疑我們在公式證明過程中，只有做到 14 個字母數可能數據不足。因此，老師建議我們針對「跳島戰術」儘可能舉出所有反例，利用多元完整的反例討論，嘗試將各種違反「跳島戰術」的情形列出，當無法發現任何更少的移動步驟數，則可證明「跳島戰術」與本題公式的正確性。

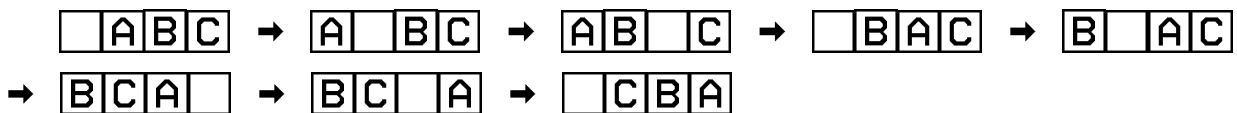
1. 「跳島戰術」定義一：先移動 B。

※以延伸子題一為例，討論二至十四個字母數，在違反此定義下，奇數個字母數無法獲得最少移動次數。(僅以二~七個字母示例)

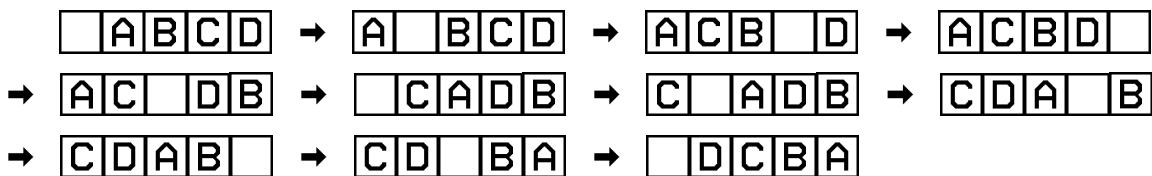
(1) 討論二個字母數的情形。做法：(先移動 A，共移動三次)



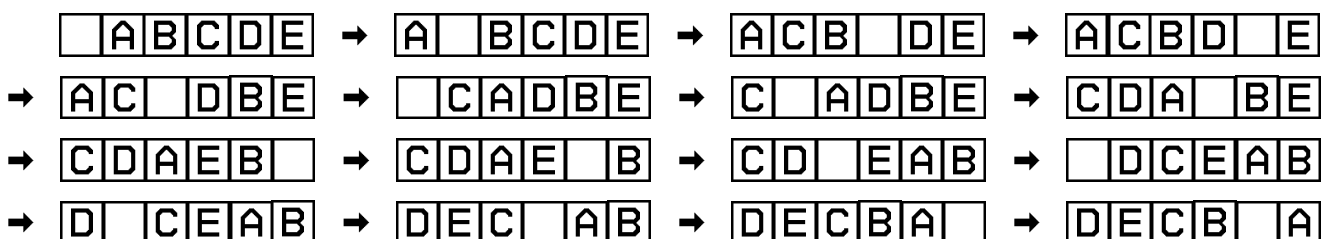
(2) 討論三個字母數的情形。做法：(先移動 A，共移動七次，無法獲得最少移動五次)



(3) 討論四個字母數的情形。做法：(先移動 A，共移動十次)



(4) 討論五個字母數的情形。做法：(先移動 A，共移動十八次，無法獲得最少移動十六次)



→ 

D	E	C		B	A
---	---	---	--	---	---

 → 

D	E		C	B	A
---	---	--	---	---	---

 → 

	E	D	C	B	A
--	---	---	---	---	---

(5) 討論六個字母數的情形。做法：(先移動 A，共移動二十一次)

	A	B	C	D	E	F
--	---	---	---	---	---	---

 → 

A		B	C	D	E	F
---	--	---	---	---	---	---

 → 

A	C	B		D	E	F
---	---	---	--	---	---	---

  
→ 

A	C	B	E	D		F
---	---	---	---	---	--	---

 → 

A	C	B	E	D	F	
---	---	---	---	---	---	--

 → 

A	C	B	E		F	D
---	---	---	---	--	---	---

  
→ 

A	C		E	B	F	D
---	---	--	---	---	---	---

 → 

	C	A	E	B	F	D
--	---	---	---	---	---	---

 → 

C		A	E	B	F	D
---	--	---	---	---	---	---

  
→ 

C	E	A		B	F	D
---	---	---	--	---	---	---

 → 

C	E	A	F	B		D
---	---	---	---	---	--	---

 → 

C	E	A	F	B	D	
---	---	---	---	---	---	--

  
→ 

C	E	A	F		D	B
---	---	---	---	--	---	---

 → 

C	E		F	A	D	B
---	---	--	---	---	---	---

 → 

	E	C	F	A	D	B
--	---	---	---	---	---	---

  
→ 

E		C	F	A	D	B
---	--	---	---	---	---	---

 → 

E	F	C		A	D	B
---	---	---	--	---	---	---

 → 

E	F	C	D	A		B
---	---	---	---	---	--	---

  
→ 

E	F	C	D	A	B	
---	---	---	---	---	---	--

 → 

E	F	C	D		B	A
---	---	---	---	--	---	---

 → 

E	F		D	C	B	A
---	---	--	---	---	---	---

  
→ 

	F	E	D	C	B	A
--	---	---	---	---	---	---

(6) 討論七個字母數的情形。

做法：(先移動 A，共移動三十三次，無法獲得最少移動三十一次)

	A	B	C	D	E	F	G
--	---	---	---	---	---	---	---

 → 

A		B	C	D	E	F	G
---	--	---	---	---	---	---	---

 → 

A	C	B		D	E	F	G
---	---	---	--	---	---	---	---

  
→ 

A	C	B	E	D		F	G
---	---	---	---	---	--	---	---

 → 

A	C	B	E	D	F		G
---	---	---	---	---	---	--	---

 → 

A	C	B	E		F	D	G
---	---	---	---	--	---	---	---

  
→ 

A	C		E	B	F	D	G
---	---	--	---	---	---	---	---

 → 

	C	A	E	B	F	D	G
--	---	---	---	---	---	---	---

 → 

C		A	E	B	F	D	G
---	--	---	---	---	---	---	---

  
→ 

C	E	A		B	F	D	G
---	---	---	--	---	---	---	---

 → 

C	E	A	F	B		D	G
---	---	---	---	---	--	---	---

 → 

C	E	A	F	B	G	D	
---	---	---	---	---	---	---	--

  
→ 

C	E	A	F	B	G		D
---	---	---	---	---	---	--	---

 → 

C	E	A	F		G	B	D
---	---	---	---	--	---	---	---

 → 

C	E		F	A	G	B	D
---	---	--	---	---	---	---	---

  
→ 

	E	C	F	A	G	B	D
--	---	---	---	---	---	---	---

 → 

E		C	F	A	G	B	D
---	--	---	---	---	---	---	---

 → 

E	F	C		A	G	B	D
---	---	---	--	---	---	---	---

  
→ 

E	F	C	G	A		B	D
---	---	---	---	---	--	---	---

 → 

E	F	C	G	A	D	B	
---	---	---	---	---	---	---	--

 → 

E	F	C	G	A	D		B
---	---	---	---	---	---	--	---

  
→ 

E	F	C	G		D	A	B
---	---	---	---	--	---	---	---

 → 

E	F		G	C	D	A	B
---	---	--	---	---	---	---	---

 → 

	F	E	G	C	D	A	B
--	---	---	---	---	---	---	---

  
→ 

F		E	G	C	D	A	B
---	--	---	---	---	---	---	---

 → 

F	G	E		C	D	A	B
---	---	---	--	---	---	---	---

 → 

F	G	E	D	C		A	B
---	---	---	---	---	--	---	---

  
→ 

F	G	E	D	C	B		A
---	---	---	---	---	---	--	---

 → 

F	G	E	D	C	B	A	
---	---	---	---	---	---	---	--

 → 

F	G	E	D	C		B	A
---	---	---	---	---	--	---	---

  
→ 

F	G	E	D		C	B	A
---	---	---	---	--	---	---	---

 → 

F	G	E		D	C	B	A
---	---	---	--	---	---	---	---

 → 

F	G		E	D	C	B	A
---	---	--	---	---	---	---	---

  
→ 

	G	F	E	D	C	B	A
--	---	---	---	---	---	---	---

※ 為確保總移動次數為最少移動次數，故應先移動 B。(偶數字母雖可以符合最少移動次數，但在違反其他定義時，亦無法得到最少移動次數。)

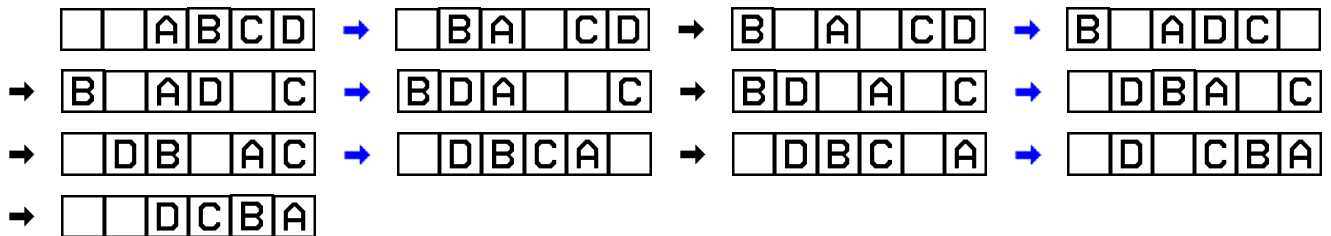
2. 「跳島戰術」定義二：跳的連續次數 ≥ 空格數。

說明：以延伸子題一為例，在違反此定義下，無法獲得最少移動次數。(因空格數為 "1" 時，不能有跳的步驟，只有走的步驟時已無法解題，故無解。)

※以原題目(空格數為 "2")為例,在違反此定義下,空格數為 "2" 最多只能連續跳一次(下述步驟中,藍色箭頭為跳的步驟),無法獲得最少移動次數。(僅以四~七個字母示例)

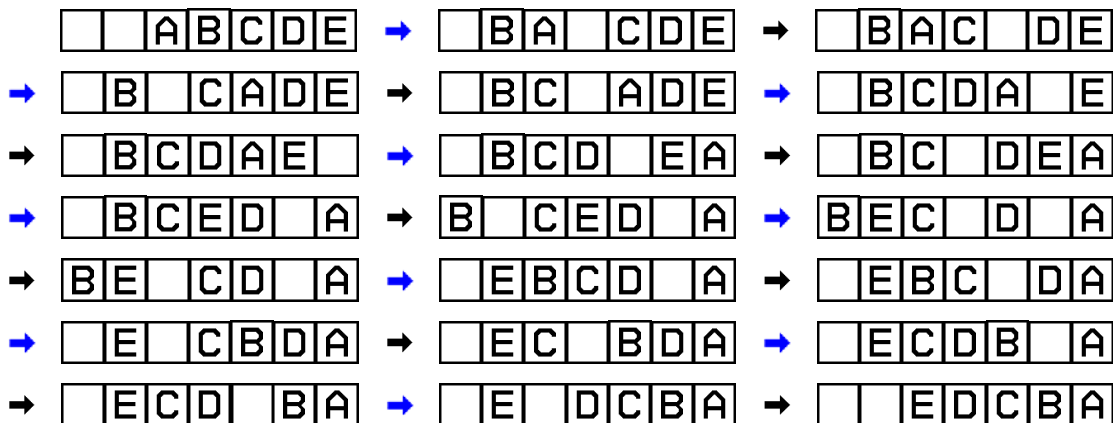
(1) 討論四個字母數的情形。

做法：(先移動 B，共移動十二次，無法獲得最少移動十次)



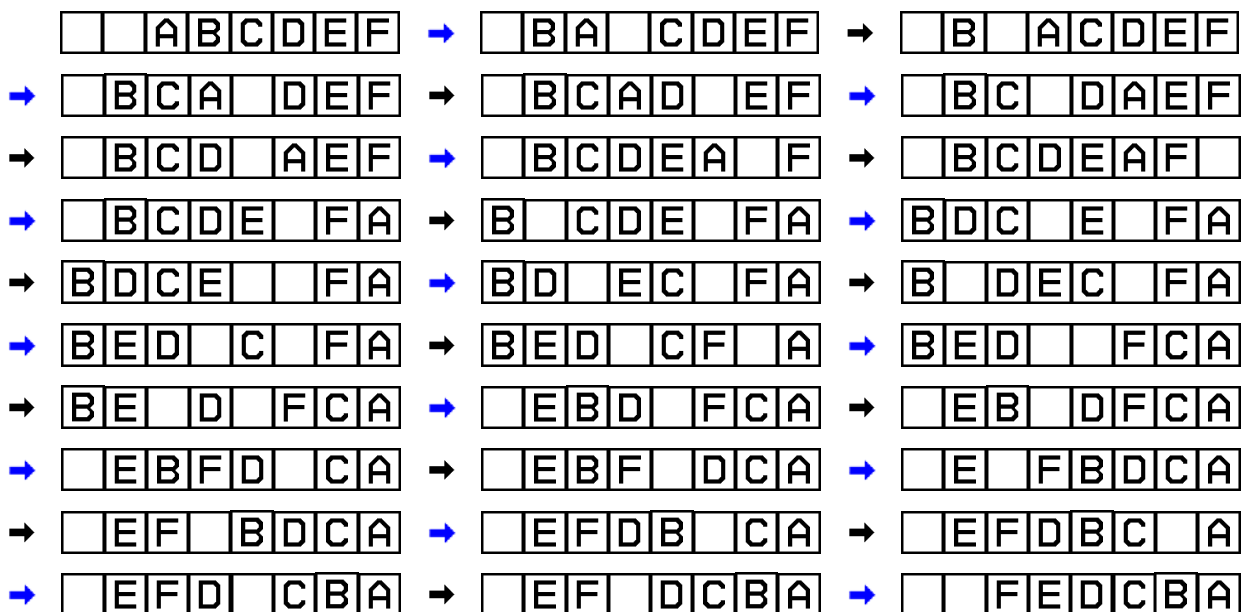
(2) 討論五個字母數的情形。

做法：(先移動 B，共移動二十次，無法獲得最少移動十六次)



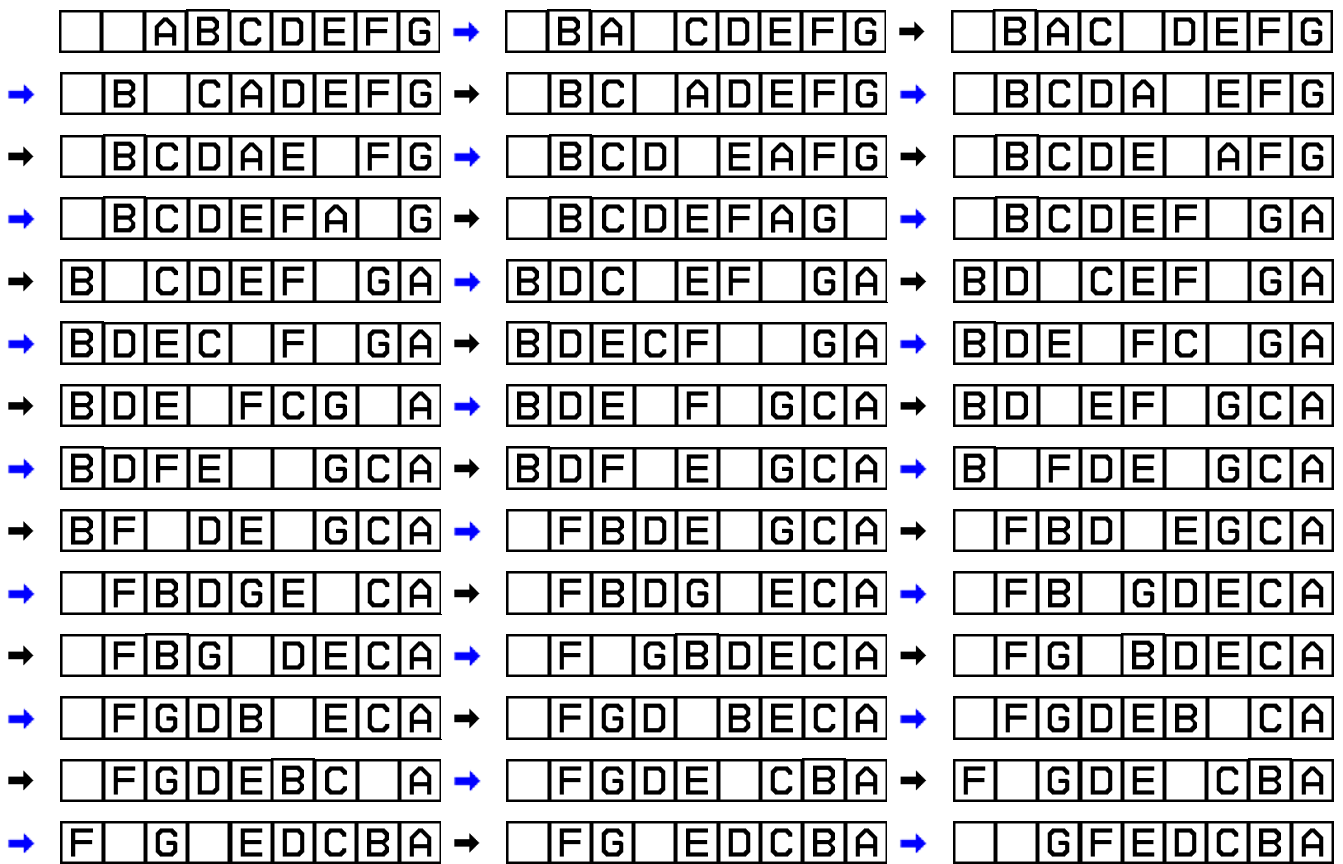
(3) 討論六個字母數的情形。

做法：(先移動 B，共移動二十九次，無法獲得最少移動二十一次)



(4) 討論七個字母數的情形。

做法：(先移動 B，共移動四十一一次，無法獲得最少移動三十一一次)



※ 為確保總移動次數為最少移動次數，故跳的連續次數應大於或等於空格數。

3. 「跳島戰術」定義三：跳的總步驟數 > 走的總步驟數。

(跳一格等於走兩格，盡量用跳的以減少總步驟數)

以延伸子題一為例，在違反此定義下，無法獲得最少移動次數。(藍色箭頭為跳的步驟)  
(僅以三~七個字母示例)

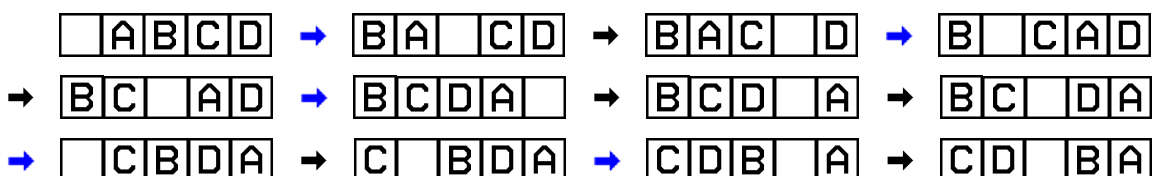
(1) 討論三個字母數的情形。

做法：(先移動 B，跳三次、走四次，共移動七次，無法獲得最少移動五次)



(2) 討論四個字母數的情形。

做法：(先移動 B，跳六次、走六次，共移動十二次，無法獲得最少移動十次)



→ 

	D	C	B	A
--	---	---	---	---

(3) 討論五個字母數的情形。

做法：(先移動 B，跳十次、走十次，共移動二十次，無法獲得最少移動十六次)

	A	B	C	D	E
--	---	---	---	---	---

 → 

B	A		C	D	E
---	---	--	---	---	---

 → 

B	A	C		D	E
---	---	---	--	---	---

 → 

B	A	C	E	D	
---	---	---	---	---	--

→ 

B	A	C	E	D	
---	---	---	---	---	--

 → 

B	A	E	C	D	
---	---	---	---	---	--

 → 

B	E	A	E	C	D
---	---	---	---	---	---

 → 

B	E	A	C	D	
---	---	---	---	---	--

→ 

B	E	A	C	D	
---	---	---	---	---	--

 → 

B	E	C	A	D	
---	---	---	---	---	--

 → 

B	E	C	D	A	
---	---	---	---	---	--

→ 

B	E	C	D	A	
---	---	---	---	---	--

 → 

B	E	D	C	A	
---	---	---	---	---	--

 → 

	E	B	D	C	A
--	---	---	---	---	---

 → 

E	B	D	C	A	
---	---	---	---	---	--

→ 

E	D	B	C	A	
---	---	---	---	---	--

 → 

E	D	B	C	A	
---	---	---	---	---	--

 → 

E	D	C	B	A	
---	---	---	---	---	--

 → 

E	D	C	B	A	
---	---	---	---	---	--

(4) 討論六個字母數的情形。

做法：(先移動 B，跳十五次、走十六次，共移動三十一一次，無法獲得最少移動二十一一次)

	A	B	C	D	E	F
--	---	---	---	---	---	---

 → 

B	A		C	D	E	F
---	---	--	---	---	---	---

 → 

B	A	C		D	E	F
---	---	---	--	---	---	---

→ 

B	A	C	D		E	F
---	---	---	---	--	---	---

 → 

B	A	C	D	F	E	
---	---	---	---	---	---	--

 → 

B	A	C	D	F	E	
---	---	---	---	---	---	--

→ 

B	A	C	F	D	E	
---	---	---	---	---	---	--

 → 

B	A	C	F	D	E	
---	---	---	---	---	---	--

 → 

B	A	F	C	D	E	
---	---	---	---	---	---	--

→ 

B	A	F	C	D	E	
---	---	---	---	---	---	--

 → 

B	F	A	C	D	E	
---	---	---	---	---	---	--

 → 

B	F	A	C	D	E	
---	---	---	---	---	---	--

→ 

B	F	A	C	D	E	
---	---	---	---	---	---	--

 → 

B	F	C	A	D	E	
---	---	---	---	---	---	--

 → 

B	F	C	A	D	E	
---	---	---	---	---	---	--

→ 

B	F	C	D	A	E	
---	---	---	---	---	---	--

 → 

B	F	C	D	A	E	
---	---	---	---	---	---	--

 → 

B	F	C	D	A	E	
---	---	---	---	---	---	--

→ 

B	F	E	C	D	A	
---	---	---	---	---	---	--

 → 

B	F	E	C	D	A	
---	---	---	---	---	---	--

 → 

B	F	E	C	D	A	
---	---	---	---	---	---	--

→ 

B	F	E	C	D	A	
---	---	---	---	---	---	--

 → 

B	F	E	C	D	A	
---	---	---	---	---	---	--

 → 

B	F	E	C	D	A	
---	---	---	---	---	---	--

→ 

B	F	E	C	D	A	
---	---	---	---	---	---	--

 → 

B	F	E	C	D	A	
---	---	---	---	---	---	--

 → 

B	F	E	C	D	A	
---	---	---	---	---	---	--

→ 

B	F	E	C	D	A	
---	---	---	---	---	---	--

 → 

B	F	E	C	D	A	
---	---	---	---	---	---	--

 → 

B	F	E	C	D	A	
---	---	---	---	---	---	--

→ 

B	F	E	C	D	A	
---	---	---	---	---	---	--

 → 

B	F	E	C	D	A	
---	---	---	---	---	---	--

 → 

B	F	E	C	D	A	
---	---	---	---	---	---	--

→ 

B	F	E	C	D	A	
---	---	---	---	---	---	--

 → 

B	F	E	C	D	A	
---	---	---	---	---	---	--

 → 

B	F	E	C	D	A	
---	---	---	---	---	---	--

→ 

B	F	E	C	D	A	
---	---	---	---	---	---	--

 → 

B	F	E	C	D	A	
---	---	---	---	---	---	--

 → 

B	F	E	C	D	A	
---	---	---	---	---	---	--

→ 

B	F	E	C	D	A	
---	---	---	---	---	---	--

 → 

B	F	E	C	D	A	
---	---	---	---	---	---	--

 → 

B	F	E	C	D	A	
---	---	---	---	---	---	--

→ 

B	F	E	C	D	A	
---	---	---	---	---	---	--

 → 

B	F	E	C	D	A	
---	---	---	---	---	---	--

 → 

B	F	E	C	D	A	
---	---	---	---	---	---	--

→ 

B	F	E	C	D	A	
---	---	---	---	---	---	--

 → 

B	F	E	C	D	A	
---	---	---	---	---	---	--

 → 

B	F	E	C	D	A	
---	---	---	---	---	---	--

→ 

B	F	E	C	D	A	
---	---	---	---	---	---	--

 → 

B	F	E	C	D	A	
---	---	---	---	---	---	--

 → 

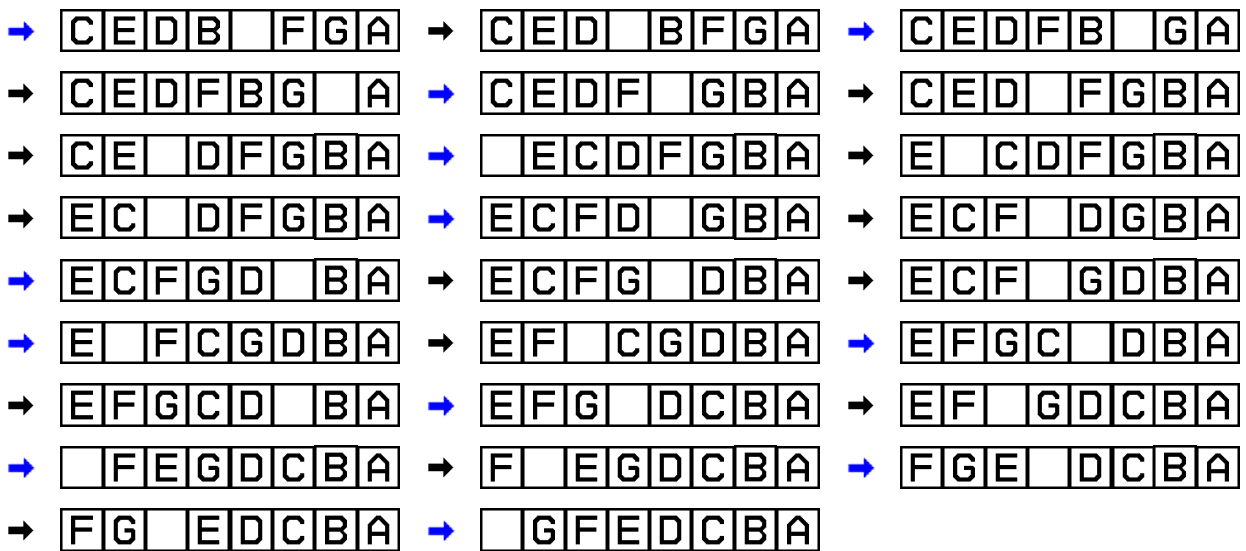
B	F	E	C	D	A	
---	---	---	---	---	---	--

→ 

B	F	E	C	D	A	
---	---	---	---	---	---	--

 → 

B	F	E	C
---	---	---	---



※ 為確保總移動次數為最少移動次數，故跳的總步驟數應大於走的總步驟數。

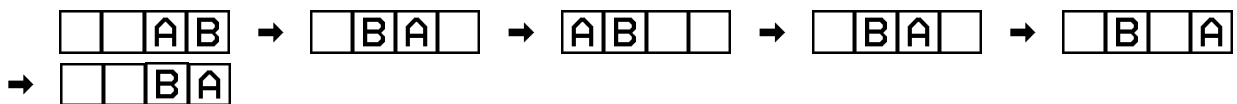
4. 「跳島戰術」第四個定義： $(\text{空格數} / \text{字母數}) \leq 1/2$ 。

(使用多餘空格無法減少總步驟數)

我們從兩個字母開始討論至十四個字母，並逐一增加須使用的空格數，在違反此定義下，無法獲得最少移動次數。(僅以二~七個字母示例)

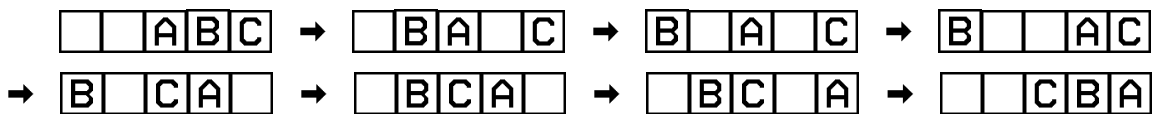
(1) 討論兩個字母數的情形，使用空格數 2 個。(若符合定義時只能有 1 個空格)

做法：(先移動 B，共移動五次，無法獲得最少移動三次)



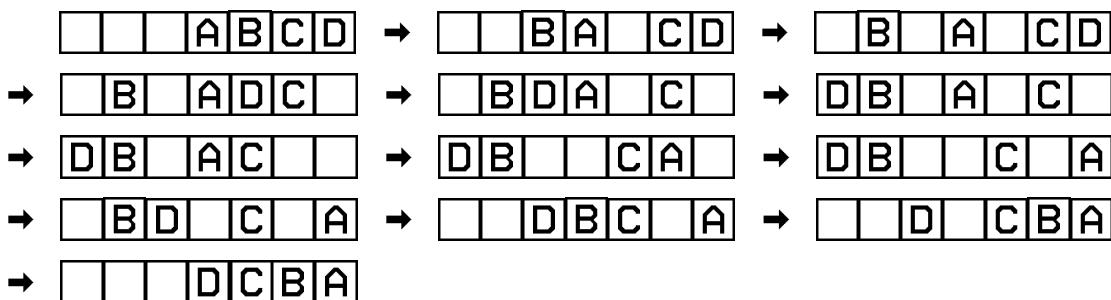
(2) 討論三個字母數的情形，使用空格數 2 個。(若符合定義時最多只能有 1 個空格)

做法：(先移動 B，共移動七次，無法獲得最少移動五次)

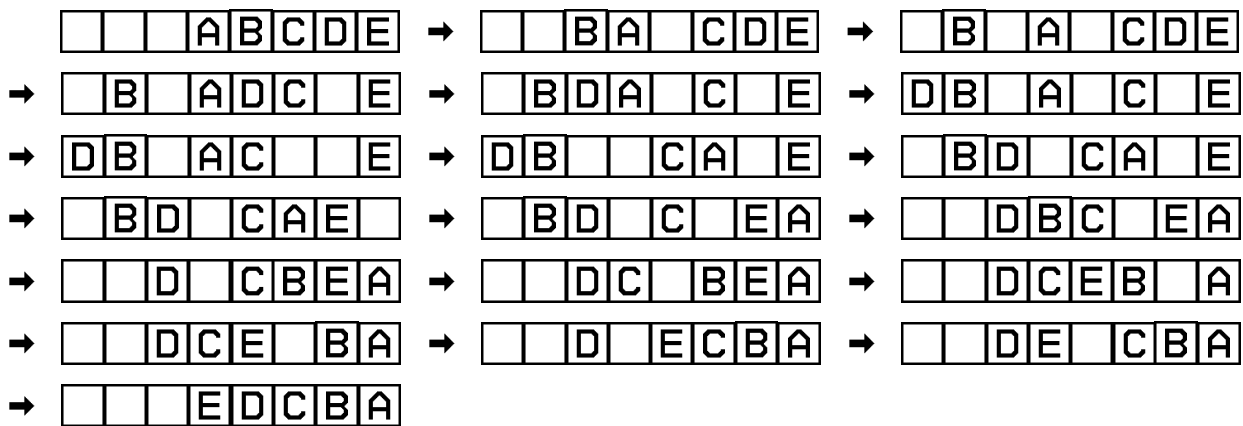


(3) 討論四個字母數的情形，使用空格數 3 個。(若符合定義時最多只能有 2 個空格)

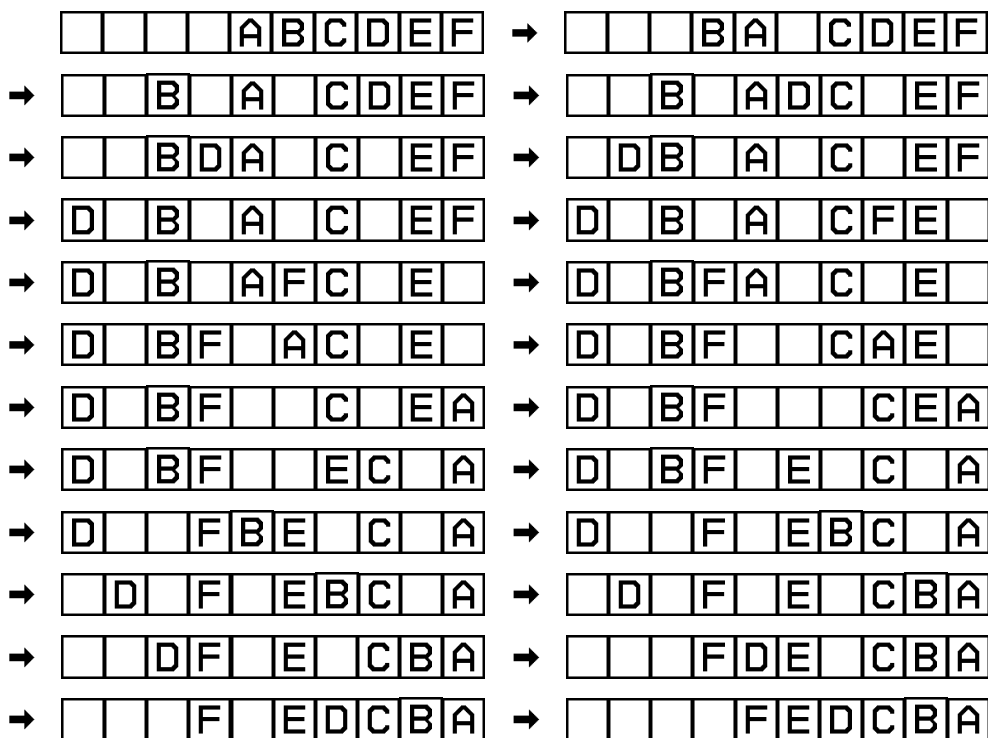
做法：(先移動 B，共移動十二次，無法獲得最少移動十次)



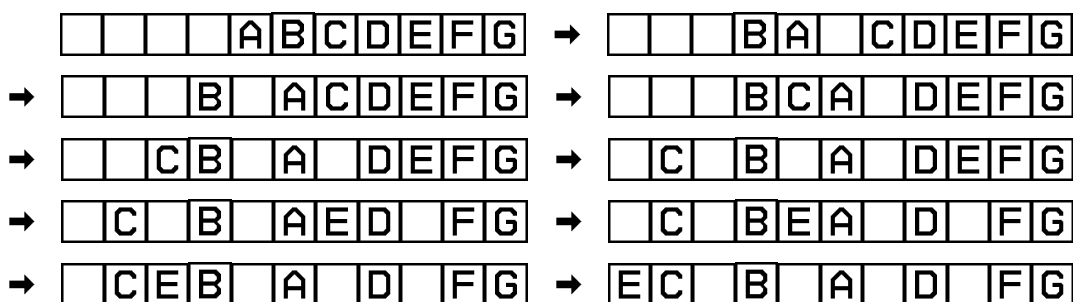
- (4) 討論五個字母數的情形，使用空格數 3 個。(若符合定義時最多只能有 2 個空格)  
 做法：(先移動 B，共移動十八次，無法獲得最少移動十六次)



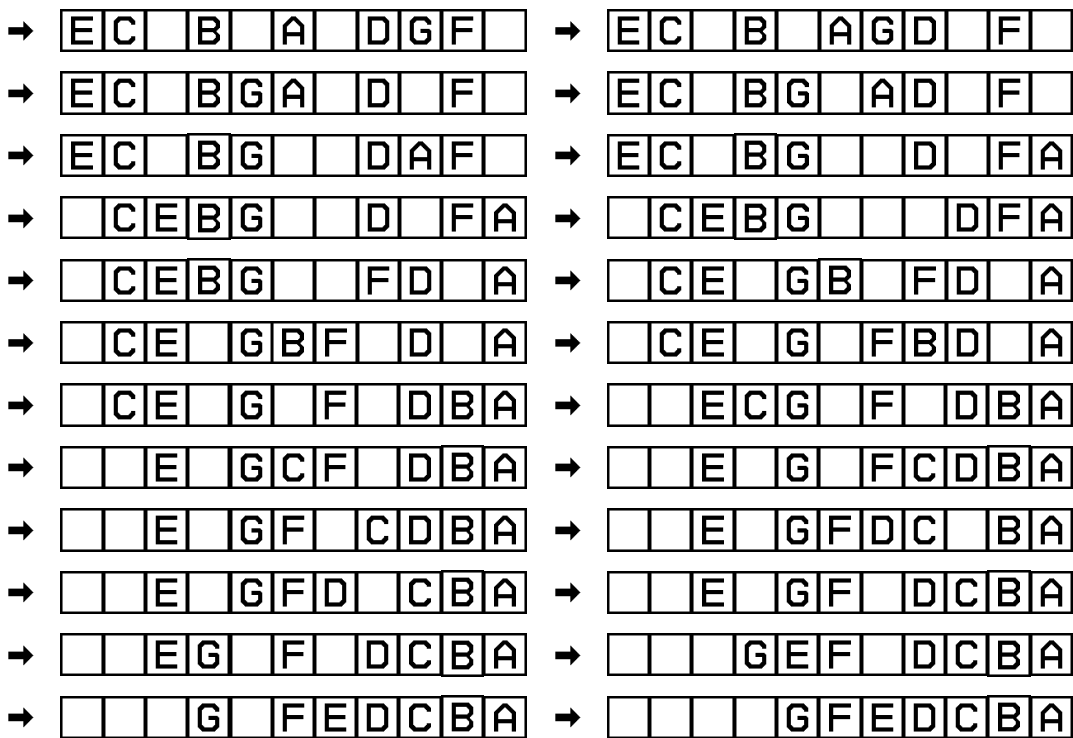
- (5) 討論六個字母數的情形，使用空格數 4 個。(若符合定義時最多只能有 3 個空格)  
 做法：(先移動 B，共移動二十三次，無法獲得最少移動二十一次)



- (6) 討論七個字母數的情形，使用空格數 4 個。(若符合定義時最多只能有 3 個空格)  
 做法：(先移動 B，共移動三十三次，無法獲得最少移動三十一一次)



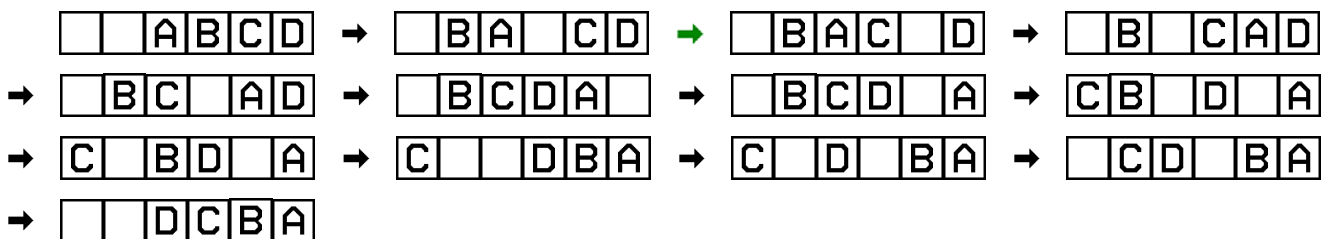




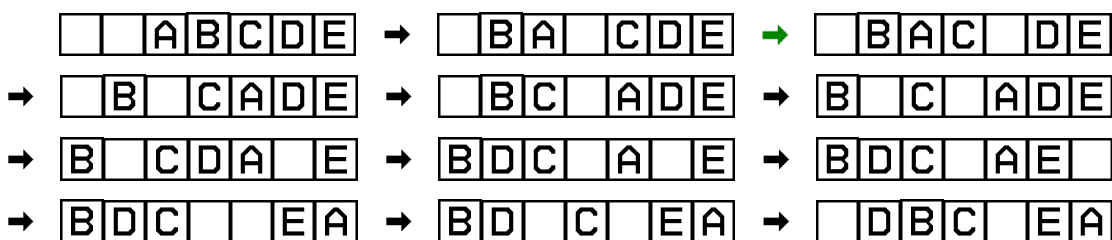
※ 為確保總移動次數為最少移動次數，故使用空格數不可超過字母數的一半。

5. 「跳島戰術」第五個定義：走的目的是產生連續跳或移至目標位置。  
 以原題目為例，我們從四個字母開始討論至十四個字母(使用符合定義四：空格數 / 字母數  $\leq 1/2$  的情形驗證)，在違反此定義下，無法獲得最少移動次數。  
 (僅以四~七個字母示例)

(1) 討論四個字母數的情形。做法：先移動 B，共移動十二次，無法獲得最少移動十次  
 (以綠色箭頭表示該步走的目的，不是為了產生連續跳或移至目標位置。)



(2) 討論五個字母數的情形。做法：(先移動 B，共移動十八次，無法獲得最少移動十六次)  
 (以綠色箭頭表示該步走的目的，不是為了產生連續跳或移至目標位置。)



→ 

	D		C	B	E	A
--	---	--	---	---	---	---

 → 

	D	C		B	E	A
--	---	---	--	---	---	---

 → 

	D	C	E	B		A
--	---	---	---	---	--	---

  
 → 

	D	C	E		B	A
--	---	---	---	--	---	---

 → 

	D		E	C	B	A
--	---	--	---	---	---	---

 → 

	D	E		C	B	A
--	---	---	--	---	---	---

  
 → 

		E	D	C	B	A
--	--	---	---	---	---	---

(3) 討論六個字母數的情形。

做法：(先移動 B，共移動二十三次，無法獲得最少移動二十一次)

(以綠色箭頭表示該步走的目的，不是爲了產生連續跳或移至目標位置。)

		A	B	C	D	E	F
--	--	---	---	---	---	---	---

 → 

	B	A		C	D	E	F
--	---	---	--	---	---	---	---

 → 

	B	A	C		D	E	F
--	---	---	---	--	---	---	---

 → 

	B		C	A	D	E	F
--	---	--	---	---	---	---	---

  
 → 

B		C	D	A		E	F
---	--	---	---	---	--	---	---

 → 

B	D	C		A		E	F
---	---	---	--	---	--	---	---

 → 

B	D	C		A	F	E	
---	---	---	--	---	---	---	--

  
 → 

B	D	C	F	A		E	
---	---	---	---	---	--	---	--

 → 

B	D	C	F	A	E		
---	---	---	---	---	---	--	--

 → 

B	D	C	F		E	A	
---	---	---	---	--	---	---	--

  
 → 

B	D	C	F		E		A
---	---	---	---	--	---	--	---

 → 

B	D		F	C	E		A
---	---	--	---	---	---	--	---

 → 

B	D		F		E	C	A
---	---	--	---	--	---	---	---

  
 → 

	D	B	F		E	C	A
--	---	---	---	--	---	---	---

 → 

	D		F	B	E	C	A
--	---	--	---	---	---	---	---

 → 

		D	F	B	E	C	A
--	--	---	---	---	---	---	---

  
 → 

	F	D		B	E	C	A
--	---	---	--	---	---	---	---

 → 

	F	D	E	B		C	A
--	---	---	---	---	--	---	---

 → 

	F	D	E	B	C		A
--	---	---	---	---	---	--	---

  
 → 

	F	D	E		C	B	A
--	---	---	---	--	---	---	---

 → 

	F		E	D	C	B	A
--	---	--	---	---	---	---	---

 → 

		F	E	D	C	B	A
--	--	---	---	---	---	---	---

(4) 討論七個字母數的情形。

做法：(先移動 B，共移動三十三次，無法獲得最少移動三十一一次)

(以綠色箭頭表示該步走的目的，不是爲了產生連續跳或移至目標位置。)

		A	B	C	D	E	F	G
--	--	---	---	---	---	---	---	---

 → 

	B	A		C	D	E	F	G
--	---	---	--	---	---	---	---	---

 → 

	B	A	C		D	E	F	G
--	---	---	---	--	---	---	---	---

 → 

	B		C	A	D	E	F	G
--	---	--	---	---	---	---	---	---

  
 → 

B		C	D	A		E	F	G
---	--	---	---	---	--	---	---	---

 → 

B	D	C		A		E	F	G
---	---	---	--	---	--	---	---	---

 → 

B	D	C		A	F	E		G
---	---	---	--	---	---	---	--	---

  
 → 

B	D	C	F	A		E		G
---	---	---	---	---	--	---	--	---

 → 

B	D	C	F	A	E			G
---	---	---	---	---	---	--	--	---

 → 

B	D	C	F	A	E		G	
---	---	---	---	---	---	--	---	--

  
 → 

B	D	C	F		E	A	G	
---	---	---	---	--	---	---	---	--

 → 

B	D	C	F		E		G	A
---	---	---	---	--	---	--	---	---

 → 

B	D		F	C	E		G	A
---	---	--	---	---	---	--	---	---

  
 → 

B	D		F		E	C	G	A
---	---	--	---	--	---	---	---	---

 → 

	D	B	F		E	C	G	A
--	---	---	---	--	---	---	---	---

 → 

	D		F	B	E	C	G	A
--	---	--	---	---	---	---	---	---

  
 → 

		D	F	B	E	C	G	A
--	--	---	---	---	---	---	---	---

 → 

	F	D		B	E	C	G	A
--	---	---	--	---	---	---	---	---

 → 

	F	D		B	E	C	G	A
--	---	---	--	---	---	---	---	---

  
 → 

F		D	E	B		C	G	A
---	--	---	---	---	--	---	---	---

 → 

F	E	D		B		C	G	A
---	---	---	--	---	--	---	---	---

 → 

F	E	D		B	G	C		A
---	---	---	--	---	---	---	--	---

  
 → 

F	E	D	G	B		C		A
---	---	---	---	---	--	---	--	---

 → 

F	E	D	G		B	C		A
---	---	---	---	--	---	---	--	---

 → 

F	E	D	G			C	B	A
---	---	---	---	--	--	---	---	---

  
 → 

F	E		G	D		C	B	A
---	---	--	---	---	--	---	---	---

 → 

F	E		G		D	C	B	A
---	---	--	---	--	---	---	---	---

 → 

F	E	G			D	C	B	A
---	---	---	--	--	---	---	---	---

  
 → 

F		G	E		D	C	B	A
---	--	---	---	--	---	---	---	---

 → 

F		G		E	D	C	B	A
---	--	---	--	---	---	---	---	---

 → 

	F	G		E	D	C	B	A
--	---	---	--	---	---	---	---	---

  
 → 

		G	F	E	D	C	B	A
--	--	---	---	---	---	---	---	---

※ 爲確保總移動次數爲最少移動次數，故走的目的應在於產生連續跳或移至目標位置。

## 陸、 研究結果

一、利用最少移動次數，推論出結果與字母數之間的關係，並由以上研究過程討論發現，完成這個遊戲的最少次數如下表列：

### ※ 空格數 1 個

字母數	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	$N$
最少移動次數	3	5	10	16	21	31	36	50	55	73	78	100	105	$N$ 為奇數： $\frac{N^2 + 3N - 8}{2}$ $N$ 為偶數： $\frac{N(N+1)}{2}$

### ※ 空格數 2 個

字母數	2	3	4	5	6	7	13	14	$N$
最少移動次數	5	7	10	16	21	31	100	105	同上, $N > 3$

### ※ 空格數 2 個，左右各一個

字母數	2	3	4	5	6	7	13	14	$N$
最少移動次數	5	7	10	16	21	31	100	105	同上, $N > 3$

### ※ 空格數 3 個

字母數	2	3	4	5	6	7	13	14	$N$
最少移動次數			12	18	21	31	100	105	同上, $N > 3$

### ※ 空格數 4 個

字母數	2	3	4	5	6	7	8	13	14	$N$
最少移動次數					23	33	36	100	105	同上, $N > 3$

1. 空格在不影響題意之下任意擺，符合  $(\text{空格數}/\text{字母數}) \leq 1/2$  時，最少移動次數的結果不變。換句話說，空格數只要適當配合字母數增加減少，其最少移動次數結果是不變的。
2. 老師設計的問題很棒，剛好  $(\text{空格數}/\text{字母數}) = 1/2$ 。
3. 若為  $N$  個字母時，可藉由表格的數據逐步推得公式：

※ 當符合  $(\text{空格數}/\text{字母數}) \leq 1/2$  時，奇數個字母可得最少移動次數  $\frac{N^2 + 3N - 8}{2}$  次；

偶數個字母可得最少移動次數  $\frac{N(N+1)}{2}$  次。

二、反證法是將所有違反「跳島戰術」的情形盡可能作討論，過程中發現不論面對任何空格數或字母數的條件時，只要違背「跳島戰術」的五項定義任一項，便無法獲得最少移動次數，因此可確保「跳島戰術」與公式的正確性。**※反例試驗過程的最少移動次數表如下列：**

※違背跳島戰術定義一													
字母數	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
空格數 1 個	3	7	10	18	21	33	36	52	55	75	78	102	105

過程中發現，雖字母數為偶數時亦可獲得最少移動次數，仍無法全數獲得最少移動次數。

※違背跳島戰術定義二													
字母數	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
空格數 2 個			12	20	29	41	50	66	75	95	104	128	137

過程中發現，必須從空格數 2 個討論，方可產生跳的步驟。

※違背跳島戰術定義三													
字母數	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
空格數 1 個	5	7	12	20	31	43	56	60	69	79	82	98	117

過程中發現，當違背定義三時，已無法獲得最少移動次數。

※違背跳島戰術定義四													
字母數	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
空格數為變數	5	7	12	18	23	33	38	52	57	75	80	102	107

過程中發現，當違背定義四時，空格數需配合字母數變動，仍發現無法獲得最少移動次數。

※違背跳島戰術定義五													
字母數	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
空格數 2 個			12	18	23	33	38	52	57	75	80	102	107

過程中利用符合定義四的情形討論，發現仍無法獲得最少移動次數。

三、利用公式與 EXCEL 將字母數增加到 100 個時，如下兩表所列，便可以比較總步驟數、跳的步驟數與走的步驟數的數字關係。

**特殊的數字關係：**走的步驟數恆為偶數，且具有特殊關係，如藍色與紅色所標示。

字母數	總步驟數	跳步數 $\frac{n(n-1)}{2}$	走步數 (總步驟數 - 跳步數)	字母數	總步驟數	跳步數 $\frac{n(n-1)}{2}$	走步數 (總步驟數 - 跳步數)
1	---	---	---	26	351	325	26
2	3	1	2	27	401	351	50
3	5	3	2	28	406	378	28
4	10	6	4	29	460	406	54
5	16	10	6	30	465	435	30
6	21	15	6	31	523	465	58
7	31	21	10	32	528	496	32
8	36	28	8	33	590	528	62
9	50	36	14	34	595	561	34
10	55	45	10	35	661	595	66
11	73	55	18	36	666	630	36
12	78	66	12	37	736	666	70
13	100	78	22	38	741	703	38
14	105	91	14	39	815	741	74
15	131	105	26	40	820	780	40
16	136	120	16	41	898	820	78
17	166	136	30	42	903	861	42
18	171	153	18	43	985	903	82
19	205	171	34	44	990	946	44
20	210	190	20	45	1076	990	86
21	248	210	38	46	1081	1035	46
22	253	231	22	47	1171	1081	90
23	295	253	42	48	1176	1128	48
24	300	276	24	49	1270	1176	94
25	346	300	46	50	1275	1225	50

字母數	總步驟數	跳步數 $\frac{n(n-1)}{2}$	走步數 (總步驟數-跳步數)	字母數	總步驟數	跳步數 $\frac{n(n-1)}{2}$	走步數 (總步驟數-跳步數)
51	1373	1275	98	76	2926	2850	76
52	1378	1326	52	77	3076	2926	150
53	1480	1378	102	78	3081	3003	78
54	1485	1431	54	79	3235	3081	154
55	1591	1485	106	80	3240	3160	80
56	1596	1540	56	81	3398	3240	158
57	1706	1596	110	82	3403	3321	82
58	1711	1653	58	83	3565	3403	162
59	1825	1711	114	84	3570	3486	84
60	1830	1770	60	85	3736	3570	166
61	1948	1830	118	86	3741	3655	86
62	1953	1891	62	87	3911	3741	170
63	2075	1953	122	88	3916	3828	88
64	2080	2016	64	89	4090	3916	174
65	2206	2080	126	90	4095	4005	90
66	2211	2145	66	91	4273	4095	178
67	2341	2211	130	92	4278	4186	92
68	2346	2278	68	93	4460	4278	182
69	2480	2346	134	94	4465	4371	94
70	2485	2415	70	95	4651	4465	186
71	2623	2485	138	96	4656	4560	96
72	2628	2556	72	97	4846	4656	190
73	2770	2628	142	98	4851	4753	98
74	2775	2701	74	99	5045	4851	194
75	2921	2775	146	100	5050	4950	100

## 柒、 討論

- 一、本研究因礙於作品說明書 30 頁限制，較多字母的研究歷程與證明過程則另謄於紙本。
- 二、利用原創題目的解題過程中，嚴格定義出「跳島戰術」，以確定在討論其他情形時的過程亦為最少移動次數的步驟。
- 三、當我們增加空格數討論時，過程中必須使用到所有空格，才有研究、討論的意義。
- 四、雖利用數學方法證明其正確性，老師卻質疑若條件數太少，則所引用的次數數據或步驟不足，容易產生公式與證明出現瑕疵。
- 五、最後利用反例的驗證與推論較為完整客觀，只要違反「跳島戰術」任一定義技巧，則無法獲得更少的移動次數。順利將條件數不足的證明問題解決，也獲得跳島戰術與公式的正確性。
- 六、研究結果中，發現不論任何的條件數，不僅奇數與偶數個字母條件數各有其數學關係，更發現跳的次數與走的次數亦有特殊的數字關係存在。
- 七、更多元化的排序遊戲討論與推廣(如[實用性相關議題：軍隊調動攻擊模式、貨物集散最佳化問題](#)等)，可作為未來參展時或國際科展的研究方向。

## 捌、 結論

- 一、面對規則條件比較複雜的遊戲時，嚴格定義出遊戲的破解技巧，可確定其他情形的過程亦為最少移動次數的步驟，以獲得正確的數據資料。
- 二、嘗試困難的數學規律證明和反例推論驗證，發現嚴謹的數學方法可以確保公式的正確性。
- 三、透過瞭解數學遊戲的遊戲技巧、條件數、解答的數字關係等，可以改進或設計數學遊戲。

## 玖、 參考資料

- 一、 國立台灣科學教育館。中華民國第 34 屆中小學科展展覽優勝作品專輯。
- 二、 國立台灣科學教育館。中華民國第 36 屆中小學科展展覽優勝作品專輯。
- 三、 國立台灣科學教育館。中華民國第 43 屆中小學科展展覽優勝作品專輯。
- 四、 國立台灣科學教育館。中華民國第 45 屆中小學科展展覽優勝作品專輯。

## 【評語】 080406

一個特殊的移位問題。問題本身是有趣的，但作品中所給出的結果與四十七屆全國科展國小組的佳作作品「跳島攻法－破解移位遊戲的最佳策略」完全相同。針對同樣的問題，如果能有全新的想法或是更進一步的結果，重新參展並無不可，但已參展過且得獎的作品重新送審參展是不恰當的作法。肩負引導責任的教師在擔任指導工作時，應特別留意，避免樹立不當典範。