中華民國第51屆中小學科學展覽會

作品說明書

國小組　數學科

佳作

080405

向左走向右走

～相鄰移位遊戲最佳策略探討之研究

學校名稱：臺北市中山區中山國民小學

作者：	指導老師：
小六 游子欣	張瓊文 楊美慧

關鍵詞：相鄰位移遊戲、規律性探討、最少移位次數

向左走向右走~~相鄰移位遊戲最佳策略探討之研究

摘要

本研究為傳統遊戲創新，改變遊戲形式與玩法，中間前後不留空格，且題目中花色種類按 a、b、c......順序排列，在每種花色數量相等的情況下進行直線相鄰移位遊戲。研究裡設定了三種不同的最後排列順序要求，觀察當花色種類數與每種花色數量為任意數時的最少移位次數，試著從操作過程歸納最少移位次數(最佳解決策略)之規律，並得到通式。

接著，將直線型改為其他排列圖形—順時鐘環形，同樣的歸納在最後三種不同排列順序要求下最少移位次數之規律，得到通式，並比較與直線排列之相關性。

壹、研究動機

記得三年級時，資優班玩過一個團體遊戲~分成兩隊，一人為隊長，其餘六人拿卡片 a、b，排成

a	a	a	b	b	b

隊形。接著由隊長下指令，一次只能指引一組相鄰的 2 位隊員互換，最後要將排列隊形改變為

b	b	b	a	a	a

當時身為隊長的我，第一個想法是，既然要求在最短時間內完成，就代表要用最少的移位次數來進行，到底如何才能得到最少次數的移位方法呢？

後來，資優班陸續又安排一些尋找規律性的課程，例：毛蟲棋等，仔細想想，其中題目雖不同，但都是運用「稍微改變遊戲條件」就能創新的原則。既然如此，之前玩的遊戲，我好奇的想，是否也可以試著創新，按照原訂規則，額外增加不同的條件，尋找在每種花色數量相等，只能相鄰移位的情況下，數量增加(aabb 變為 aaa...bbb...)、花色增加(aabb 變為 aabbcc)，或者是改變遊戲結果的排列順序，最少移位次數是否仍有規律性？為了解決困惑、滿足我熱愛探索的心，我就想藉著這次科展研究清楚了解，在符合相鄰移位的遊戲條件下，最少移位次數與花色種類、花色數量之間的規律，並且將尋找到的規律式子，運用五上第八單元「多步驟問題」所學的「乘法對加減分配律」、「四則混合計算」，與六下第二單元「分數四則計算」，嘗試將式子化為最簡。

貳、 研究目的

一、符合遊戲條件下進行直線排列

(一) 有兩種花色，每種花色量相等下進行相鄰移位，探討排列順序完全互換位置之最少移位次數之規則。

(二) 花色排列順序完全互換位置下，探討最少移位次數與花色種類、花色數量之間的規則。

(三) 尋找其他最少移位次數的方法。

(四) 改變排列順序來設計新遊戲，探討最少移位次數和花色種類、花色數量之間的規則，與二者相關性。

二、符合遊戲條件下，改變排列圖形為順時鐘環形

(一) 花色排列順序完全互換位置下，探討最少移位次數與花色種類、花色數量之間的規則。

(二) 改變排列順序下，探討花色種類數或每種花色數量之其中一項固定為 2，另一項為任意數下最少移位次數之規則。

(三) 探討兩種排列圖形之相關性。

參、 文獻探討

經由老師的建議，我從歷屆全國科展得獎作品中，找到移位遊戲有關的主題，分別從花色種類數、每種花色的數量、最後排列順序、遊戲條件以及排列圖形進行比較，以釐清本研究的價值。

序號	屆別組別	得獎名次	主題名稱	研究參考內容	與本研究之比較
1	24屆初小	全國第三名	有趣的移位遊戲	早期移位遊戲作品，為日後其他移位遊戲研究的基礎。	
2	34屆高小組	全國第二名	毛毛蟲變蝴蝶~ 移位遊戲的新發現	探討直線與環狀兩邊(棋子數)等長與不等長移位規律性，並首次嘗試蝴蝶形(平面空間)移位。 除了「環狀兩邊不等長」無法歸納最少步數公式;「蝴蝶形」移位無歸納明顯結果外，其餘做了完整的討論，並歸納出規律與公式。	①2 種花色 ②每種花色數 N ③最後排列順序~ 花色排列順序完全互換位置 ④遊戲條件~ 有空格 隔位(跳)或鄰移 ⑤排列圖形~ 直線、環狀、蝴蝶形
3	41屆國中組	全國第二名	解開難題的奧秘--「個人移位跳棋」遊戲的探討。	以不同觀點詮釋移位遊戲(毛蟲棋)，並歸納多種不同形狀的規律與最少步數公式。 等長直線型、不等長直線型、迴路型、十字形、雙迴路型、A 字形、日字形、分道盤型、時鐘型	①2 種花色 ②每種花色數 N ③最後排列順序~ 花色排列順序完全互換位置 ④遊戲條件~ 有空格 隔位(跳)或鄰移 ⑤排列圖形~ 直線、環狀、....
4	44屆國小組	第一名	三色移位毛毛蟲~ 三色移位遊戲的探討	首次出現在全國的三色移位遊戲，在大量的實驗中，找出最低步數，並歸納規律性。	①3 種花色 ②每種花色數 N ③遊戲條件~ 有空格 隔位(跳)或鄰移 ④排列圖形~直線
5	46、47屆	全國佳作 全國佳作	乾坤大挪移 跳島攻法—破解移位遊	移位方式與毛蟲棋相同~跳(隔位移位)或相鄰移位，探討有 1~4 格空格情況下之最低步數，並歸納字母數至任意數	①K 種花色 ②每種花色數 1 個 ③最後排列順序~ 花色排列順序完全互換位

	國小組		戲的最佳策略	時其規律性。 □ABCD⇨□DCBA □□ ABCD⇨□□ DCBA □ ABCD□⇨□ DCBA□ □□□ABCD⇨□□□ DCBA □□□□ABCD⇨□□□□ DCBA	置 ④遊戲條件~ 有空格 隔位(跳)或鄰移 ⑤排列圖形~直線
6	48 屆國小組	全國佳作	毛毛蟲爬眼鏡- 移位遊戲變形玩法	除了解毛蟲棋之一般直線、環狀與十字形移位遊戲的規律，並以此為基礎，將環形棋盤做了翻轉扭曲，歸納多折眼鏡形移位遊戲的規律性。	①2 種花色 ②每種花色數 N ③最後排列順序~ 花色排列順序完全互換位置 ④遊戲條件~ 有空格 隔位(跳)或鄰移 ⑤排列圖形~ 直線、環狀、十字形、多折眼鏡形

【本研究與毛蟲棋研究之差異】

1. 每種花色的數量相等，題目依順序排列，中間前後都不留空格。
2. 移位方式只能相鄰移位。
3. 依據兩種不同的排列圖形，設計了最後三種不同的排列要求。
4. 將花色種類數與每種花色的數量分別增加為任意數，歸納和最少移位次數的關係。
5. 將所得的規律式子化簡，尋找通式。

肆、 研究器材

記錄表與整理表、筆、電腦

伍、 研究過程、方法與結果

一、 遊戲條件：

(一) 每種花色的數量需相等，依順序排列，中間前後都不留空格。
如 a、b、c 三種花色，每種花色 2 個，題目排列為 aabbcc。

(二) 只能進行相鄰移位，移位一步即算一次。

(三) 依照最後排列順序要求，尋找最少移位次數。

二、 符號定義說明：

(一) 花色種類以 a、b、c…等分別代表。

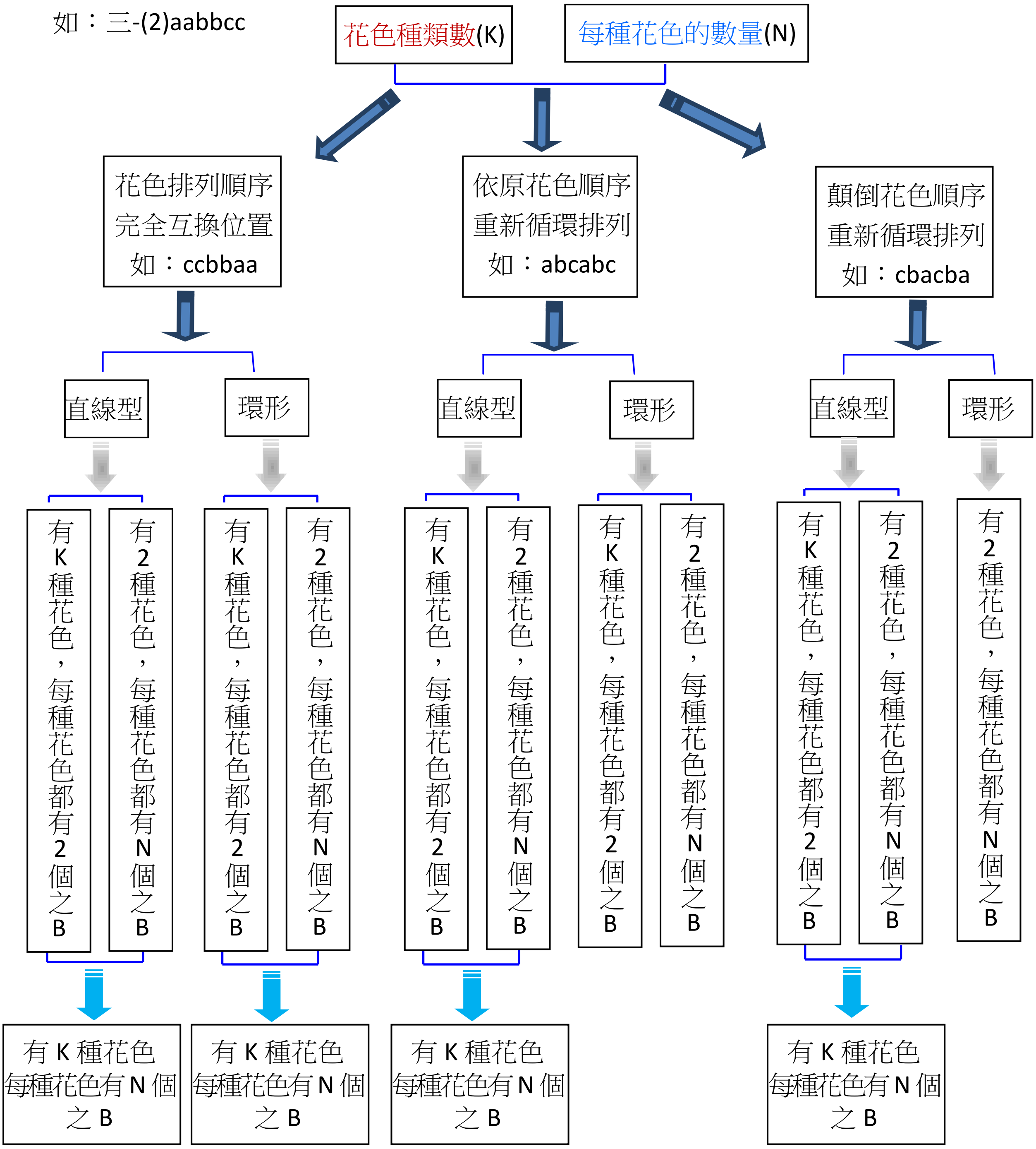
(二) K 代表共有 K(任意)種花色，N 代表每種花色有任意個，B 代表最少移位次數。

(三) 操作中用國字一、二、三……代表花色的種類數，(2)、(3)、(4)……代表每種花色的數量。如：三-(4)代表 aaaabbbbcccc。

三、 研究架構

(一)最少移位次數

如：三-(2)aabbcc



(二)策略：一一列出、畫線(研究三)

四、 研究價值與特色

(一) 將傳統遊戲做創新。

將傳統有空格的直線排列方式進行相鄰或隔位移位，改為**無空格**的排列方式進行**相鄰移位**，增加遊戲的趣味與挑戰性。

(二) 針對花色種類數、每種花色數量與最少移位次數三者之間的關係做深入的探討，從大量的操作中，找出其為任意數時，直線型與環形的 B 之規律和通式。

五、 研究過程與結果

研究一：有兩種花色，在每一種花色數量相等下，探討花色完全互換位置之 B 規則。

$\overbrace{aa\cdots a}^{N\text{個}}\overbrace{bb\cdots b}^{N\text{個}} ➡ \overbrace{bb\cdots b}^{N\text{個}}\overbrace{aa\cdots a}^{N\text{個}}$

1.過程

「花色數量相同」是此遊戲重要條件，且須找出「最少移位次數」，於是，我用「土法煉鋼」方式一一列出。採取了許多移位方法之後，我發現，先選取一種花色為移位者，將第一位按照排列順序移至位置後再移位下一個，會是最有規律的最少移位次數。(見「移位過程記錄表」P1-2)

B 之整理如下：

最少移位次數 B ／ 每花色數量 N ／ 花色種類數 K	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
二	4	9	16	25	36

【表一】見「移位過程紀錄表」P1-2

2.發現

以題目二-(3) 為例：

(1)將題目丙 a 移位到己，需與 3 個 b (一種花色的數量)相鄰互換，所以移位 1x3 次。

(2)因為 a 花色的數量有 3 個，分別移位至丁、戊、己時，上述步驟需重複 3 次，所以，B 為 1x3x3=9。

$\boxed{1}\times3\times\boxed{3}=9$

a 和 1 個花色(b)進行移位。
➡一種花色

所移位的花色(b)其數量為 3 個。
➡花色數量有 3 個

因花色(a)的數量有 3 個，動作重複 3 次
➡花色數量有 3 個

【圖一】二-(3)

位置	甲	乙	丙	丁	戊	己	
題目	**a**	**a**	**a**	**b**	**b**	**b**	
最少移位次數	a	a	b	a	b	b	1x3 次
	a	a	b	b	a	b	
	a	a	b	b	b	a	
	a	b	a	b	b	a	1x3 次
	a	b	b	a	b	a	
	a	b	b	b	a	a	
	b	a	b	b	a	a	1x3 次
	b	b	a	b	a	a	
	b	b	b	a	a	a	
結果	**b**	**b**	**b**	**a**	**a**	**a**	

3.尋找規律

用上述方法分別去檢驗二-(2)～(6)，觀察 N 和 B 間的關係：

題目	二-(2)	二-(3)	二-(4)	二-(5)	二-(6)
最少移位次數	4	9	16	25	36
	1x2x2	1x3x3	1x4x4	1x5x5	1x6x6

【表二】依照「移位過程紀錄表」P1-2 之整理

我發現 B 與花色數量 N 有關。

4.發現通式

在兩種花色、每種花色數量相等下進行直線相鄰移位，花色完全互換位置的 B 規則：

$$B_N=1\times N^2$$

5.預測

根據發現的通式預測，當每種花色數量改變為(7)、(8)、(9)時，B 為：

題目	二-(7)	二-(8)	二-(9)
預測	1x7x7	1x8x8	1x9x9
最少移位次數	49	64	81

【表三】

6.驗證：(1)實際操作結果和預測相同。(見「移位過程紀錄表」P3-4 之整理)

(2)將通式帶入已完成題目，所得的 B 與之前操作結果相同。

7.疑問

在得到的通式 $B_N=1\times N^2$，1 是指在兩種花色下，···a···b 需經過一種花色 b (a 為基準)。N 是指一種花色的數量。

可是如果增加花色種類，理論上就不再x1(移動時經過 1 種花色)，那麼是否依然會有規律性變化？變化同時，花色數量N^2會不會有改變？

研究二：符合遊戲條件下，花色排列順序完全互換位置，探討最少移位次數與花色種類、花色數量之間的規則。

$$\overbrace{aa\cdots aa}^{N\text{個}}\overbrace{bb\cdots bb}^{N\text{個}}\overbrace{cc\cdots cc}^{N\text{個}}\overbrace{dd\cdots dd}^{N\text{個}}\cdots\cdots\cdots\cdots\overbrace{kk\cdots kk}^{N\text{個}}$$

$$\Big\Downarrow \quad \text{K 種花色，花色排列順序完全互換位置}$$

$$\overbrace{kk\cdots kk}^{N\text{個}}\cdots\cdots\cdots\cdots\overbrace{dd\cdots dd}^{N\text{個}}\overbrace{cc\cdots cc}^{N\text{個}}\overbrace{bb\cdots bb}^{N\text{個}}\overbrace{aa\cdots aa}^{N\text{個}}$$

1.過程

我一一列出研究主題(一)之 三四五-(2)～(5) 和研究主題(二) 之 二三四五-(2)~(4) 的所有排列。操作結果整理如下：

最少移位次數 B ／ 每花色數量 N ／ 花色種類數 K	(2)	(3)	(4)	(5)
三	12	27	48	75
四	24	54	96	150
五	40	90	160	250

【表四】見「移位過程紀錄表」P5-13、P14-18

2.發現

以題目三-(2) 為例：

(1) 題目乙 a 移位到己，須經過兩種花色(b、c)，每種花色數量都有 2 個，移位 2x2 次。

(2) 題目甲 a 移位到戊，與(1)方式相同，移位 2x2 次。

(3) 乙 b 移位到丁，須經過一種花色(c)，花色數量為 2，移位 1x2 次。

(4) 甲 b 移位到丙，與(3)方式相同，也是 1x2 步。

(5) 所以，B 為 12：

B=12

【圖二】三-(2)

位置	甲	乙	丙	丁	戊	己	
題目	a	a	b	b	c	c	
最少移位步驟	a	b	a	b	c	c	2x2 次
	a	b	b	a	c	c	
	a	b	b	c	a	c	
	a	b	b	c	c	a	
	b	a	b	c	c	a	2x2 次
	b	b	a	c	c	a	
	b	b	c	a	c	a	
	b	b	c	c	a	a	
	b	c	b	c	a	a	1x2 次
	b	c	c	b	a	a	
	c	b	c	b	a	a	1x2 次
	c	c	b	b	a	a	
結果	c	c	b	b	a	a	

a 要經過兩個花色 b、c

b 要經過一種花色 c

$=\boxed{1}\times2\times2+\boxed{2}\times2\times2$

a 花色數量為 2

c 花色數量為 2

$=(\boxed{1}+\boxed{2})\times2^2$

b、c 花色數量各為 2

b 花色數量為 2

3、 尋找規律

用上述方法分別去檢驗研究主題(一)之 三四五-(2)～(5)；研究主題(二)之 二三四五-(2)(3)(4)，綜合研究一之 二-(2)~(5)，整理如下：

最少移位次數 B ＼ 花色種類數 K ＼ 每花色數量 N	二	三	四	五
(2)	1×2^2	$(1+2)\times2^2$	$(1+2+3)\times2^2$	$(1+2+3+4)\times2^2$
(3)	1×3^2	$(1+2)\times3^2$	$(1+2+3)\times3^2$	$(1+2+3+4)\times3^2$
(4)	1×4^2	$(1+2)\times4^2$	$(1+2+3)\times4^2$	$(1+2+3+4)\times4^2$
(5)	1×5^2	$(1+2)\times5^2$	$(1+2+3)\times5^2$	$(1+2+3+4)\times5^2$

【表五】依照「移位過程紀錄表」P5-13 之整理

最少移位次數 B ＼ 每花色數量 N ＼ 花色種類數 K	(2)	(3)	(4)
二	1×2^2	1×3^2	1×4^2
三	$(1+2)\times2^2$	$(1+2)\times3^2$	$(1+2)\times4^2$
四	$(1+2+3)\times2^2$	$(1+2+3)\times3^2$	$(1+2+3)\times4^2$
五	$(1+2+3+4)\times2^2$	$(1+2+3+4)\times3^2$	$(1+2+3+4)\times4^2$

【表六】依照「移位過程紀錄表」P14-18 之整理

我發現：

(1) 表七和表八是相同，只是基準不同。

(2) K 從二種增加至三、四、五種時，對花色數量N^2不會有影響。

(3) 表七能清楚看見在花色種類數相等之下，N 增減的規律性變化。

(4) 表八能清楚看見在每種花色數量相等之下，K 增減的規律性變化。

(5) 觀察「表七、八」之 K、N 與 B 間的關係，發現「B 會隨 K、N 增減呈規律性變化」，因此推論：

K 固定為 2，每種花色數量=N 時，$B_N = 1\times N^2$

N 固定為 2，有 K 種花色時，B_K=〔1+2+3……+(K－1)〕$\times 2^2$

所以，當 K=1、2…、或 K，N=1、2…、或 N 時，B=〔1+2+3……+(K－1)〕$\times N^2$

4.發現通式

從上面推論的規律作式子化簡，可得到：

$$B=[1+2+3+.....+(K-1)]\times N^2$$
$$=(1+K-1)\times(K-1)\times\frac{1}{2}\times N^2$$
$$=\frac{K(K-1)}{2}\times N^2$$

5.預測

根據發現的通式預測，當每種花色與數量改變為六-(2)、六-(3)、七-(2)時，B 為：

題目	六-(2)	六-(3)	七-(2)
預測 最少移位次數	$\frac{6\times5}{2}\times2^2$	$\frac{6\times5}{2}\times3^2$	$\frac{7\times6}{2}\times2^2$
	60	135	84

【表七】

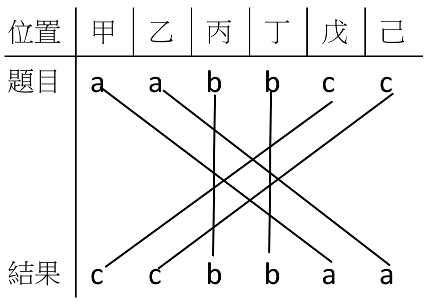
6.驗證：實際操作結果和預測相同。 (見「移位過程紀錄表」P19-21 之整理)

將通式帶入已完成題目，所得的 B 與之前操作結果相同。

7.疑問

以研究二之「三-(2)」為例，從操作中得知，乙 a 移位至己時，要與兩個 b、兩個 c 進行相鄰移位，B 為 4，其他花色以此類推。

我突然想到，如果試著將題目與結果之每個相同花色各連成一條線，如右圖，線與線之間會產生許多交點，這些交點數和 B 是否相關？



【圖三】三-(2)

$\boxed{研究三}$：符合遊戲條件與最後排列順序要求下，尋找其他最少移位次數的方法。

1.過程

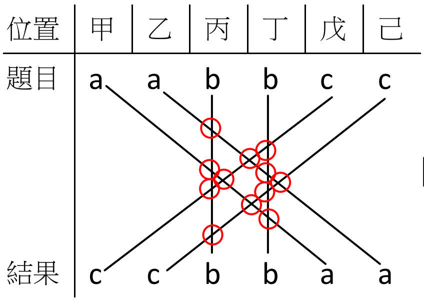
我分別將研究二之 二三四五-(2)(3)、二三四-(4) 的題目與最後結果列出，將題目與結果中每個相同花色各連成一條線，數出它們線與線之間產生的交點數，檢驗是否符合 B。

2.發現

以研究二「三-(2)」為例，我將題目與結果列出後，把每個相同花色各連成一條線，繪製為圖四，並把移位過程進行分解。

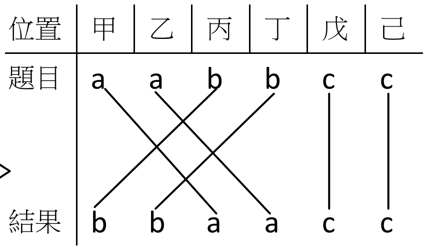
〔移位動作皆以研究二實際排列方法按順序解釋〕

【圖四】



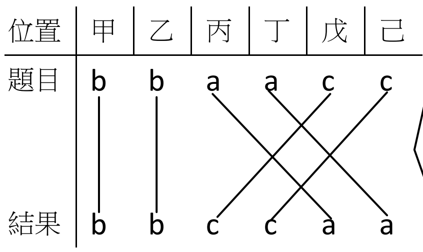
線段交點共有 12 個，與最少移位次數相同，實際操作得知，圖上每個交點等同此(a 或 b 或 c)線段移位時會與另(a 或 b 或 c)線段進行相鄰移位。例如甲戊 a其中的交點分別是與丙 b、戊 c、己 c 丁 b、出發的線段產生，表示當甲 a 移位至戊處時，會與上述的 b 和 c 共作 4 次相鄰移位動作，**所以圈圈有 12 個，最少移位次數即為 12 次**。

【圖四】-分解 1



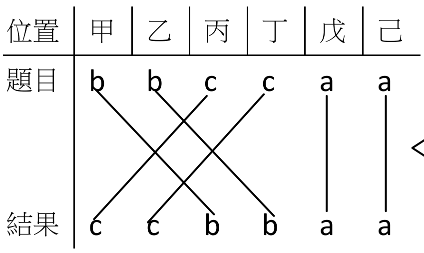
從研究二移位過程可得知，將乙 a 移位至丁 a，須經過 2 個 b，將甲 a 移位至丙 a，同樣須經過 2 個 b，甲丙 a與乙丁 a皆分別和丙甲 b與丁乙 b皆產生相交，交點數為 4，恰好是甲乙 a 移動至丙與丁位置的 B(最少移位次數)。

【圖四】-分解 2



接續「分解 1」進行移位，再將丁 a 移位至己 a，須經過 2 個 c；將丙 a 移位至戊 a 同樣須經過 2 個 c。丙戊 a與丁己 a皆分別和戊丙 c與己丁 c產生相交，交點數也恰好是丙、丁 a 移動至戊、己位置的最少移位次數。由此可進一步了解，丁 a 移位時，如線段的交點一樣，代表會與戊 c 與己 c 進行相鄰移位，**可知交點與最少移位次數有相關性**。

【圖四】-分解 3



接續「分解 2」進行移位，將乙 b 移位至丁 b 須經過 2 個 c，將甲 b 移位至丙 b 同樣須經過 2 個 c，甲丙 b與乙丁 b和丙甲 c與丁乙 c皆產生相交的交點，交點數為 4，如分解 1、2 恰好是它們之間最少移位次數。我發現，以乙為例，移位時就如線段所呈現，會相交到從丙 c、丁 c 出發的線段，實際排列時也同樣會與丙 c、丁 c 進行相鄰移位，**由此可證明：交點數與最少移位次數是相同**的，且圖上的交點即代表兩條線段實際移位時會彼此進行相鄰移位。

3. 分別數出 二三四五-(2)(3)、二三四-(4) 的交點數，對照研究二所知的 B，觀察二者相關性，結果一切符合。(見「移位過程紀錄表」P22-23)

4.猜測

「各相同花色相連之線兩兩相交的交點數」就是直線相鄰移位之 B。

5.舉例與驗證

依照遊戲條件，我設計四個題目。將題目中出現的花色隨意排成結果，分別用一一列出和畫線的方法，數出它們的 B 與交點數，實際操作結果整理如下：

設計題目	abcde ➡ebadc	aabbcc ➡bcaabc	aaabbb ➡baabab	aaaabbbb ➡abbaabba
「一一列出」最少移位次數	6	5	4	8
交點數	6	5	4	8
驗證結果	相同	相同	相同	相同

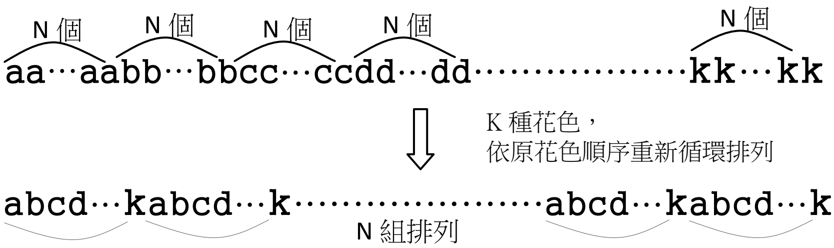
【表八】見「移位過程紀錄表」P24-25

6.疑問

只要稍微改變遊戲條件，就能創造新的數學遊戲。研究一、二是在花色排列順序完全互換位置的條件下進行移位，假如我試著改變最後的排列結果，是否依然有規律性？

研究四：符合遊戲條件下，改變最後排列順序來設計新遊戲，探討最少移位次數與任意種花色種類、每種花色數量為任意個之間的規則。

依原花色順序重新循環排列



1.過程

由研究二知，主題(一)和(二)內容一樣，只是基準不同。因此，我依照最後排列要求～依原花色順序重新循環排列，一一列出 二三四五-(2)(3)(4)(5) 的所有排列方式。(見「移位過程記錄表」P26-31、「移位過程整理表」P3)

2. 發現

(1)當 N=2，

花色種類=K，B_K 的推論過程見「附錄一」。因此 B_K 整理如下： 【表九】

最少移位次 / 花色種類數 K / 每種色數 N	二	三	四	五	六	七	…	K
(2)	1x1	(1+2)x1	(1+2+3)x1	(1+2+3+4)x1	(1+2+3+4+5)x1	(1+2+3+4+5+6)x1	……	〔1+2+3+......+(K－1)〕x1

(2) 以此類推，當 **N 固定**為(3)、(4)、(5)，而花色種類為二種、三種、......、或 k 種時，B 整理如下；並觀察 K 固定時，改變 N 因素對 B 所產生的變化。

【表十】三四五-(2)(3)(4)(5)見「移位過程紀錄表」P26-31 之整理

最少移位次數 B / 花色種類數 K / 每種花色數量 N	二	三	四	五	…….	K
(2)	1x1	(1+2)x1	(1+2+3)x1	(1+2+3+4)x1	……	〔1+2+3+......+(K－1)〕x1
(3)	1x3	(1+2)x3	(1+2+3)x3	(1+2+3+4)x3	……	〔1+2+3+......+(K－1)〕x3
(4)	1x6	(1+2)x6	(1+2+3)x6	(1+2+3+4)x6	……	〔1+2+3+......+(K－1)〕x6
(5)	1x10	(1+2)x10	(1+2+3)x10	(1+2+3+4)x10	……	〔1+2+3+......+(K－1)〕x10

K 影響 B 最小，故選擇 K=2 情況下，探討 N 與 B 的規律關係。

不管花色種類是二、三、四、五、......、或 K 種，
K 固定時，隨著 N 的改變，B 所產生的變化皆相同。

(3)當 K=2，

每種花色數量=N，B_N 的推論過程見「附錄二」。因此 B_N 整理如下：

【表十一】

最少移位次數 B / 每花色數量 N / 花色種類數 K	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	....	(N)
二	1×1	1×(1+2)	1×(1+2+3)	1×(1+2+3+4)	1×(1+2+3+4+5)	......	1×〔1+2+3+......+(N－1)〕

(4)以此類推，當 **K 固定**，分別有二、三、四、五種花色，而每種花色數量為(2)、(3)、(4)、(5)......、或(N)個時，B 整理如下：

最少移位次數 B / 每花色數量 N / 花色種類數 K	(2)	(3)	(4)	(5)	(N)
二	1×1	1×(1+2)	1×(1+2+3)	1×(1+2+3+4)	1×(1+2+...+N)
三	(1+2)×1	(1+2)×(1+2)	(1+2)×(1+2+3)	(1+2)×(1+2+3+4)	(1+2)×(1+2+...+N)
四	(1+2+3)×1	(1+2+3)×(1+2)	(1+2+3)×(1+2+3)	(1+2+3)×(1+2+3+4)	(1+2+3)×(1+2+...+N)
五	(1+2+3+4)×1	(1+2+3+4)×(1+2)	(1+2+3+4)×(1+2+3)	(1+2+3+4)×(1+2+3+4)	(1+2+3+4)×(1+2+...+N)

【表十二】

N 固定，隨著 K 的改變，B 所產生的變化皆相同。

3. 尋找規律

綜合「發現」，將 K、N 與 B 間之變化，整理如下並觀察之：

花色種類 K / 最少移位次數 B / 每種花色數量 N	二	三	四
(2)	1×1	(1+2)×1	(1+2+3)×1
(3)	1×(1+2)	(1+2)×(1+2)	(1+2+3)×(1+2)
(4)	1×(1+2+3)	(1+2)×(1+2+3)	(1+2+3)×(1+2+3)
(5)	1×(1+2+3+4)	(1+2)×(1+2+3+4)	(1+2+3)×(1+2+3+4)
⋮	⋮	⋮	⋮
(N)	1×〔1+2+...+(N-1)〕	(1+2)×〔1+2+...+(N-1)〕	(1+2+3)×〔1+2+...+(N-1)〕

花色種類 K / 最少移位次數 B / 每種花色數量 N	五	....	K
(2)	(1+2+3+4)×1	......	〔1+2+3+......+(K－1)〕×1
(3)	(1+2+3+4)×(1+2)	......	〔1+2+3+......+(K－1)〕×(1+2)
(4)	(1+2+3+4)×(1+2+3)	......	〔1+2+3+......+(K－1)〕×(1+2+3)
(5)	(1+2+3+4)×(1+2+3+4)	......	〔1+2+3+......+(K－1)〕×(1+2+3+4)
⋮	⋮	⋮	⋮
(N)	(1+2+3+4)×〔1+2+...+(N-1)〕	....	〔1+2+3+......+(K－1)〕×〔1+2+...+(N-1)〕

【表十三】

我發現，當有 K 種花色，每種花色數量為 N 時，

B=〔1+2+3+......+(K－1)〕×〔1+2+3+......+(N－1)〕

4. 發現通式

從上面推論的規律作式子化簡，可得到：

B=〔1+2+3+......+(K－1)〕×〔1+2+3+......+(N－1))

$$=\frac{K(K-1)}{2}\times\frac{N(N-1)}{2}$$

5. 預測

根據發現的通式預測，當每種花色與數量改變為　二-(8)、二-(9)、三-(6)時，B 為：

題目	二-(8)	二-(9)	三-(6)
預測 最少移位次數	$\frac{2(2-1)}{2}\times\frac{8(8-1)}{2}$	$\frac{2(2-1)}{2}\times\frac{9(9-1)}{2}$	$\frac{3(3-1)}{2}\times\frac{6(6-1)}{2}$
	28	36	45

【表十四】

6. 驗證：(1)實際操作結果和預測相同。(見「移位過程紀錄表」P34-35 之整理)

(2)將通式帶入已完成題目，所得的 B 與之前操作結果相同。

顛倒花色順序重新循環排列

N 個　N 個　N 個　N 個　N 個

aa⋯aabb⋯bbcc⋯ccdd⋯dd⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯kk⋯kk

⇩ K 種花色，
顛倒花色順序重新循環排列

k⋯dcbak⋯dcba⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯k⋯dcbak⋯dcba

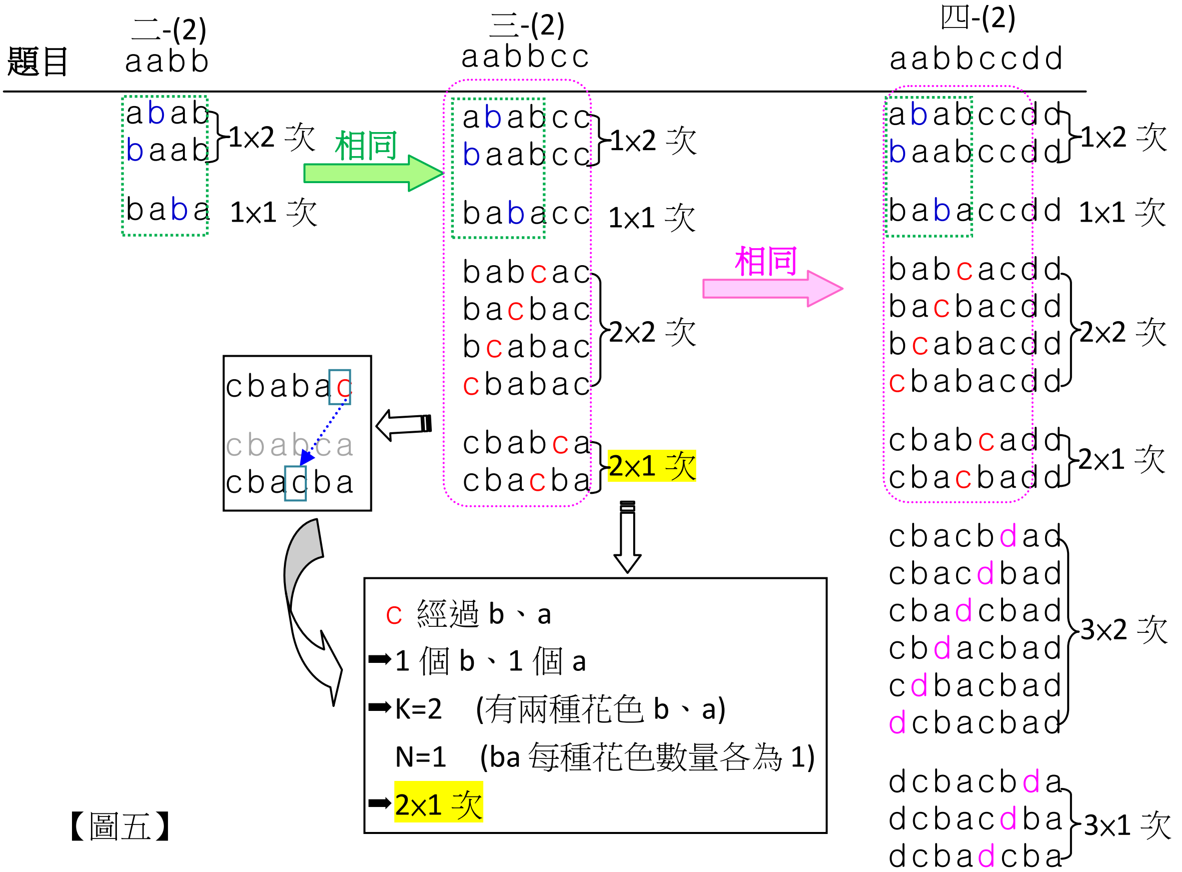
N 組排列

1.過程

我依照最後排列要求～顛倒花色順序重新循環排列，一一列出 二三四五-(2)(3)(4)的所有排列方式。(見「移位過程記錄表」P36-41)

2.發現

N 固定為 2，觀察 二三四-(2) 之規律。



【圖五】

3.尋找規律

用同樣方法檢驗二三四五-(2)(3)(4)，整理如下，並觀察 K、N 和 B 間的關係：

最少移位次數 B ／ 花色種類數 K ／ 每花色數量 N	二	三	四	五
(2)	1x(1+2)	(1+2)x(1+2)	(1+2+3)x(1+2)	(1+2+3+4)x(1+2)
(3)	1x(1+2+3)	(1+2)x(1+2+3)	(1+2+3)x(1+2+3)	(1+2+3+4)x(1+2+3)
(4)	1x(1+2+3+4)	(1+2)x(1+2+3+4)	(1+2+3)x(1+2+3+4)	(1+2+3+4)x(1+2+3+4)

【表十五】 (依照「移位過程紀錄表」P36-41 之整理)

我發現「B 會隨 K、N 增減呈規律性變化」，因此推論：

(1) N=2，花色種類=K，B_K=〔1+2+3+......+(K－1)〕×(1+2)

(2) K=2，每花色數量=N，B_N=1×(1+2+3+......+N)

(3) 所以，當 K=1、2...、或 K，N=1、2......、或 N 時，B=〔1+2+3+......+(K－1)〕×(1+2+...+N)

4.發現通式

將上面推論的規律作式子化簡，可得到：

B=〔1+2+3+......+(K－1)〕×(1+2+...+N)

$$=\frac{K(K-1)}{2}\times\frac{(1+N)N}{2}$$

5.預測

根據發現的通式預測，當每種花色與數量改變為二-(5)、三-(5)、二-(6)時，B 為：

題目	二-(5)	三-(5)	二-(6)
預測 最少移位次數	$\frac{2(2-1)}{2}\times\frac{5(5+1)}{2}$	$\frac{3(3-1)}{2}\times\frac{5(5+1)}{2}$	$\frac{2(2-1)}{2}\times\frac{6(6+1)}{2}$
	15	45	21

【表十六】

6.驗證：(1)實際操作結果和預測相同。(見「移位過程紀錄表」P42 之整理)

(2)將通式帶入已完成題目，所得的 B 與之前操作結果相同。

7.疑問

在尋找規律過程中，我發現和依原花色順序重新循環排列有雷同之處：

最後排列順序 / 最少移位次數B / 題目	依原花色順序重新循環排列 abab...ab	顛倒花色順序重新循環排列 baba...ba
二-(2)	1×(1) 相同	1×(1+2)
二-(3)	1×(1+2) 相同	1×(1+2+3)
二-(4)	1×(1+2+3) 相同	1×(1+2+3+4)
二-(5)	1×(1+2+3+4)	1×(1+2+3+4+5)
三-(2)	(1+2) ×(1) 相同	(1+2)×(1+2)
三-(3)	(1+2) ×(1+2) 相同	(1+2)×(1+2+3)
三-(4)	(1+2) ×(1+2+3) 相同	(1+2)×(1+2+3+4)
三-(5)	(1+2) ×(1+2+3+4)	(1+2)×(1+2+3+4+5)

【表十七】兩種最後排列順序之比較

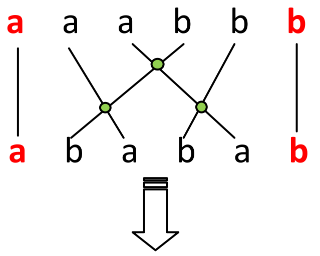
這是甚麼原因？

兩種最後排列順序之比較 ~~ 以「二-(3)」為例

1、 觀察與發現

用畫線方式觀察 K 與 B 的關係。

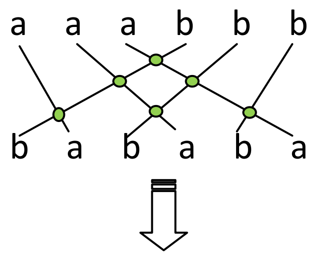
依原花色順序重新循環排列



頭尾 ab 不需進行移位
➡只有 4 個數進行相鄰移位。
➡N 少 1 個，因此移位同二-(2)

【圖六】

顛倒花色順序重新循環排列



6 個數都要進行相鄰移位
➡N 不變，有(3)個。

【圖七】

我發現：

(1)由【圖六】知，實際上是中間的 4 個數~aabb 移位成 baba，此結果與顛倒花色順序重新循環排列的二-(2)相同。

2、 二者關聯

比較其移位方式，發現 B 之差異是在 N，因此，從二者**規律式子**之 N 觀察：

依原花色順序重新循環排列

$$B=\frac{K(K-1)}{2}\times\frac{\boxed{N}\boxed{(N-1)}}{2}$$

(頭尾)和=N　個數=(N-1)

$$\overbrace{1+2+3+\ldots\ldots+(N-3)+(N-2)+(N-1)}$$

(頭尾)和=N

相差一個 N

顛倒花色順序重新循環排列

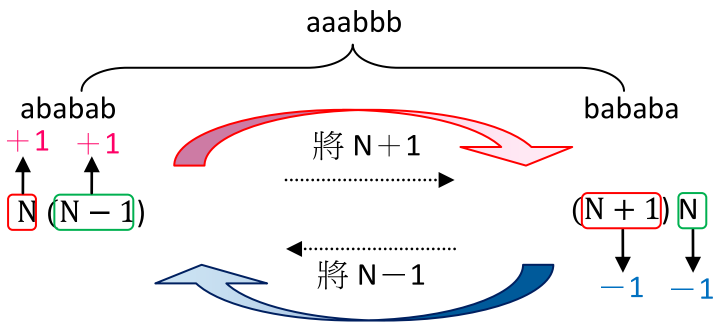
$$B=\frac{K(K-1)}{2}\times\frac{\boxed{(N+1)}\boxed{N}}{2}$$

(頭尾)和=N+1　個數=N

$$\overbrace{1+2+3+\ldots\ldots+(N-2)+(N-1)+N}$$

(頭尾)和=N+1

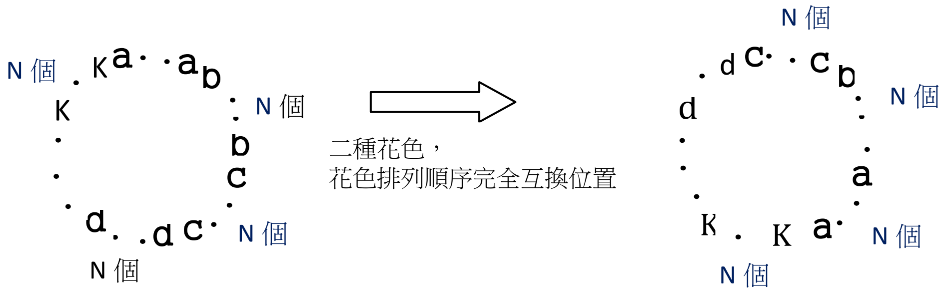
因 B 受 K 影響皆相同，直接找出兩者 N 的關聯。



【圖八】

研究五：符合遊戲條件下，改變排列圖形為順時鐘環形

(一) 花色排列順序完全互換位置下， K、N 為任意數時，探討 B 之規則： 。



1、 過程

(1)過程中採用直線移位方法雖然能解開遊戲，卻不是「最少移位次數」。

(2)經過多方嘗試後，我發現在移位過程中有些採用「倒走」，搭配「順走」~與直線移位相同，會是最少移位次數。(見「移位過程記錄表」P43-44、P48-55)

B 之整理如下：

每花色數量 N / 最少移位次數 B / 花色種類數 K	(2)	(3)	(4)
二	0	0	0
三	1×2×2	1×3×3	1×4×4
四	（1+1）×2×2	（1+1）×3×3	（1+1）×4×4
五	（1+2+1）×2×2	（1+2+1）×3×3	（1+2+1）×4×4
六	（1+2+2+1）×2×2		
七	（1+2+3+2+1）×2×2		
八	（1+2+3+3+2+1）×2×2		
九	（1+2+3+4+3+2+1）×2×2		

【表十八】依照「移位過程紀錄表」P43-44、P48-55 之整理

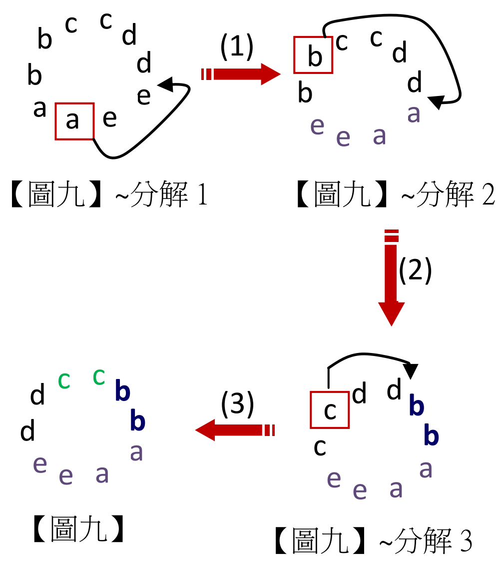
2、 發現

以題目「五-(2)」為例

(1)a「倒走」，與 2 個 e (一種花色的數量)相鄰移位，移位 1x2 次。因 a 花色數量有 2 個，步驟重複 2 次，所以，移位 1x2x2=4 次。

(2)b「倒走」、「順走」都是經過 2 種花色，因此採用「順走」(與直線移位相同)，移位 2x2 次(經過 2 種花色 c、d，每種花色數量皆 2 個)。因 a 花色數量有 2 個，所以，移位 2x2x2=8 次。

(3)c「順走」，與 2 個 d (一種花色的數量)相鄰移位，移位 1x2 次。因 a 花色數量有 2 個，所以，移位 1x2x2=4 次。



【圖九】~分解 1　【圖九】~分解 2　【圖九】~分解 3　【圖九】

所經過的花色種類數

所經過的每種花色種類的數量有 2 個。

$$B=\left(\boxed{\boxed{1+2}+\boxed{1}}\right)\times\boxed{2}\times\boxed{2}$$

本身花色數量有 2 個，動作重複 2 次。

順走　倒走

3、 尋找規律

(1)觀察環形題目 K、N 與 B 的關係，我發現：

以「三-(2)～(4)」為例

【表十九】

最少移位次數 B ／ 每花色數量 N ／ 花色種類數 K	(2)	(3)	(4)
三	1×2×2	1×3×3	1×4×4

1 皆沒改變，可知受 K 固定影響。

數目皆不同，且與 N 相似，可知受 N 改變影響。

當 K 固定，B 會受 N 的影響而改變。

(2)以此方法交叉檢驗、觀察「表十八」之 K、N 與 B 間的關係，發現「B 會隨 K、N 增減呈規律性變化」，因此推論：

K 為偶數，　$B=[2+4+6+\cdots+(K-2)]\times N\times N$

K 為奇數，　$B=\left[2+4+6+\cdots+(K-3)+\dfrac{K-1}{2}\right]\times N\times N$

4、 發現通式

將上面推論的規律作式子化簡，可得到：

K 為偶數

$$\begin{aligned}B&=[2+4+6+\cdots+(K-2)]\times N\times N\\&=K\times\frac{K-2}{2}\times\frac{1}{2}\times N^2=\frac{K(K-2)}{4}\times N^2\end{aligned}$$

K 為奇數

$$\begin{aligned}B&=\left[2+4+6+\cdots+(K-3)+\frac{K-1}{2}\right]\times N\times N\\&=(K-1)\times\frac{K-1}{2}\times\frac{1}{2}\times N^2=\frac{(K-1)^2}{4}\times N^2\end{aligned}$$

5、 預測

根據發現的通式預測，當每種花色與數量改變為六-(3)、七-(3) 時，B 為

題目	六-(3)	七-(3)
預測最少移位次數	$\dfrac{6\times(6-2)}{4}\times 3^2$	$\dfrac{(7-1)^2}{4}\times 3^2$
	54	81

【表二十】

6、 驗證

(1)實際操作結果和預測相同。(見「移位過程紀錄表」P45-47 之整理。)

(2)將通式帶入已完成題目，所得的 B 與之前操作結果相同。

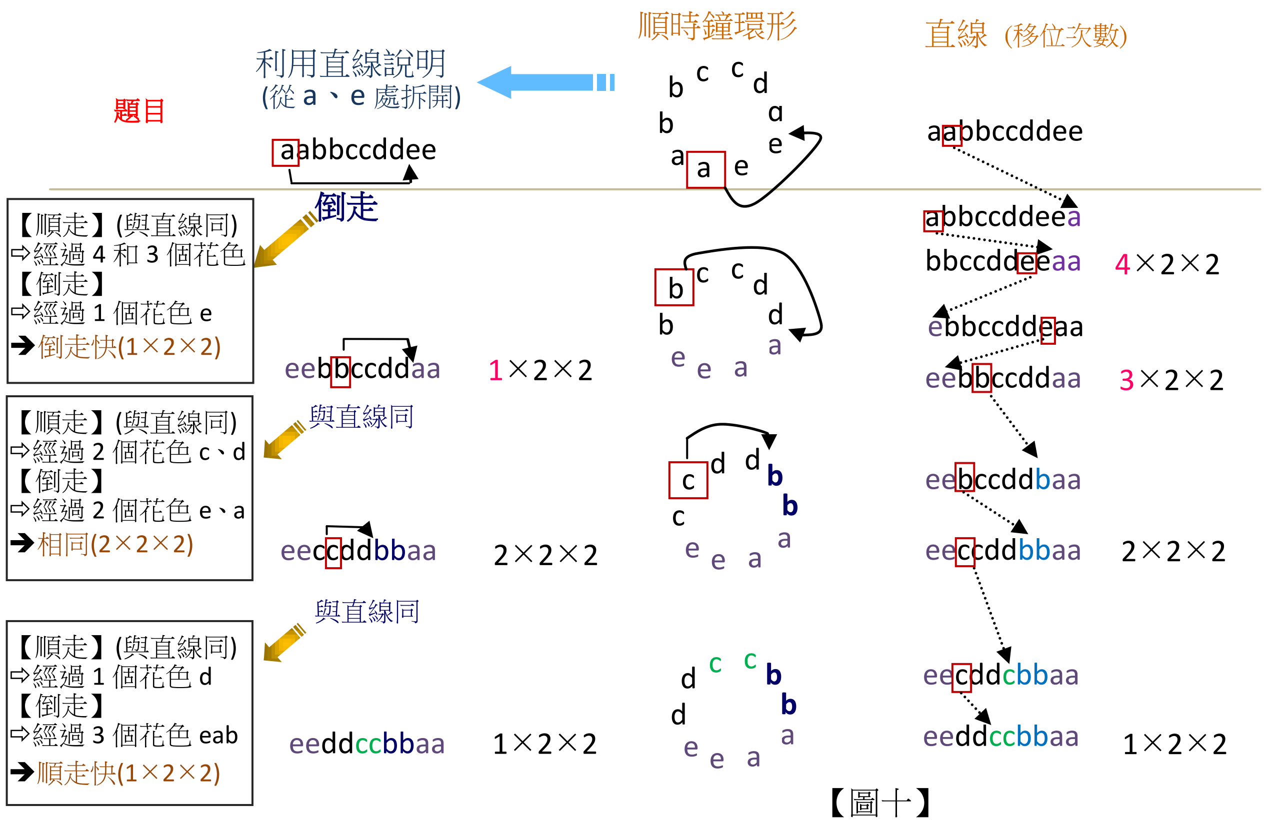
7、 疑問

在尋找規律過程中，我發現和直線型移位有雷同之處，這是怎麼一回事呢？

與直線型之比較~~以「**五-(2)**」為例

1. 從操作過程中觀察二者：

我將直線型與環形兩種排列圖形在花色排列順序完全互換位置的遊戲條件下，一一列出 二～九-(2) 二～五-(3)～(5) 的移位過程並進行比對，觀察之間的差異，進而找到兩者關聯。



【圖十】

(1)環形拆開便是直線型。

(2)觀察【圖十】移位方式對 B 的影響：

由於環形可「倒」的走(頭、尾相鄰移位)，因此會較直線型減少所經過的「花色種類數」，降低移位次數。

(3)觀察【表二十一】，發現在適當位置~「$\frac{K}{2}-1$」(K 為偶數)、$\frac{K-1}{2}-1$(K 為奇數)前移位方式採用「倒」的走，B 較直線型少。(見【表二十一】環形與直線 B 之藍色數字)

題目 ＼ 排列圖形 最少移位次數B	順時鐘環形	直線
二-(2)	0	1×2^2
三-(2)	1×2^2	$(1+2)\times 2^2$
四-(2)	$(1+\mathbf{1})\times 2^2$	$(1+\mathbf{2}+\mathbf{3})\times 2^2$
五-(2)	$(1+2+\mathbf{1})\times 2^2$	$(1+2+\mathbf{3}+\mathbf{4})\times 2^2$
六-(2)	$(1+2+\mathbf{2}+\mathbf{1})\times 2^2$	$(1+2+\mathbf{3}+\mathbf{4}+\mathbf{5})\times 2^2$
七-(2)	$(1+2+3+\mathbf{2}+\mathbf{1})\times 2^2$	$(1+2+3+\mathbf{4}+\mathbf{5}+\mathbf{6})\times 2^2$
八-(2)	$(1+2+3+\mathbf{3}+\mathbf{2}+\mathbf{1})\times 2^2$	$(1+2+3+\mathbf{4}+\mathbf{5}+\mathbf{6}+\mathbf{7})\times 2^2$
九-(2)	$(1+2+3+4+\mathbf{3}+\mathbf{2}+\mathbf{1})\times 2^2$	$(1+2+3+4+\mathbf{5}+\mathbf{6}+\mathbf{7}+\mathbf{8})\times 2^2$

【表二十一】(依照「移位過程紀錄表」P48-51 之整理)

2.從規律式子中觀察二者：

觀察其移位方式，發現 B 之差異是在 K，因此，從二者**規律式子**之 K 觀察：

(1) K 為偶數

依順時鐘環形排列

$2+4+6+\dots\dots+(K-6)+(K-4)+(K-2)$

(頭尾)和＝K　個數＝$\frac{K}{2}-1$

$B=K\times\boxed{\left(\frac{K}{2}-1\right)}\times\frac{1}{2}\times N^2$

直線型排列

$1+2+3+\dots\dots+(K-3)+(K-2)+(K-1)$

(頭尾)和＝K　個數＝K−1

$B=K\times\boxed{(K-1)}\times\frac{1}{2}\times N^2$

倒走數

相異處

【圖十一】

(2) K 為奇數

依順時鐘環形排列

$2+4+6+\dots\dots+(K-7)+(K-5)+(K-3)+\frac{k-1}{2}$

(頭尾)和＝K−1　個數＝$\frac{K-1}{2}$

$B=\boxed{(K-1)}\times\boxed{\frac{K-1}{2}}\times\frac{1}{2}\times N^2$

直線型排列

$1+2+3+\dots\dots+(K-3)+(K-2)+(K-1)$

(頭尾)和＝K　個數＝K−1

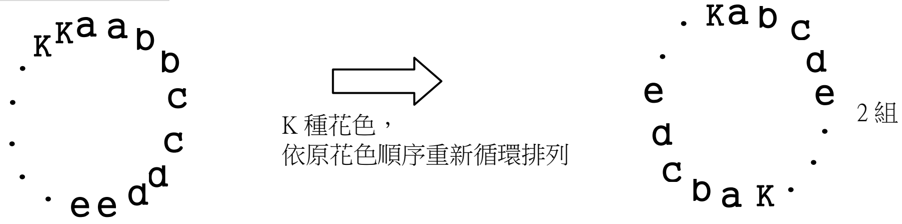
$B=\boxed{K}\times\boxed{(K-1)}\times\frac{1}{2}\times N^2$

相異處

相異處

【圖十二】

(二) 有任意種花色，每種花色數量都是 2 個(N=2)排列成順時鐘環形下，進行相鄰移位，依原花色順序重新循環排列成順時鐘環形，尋找 B 之規律。



1.過程

我依照題目要求，列出二～九-(2)的排列方式(記錄表中一個圖、即為 1K 其中 1N 的移位過程)，並註明移位次數。(見「移位過程記錄表」P58-59)

2.尋找規律

N=2，

改變 K，將 B 之操作依據「移位過程記錄表」P 48～P49 整理如下，並觀察 K 與 B 間的關係：

題目	B(最少移位次數)	
二-(2)	1	
三-(2)	3➡1+2	+ 2
四-(2)	6➡1+2+3	+ 3
五-(2)	10➡1+2+3+4	+ 4
六-(2)	15➡1+2+3+4+5	+ 5
七-(2)	21➡1+2+3+4+5+6	+ 6
八-(2)	28➡1+2+3+4+5+6+7	+ 7
九-(2)	36➡1+2+3+4+5+6+7+8	+ 8

【表二十二】

我發現「B 會隨 K 增減呈規律性變化」，因此推論：

N 固定=2，花色種類=K 時， $B_K=1+2+3+\ldots\ldots+(K-1)$

3.發現通式

從上面推論的規律作式子化簡，可得到：

N 固定=2　　　$B_K=1+2+3+\ldots\ldots+(K-1)$

$$=〔1+(K-1)〕\times(K-1)\times\frac{1}{2}=\frac{K(K-1)}{2}$$

4. 預測

根據發現的通式預測，N 固定=2，K(花色種類數)改變為十、十一、十二種時，B 為：

題目	十-(2)	十一-(2)	十二-(2)
預測 最少移位次數	$\frac{10(10-1)}{2}$	$\frac{11(11-1)}{2}$	$\frac{12(12-1)}{2}$
	45	55	66

【表二十三】

5.驗證：

(1)實際操作結果和預測相同。(見「移位過程紀錄表」P60-61 之整理)

(2)將通式帶入已完成題目，所得的 B 與之前操作結果相同。

6.疑問：

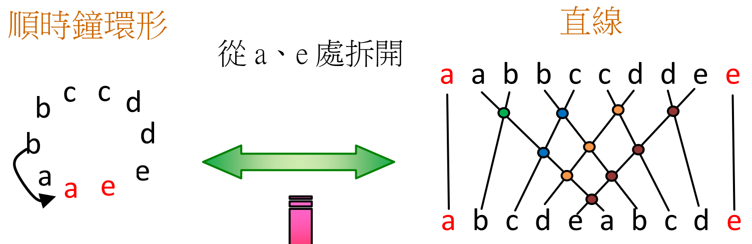
B 和直線(N＝2，K 為任意數)相同，這是怎麼回事？

與直線型之比較~~以「**五-(2)**」為例

1. 觀察與發現

(1)

順走
與直線相同

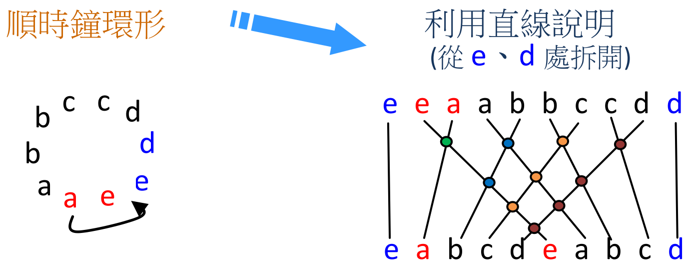


【圖十三】 【圖十四】

我發現：
由【圖十三、十四】知，頭尾 a、e 不需進行移位，因此環狀所需移位的花色數與直線相同，步驟(順著走)也相同。如：【圖十三】環狀「b」移到 a、a 間，需經過 1 個 a，次數 1×1 次，同【圖十四】(綠色圓圈)。c、d、e 以此類推。

(2)

倒走
從頭尾 ae 處移位

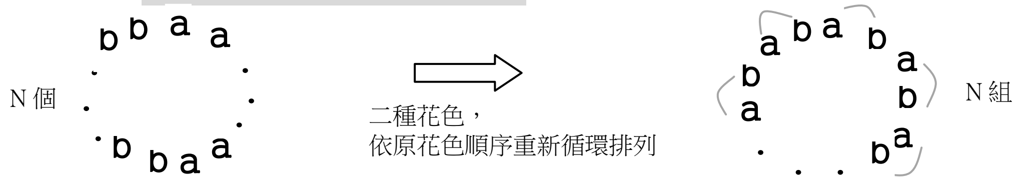


【圖十五】 【圖十六】

我發現：
由【圖十五、十六】知，環形「倒走」~從頭尾 a、e 處移位，所需移位的花色數與從「e、d」處拆開呈直線相同，步驟也相同。
如：【圖十五】環形「a」倒走，移到 e、e 間，需經過 1 個 e，次數 1×1 次，同【圖十六】(綠色圓圈)。b、c、d 以此類推。

結論：依原花色順序重新循環排列成順時鐘環形，其 B 和直線(N＝2，K 為任意數)相同。

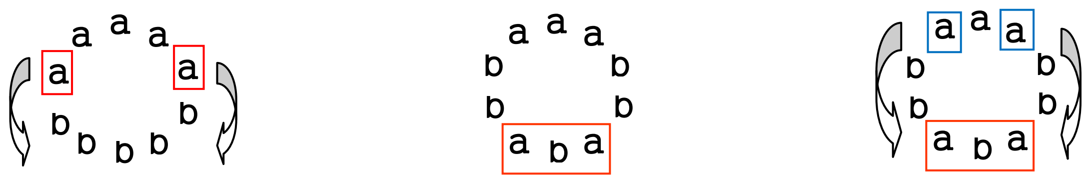
(三) 有二種花色(a、b)，每種花色數量都相等(2 個、3 個、…、或 N 個) 下排成順時鐘環形，並進行相鄰移位，依原花色順序重新循環排列成順時鐘環形，尋找 B 之規律。



1. 過程

我依照題目要求，一一列出二-(2)～(9)的排列方法。經過多次試驗，發現了兩種能夠找出最少移位次數的方法。

(方法一)



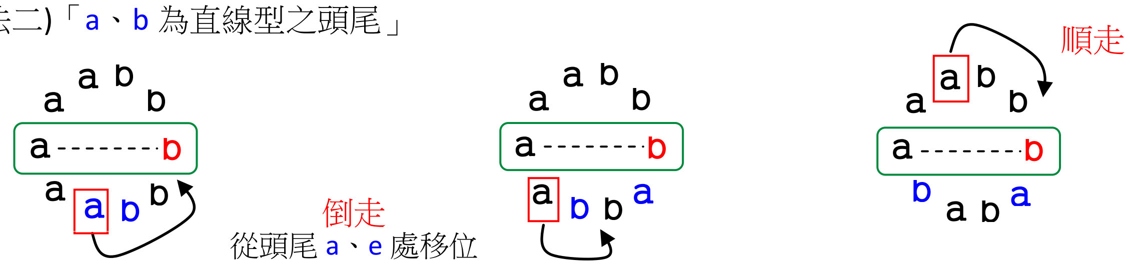
a 分兩邊向下進行移位

在 b 花色數量的中間形成 aba 此狀態。

a 同第一步驟，向左右兩邊進行移位。

【圖十七】 【圖十八】 【圖十九】

(方法二)「a、b 為直線型之頭尾」



考慮「倒走」，將圖中綠框內的 a 與 b 設定為對稱中心，同(法一)分成兩邊移位~「倒走」與「順走」。

以「倒走」方式分別將 a 往軸 b 進行移

對稱中心的一邊完成移位，接著再換另一邊(即「順走」)進行移位。

【圖二十】 【圖二十一】 【圖二十二】

兩種類似的移位方法，因(方法二)較容易看出與直線型之間的關係，故本研究採用此移位方法記錄過程。

2.尋找規律

K=2，改變 N，將 B 之操作依據「移位過程記錄表」P 62-64、P 67-69 整理如下，

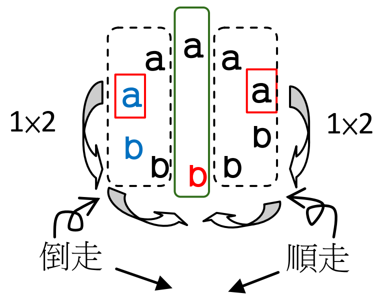
並觀察 N 與 B 間的關係：

題目	B (最少移位次數)
二-(2)	1➡1×1➡1×1
二-(3)	2➡1×(1+1) ➡1×2
二-(4)	4➡1×(1+2+1) ➡1×2+2
二-(5)	6➡1×(1+2+2+1) ➡1×(2+4)
二-(6)	9➡1×(1+2+3+2+1) ➡1×(2+4)+3
二-(7)	12➡1×(1+2+3+3+2+1) ➡1×(2+4+6)
二-(8)	16➡1×(1+2+3+4+3+2+1) ➡1×(2+4+6)+4
二-(9)	20➡1×(1+2+3+4+4+3+2+1) ➡1×(2+4+6+8)

+ 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 4 + 4

【表二十四】

二-(5)



兩者移位次數皆為 1×2，將兩邊合併，變為 1×(2×2)=1×4。

因環形對稱中心兩邊，採用「倒走」與「順走」的 B 分別相同，所以我將兩邊移法同樣步數的加在一起，列出規律式子。

我發現「B 會隨 K 增減呈規律性變化」，因此推論：：

(1) K 固定=2，每種花色數量=N 且為奇數時：

$$B_N=2+4+6+\cdots+〔N-1)$$

(2) K 固定=2，每種花色數量=N 且為偶數時：

$$B_N=[2+4+\cdots(N-2)]+\frac{N}{2}$$

3.發現通式

從上面推論的規律，可化簡如下：

K 固定=2，每種花色數量=N 且為奇數時：

$$B_N=2+4+6+\cdots+〔N-1)$$

$$=(2+N-1)\times\frac{N-1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{N^2-1}{4}$$

K 固定=2，每種花色數量=N 且為偶數時：

$$B_N=[2+4+6+\cdots+(N-2)]+\frac{N}{2}$$

$$=(2+N-2)\times\frac{N}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{N^2}{4}$$

4.預測

根據發現的通式預測，K 固定=2，N(花色數量)改變為(10)、(11)、(12)個，B 為：

題目	二-(10)	二-(11)	二-(12)
預測 最少移位次數	$\dfrac{10\times 10}{4}$	$\dfrac{11\times 11-1}{4}$	$\dfrac{12\times 12}{4}$
	25	30	36

【表二十五】

5.驗證：

(1)實際操作結果和預測相同。(見「移位過程紀錄表」P65-66 之整理。)

(2)將通式帶入已完成題目，所得的 B 與之前操作結果相同。

6.疑問：

研究五-(二)發現環形(N＝2，K 為任意數)之 B 和直線相同。但此題環形(K＝2，N 為任意數)之 B 和直線型卻變為不相同，這是怎麼回事？

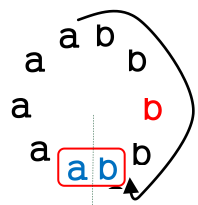
與直線型之比較~~以「**二-(5)**」為例

1.從操作過程中觀察二者

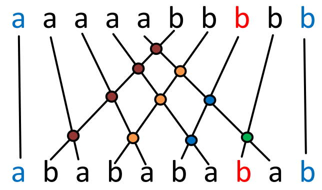
順時鐘環形　　直線

順走

與直線移法相同



從 a、b 處拆開



【圖二十三】　【圖二十四】

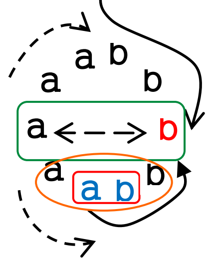
我發現：

不採取「倒走」方式(移位時不跨越頭尾 a、b)，將環狀型用「順走」方式移位，雖與直線型相同，卻不是環形的最少移位次數。

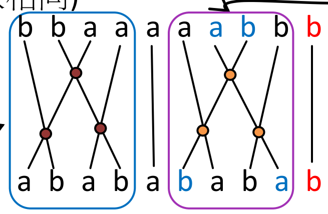
兩者為對稱中心　順走的步數，無跨越頭尾(與直線相同)　倒走的步數

倒走

從頭尾 ab 處移位



從 b 處拆開



【圖二十五】　【圖二十六】

我發現：

由【圖二十五】知，環形橘色圈內採取「倒走」方式移位~運用對稱的觀念，圖中 b 與綠框內的 a 設定為對稱中心，分兩邊進行移位。

先從環形使用「倒走」步數較少的一邊開始移位，由【圖二十六】可知，此移法等同將環形從 b 處和須「倒走」的 b 之間拆開為直線型，進行直線紫框內的移位情形。

此環形採用「倒走」移法會降低移位次數，所以 B 比直線型少。

2.從規律式子中觀察二者～以「二-(5)」為例

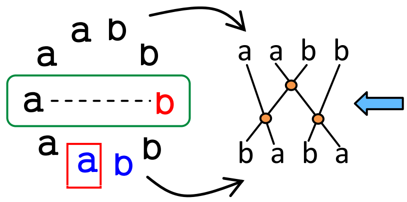
K 相同

所得規律式子

直線型 1×(1+2+3+4)

環狀型 1×(1+2+2+1)

不同：因直線型移法為「順走」，環形移法為「倒走」。



環形兩邊分別進行左圖的移位方法。

相同：因直線型與環形移法皆為「順走」。

【圖二十七】

因此，發現 B 之差異是在 N，因此，從二者**規律式子**之 N 觀察：

(1)N 為奇數

順時鐘環形

$$\underbrace{2+4+6+\cdots\cdots+(N-5)+(N-3)+(N-1)}_{(頭尾)和=N+1 \quad 個數=\frac{N-1}{2}}$$

直線型

$$\underbrace{1+2+3+\cdots\cdots+(N-3)+(N-2)+(N-1)}_{(頭尾)和=N \quad 個數=N-1}$$

相異處

$$B=\boxed{(N+1)}\times\boxed{\frac{N-1}{2}}\times\frac{1}{2}$$

$$B=\boxed{N}\times\boxed{(N-1)}\times\frac{1}{2}$$

相異處

倒走數

【圖二十八】

(2) N 為偶數

依順時鐘環形排列

$$\underbrace{2+4+6+\cdots\cdots+(N-6)+(N-4)+(N-2)}_{(頭尾)和=N \quad 個數=\frac{N}{2}}+\frac{N}{2}$$

直線型形排列

$$\underbrace{1+2+3+\cdots\cdots+(N-3)+(N-2)+(N-1)}_{(頭尾)和=N \quad 個數=N-1}$$

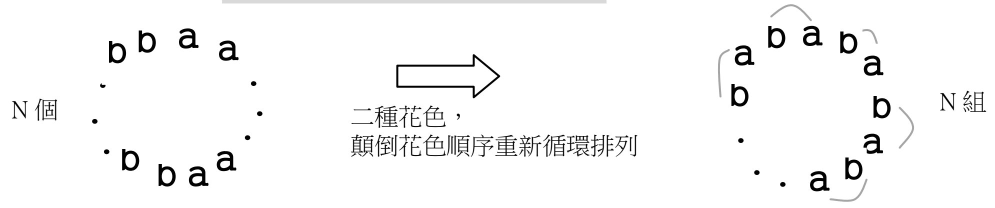
$$B=N\times\boxed{\frac{N}{2}}\times\frac{1}{2}$$

$$B=N\times\boxed{(N-1)}\times\frac{1}{2}$$

相異處

【圖二十九】

(四) 有二種花色(a、b)，每種花色數量都相等(2 個、3 個、…、或 N 個) 下排列成順時鐘環形，進行相鄰移位，顛倒花色順序重新循環排列成順時鐘環形，尋找 B 之規律。



1.發現

此問題與上題依原花色順序重新循環排列成順時鐘環形結果相同，因花色固定只有二種，只要觀看不同的起始點就能達到題目要求。假如從環形圖的 b 順時鐘方向看去，就是此題目的結果。

陸、 討論

一、舊遊戲新玩法。

只要從「最後排列順序」、「排列圖形」或「遊戲條件」做簡單改變，便可設計出新的遊戲，並增加其趣味與挑戰性。如：這次將舊遊戲~毛蟲棋之遊戲條件做簡單【改變】--①每種花色數量相等 ②題目為無空格、依順序排列方式 ③相鄰移位，便創造出新遊戲。

二、應用實作、觀察與分析、歸納及驗證的數學方法來研究直線與環形相鄰移位。

針對不同最後排列要求進行實際操作，從大量操作中觀察可能的規律後進行推論及假設，並驗證以確定其通式。之後，將通式帶入已完成題目，確保通式的正確性。

三、尋找規律的方法。

觀察規律式子的變化時，變因只能有一個，其他可能影響最少移位次數的因素都須固定。

四、考慮到作品說明書頁數與字數限制，許多操作歷程與證明過程以研究日誌呈現。

柒、 結論與展望

一、 結論

(一) 符合遊戲條件下，進行直線與環形相鄰移位，分別就不同的最後排列順序要求，探找最少移位次數與花色種類、每種花色數量間的規律性。

1. 直線型

有 K 種花色，每種花色數量有 N 個，最少移位次數如下：

(1) 花色排列順序完全互換位置，尋找規律後所得之通式為：$\frac{K(K-1)}{2} \times N^2$

(2) 依原花色順序重新循環排列，尋找規律後所得之通式為：$\frac{K(K-1)}{2} \times \frac{N(N-1)}{2}$

(3) 顛倒花色順序重新循環排列，尋找規律後所得之通式為：$\frac{K(K-1)}{2} \times \frac{N(N+1)}{2}$

2. 環形

(1) 有 K 種花色，每種花色數量有 N 個，花色排列順序完全互換位置下，尋找規律後所得之通式為：

K 為偶數時，$B=\frac{K(K-2)}{4}\times N^2$

K 為奇數時，$B=\frac{(K-1)^2}{4}\times N^2$

(2) 有 K 種花色，每種花色數量有 2 個，依原花色順序重新循環排列，尋找規律後所得之通式為：$B_K=\frac{K(K-1)}{2}$

(3) 有二種花色，每種花色數量有 N 個，依原花色順序重新循環排列，尋找規律後所得之通式為：

N 為奇數時，$B_N=\frac{N^2-1}{4}$

N 為偶數時，$B_N=\frac{N^2}{4}$

(4) 有二種花色，每種花色數量有 N 個，顛倒花色順序重新循環排列的結果因與【依原花色順序重新循環排列】只是觀看的起始點不同(剛好相反)，所以最少移位次數也會一樣。

(二) 尋找最少移位次數之方法。

發現除了將各遊戲題目相鄰移位過程一一列出以外，還可用畫線的方式，從各相同花色相連之線兩兩相交的交點數中，觀察出最少移位次數。

(三) 各研究間相關性

1、 觀察直線型依原花色順序重新循環排列和顛倒花色順序重新循環排列之間雷同之處，發現前者由於頭尾 ab 不需進行移位，N 少 1 個，因此 B 會與後者少一個 N 相同，如：前者「五(4)」之 B 同後者「五-(3」 之 B。

2、 在花色排列順序完全互換位置的遊戲條件下，將直線型與環形相鄰移位遊戲之過程比對，發現環形因可「倒」的走(頭、尾相鄰移位)，因此會減少所經過的「花色種類數」，降低移位次數。

3、 依原花色順序重新循環排列成順時鐘環形，其 B 和直線(N＝2，K 為任意數)相同。

這是因為二者頭、尾都不需移位。

4、 在依原花色順序重新循環排列成順時鐘環形的遊戲條件下，其 B 和直線(K＝2，N 為任意數)不同，是因：環形因可「倒」的走(頭、尾相鄰移位)，因此降低移位次數。

二、 展望

經過我深入的研究，發現後面還有很多問題值得在進一步探討，

(一) 舉例來說：研究是以【花色種類數】、【每種花色的數量】為變因、探討任意數時和 B 間關係，然因時間因素，在環狀型部分，依原花色順序重新循環排列與顛倒花色順序重新循環排列並未特別找出 K、N 皆為任意數，兩者與 B 之間的規律。其中，顛倒花色順序重新循環排列之題目，只求到 N 為 2，K 為任意數之 B 規律，並未找出 K 為 2，N 為任意數之 B 規律。希望有時間能將此部分再做進一步的研究。

(二) 此外，在此遊戲條件下我只在三種最後排列順序~「花色排列順序完全互換位置」、「依原花色順序重新循環排列」、「顛倒花色順序重新循環排列」探討最少移位次數之規律。日後有機會，可以針對不同最後排列順序，進行花色種類與每種花色數量之間規律性的研究。

(三) 本研究除直線與環形排列外，可持續發展其它變化型，如矩形、十字形...等；移位方式也可嘗試做改變，如相鄰移位改為跳格，都是很值得開發與努力方向。

捌、 參考資料及其他

一、 參考資料

(一) 數學領域部編本教科書編輯委員會。五上數學課本：第八單元多步驟問題。台南市：翰林出版事業公司。民 98。

(二) 康軒文教事業教科書群。六上數學課本：第五單元數量關係。台北縣：康軒文教事業公司。民 99。

(三) 康軒文教事業教科書群。六下數學課本：第八單元簡化問題。台北縣：康軒文教事業公司。民 100。

(四) 國立台灣科學教育館。中華民國歷屆中小學科學展覽會優勝作品。取自：http://www.ntsec.gov.tw/m1.aspx?sNo=0000263

二、 心得感想

從大量實作例子中自己發現通式，有別於平常數學學習歷程(很快的告訴你公式，之後應用公式解各種數學問題)。雖然過程中需花許多時間，但歸納出通式的那一刻，卻是充滿喜悅與成就。

【評語】080405

一個有意思的移位遊戲。為了之前已有的多種移位遊戲區隔，作者自己定義了一種新的移位規則，針對這樣的規則，作者討論了將 n 類給定的物件依直線或環形排列，再重新依規則排成相反順序，或是看來像是循環的次序，完成重排所需的最少步數，能自己思考一個新的問題並推演規則，是十分難得的。比較可惜的是，由於規則過於簡單，許多的結果變成只是單純的級數和計算。如能去除掉每類物件個數相同限制，並針對環形列給出完整的解答，會是很不錯的結果。