

# 中華民國第 51 屆中小學科學展覽會 作品說明書

---

國小組 數學科

080404

兵臨城下

學校名稱：澎湖縣馬公市石泉國民小學

作者：	指導老師：
小四 許宏誌	洪進益
小四 朱泓睿	王婉妮
小四 黃建夫	
小四 李俞賢	
小四 王 譽	

關鍵詞：圍棋、拈、數學遊戲

# 兵臨城下

## 摘要

老師教我們玩了一個圍棋的數學遊戲-「兵臨城下」，看似公平的遊戲，其實暗藏玄機。利用倒推法，我們一盤一盤的進行分析，終於在努力研究和老師的討論中，找到了其中的奧秘：(一)、一路玩法必勝絕招：**掌握  $n+1$  這個必勝點**，就要掌握到  $n+1$  的倍數，即可掌握優勢取最後一顆而致勝。(二)、二路玩法必勝絕招：掌握到**對稱的盤型**，或利用**餘數判斷法**，使兩路餘數相等。(三)、三路玩法必勝絕招：利用**餘數判斷法**掌握五個關鍵必勝點： $(0,0,0)$   $(0,1,1)$   $(0,2,2)$   $(0,3,3)$   $(1,2,3)$ 。(四) 結合數學二進位法的運用。(五) 進行遊戲的改良和設計：除可增加為  $n$  路玩法外，雙方還可以任意先擺好棋子，再開始互相進攻，以增加遊戲的趣味性和變化。

## 壹、研究動機

有一次下課的時候，老師看我們在教室內玩圍棋，於是過來教我們玩了一個很好玩的圍棋遊戲，叫做兵臨城下。遊戲的方式是拿出三顆黑子和白子，擺在棋盤的兩邊，共有三路棋，兩人輪流移動進攻，最多前進三步，最少前進一步，勝負的方式就是當有一方無法前進，只能後退時，就算他輸了。這個遊戲引起班上同學熱烈的比賽，但是似乎都是靠運氣獲勝，也讓我們很有興趣，決定來找找看，是否有必勝的方法。

## 貳、研究目的

- 一、研究「兵臨城下」這個有趣的數學遊戲，找出必勝的條件和規則。
- 二、能從此數學遊戲中，歸納出規律性和公式。
- 三、透過研究的結果，進而自行設計出更有趣的玩法和規則。

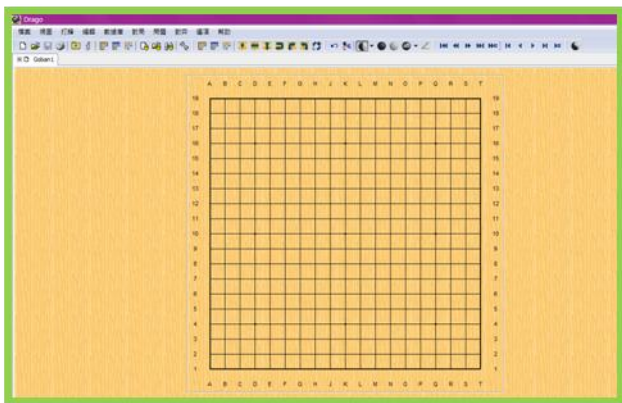
## 參、研究設備及器材



圍棋盤



圍棋



圍棋打子軟體 (Drago)



電腦

## 肆、研究過程或方法

### 一、文獻探討：

(一) 本研究相關歷屆全國科學展覽作品分析

屆別	組別	作品名稱	對本研究的影響
23	初小	小威能我更能	透過拿石頭遊戲，找到控制基數
42	國小	先下手為強嗎	兩人對局，拿三堆 3、5、7 石頭的游戏，掌握先機（必勝點），就可以獲勝
43	國小	沙漠任務	從利用一個情境做出各種情境，解題分析，歸納出數字的關係
44	國小	小朋友上樓梯	用數列的規則判別走樓梯問題
44	國小	繞的徹底研究	找出棋盤中走幾步會回原點，統計步數間的異同
45	國小	神奇線條魔法秀	利用畫線遊戲來找出致勝規則
45	國中	出「棋」致勝	簡化問題，並從簡單的棋局開始研究，並由結果帶入二進位的判斷法
46	國中	一個對局遊戲研究與推廣	在取石頭的游戏中，加入特殊的遊戲條件
47	國小	撿石頭	古老數學遊戲拈，找出其中的主控制點和副控制點
48	國小	毛毛蟲爬眼鏡-移位遊戲變形玩法	透過固定的移位的策略，觀察出步數的規律

### 二、名詞解釋：

(一) 圍棋棋盤：本研究所指為九路棋盤（9x9 棋盤）、十三路棋盤（13x13 棋盤）和十九路棋盤（19x19 棋盤）。

(二) 關鍵必勝點：意指在自己回合內移子，並達到致勝的步數，在後續的回合，持續移出各種致勝的步數，最後便能勝利。

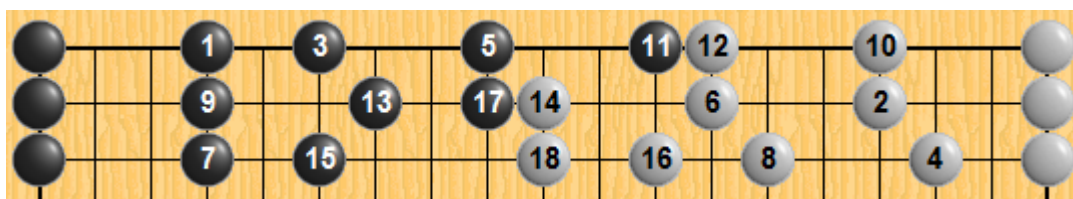
(三) 間隔：本研究中的間隔代表黑子和白子，中間剩餘可走的步數。例如一路玩法中的剩三步；二路玩法中的剩（1,2）步，即分別剩一步和二步。

### 三、遊戲規則：

(一) 一開始雙方先拿出黑子和白子，擺在棋盤的兩端，共有三列。

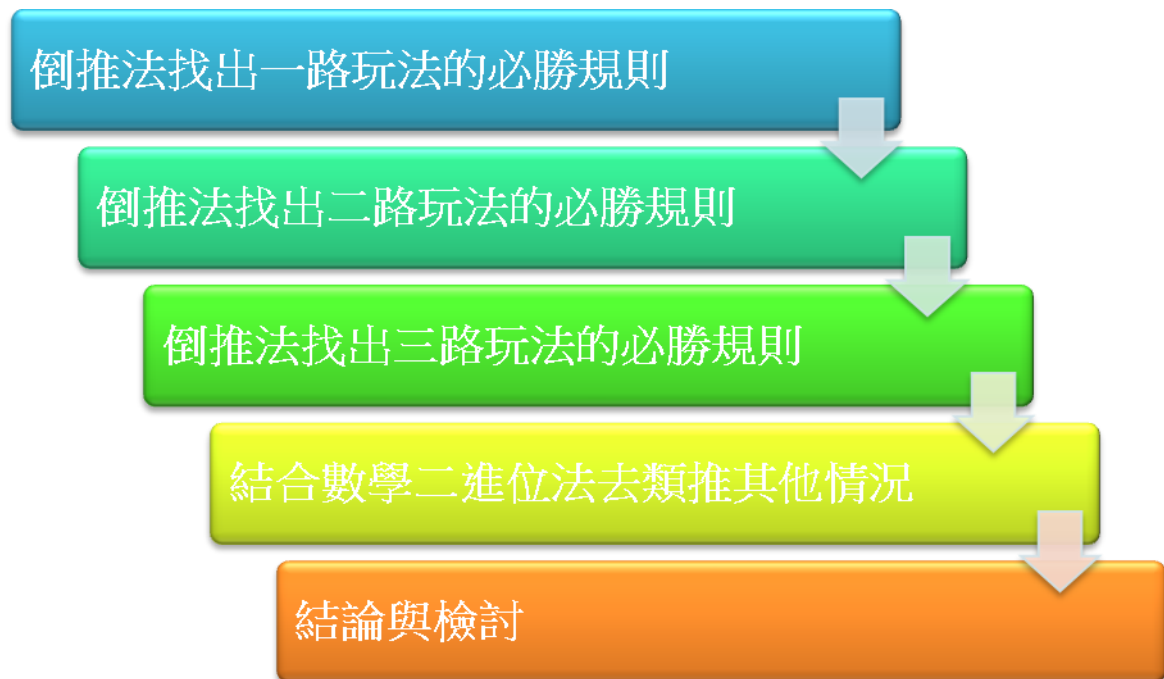
(二) 由黑子開始進攻，每次最多走三步、最少走一步，走完換白子。

(三) 當有一方已經不能再前進，只能後退的時候，就算他輸了。



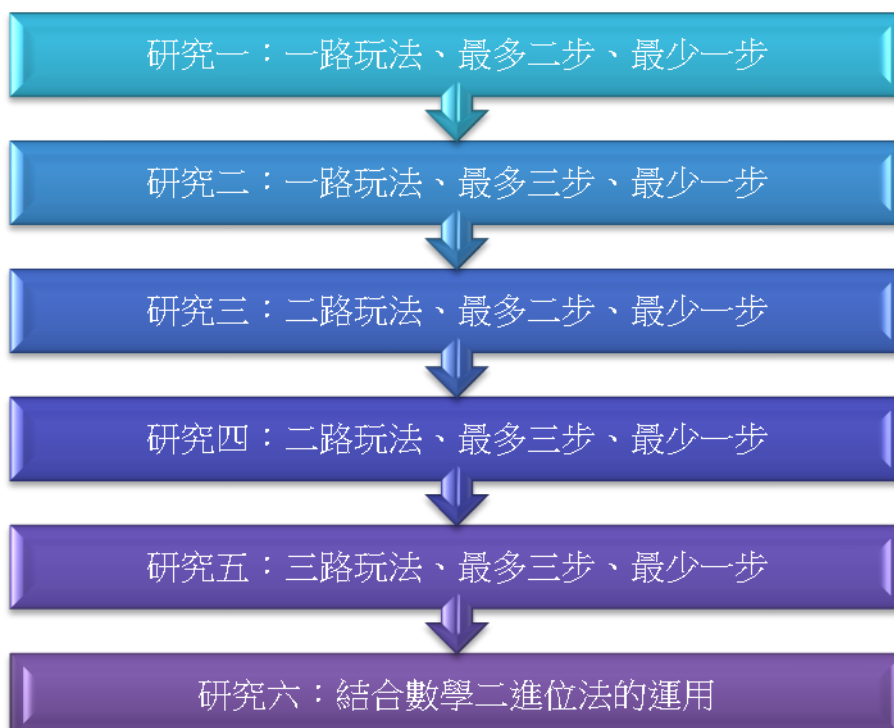
舉例：上圖中黑子和白子，在第一路和第二路都已經卡死了，此時輪到黑子第十九手，只要黑子在第三路再走三步，白棋就無法前進，就算白子輸了。

#### 四、研究過程：



#### 五、研究方法：

我們決定利用倒推法，來一步一步找出必勝的關鍵。先簡化問題，探討只有一路玩法的必勝規則，再探討二路玩法和三路玩法；另外也先討論最多走二步，最少走一步的情況，再進一步討論最多走三步，最少走一步的情況，研究方法如下：



## 伍、研究結果

一、**研究一**：一路玩法，最多走兩步，最少走一步（棋上的數字為走的順序）

說明：●代表先走者，○代表後走者。（以 9x9 棋盤為例）

（一）剩一步（最右邊黑子與最左邊白子間的距離）



說明：1.黑子走一，黑子勝

（二）剩兩步



說明：1.黑子走二，黑子勝

（三）剩三步



說明：1.黑子走一，白子走二，白子勝；黑子走二，白子走一，白子勝

（四）剩四步



說明：1.黑子走一，回到剩三步情況，不管白子走一，白子走二，都是黑子勝。

（五）剩五步



說明：1.黑子走二，回到剩三步情況，不管白子走一，白子走二，都是黑子勝。

（六）剩六步（此情況，只能輪到白子走）



說明：1.白子走一，黑子就走二；白子走二，黑子就走一，剩三格情況丟給白子，黑子必勝

(七) 剩七步



說明：1.此為一開始的情況，按照剩六步的分析，黑子走一，黑子必勝。

**觀察：**我們的發現，我們發現在 9X9 的棋盤中，兵臨城下的遊戲，總共有七步可以走，只要將剩三步和剩六步的情況，丟給對手，則就可以必勝。

(八) 剩八步 (以下以 13x13 棋盤為例)



說明：1.黑子走二，黑子必勝

(九) 剩九步



說明：1.黑子走一，白子就走二；黑子走二，白子就走一，最後回到剩三步情況，白子必勝

(十) 剩十步



說明：1.此棋只能輪到白子走，白子只要走一步，就可以留剩九步情況給黑子，白子必勝

(十一) 剩十一步



說明：1.黑子若想要必勝，只要黑子走二，留剩九步給白子，按照前面的分析，黑子必勝

**觀察：**13x13 的棋盤的分析中，發現只要掌握到剩九步的情況，也就是走完，剩下九步給對方，之後再按照對手走一步，自己走兩步；對手走兩步，自己走一步，就可以必勝。



(十二) 剩十二步 (以下以 19x19 棋盤為例)



說明：1.按照前面的分析，黑子走一，白子就走二；黑子走二，白子就走一，白子必勝。

(十三) 剩十三步



說明：1.黑子走一，掌握到剩十二步，則黑子必勝。

(十四) 剩十四步



說明：1.黑子走二，剩十二步給白子，依據剩十二步的分析，黑子必勝

(十五) 剩十五步



說明：1.黑子走一，白子走二，剩十二步給黑子，白子必勝。  
2.黑子走二，白子走一，剩十二步給黑子，白子一樣必勝。

(十六) 剩十六步 (只情況只能輪到白子走)



說明：1.白子走一，掌握剩下十五步，剩十五步換黑子，白子必勝。

(十七) 剩十七步



說明：1.黑子走二，剩十五步換白子，黑子必勝。

**觀察：**19x19 的棋盤的分析中，發現只要掌握到剩十五步和剩十二步的情況，之後再按照對手走一步，自己走兩步；對手走兩步，自己走一步，就可以必勝。

**結論 1：**針對一路玩法，當規則為最多走 2 步，最少走 1 步時，  
若最右邊黑子與最左邊白子間的距離為 3 的倍數時，則白方(後走的一方)可勝。  
若最右邊黑子與最左邊白子間的距離不是 3 的倍數時，則黑方(先走的一方)可勝。



二、**研究二**：一路玩法，最多走三步，最少走一步（以 19x19 棋盤為例）

說明：若我們將遊戲改成最多走三步，最少走一步，結果是否不同？

●代表先走者，○代表後走者（棋上的數字為走的順序）

（一）剩一步（最右邊黑子與最左邊白子間的距離）



說明：黑子走一，黑子勝。

（二）剩兩步



說明：黑子走二，黑子勝。

（三）剩三步



說明：黑子走三，黑子勝。

（四）剩四步



說明：不管黑子走一、走二或走三，都是白子必勝。

（五）剩五步



說明：黑子先走一，將剩下四步的情況給白子，黑子就會必勝。

**觀察**：我們發現到後面的情況，應該跟之前的實驗一樣，所以只要控制到剩四步，就可以掌握勝利，因此後面就不予討論，也就是為了最後能掌握到剩四步，前面就要掌握到八步，十二步，十六步，一旦掌握到，後面就可以以對方走三、我走一；對方走二、我也走二；對方走一、我走三的方式走，最後掌握到剩四步，也掌握勝利。

**結論 2**：針對一路玩法，當規則為最多走 3 步，最少走 1 步時，

若最右邊黑子與最左邊白子間的距離為 4 的倍數時，則白方(後走的一方)可勝。

若最右邊黑子與最左邊白子間的距離不是 4 的倍數時，則黑方子(先走的一方)可勝。

根據結論 1 和結論 2，我們得到以下推論。

**推論 1**：針對一路玩法，當規則為最多走  $n$  步，最少走 1 步時，

若最右邊黑子與最左邊白子間的距離為  $(n+1)$  的倍數時，則後走的一方可勝。

若最右邊黑子與最左邊白子間的距離不是  $(n+1)$  的倍數時，則先走的一方可勝。

三、**研究三**：遊戲改為二路，最多走兩步，最少走一步（以 9x9 棋盤為例）

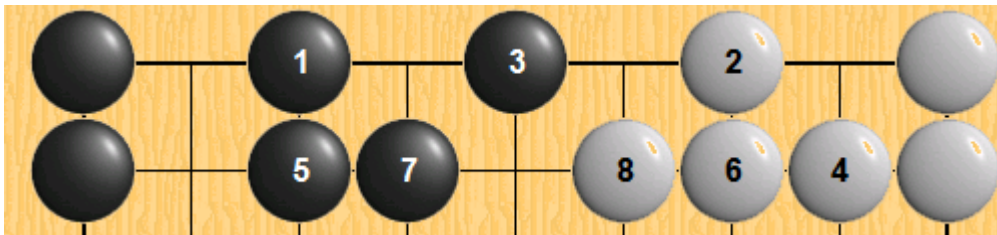
說明：若遊戲改成總共有二路，前面的必勝規則，是否也適用？

●代表先走者，○代表後走者。

★第一排剩一步，第二排也剩一步，我們以 (1,1) 表示，我們發現總共有以下這些情況。我們決定全部都列出來討論，我們發現白色區塊為重複部份，所以只須討論黃色區塊即可，共 28 種情況。

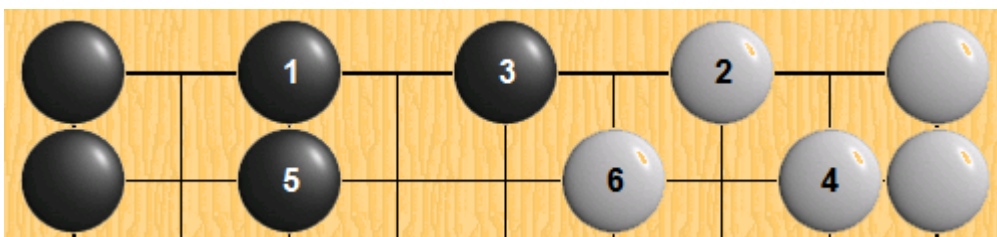
(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)	(6,1)	(7,1)
(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)	(5,2)	(6,2)	(7,2)
(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)	(5,3)	(6,3)	(7,3)
(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)	(5,4)	(6,4)	(7,4)
(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	(5,5)	(6,5)	(7,5)
(1,6)	(2,6)	(3,6)	(4,6)	(5,6)	(6,6)	(7,6)
(1,7)	(2,7)	(3,7)	(4,7)	(5,7)	(6,7)	(7,7)

(一) 剩 (1,1) 步（最右邊黑子與最左邊白子間的距離）



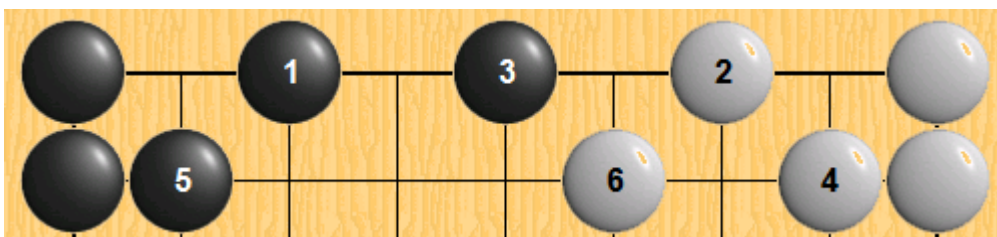
說明：黑子走一，白子走一。白子獲勝。

(二) 剩 (1,2) 步



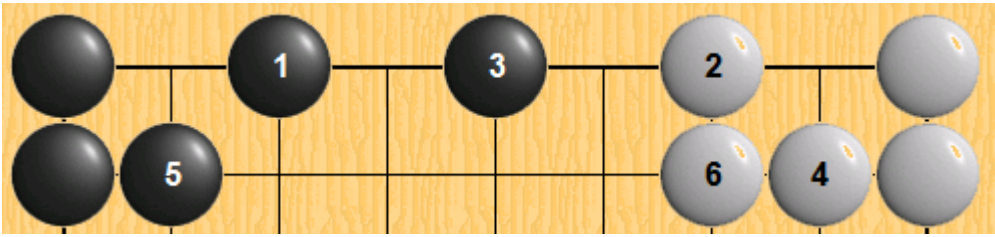
說明：黑子 5 號走一，剩 (1,1) 給白子。黑子獲勝。

(三) 剩 (1,3) 步



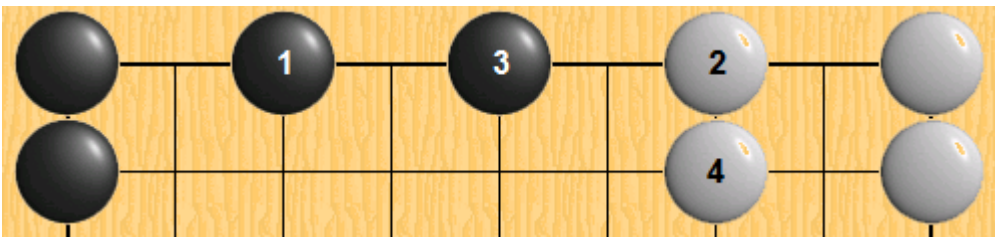
說明：黑子 5 號走二，剩 (1,1) 給白子。黑子獲勝。

(四) 剩 (1,4) 步



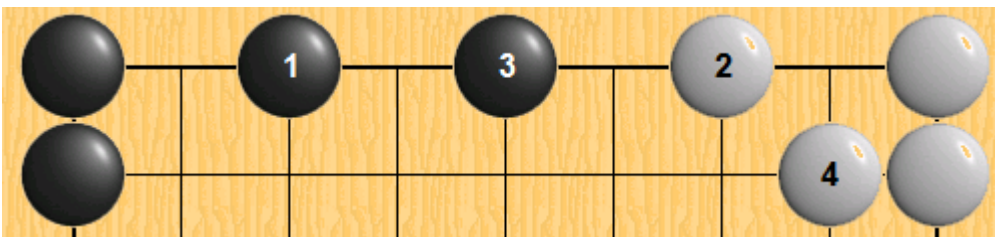
說明：1.黑子 3 號走一，白子走一，留三步給黑色，白子必勝。  
 2.黑子 5 號走一或走二，白子皆可留下 (1,1) 給黑子，白子必勝。

(五) 剩 (1,5) 步



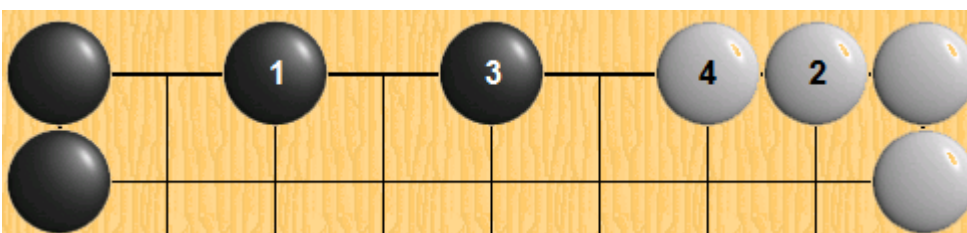
說明：1.黑子下排走一，留下 (1,4) 給白子，黑子必勝。

(六) 剩 (1,6) 步



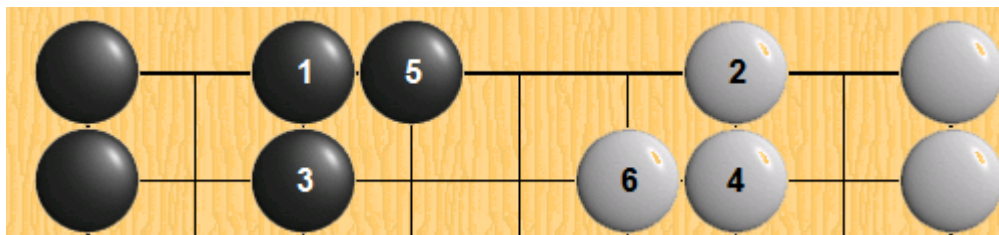
說明：黑子只須下排走二，剩下 (1,4) 步給白子走，根據前面討論，都是黑子必勝。

(七) 剩 (1,7) 步



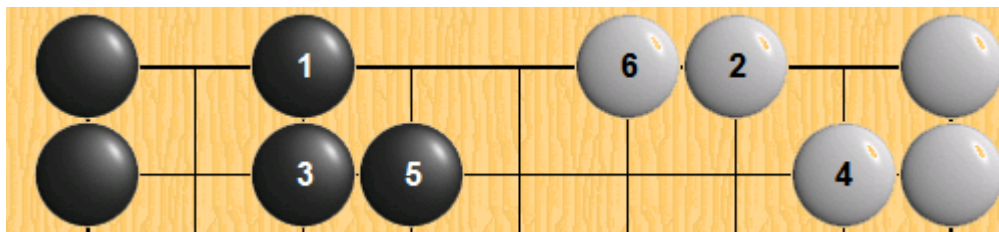
說明：1.黑子 3 號走一，白子下排走一，白子勝。  
 2.黑子下排走一或走二，白子皆可以留下六步或三步給黑子，白子必勝。

(八) 剩 (2,2) 步



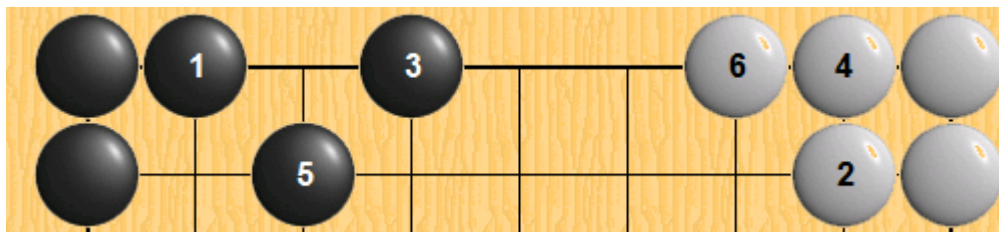
說明：黑子不管怎麼走，都是白子獲勝。

(九) 剩 (2,3) 步



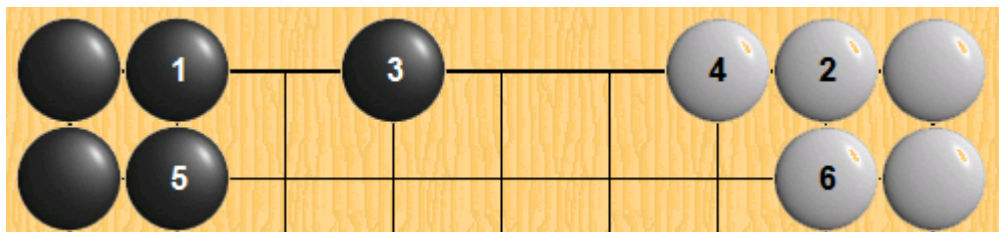
說明：黑子下排走一，留 (2,2) 給白子，則黑子必勝。

(十) 剩 (2,4) 步



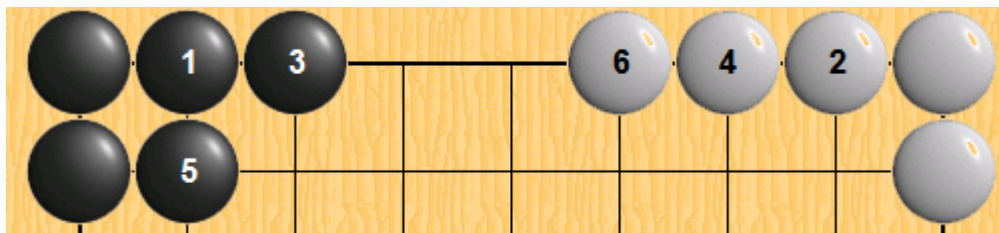
說明：黑子下排走二，留 (2,2) 給白子，則黑子必勝。

(十一) 剩 (2,5) 步



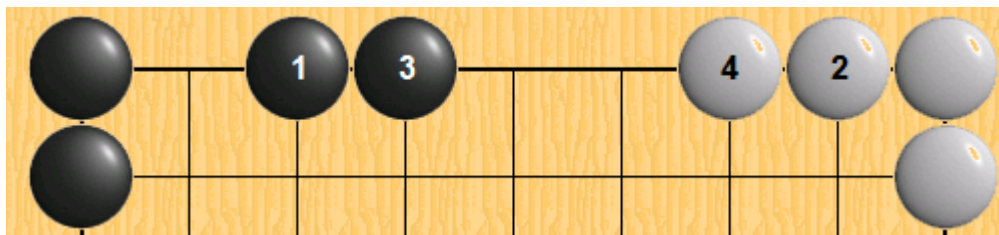
說明：黑子不管怎麼走，皆是白子掌握勝利點，白子必勝。

(十二) 剩 (2,6) 步



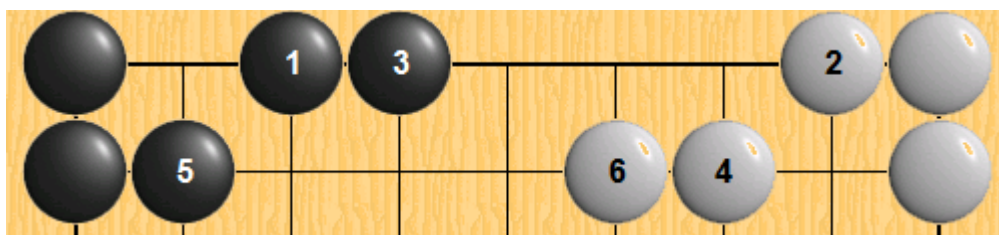
說明：1. 黑子 3 號走二，剩六步給白子，黑子必勝。  
2. 黑子 5 號走一，剩 (2,5) 給白子，黑子必勝。

(十三) 剩 (2,7) 步



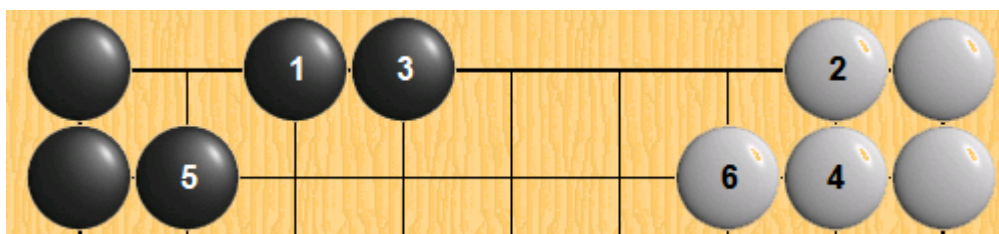
說明：1.黑子下排走二，剩 (2,5) 給白子，黑子必勝。

(十四) 剩 (3,3) 步



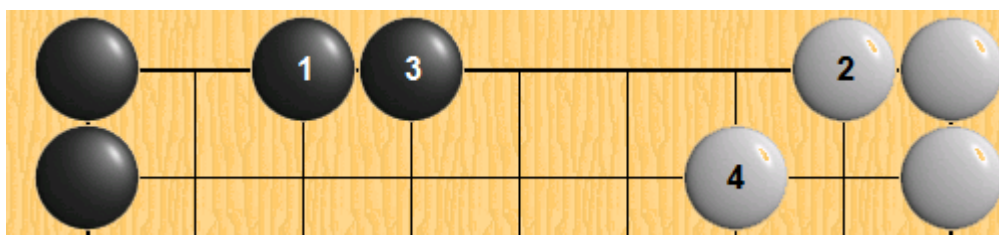
說明：1.黑子上排走一，白子下排就走二；黑子上排走二，白子下排就走一，均是白子勝。  
2.黑子先走下排，結果還是一樣，白子必勝。

(十五) 剩 (3,4) 步



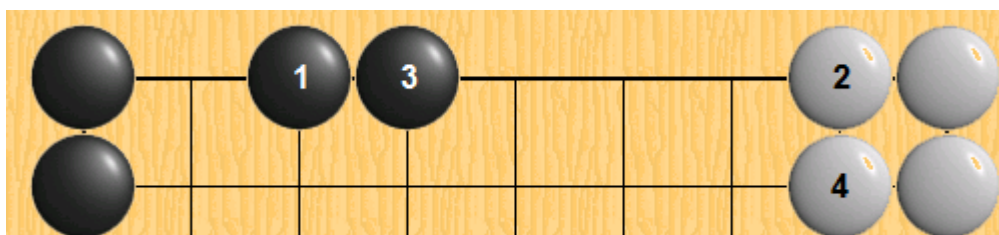
說明：1.黑子下排走一，剩 (3,3) 步換白子，黑子必勝。

(十六) 剩 (3,5) 步



說明：1.黑子下排走二，剩 (3,3) 步換白子，黑子必勝。

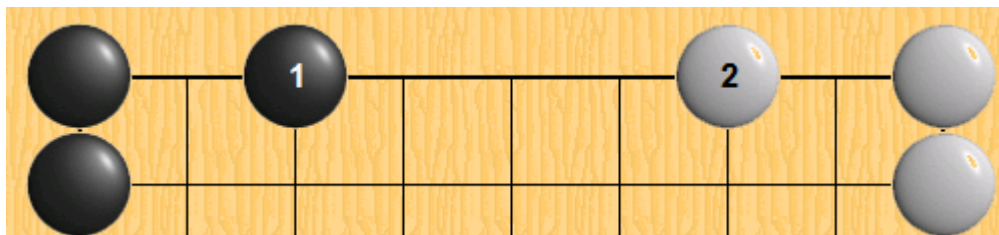
(十七) 剩 (3,6) 步



說明：不管黑子怎麼走，剩下情況為 (2,6) (1,6) (3,5) (3,4)，均是白子勝。

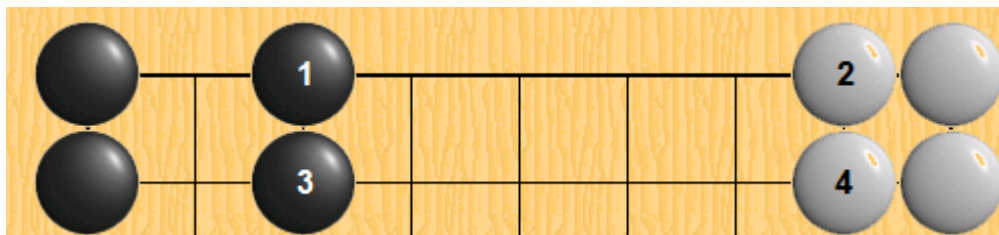


(十八) 剩 (3,7) 步



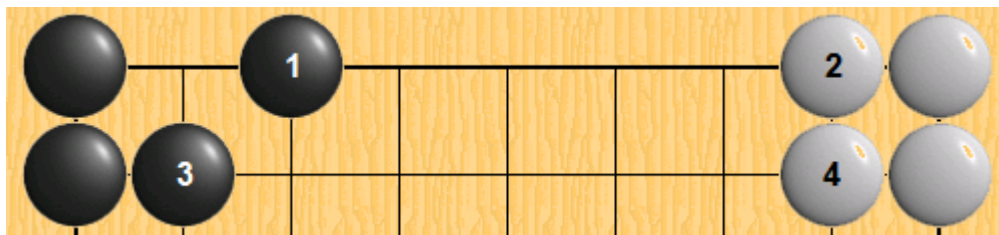
說明：黑子下排走一，留 (3,6) 給白子，黑子必勝。

(十九) 剩 (4,4) 步



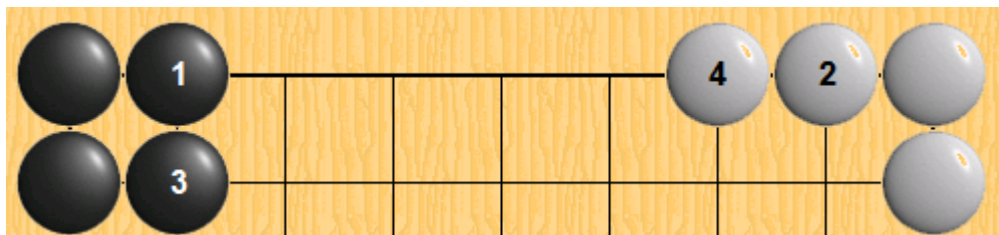
說明：黑子走完的情況有 (2,4) (3,4)，白子則走成 (2,2) (3,3)，白子必勝。

(二十) 剩 (4,5) 步



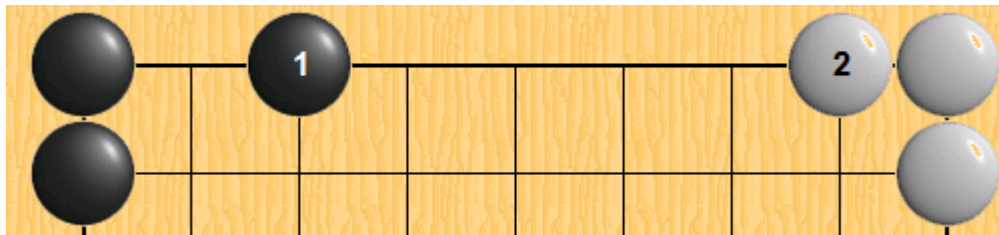
說明：黑子下排走一，剩 (4,4) 步換白子，黑子必勝。

(二十一) 剩 (4,6) 步



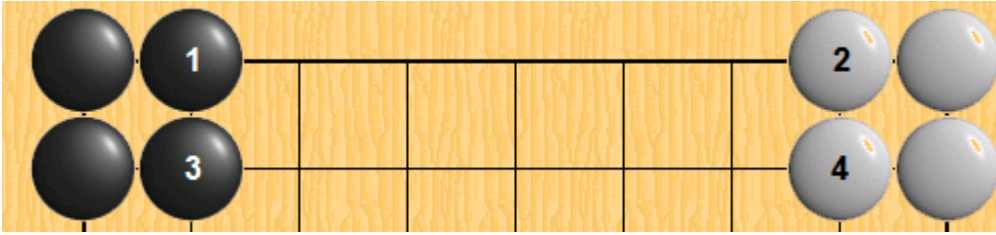
說明：黑子下排走二，剩 (4,4) 步換白子，黑子必勝。

(二十二) 剩 (4,7) 步



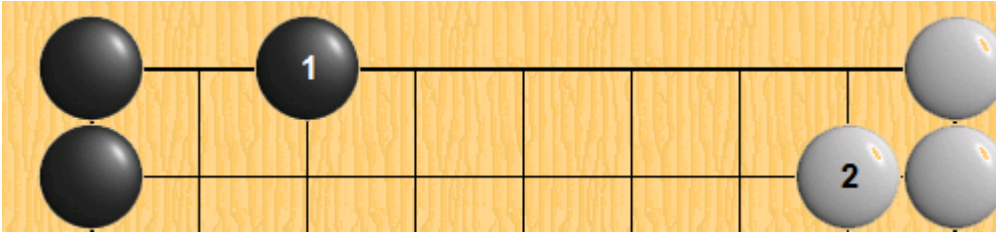
說明：黑子走完情況有 (3,7) (2,7) (4,6) (4,5)，白子皆可掌握 (3,6) (2,5) (4,4)，白子勝。

(二十三) 剩 (5,5) 步



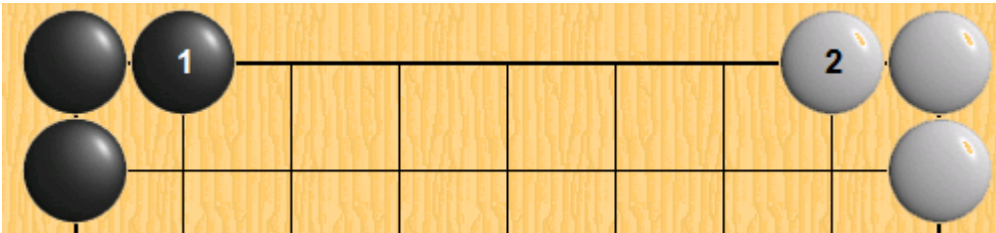
說明：不管黑子怎麼走，白子只要維持兩排步數一樣多，白子必勝。

(二十四) 剩 (5,6) 步



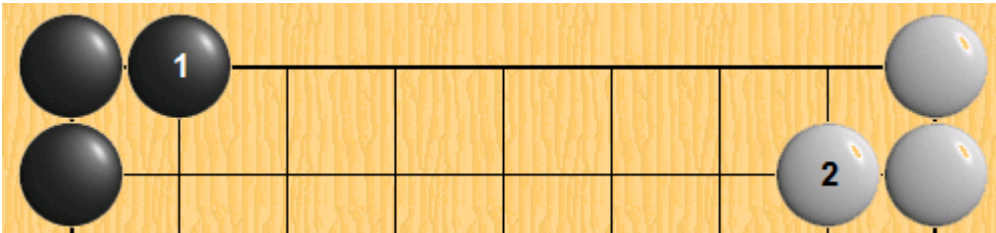
說明：黑子下排走一，剩 (5,5) 步給白子，黑子必勝。

(二十五) 剩 (5,7) 步



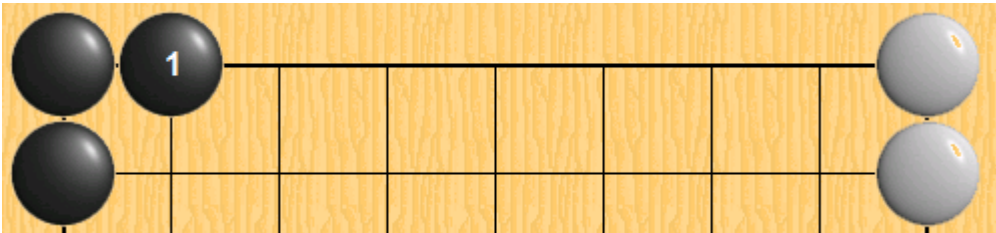
說明：黑子下排走二，剩 (5,5) 步給白子，黑子必勝。

(二十六) 剩 (6,6) 步



說明：不管黑子怎麼走，白子只要維持兩排步數一樣多，白子必勝。

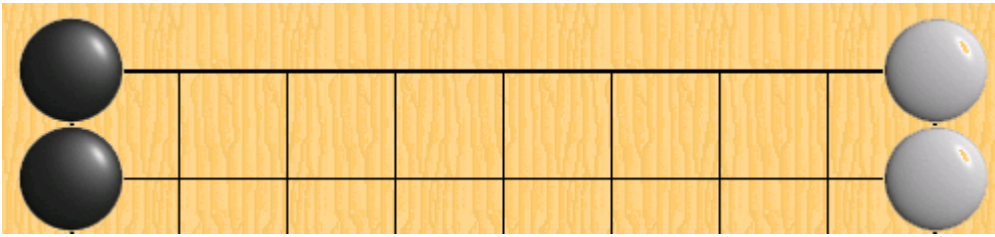
(二十七) 剩 (6,7) 步



說明：說明：白子下排走一，剩 (6,6) 步給黑子，白子必勝。  
(此種情況，黑子先走，只能輪到白子。)



(二十八) 剩 (7,7) 步



說明：(7,7) 為最剛開始的情況，白子已掌握必勝點，因此不管黑棋怎麼走，白子只要維持兩排剩下的步數一樣，就可以必勝。

觀察：經過我們的研究和討論，將遊戲增加為兩路，最多走二步，最少走一步，有以下這些情況（黃色底）時，後下的一方可以必勝。

(1,1)							
(1,2)	(2,2)						
(1,3)	(2,3)	(3,3)					
(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)				
(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	(5,5)			
(1,6)	(2,6)	(3,6)	(4,6)	(5,6)	(6,6)		
(1,7)	(2,7)	(3,7)	(4,7)	(5,7)	(6,7)	(7,7)	

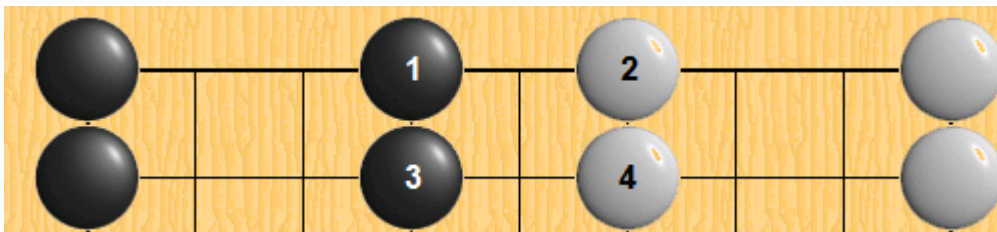
結論 3：針對二路玩法，當規則為最多走 2 步，最少走 1 步，盤面的情況為 (a,b) 時，若 a 除以 3 的餘數和 b 除以 3 的餘數相同時，則後下的一方可以必勝。

四、**研究四**：遊戲改為二路，最多走三步，最少走一步（以 9x9 棋盤為例）

說明：若把二路遊戲改成最多走三步，最少走一步，前面的必勝規則，是否也適用？

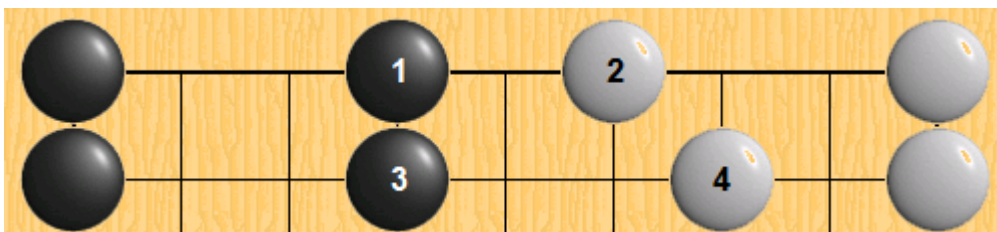
●代表先走者，○代表後走者。

(一) 剩 (1,1) 步 (最右邊黑子與最左邊白子間的距離)



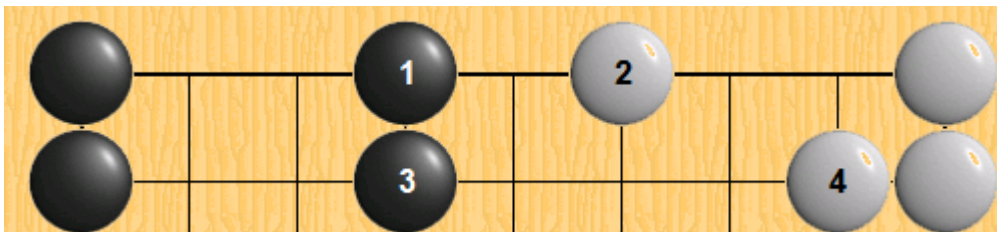
說明：黑子走一，白子走一。白子獲勝。

(二) 剩 (1,2) 步



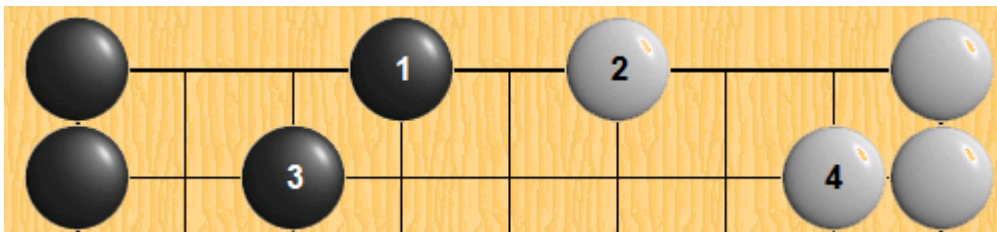
說明：黑子 3 號走一，剩 (1,1) 給白子。黑子獲勝。

(三) 剩 (1,3) 步



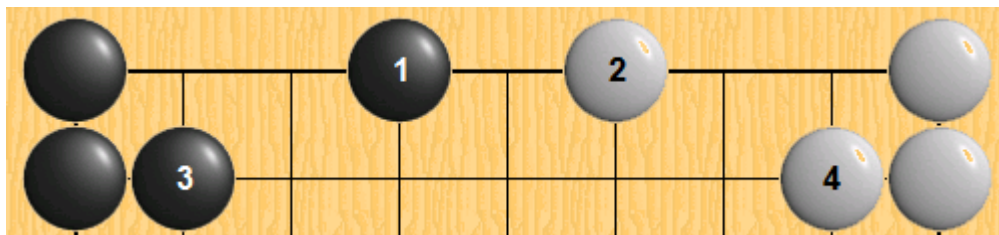
說明：黑子 3 號走二，剩 (1,1) 給白子。黑子獲勝。

(四) 剩 (1,4) 步



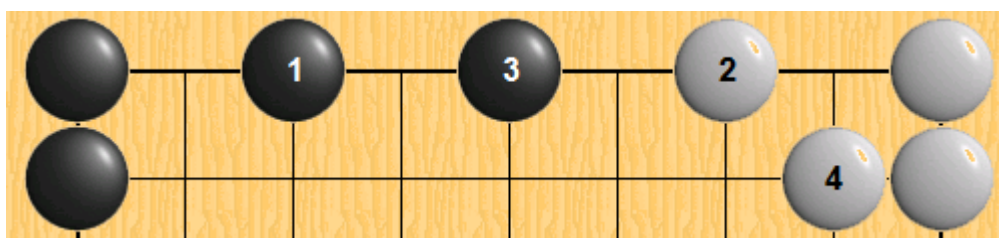
說明：黑子必勝的方法可以 1 號走一或 3 號走三，都是黑子必勝。

(五) 剩 (1,5) 步



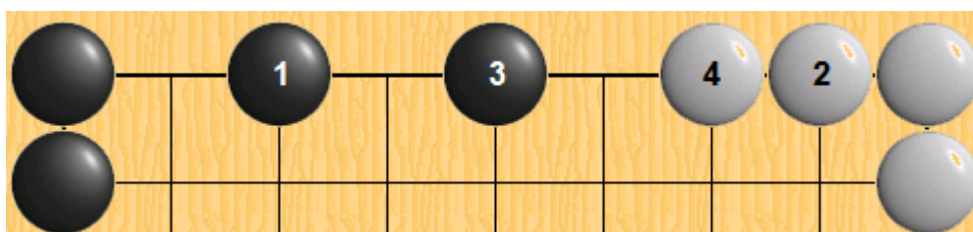
說明：1.黑子 1 號走一，留下五步給白子，白子勝。  
 2.不管黑子 3 號走一、走二或走三，白子皆可以留下 (1,1) 步給黑子，白子必勝。

(六) 剩 (1,6) 步



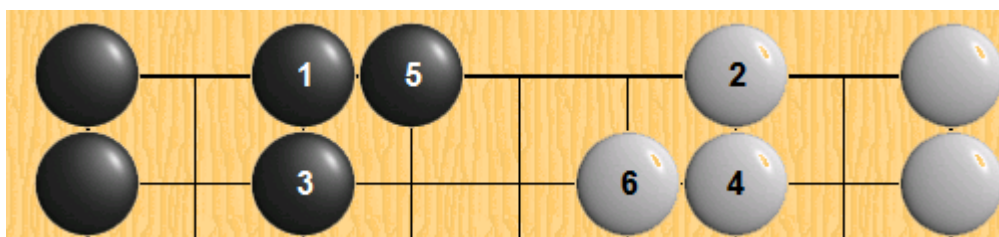
說明：黑子只須下排走一，剩下 (1,5) 步給白子走，根據前面討論，都是黑子必勝。

(七) 剩 (1,7) 步



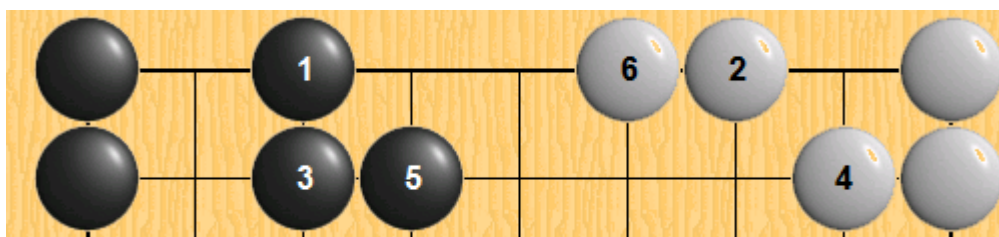
說明：黑子只須下排走二，剩下 (1,5) 步給白子走，根據前面討論，都是黑子必勝。

(八) 剩 (2,2) 步



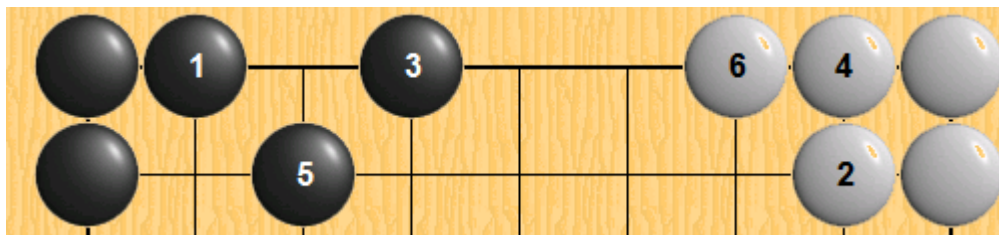
說明：黑子不管怎麼走，都是白子獲勝。

(九) 剩 (2,3) 步



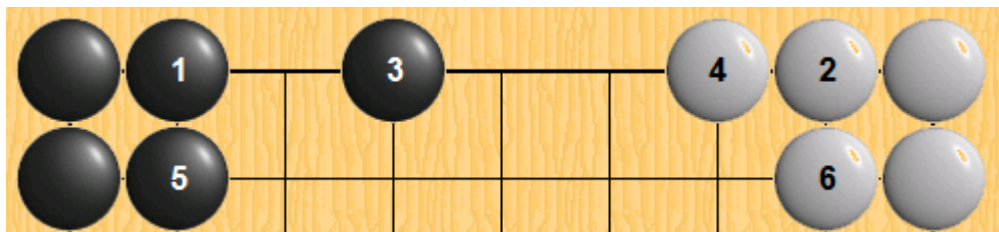
說明：黑子下排走一，留 (2,2) 給白子，則黑子必勝。

(十) 剩 (2,4) 步



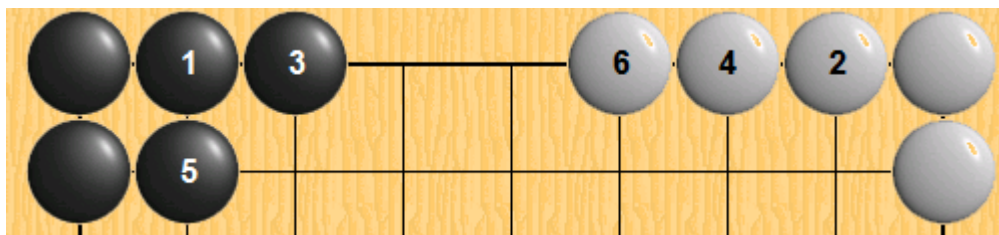
說明：黑子下排走二，留 (2,2) 給白子，則黑子必勝。

(十一) 剩 (2,5) 步



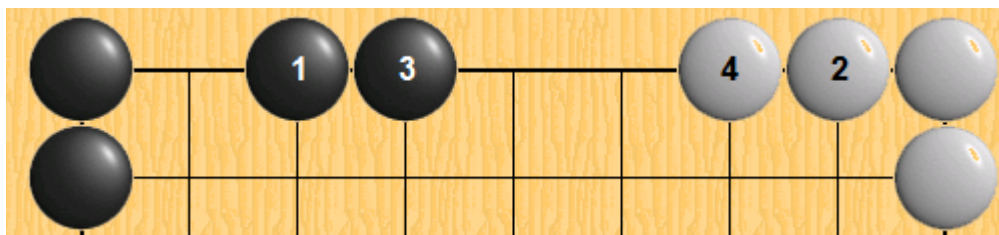
說明：1. 黑子 3 號走一，留下 (1,5) 給白子，黑子必勝。  
2. 黑子 5 號走三，留下 (2,2) 給白子，黑子必勝。

(十二) 剩 (2,6) 步



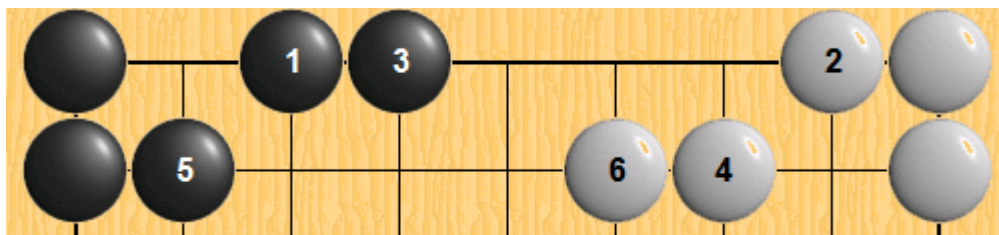
說明：黑子走完會留下的情況有 (2,5) (2,4) (2,3) (1,6) 和剩六步，這些情況皆是白子勝。

(十三) 剩 (2,7) 步



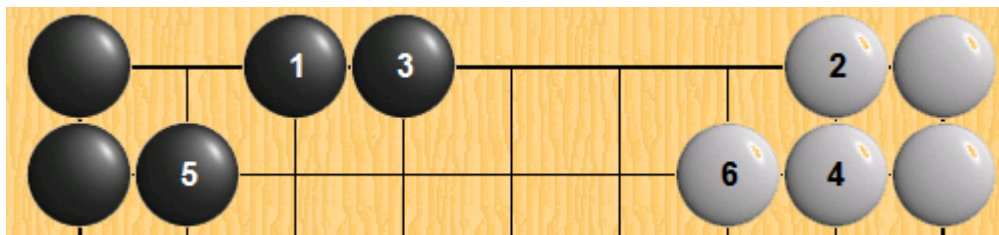
說明：依據 (2,6) 步討論，黑子只要下排走一，剩 (2,6) 給白子，則黑子勝。

(十四) 剩 (3,3) 步



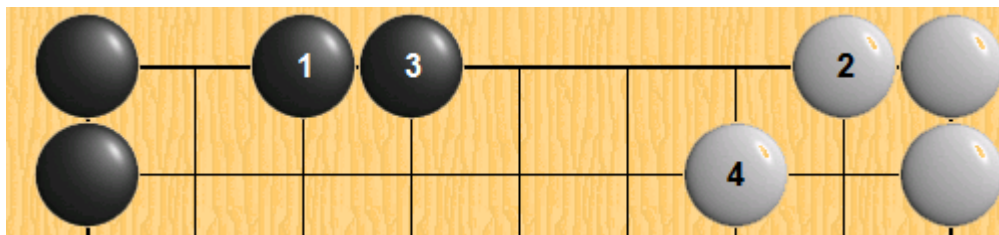
說明：1. 黑子上排走一，白子下排就走二；黑子上排走二，白子下排就走一，均是白子勝。

(十五) 剩 (3,4) 步



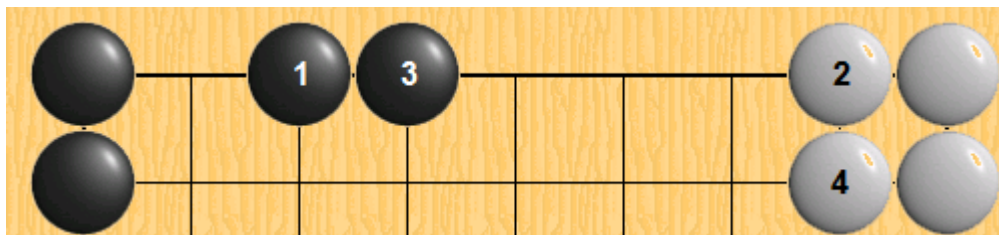
說明：1.黑子下排走一，剩 (3,3) 步換白子，黑子必勝。

(十六) 剩 (3,5) 步



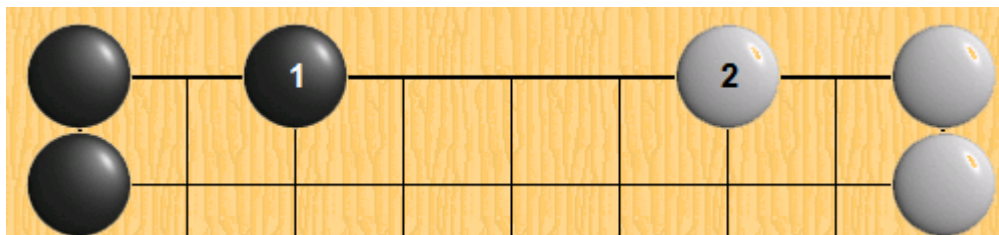
說明：1.黑子下排走二，剩 (3,3) 步換白子，黑子必勝。

(十七) 剩 (3,6) 步



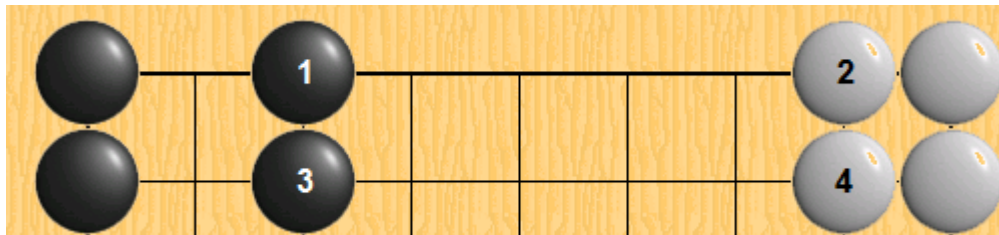
說明：1.黑子下排走三，剩 (3,3) 步換白子，黑子必勝。

(十八) 剩 (3,7) 步



說明：黑子走完的情況有 (3,4) (3,5) (3,6) (1,7) (2,7) 和剩七步，皆是白子勝利。

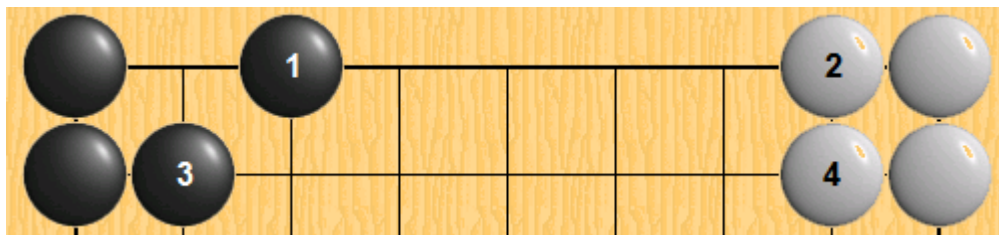
(十九) 剩 (4,4) 步



說明：黑子走完的情況有 (2,4) (3,4)，白子則走成 (2,2) (3,3)，白子必勝。

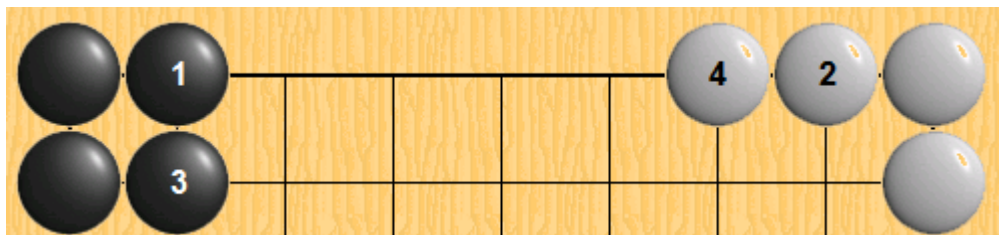


(二十) 剩 (4,5) 步



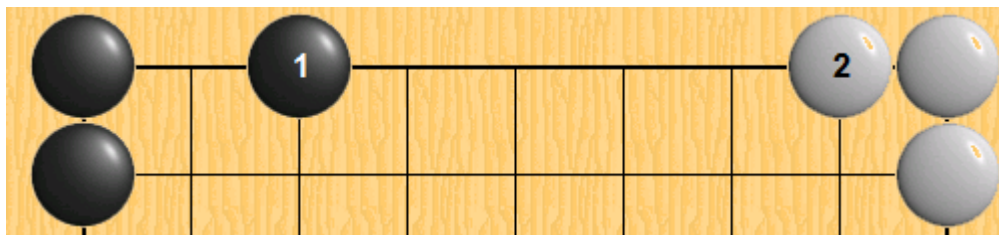
說明：黑子下排走一，剩 (4,4) 步換白子，黑子必勝。

(二十一) 剩 (4,6) 步



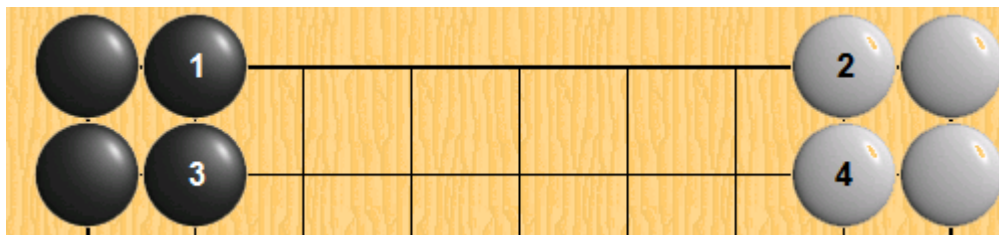
說明：黑子下排走二，剩 (4,4) 步換白子，黑子必勝。

(二十二) 剩 (4,7) 步



說明：黑子下排走二，剩 (4,4) 步換白子，黑子必勝。

(二十三) 剩 (5,5) 步



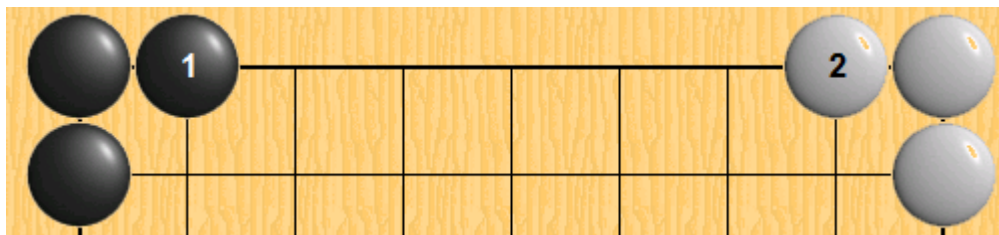
說明：不管黑子怎麼走，白子只要維持兩排步數一樣多，白子必勝。

(二十四) 剩 (5,6) 步



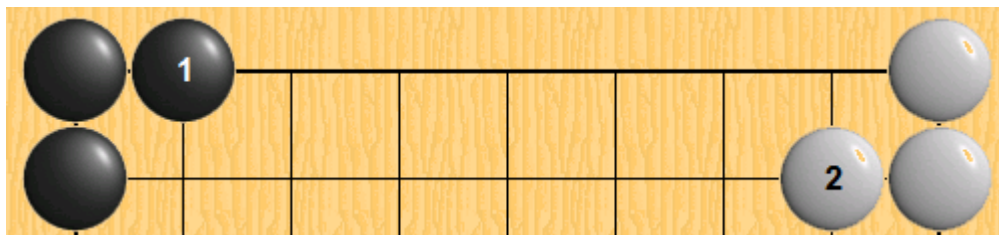
說明：黑子下排走一，剩 (5,5) 步給白子，黑子必勝。

(二十五) 剩 (5,7) 步



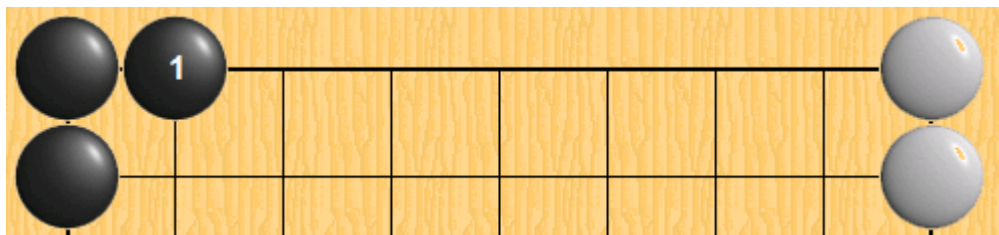
說明：黑子下排走二，剩 (5,5) 步給白子，黑子必勝。

(二十六) 剩 (6,6) 步



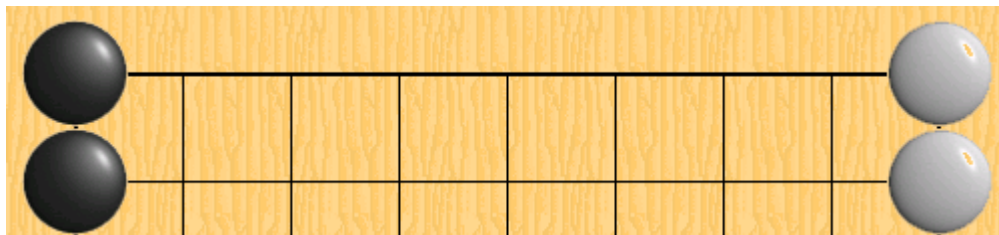
說明：不管黑子怎麼走，白子只要維持兩排步數一樣多，白子必勝。

(二十七) 剩 (6,7) 步



說明：說明：白子下排走一，剩 (6,6) 步給黑子，白子必勝。  
(此種情況，黑子先走，只能輪到白子。)

(二十八) 剩 (7,7) 步



說明：(7,7) 為最剛開始的情況，白子已掌握必勝點，因此不管黑棋怎麼走，白子只要維持兩排剩下的步數一樣，就可以必勝。



**觀察：**經過我們的研究和討論，將遊戲增加為兩路，最多走三步，最少走一步，有以下這些情況（黃色底），可以必勝。

(1,1)						
(1,2)	(2,2)					
(1,3)	(2,3)	(3,3)				
(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)			
(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	(5,5)		
(1,6)	(2,6)	(3,6)	(4,6)	(5,6)	(6,6)	
(1,7)	(2,7)	(3,7)	(4,7)	(5,7)	(6,7)	(7,7)

**結論 4：**針對二路玩法，當規則為最多走 3 步，最少走 1 步，盤面的情況為  $(a,b)$  時，若  $a$  除以 4 的餘數和  $b$  除以 4 的餘數相同時，則後下的一方可以必勝。

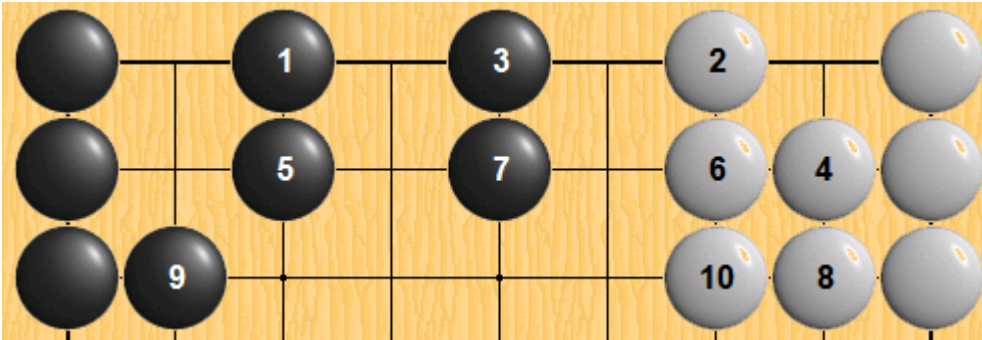
根據結論 3 和結論 4，我們得到以下推論。

**推論 2：**針對二路玩法，當規則為最多走  $n$  步，最少走 1 步，盤面的情況為  $(a,b)$  時，若  $a$  除以  $(n+1)$  的餘數和  $b$  除以  $(n+1)$  的餘數相同時，則後下的一方可以必勝。

五、**研究五**：遊戲改為三路，最多走三步，最少走一步（以 9x9 棋盤為例）

說明：若再將遊戲的方式改成三路，最多走三步，最少走一步，是否一樣有必勝方法。剩下的步數  $(x,y,z)$ ，我們假設  $x \leq y \leq z$ ，因為  $(1,2,3)$  和  $(2,3,1)$  情況一樣，所以我們就不重複討論。●代表先走者，○代表後走者。

(一) 剩  $(1,1,4)$  步（最右邊黑子與最左邊白子間的距離）

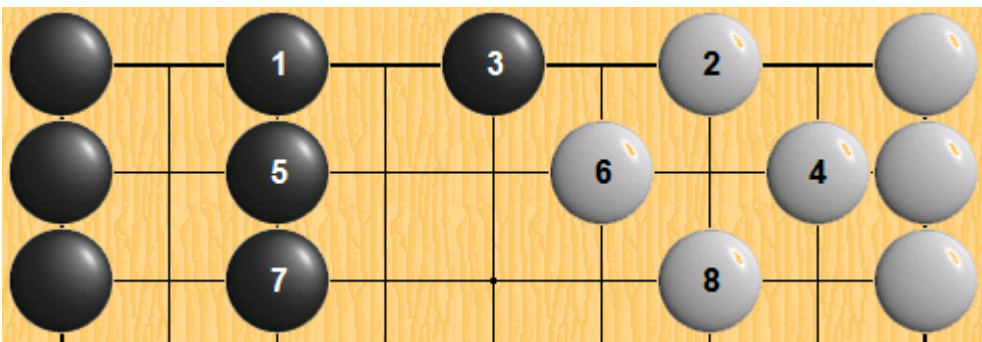


說明：1.黑子 3 號走一，白子 10 號走三，留下  $(1,1)$ ，白子必勝。

2.黑子 9 號走一、走二或走三，白子皆可留下  $(1,1)$  給黑子，白子必勝。

3. 因此我們可以推得掌握  $(1,1,4)$   $(1,1,8)$   $(1,1,12)$   $(1,1,16)$  即可以掌握勝利。

(二) 剩  $(1,2,3)$  步



說明：1.黑子不管怎麼走，都是白子獲勝。

2.因此我們可以推得掌握  $(1,2,7)$   $(1,2,11)$   $(1,2,15)$  即可以掌握勝利。

◎限於篇幅的關係，所以我們直接將我們研究操作，討論出的關鍵必勝點列出來（9x9 棋盤）。

間隔	必勝點	間隔	必勝點	間隔	必勝點	間隔	必勝點
$(1,1,1)$		$(1,1,2)$		$(1,1,3)$		$(1,1,4)$	○
$(1,1,5)$		$(1,1,6)$		$(1,1,7)$		$(1,2,2)$	
$(1,2,3)$	○	$(1,2,4)$		$(1,2,5)$		$(1,2,6)$	
$(1,2,7)$	○	$(1,3,3)$		$(1,3,4)$		$(1,3,5)$	
$(1,3,6)$	○	$(1,3,7)$		$(1,4,4)$		$(1,4,5)$	○
$(1,4,6)$		$(1,4,7)$		$(1,5,5)$		$(1,5,6)$	
$(1,5,7)$		$(1,6,6)$		$(1,6,7)$	○	$(1,7,7)$	

間隔	必勝點	間隔	必勝點	間隔	必勝點	間隔	必勝點
(2,2,2)		(2,2,3)		(2,2,4)	○	(2,2,5)	
(2,2,6)		(2,2,7)		(2,3,3)		(2,3,4)	
(2,3,5)	○	(2,3,6)		(2,3,7)		(2,4,4)	
(2,4,5)		(2,4,6)	○	(2,4,7)		(2,5,5)	
(2,5,6)		(2,5,7)	○	(2,6,6)		(2,6,7)	
(2,7,7)		(3,3,3)		(3,3,4)	○	(3,3,5)	
(3,3,6)		(3,3,7)		(3,4,4)		(3,4,5)	
(3,4,6)		(3,4,7)	○	(3,5,5)		(3,5,6)	○
(3,5,7)		(3,6,6)		(3,6,7)		(3,7,7)	
(4,4,4)	○	(4,4,5)		(4,4,6)		(4,4,7)	
(4,5,5)	○	(4,5,6)		(4,5,7)		(4,6,6)	○
(4,6,7)		(4,7,7)	○	(5,5,5)		(5,5,6)	
(5,5,7)		(5,6,6)		(5,6,7)	○	(5,7,7)	
(6,6,6)		(6,6,7)		(6,7,7)		(7,7,7)	

觀察：經過我們的研究和討論，將遊戲增加為三路，最多走三步，最少走一步，有以下這些情況（黃色底），共有 18 種，可以必勝。

必勝點	(1,1,4)	(1,2,3)	(1,2,7)	(1,3,6)	(1,4,5)	(1,6,7)	(2,2,4)
	(2,3,5)	(2,4,6)	(2,5,7)	(3,3,4)	(3,4,7)	(3,5,6)	(4,4,4)
	(4,5,5)	(4,6,6)	(4,7,7)	(5,6,7)			

## 陸、討論

一、**研究一討論**：在這個研究中（最多進兩步，最少進一步），我們發現到不管是那個大小的棋盤，要勝利的話，就要掌握到剩三步的狀況，也就是前進後，留下三步給對手，不管對手怎麼走，最後勝利者一定是自己。而我們又進一步發現到，掌握剩三步，可以在之前就開始控制了，也就是在掌握剩六步，剩九步，剩十二步，剩十五步的時候，能掌握這些部份就掌握了勝利。掌握必勝的步數：

必勝步數	3 步	6 步	9 步	12 步	15 步
------	-----	-----	-----	------	------

二、**研究二討論**：我們發現到後面的情況，應該跟研究一的討論一樣，所以只要控制到剩四步，就可以掌握勝利，也就是為了最後能掌握到剩四步，前面就要掌握到八步，十二步，十六步，一旦掌握到，後面就可以以對方走三、我走一；對方走二、我也走二；對方走一、我走三的方式走，最後掌握到剩四步，也掌握勝利。掌握必勝的步數：

必勝步數	4 步	8 步	12 步	16 步
------	-----	-----	------	------

三、**研究三討論**：經過我們的研究和討論，將遊戲增加為兩路，最多走二步，最少走一步，有以下這些情況（黃色底），可以必勝。

(1,1)						
(1,2)	(2,2)					
(1,3)	(2,3)	(3,3)				
(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)			
(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	(5,5)		
(1,6)	(2,6)	(3,6)	(4,6)	(5,6)	(6,6)	
(1,7)	(2,7)	(3,7)	(4,7)	(5,7)	(6,7)	(7,7)

四、**研究四討論**：經過我們的研究和討論，將遊戲增加為兩路，最多走三步，最少走一步，有以下這些情況（黃色底），可以必勝，我們發現研究三和研究四所找到的關鍵必勝點的排列很規律，似乎存在某種規則。

(1,1)						
(1,2)	(2,2)					
(1,3)	(2,3)	(3,3)				
(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)			
(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	(5,5)		
(1,6)	(2,6)	(3,6)	(4,6)	(5,6)	(6,6)	
(1,7)	(2,7)	(3,7)	(4,7)	(5,7)	(6,7)	(7,7)

五、**研究五討論**：經過我們的研究和討論，將遊戲增加為三路，最多走三步，最少走一步，有以下這些情況（黃色底），可以必勝，也順便推算出 19x19 的關鍵必勝點。另在二路的玩法中，我們觀察出**餘數判斷法**，也想看看三路玩法是否適用，所以我們將所找出來的必勝點，再除了（3+1），之後再由小到大，重新排列，看看是否可以發現某些規則。經過重新整理後，得到五個關鍵必勝點（0,0,0）、（0,1,1）、（0,2,2）、（0,3,3）、（1,2,3）。

必勝點	推算出 19x19 棋盤的必勝點			除以（3+1）後的餘數	重新整理
(1,1,4)	(1,1,8)	(1,1,12)	(1,1,16)	(1,1,0)	(0,1,1)
(1,2,3)	(1,2,7)	(1,2,11)	(1,2,15)	(1,2,3)	(1,2,3)
(1,2,7)	(1,2,11)	(1,2,15)		(1,2,3)	(1,2,3)
(1,3,6)	(1,3,10)	(1,3,14)		(1,3,2)	(1,2,3)
(1,4,5)	(1,4,9)	(1,4,13)	(1,4,17)	(1,0,1)	(0,1,1)
(1,6,7)	(1,6,11)	(1,6,15)		(1,2,3)	(1,2,3)
(2,2,4)	(2,2,8)	(2,2,12)	(2,2,16)	(2,2,0)	(0,2,2)
(2,3,5)	(2,3,9)	(2,3,13)	(2,3,17)	(2,3,1)	(1,2,3)
(2,4,6)	(2,4,10)	(2,4,14)		(2,0,2)	(0,2,2)
(2,5,7)	(2,5,11)	(2,5,15)		(2,1,3)	(1,2,3)
(3,3,4)	(3,3,8)	(3,3,12)	(3,3,16)	(3,3,0)	(0,3,3)
(3,4,7)	(3,4,11)	(3,4,15)		(3,0,3)	(0,3,3)
(3,5,6)	(3,5,10)	(3,5,14)		(3,1,2)	(1,2,3)
(4,4,4)	(4,4,8)	(4,4,12)	(4,4,16)	(0,0,0)	(0,0,0)
(4,5,5)	(4,5,9)	(4,5,13)	(4,5,17)	(0,1,1)	(0,1,1)
(4,6,6)	(4,6,10)	(4,6,14)		(0,2,2)	(0,2,2)
(4,7,7)	(4,7,11)	(4,7,15)		(0,3,3)	(0,3,3)
(5,6,7)	(5,6,11)	(5,6,15)		(1,2,3)	(1,2,3)

## 柒、結論

一、一路玩法結論：由上面的實驗中，我們可以歸納整理出兵臨城下這個遊戲的必勝法則，也就是掌握控制基數，那個控制基數，由我們最多走幾步和最少走幾步決定。我們發現到最多走兩步、最少走一步的實驗，控制基數就是 3、6、9、12、15，都是 3 的倍數；最多走三步、最少走一步的實驗，控制基數就是 4、8、12、16，都是 4 的倍數。因此我們做出結論，在最多前進  $n$  步，最少前進 1 步的情況下，必勝的控制基數就是  $n+1$ ，另外要掌握  $n+1$  這個必勝點，就要掌握到  $n+1$  的倍數，即可掌握優勢取最後一顆而致勝。舉例：

- (一) 19x19 棋盤 (最多走二、最少走一)，一開始雙方中間有 17 步可移動，即可心算  $17 \div (2+1) = 5$  餘 2-----先走 2 步即掌握勝利。
- (二) 19x19 棋盤 (最多走三、最少走一)，一開始雙方中間有 17 步可移動，即可心算  $17 \div (3+1) = 4$  餘 1-----先走 1 步即掌握勝利。

二、二路玩法結論：我們發現到研究三和研究四中，我們把遊戲的規則，改成兩路的玩法，透過我們將所有的情況一一討論，我們發現到必勝的方法一樣有其規則性，關鍵在於掌握到對稱的盤型，也就是 (1,1) (2,2) (3,3) (4,4) (5,5) (6,6) (7,7)，而掌握到這些關鍵必勝點，在之前就必須先掌握到前面的關鍵必勝點，用這樣的結果，我們也可以類推到 19x19 棋盤。舉例：

◎兩路，最多兩步、最少一步：

- (一) 必勝點 (1,1)：掌握 (1,4) (1,7) (1,10) (1,13) (1,16) 即掌握勝利。
- (二) 必勝點 (2,2)：掌握 (2,5) (2,8) (2,11) (2,14) (2,17) 即掌握勝利。
- (三) 必勝點 (3,3)：掌握 (3,6) (3,9) (3,12) (3,15) 即掌握勝利。
- (四) 必勝點 (4,4)：掌握 (4,7) (4,10) (4,13) (4,16) 即掌握勝利。
- (五) 必勝點 (5,5)：掌握 (5,8) (5,11) (5,14) (5,17) 即掌握勝利。
- (六) 必勝點 (6,6)：掌握 (6,9) (6,12) (6,15) 即掌握勝利。
- (七) 必勝點 (7,7)：掌握 (7,10) (7,13) (7,16) 即掌握勝利。
- (八) 必勝點 (8,8)：掌握 (8,11) (8,14) (8,17) 即掌握勝利。
- (九) 必勝點 (9,9)：掌握 (9,12) (9,15) 即掌握勝利。
- (十) 必勝點 (10,10)：掌握 (10,13) (10,16) 即掌握勝利。
- (十一) 必勝點 (11,11)：掌握 (11,14) (11,17) 即掌握勝利。
- (十二) 必勝點 (12,12)：掌握 (12,15) 即掌握勝利。
- (十三) 必勝點 (13,13)：掌握 (13,16) 即掌握勝利。
- (十四) 必勝點 (14,14)：掌握 (14,17) 即掌握勝利。
- (十五) 必勝點 (15,15)：略。
- (十六) 必勝點 (16,16)：略。
- (十七) 必勝點 (17,17)：一開始後手，就已經掌握勝利。

◎兩路，最多三步、最少一步：

- (一) 必勝點 (1,1)：掌握 (1,5) (1,9) (1,13) (1,17) 即掌握勝利。
- (二) 必勝點 (2,2)：掌握 (2,6) (2,10) (2,14) 即掌握勝利。
- (三) 必勝點 (3,3)：掌握 (3,7) (3,11) (3,15) 即掌握勝利。
- (四) 必勝點 (4,4)：掌握 (4,8) (4,12) (4,16) 即掌握勝利。
- (五) 必勝點 (5,5)：掌握 (5,9) (5,13) (5,17) 即掌握勝利。
- (六) 必勝點 (6,6)：掌握 (6,10) (6,14) 即掌握勝利。
- (七) 必勝點 (7,7)：掌握 (7,11) (7,15) 即掌握勝利。
- (八) 必勝點 (8,8)：掌握 (8,12) (8,16) 即掌握勝利。
- (九) 必勝點 (9,9)：掌握 (9,13) (9,17) 即掌握勝利。
- (十) 必勝點 (10,10)：掌握 (10,14) 即掌握勝利。
- (十一) 必勝點 (11,11)：掌握 (11,15) 即掌握勝利。
- (十二) 必勝點 (12,12)：掌握 (12,16) 即掌握勝利。
- (十三) 必勝點 (13,13)：掌握 (13,17) 即掌握勝利。
- (十四) 必勝點 (14,14)：略。
- (十五) 必勝點 (15,15)：略。
- (十六) 必勝點 (16,16)：略。
- (十七) 必勝點 (17,17)：一開始後手，就已經掌握勝利。

故我們可以得知，兵臨城下兩路的玩法中，其規則在於：

- (一) 以最多二步，最少一步的玩法看來，與一路的玩法一樣，關鍵一樣要掌握到  $(2+1)$ ，兩路所剩下的步數除以  $(2+1)$ ，當剩下的餘數相等時，即掌握到勝利，例如： $(1,4)$   $(1,7)$   $(1,10)$   $(1,13)$   $(1,16)$  兩路都除以  $(2+1)$ ，餘數都是 1，因此這些都是關鍵必勝點。
- (二) 以最多三步，最少一步的玩法看來，就是把兩路的步數除以  $(3+1)$ ，若是餘數相同，一樣是掌握到關鍵必勝點。
- (三) 因此我們可以推知，以最多  $N$  步，最少一步的玩法，必勝的方法就是掌握到  $(n+1)$ ，將兩路的剩下的步數除以  $(n+1)$ ，餘數相等，即是關鍵必勝點，掌握到的人，即已經掌握到勝利。

三、三路玩法結論：我們透過  $9 \times 9$  棋盤，討論出所有關鍵必勝點，共找出了十七種，只要掌握到這些必勝點，就可以使「兵臨城下」這個看似公平的益智數學遊戲，立於不敗之地。但是這麼多關鍵必勝點，又不可能全部背起來，因此我們試著找出規則，看看是否有更簡單的方法，把必勝點記起來。在二路遊戲的討論中，我們發現到了餘數判斷法，於是我們將這些必勝點都除以  $(3+1)$ ，看看是不是有規則性可以看出。將所有討論出的必勝點，除了  $(3+1)$  – 本次遊戲設定最多三路，最少一路的規則中，我們發現到很有趣的規則，也就是關鍵必勝點只剩下這五種：

- (一)  $(0,0,0)$
- (二)  $(0,1,1)$
- (三)  $(0,2,2)$
- (四)  $(0,3,3)$
- (五)  $(1,2,3)$



以我們這次的遊戲來看，一開始三路都是剩下十七步，所以除了  $(3+1)$ ，得到  $(2,2,2)$ ，故我們只要在某一路先走兩步，使其變成  $(0,2,2)$ ，即掌握勝利，之後只需要見招拆招，別人走一步，我們就在同一路走三步；別人走二步，我們就在同一路走二步；別人走三步，我們就在同一路走一步，最後就一定可以獲勝。

四、**數學二進位法的運用**：經由文獻探討，我們看到了利用二進位解題的方法，因此我們將三路玩法中，研究出來的關鍵必勝點轉換成二進位的表示方式，看看是否會有規則可以找尋，以下列出十進位數字轉換成二進位數字的對照表。

十進位數字	轉換二進位	十進位數字	轉換二進位	十進位數字	轉換二進位
0	0	6	110	12	1100
1	1	7	111	13	1101
2	10	8	1000	14	1110
3	11	9	1001	15	1111
4	100	10	1010	16	10000
5	101	11	1011	17	10001

**觀察 1**：將找出的五組關鍵必勝點，用二進位的方式表達成

- (一)  $(0,0,0) \rightarrow (0,0,0)$
- (二)  $(0,1,1) \rightarrow (0,1,1)$
- (三)  $(0,2,2) \rightarrow (0,10,10)$
- (四)  $(0,3,3) \rightarrow (0,11,11)$
- (五)  $(1,2,3) \rightarrow (1,10,11)$

若以二進位加法不進位的方式將各組數字相加可得到：

$$0 + 0 + 0 = 0$$

$$0 + 1 + 1 = 0$$

$$0 + 10 + 10 = 0$$

$$0 + 11 + 11 = 0$$

$$1 + 10 + 11 = 0$$

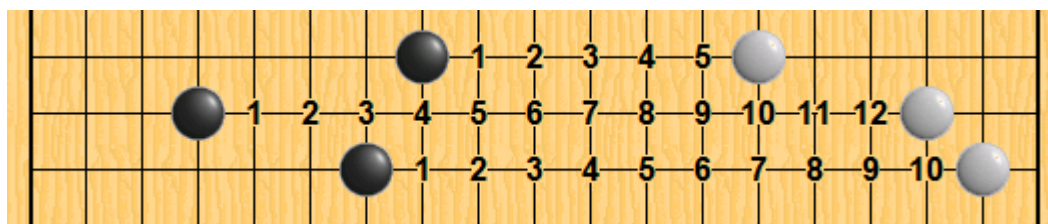
我們發現各組數字相加的結果都等於 0。

**結論 5**：針對三路玩法，當規則為最多走 3 步，最少走 1 步，所有的必勝點除以 4 的餘數  $(a,b,c)$  都具有  $a + b + c = 0$  的特性 (以二進位加法不進位的方式相加)。

**推論**：針對三路玩法，當規則為最多走  $n$  步，最少走 1 步，所有的必勝點除以  $(n+1)$  的餘數  $(a,b,c)$  都具有  $a + b + c = 0$  的特性 (以二進位加法不進位的方式相加)。

**推論**：針對  $m$  路玩法，當規則為最多走  $n$  步，最少走 1 步，所有的必勝點除以  $(n+1)$  的餘數  $(r_1, r_2, \dots, r_m)$  都具有  $r_1 + r_2 + \dots + r_m = 0$  的特性 (以二進位加法不進位的方式相加)。

五、**遊戲的改良和變化**：透過找出來的二進位必勝判斷法，除了我們可以將遊戲增加為四路玩法、五路玩法等。我們還可以將遊戲的方式做一些改變，不一定要擺在起點，以三路玩法為例，可以輪流擺放三顆棋子的位置，等兩人都擺好棋子後，再開始互相進攻。雖然改成這樣子，但是只要先算好三路剩下的步數，再除以 $(3+1)$ ，計算每一路的餘數，一樣可以掌握到必勝的五個關鍵必勝點- $(0,0,0)$   $(0,1,1)$   $(0,2,2)$   $(0,3,3)$   $(1,2,3)$ ，讓看似公平的圍棋數學遊戲，其實勝負已定。知道的人，不管人家怎麼走，只要緊抓五個關鍵必勝點，就可以掌握到勝利。舉例如下：



- 三路：(一) 剩五步：除以 $(3+1)$  ---餘數等於 1  
 (二) 剩十二步：除以 $(3+1)$  ---餘數等於 0  
 (三) 剩十步：除以 $(3+1)$  ---餘數等於 2

分析：三路利用餘數判斷法得到 $(1,0,2)$ 經過整理為 $(0,1,2)$ ，因此必勝的方法，只需要在第三排走一步，使餘數變成 $(0,1,1)$ ；或是在第二排走一步，使餘數變成 $(1,2,3)$ ，都可以成功掌握到關鍵必勝點，之後就見招拆招，就可以慢慢邁向勝利之路。

## 捌、參考資料及其他

- 一、翰林文教事業（2011）。國民小學數學學習領域第八冊第四單元除法。台北：翰林。
- 二、翰林文教事業（2011）。國民小學數學學習領域第八冊第五單元未知數。台北：翰林。
- 三、克萊德.華特生(Clyde Watson)，漢聲雜誌社譯（1989）。二進位數。台北：漢聲。
- 四、拈的必勝秘訣：[http://episte.math.ntu.edu.tw/articles/mm/mm\\_03\\_2\\_02/index.html](http://episte.math.ntu.edu.tw/articles/mm/mm_03_2_02/index.html)
- 五、國立臺灣科學教育館歷屆優勝作品：<http://www.ntsec.gov.tw/m1.aspx?sNo=0000263>
- 六、維基百科二進制：<http://zh.wikipedia.org/wiki/%E4%BA%8C%E8%BF%9B%E5%88%B6>

## 【評語】 080404

1. 討論的主題可以再深入點。在豐富度。深度及廣度都應  
再加強。
2. 有關必勝規則的討論值得肯定，但可以推廣到更一般的方法。
3. 書面討論及現場說明都相當清楚。