

中華民國第 51 屆中小學科學展覽會 作品說明書

國小組 數學科

080403

正多邊形的圓舞曲

學校名稱：嘉義縣民雄鄉福樂國民小學

作者： 小五 林姿吟 小五 張芸蓁 小五 林威成	指導老師： 劉素玉 蔡悅宜
-----------------------------------	---------------------

關鍵詞：正多邊形、正多面體、角錐

【正多邊形的圓舞曲】

摘要

上數學課時，我們從五上第七單元【三角形與扇形】學到了如何求出三角形的內角角度及扇形角度，第九單元【表面積】扉頁說明認識了正多面體。我們在一次偶然機會，將課本上已分成四等分的圓形圓周上與半徑相交的點相連，發現可以連成一個正方形，經由老師的說明才知道原來這是「圓內接正四邊形」，於是我們想進一步深入研究圓內接正多邊形。我們利用半徑六公分的圓製作各種圓內接正多邊形，將對摺、平分、倍數等觀念，成功摺出圓內接正偶數邊圖形；利用半徑等分，也成功摺出圓內接正三、五、七、九、十一邊形；我們更將摺出的圖形組合成各種正多面體及正三角形多面體；最後再試著利用一張圓內接正多邊形做成角錐。由平面到立體，讓我們在研究與實作的過程充滿驚喜，真的是太有趣了！

壹、研究動機

上數學課時，我們從五上第七單元【三角形與扇形】學到了如何求出三角形的內角角度及扇形角度，我們好奇的將平分成四等分的圓形圓周上與半徑相交的點相連，結果意外發現畫出來的是一個正方形，老師告訴我們這叫做「圓內接正方形」。這樣的發現讓我們想了解正多邊形與圓的關係，於是我們這幾位喜歡打破砂鍋問到底的同學便想試試看如何不用量角器摺出圓內接正多邊形，並探討各種摺法，同時藉由第九單元【表面積】的扉頁說明一「正多面體」的認識，將摺出來的正多邊形加以應用，形成正多面體、多面體及錐體等立體形狀。

貳、研究目的

- 一、試著不用量角器，摺出圓內接正四邊形及其延伸圖形。
- 二、試著不用量角器，利用半徑平分摺出圓內接正三角形及其延伸圖形。
- 三、試著不用量角器，利用半徑等分，摺出圓內接正五邊形、正七邊形、正九邊形、正十一邊形。
- 四、利用量角器測量圓內接正多邊形每個扇形的圓心角角度，並找出誤差。
- 五、利用尺量出圓內接正多邊形的弓形高度、邊長及圓心至邊的距離，並觀察紀錄。
- 六、測量小正多邊形摺起的角度，找出摺起的角度與其內角及圓的關係。
- 七、利用圓內接正多邊形的延伸圖形做出各種正多面體及正三角形多面體。
- 八、利用一張圓內接正多邊形做出角錐。
- 九、紀錄立體形體的頂點、邊數及面數，觀察是否符合尤拉公式。

參、研究設備及器材

- 一、研究設備：色紙、圓規刀、尺、筆、量角器、切割墊、膠帶。
- 二、研究用紙規格：半徑 6 公分的圓形色紙。

肆、名詞釋義

- 一、正多邊形：所有的內角都相等且所有的邊也等長的簡單多邊形。
- 二、圓內接正多邊形：正多邊形的每一個頂點都在同一個圓的圓周上，即圓心到正多邊形的每一頂點的距離相等，此多邊形即為此圓的圓內接正多邊形。
- 三、多面體：空間中由不共面的多邊形所圍成封閉區域的整體，稱為「多面體」。
- 四、正多面體：又稱為「柏拉圖立體」。正多面體是每個面為全等的正多邊形，且每個頂點所接的面數都是一樣的凸多面體。
- 五、弓形：圓上的一條弦把圓分割成兩部份，則這兩部份都稱為弓形。通常弓形指的是不包括圓心的那一部份。

伍、研究過程或方法

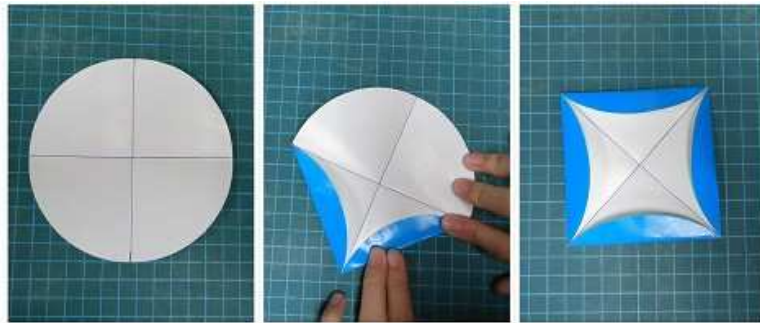
一、平面圖形

思考：我們在課本上將已分成四等分的圓的半徑與圓周相交的四個點相連，可以得到正四邊形。利用圓形色紙，是不是也可以摺出圓內接正多邊形及其他延伸圖形？

【研究一】不用量角器，如何摺出圓內接正四邊形及其延伸圖形？

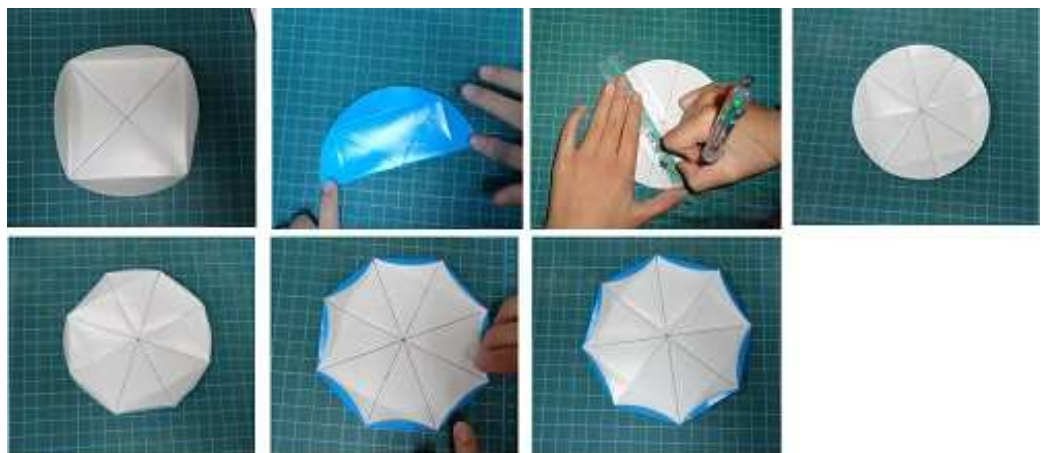
思考：分成四等份的圓，每個扇形的圓心角角度皆為 90° ，也就是兩條直徑互相垂直，所以我們只要摺出兩條垂直的直徑就可以了。

- 步驟：1.將圓對摺兩次，使兩條垂直的直徑將圓分成四等分。
2.展開後，將每一扇形的弓形部份摺起，即完成圓內接正四邊形。



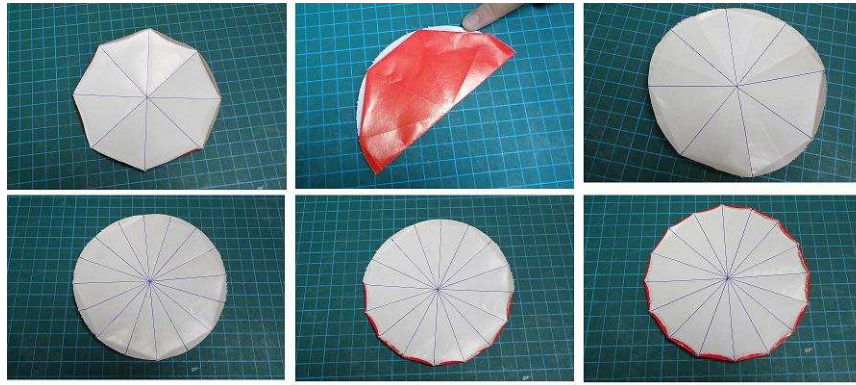
延伸圖形 1：圓內接正八邊形

- 步驟：(1) 將圓內接正四邊形的四個弓形展開。
(2) 將已分成四等分的圓再對摺兩次，使圓平分成八等分。
(3) 將每一等份中扇形的弓形部份摺起，即完成圓內接正八邊形。



延伸圖形 2：圓內接正十六邊形

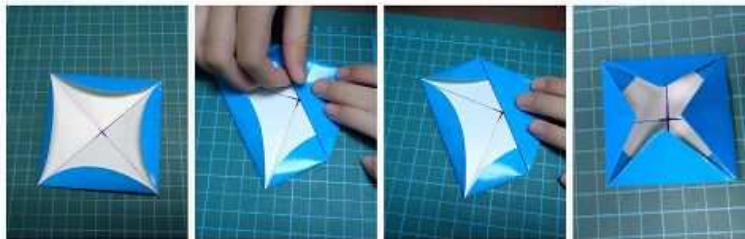
- 步驟：(1) 將圓內接正八邊形的八個弓形展開。
(2) 將已分成八等分的圓再對摺四次，使圓平分成十六等分。
(3) 將每一等份中扇形的弓形部份摺起，即完成圓內接正十六邊形。



延伸圖形 3：小正四邊形（小正方形）

步驟：(1) 取出圓內接正四邊形。

(2) 將圓內接正四邊形的每一頂點向圓心摺，即可完成小正四邊形。



延伸圖形 4：小正八邊形

步驟：(1) 取出圓內接正八邊形。

(2) 將圓內接正八邊形的每一個頂點向圓心摺起，並劃出摺線。

(3) 將圓內接正八邊形的每一個頂點延著摺線摺起，即完成小正八邊形。



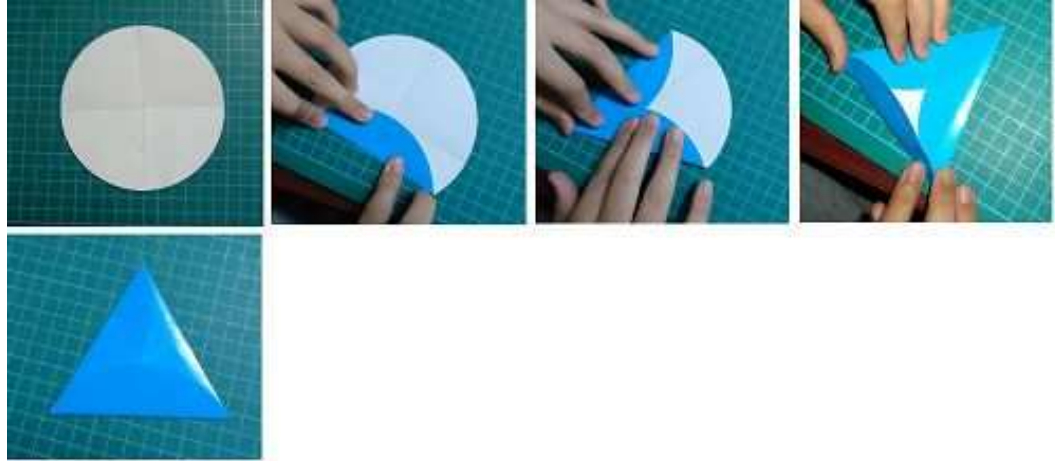
【研究二】不用量角器，如何摺出圓內接正三角形及其延伸圖形？

思考：在課本上已分成三等分的圓中，可得到三條等長的弦，因此能畫出正三角形。若要用量角器畫出圓內接正三角形，則我們必須先畫出一條半徑，沿著半徑順時針或逆時針每 120° ($360^\circ/3$) 畫出半徑，再將三條弦畫出來，也可得圓內接正三角形。我們將每條弦的兩端點摺起，發現弦剛好可以將半徑分成二等分，於是我們試著將半徑對摺，發現竟然也可以摺出圓內接正三角形。

步驟：1.將圓對摺兩次，使兩條垂直的直徑將圓分成四等分。

2.取出圓心，並將其中一條半徑對摺成一半（半徑的 $\frac{1}{2}$ ）。

3.取出此弓形弦的兩端，及與弓形垂直的直徑與圓周相交的點，往圓心摺起即完成圓內接正三角形。



延伸圖形 1：圓內接正六邊形

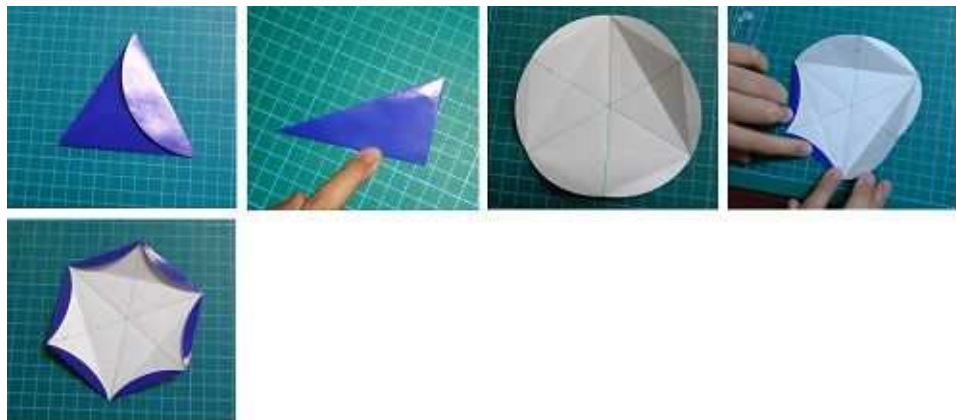
思考：圓內接正六邊形的邊數剛好是圓內接正三角形邊數的二倍，其扇形數也是正三角形扇形數的二倍。所以我們只要將圓內接正三角形的每個扇形再平分就可以了。

步驟：（1）取出圓內接正三角形。

（2）利用對摺邊的方式，將圓內接正三角形的每一扇形平分成兩等分。

（3）將圓內接正三角形展開，即可得平分成六等分的圓。

（4）將每一扇形的弓形部份摺起，即完成圓內接正六邊形。



延伸圖形 2：圓內接正十二邊形

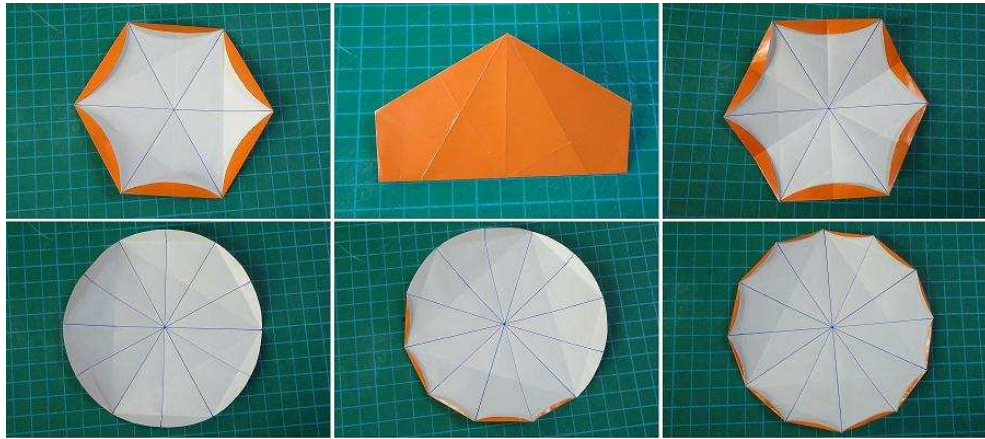
思考：根據摺圓內接正六邊形的概念，我們若再將圓內接正六邊形的每個扇形再平分，就可以摺出圓內接正十二邊形。

步驟：（1）取出圓內接正六邊形。

（2）利用對摺邊的方式，將圓內接正六邊形的每一扇形平分成兩等分。

（3）將圓內接正六邊形展開，即可得平分成十二等分的圓。

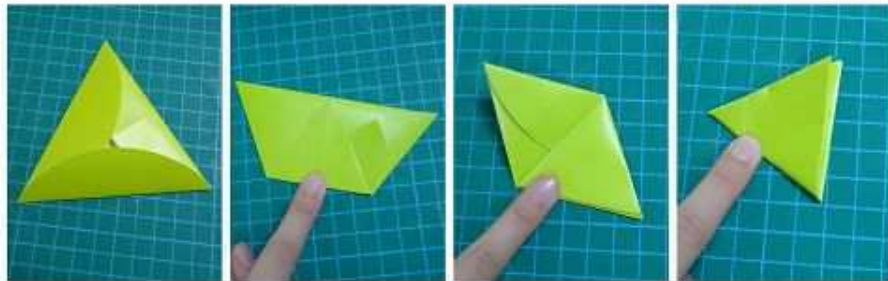
（4）將每一扇形的弓形部份摺起，即完成圓內接正十二邊形。



延伸圖形 3：小正三角形

步驟：(1) 取出圓內接正三角形。

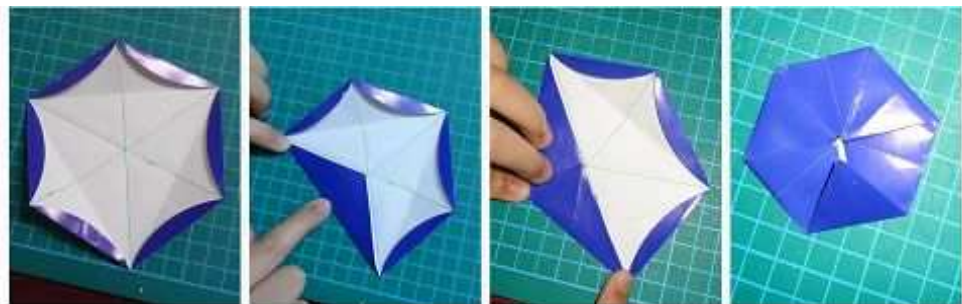
(2) 將每一頂點摺向對邊的中點，即可完成小正三角形。



延伸圖形 3：小正六邊形

步驟：(1-1) 取出圓內接正六邊形。

(1-2) 將每個頂點往圓心對摺，即可完成小正六邊形。



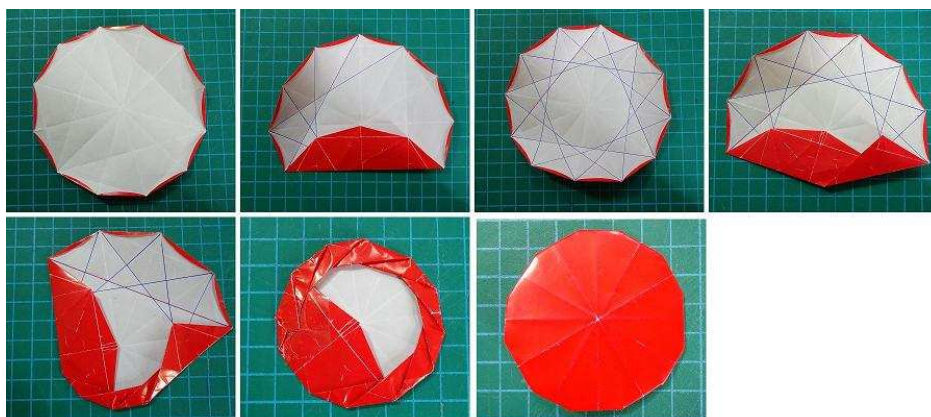
步驟：(2-1) 取出圓內接正三角形。

(2-2) 將圓內接正三角形的每個頂點向圓心摺起，即可完成小正六邊形。



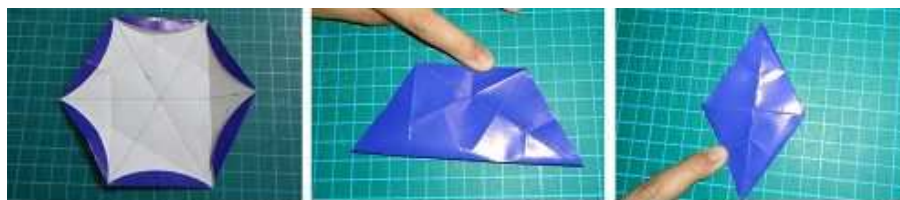
延伸圖形 4：小正十二邊形

- 步驟：(1) 取出圓內接正十二邊形。
(2) 將圓內接正十二邊形的每一個頂點向圓心摺起，並劃出摺線。
(3) 將圓內接正十二邊形的每一個頂點延著摺線摺起，即完成小正十二邊形。



延伸圖形 5：菱形

- 步驟：(1) 取出圓內接正六邊形。
(2) 將圓內接正六邊形的每個對角線摺出，可將圓內接正六邊形分成六個全等的正三角形。
(3) 將圓內接正六邊形對摺，形成梯形。
(4) 將梯形腰上的其中一個正三角形摺起，即完成菱形。



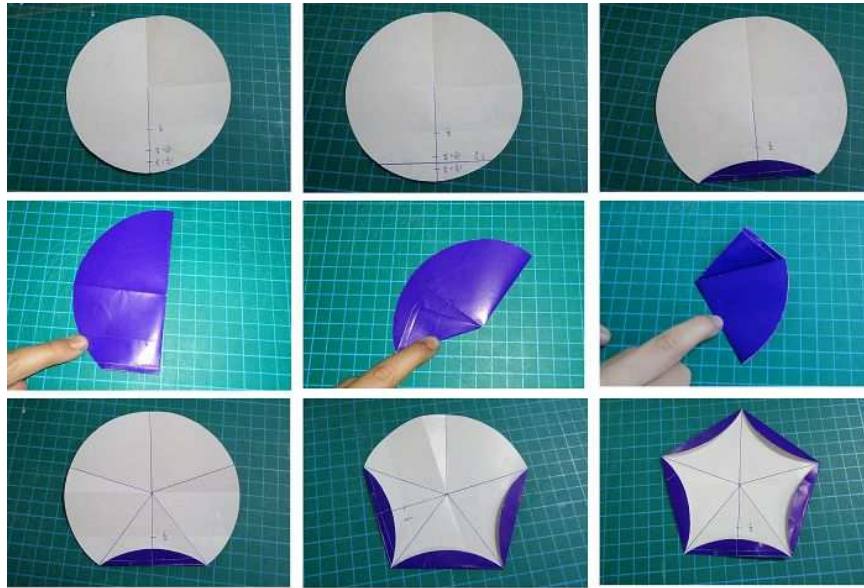
【研究三】不用量角器，如何摺出圓內接正五邊形、正七邊形、正九邊形等奇數邊的圓內接圖形？

思考：我們觀察摺好的圓內接正三、四、六邊形，發現邊的長度愈來愈短，且邊到圓心的距離會愈來愈大。我們利用製作圓內接正三角形的概念，將半徑等分，發現由圓周向圓心取出半徑的 $\frac{3}{16}$ ，再利用對摺、等分的概念，可以成功摺出圓內接正五邊形。

挑戰圖形 1：圓內接正五邊形

- 步驟：(1) 將圓對摺兩次，使兩條垂直的直徑將圓分成四等分。
(2) 將其中之一條半徑，自圓周部份往圓心取出半徑的 $\frac{3}{16}$ 並摺起弓形。
(3) 沿著與弓形垂直的直徑對摺，也使弓形的弦對摺。
(4) 將弦的端點與圓心取出並摺起，形成直角三角形，並展開。
(5) 將其餘扇形分成二等分，再展開，使圓平分成五等分。

(6) 將其餘扇形部份的弓形摺起，即完成圓內接正五邊形。



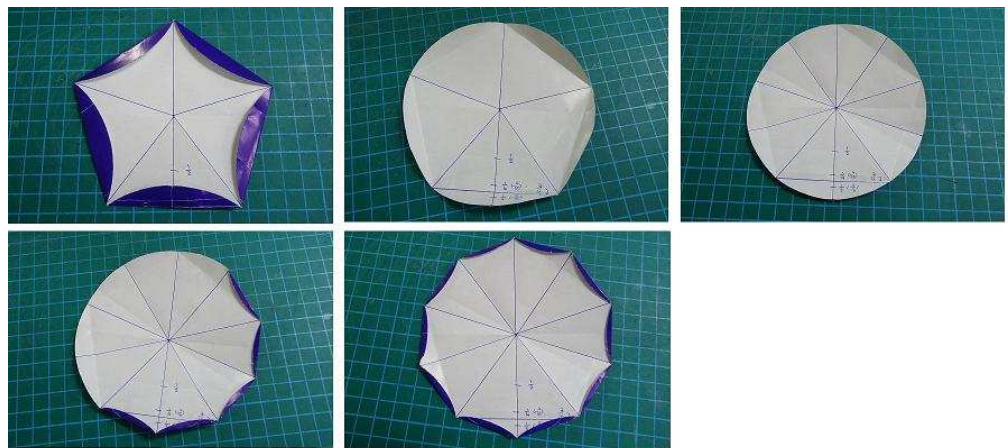
延伸圖形 (1)：圓內接正十邊形

思考：利用倍數概念，將圓內接正五邊形的每個扇形平分，我就可以摺出圓內接正十邊形。

步驟：①取出圓內接正五邊形，展開所有弓形。

②利用對摺平分的方式，將圓內接正五邊形的每一扇形再平分，使圓平分成十等分。

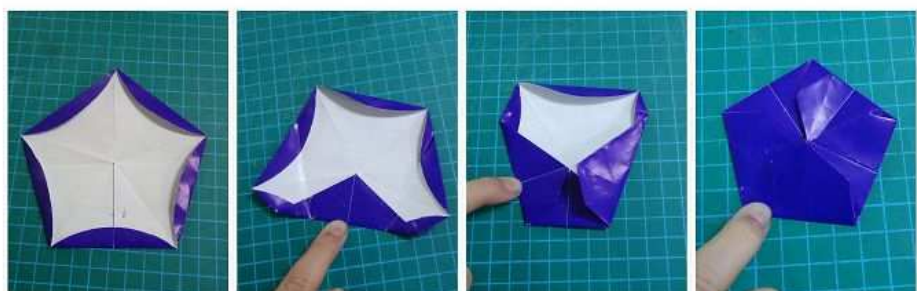
③將每一等分的扇形摺起，即完成圓內接正十邊形。



延伸圖形 (2)：小正五邊形

步驟：①取出圓內接正五邊形。

②將圓內接正五邊形的每一個頂點向圓心摺起，即可完成小正五邊形。

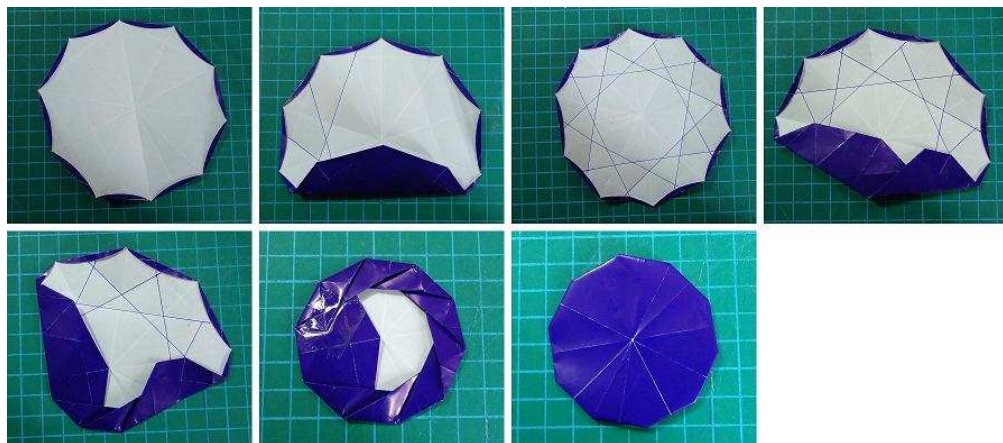


延伸圖形 (3)：小正十邊形

步驟：①取出圓內接正十邊形。

②將圓內接正十邊形的每一個頂點向圓心摺起，並劃出摺線。

③將圓內接正十邊形的每一個頂點延著摺線摺起，即完成小正十邊形。



挑戰圖形 2：圓內接正九邊形

思考：利用摺圓內接正五邊形的方式，先觀察圓內接正八及正十邊形的邊長及邊到

圓心的距離，我們發現將半徑等分，摺起圓周至圓心的 $\frac{1}{16}$ ，可以成功摺出圓內

接正九邊形。

步驟：(1) 將圓對摺兩次，使圓分成四等分。

(2) 將其中之一條半徑，自圓周部份往圓心取出半徑的 $\frac{1}{16}$ 並摺起弓形。

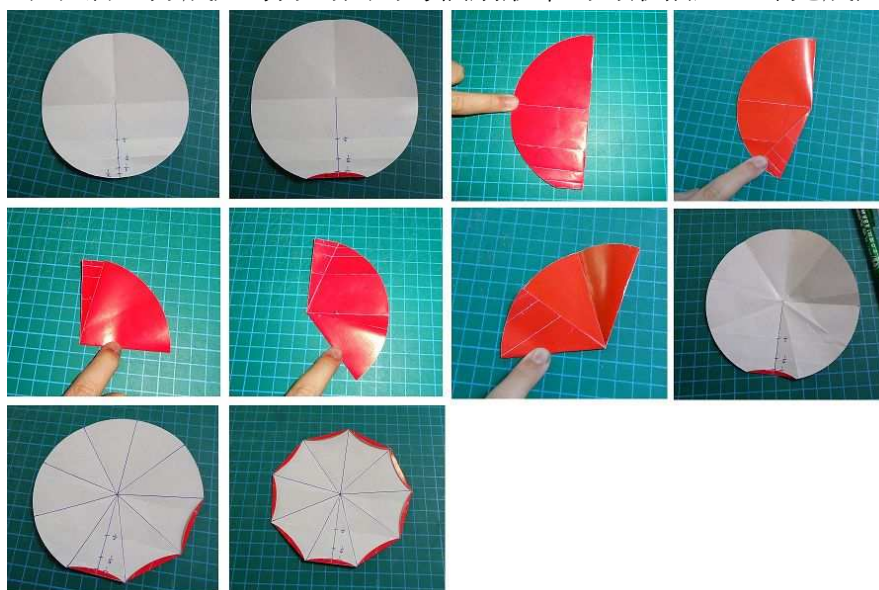
(3) 沿著與弓形垂直的直徑對摺，也使弓形的弦對摺。

(4) 將弦的端點與圓心取出摺起，形成直角三角形並展開。

(5) 沿著扇形的半徑對摺，複製相同的扇形五個。

(6) 利用對摺平分的方法，將圓的其餘部份分成四等分並展開。

(7) 將已分成九等分的圓的每個扇形中的弓形摺起，即完成圓接正九邊形。



延伸圖形 (1)：小正九邊形

步驟：①取出圓內接正九邊形。

②將圓內接正九邊形的每一個頂點向圓心摺起，並劃出摺線。

③將圓內接正九邊形的每一個頂點延著摺線摺起，即完成小正九邊形。



挑戰圖形 3：圓內接正七邊形

思考：利用摺圓內接正五邊形的方式，先觀察圓內接正六及正八邊形的邊長及邊到圓心的

距離，我們發現將半徑等分，摺起圓周至圓心的 $\frac{7}{64}$ ，可以成功摺出圓內接正

七邊形。

步驟：(1) 將圓對摺兩次，使兩條垂直的直徑將圓分成四等分。

(2) 將其中之一條半徑，自圓周部份往圓心取出半徑的 $\frac{7}{64}$ 並摺起弓形。

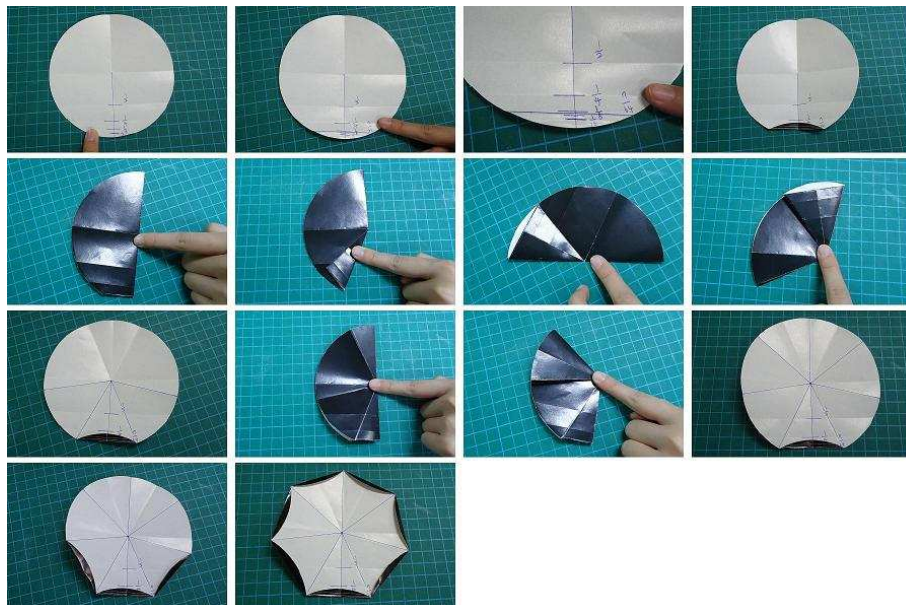
(3) 沿著與弓形垂直的直徑對摺，也使弓形的弦對摺。

(4) 將弦的端點與圓心取出摺起，形成直角三角形並展開。

(5) 沿著扇形的半徑對摺，複製相同的扇形三個。

(6) 利用對摺平分的方法，將圓的其餘部份分成四等分並展開。

(7) 將已分成七等分的圓的每個扇形中的弓形摺起，即完成圓接正七邊形。



延伸圖形 (1)：小正七邊形

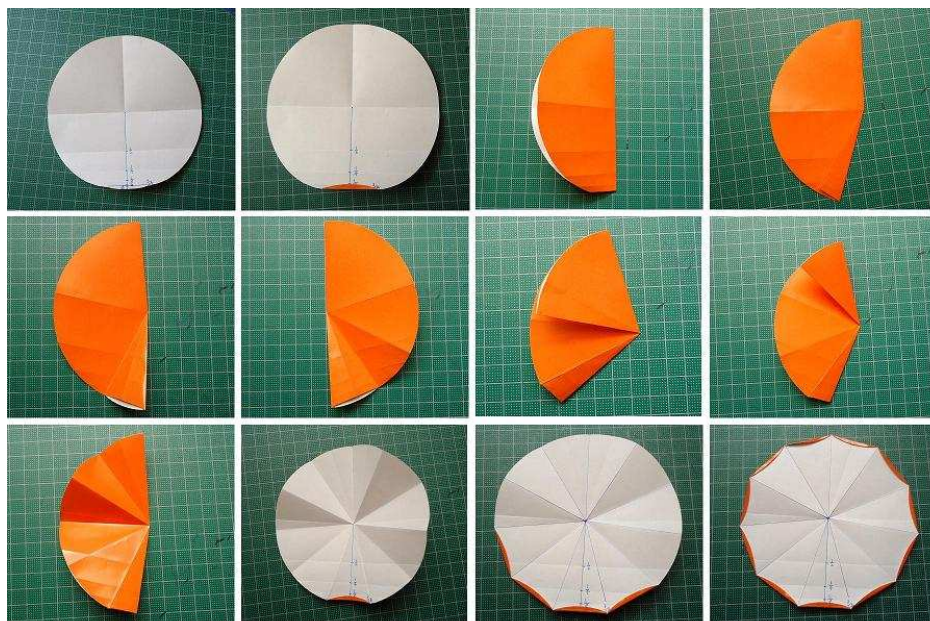
- 步驟：①取出圓內接正七邊形。
②將圓內接正七邊形的每一個頂點向圓心摺起，並劃出摺線。
③將圓內接正七邊形的每一個頂點延著摺線摺起，即完成小正七邊形。



挑戰圖形 4：圓內接正十一邊形

思考：利用摺圓內接正五邊形的方式，觀察相鄰的圓內接正十及正十二邊形的邊長及邊到圓心的距離，我們發現將半徑等分，摺起圓周至圓心的 $\frac{3}{64}$ ，可以成功摺出圓內接正十一邊形。

- 步驟：(1) 將圓對摺兩次，使圓分成四等分。
(2) 將其中之一條半徑，自圓周部份往圓心取出半徑的 $\frac{3}{64}$ 並摺起弓形。
(3) 沿著與弓形垂直的直徑對摺，也使弓形的弦對摺。
(4) 將弦的端點與圓心取出摺起，形成直角三角形並展開。
(5) 沿著扇形的半徑對摺，複製相同的扇形三個。
(6) 利用對摺平分的方法，將圓的其餘部份分成八等分並展開。
(7) 將已分成十一等分的圓的每個扇形中的弓形摺起，即完成圓內接正十一邊形。



延伸圖形 (1)：小正十一邊形

步驟：①取出圓內接正十一邊形。

②將圓內接正十一邊形的每一個頂點向圓心摺起，並劃出摺線。

③將圓內接正十一邊形的每一個頂點延著摺線摺起，即完成小正十一邊形。



【研究四】利用量角器測量圓內接正多邊形的每個扇形的圓心角角度，並找出誤差。

利用圓等份的概念，將圓平分成 n 等份就能得到圓內接正 n 邊形。套用公式： $360^\circ/n$ (n =正多邊形的邊數) 可以算出圓內接正 n 邊形每個扇形的圓心角正確度數。我們利用量角器，測量製作的圓內接正多邊形的每個扇形圓心角角度，並與其正確圓心角度數比較，同時紀錄誤差範圍。

圓內接圖形	延伸的圓內接圖形	各扇形圓心角角度	合計	圓心角正確度數 $360^\circ/n$	誤差範圍
正四邊形		90° 90° 90° 90°	360°	90°	0
	正八邊形	45° 45° 45° 45° 45° 45° 45° 45°	360°	45°	0
	正十六邊形	22.5° 22.5° 22.5° 22.5° 22.5° 22.5° 22.5° 22.5° 22.5° 22.5° 22.5° 22.5° 22.5° 22.5° 22.5° 22.5°	360°	22.5°	0
正三角形		120° 120° 120°	360°	120°	0
	正六邊形	60° 60° 60° 60° 60° 60°	360°	60°	0
	正十二邊形	30° 30° 30° 30° 30° 30° 30° 30° 30° 30° 30° 30° 30°	360°	30°	0
正五邊形		72° 72° 72° 72° 72° 72°	360°	72°	0
	正十邊形	36° 36° 36° 36° 36° 36° 36° 36° 36° 36°	360°	36°	0
正七邊形		52° 52° 51° 51° 51° 51° 52°	360°	約 51.4°	$0.4^\circ \sim 0.6^\circ$
正九邊形		40° 40° 40° 40° 40° 40° 40° 40° 40°	360°	40°	0
正十一邊形		32.8° 32.4° 32.8° 32.9° 32.6° 32.8° 32.8° 32.9° 32.8° 32.7° 32.5°	360°	約 32.7°	$0.2^\circ \sim 0.3^\circ$

由紀錄表格我們發現：

1. 圓內接正三角形、正四邊形及其延伸圖形的每個扇形圓心角比較不會有角度誤差的情況。
2. 製作圓內接正五邊形及正九邊形時，只要能仔細摺出第一個扇形，且在複製及平分動作能仔細完成，我們可以摺出非常正確的圓內接正五及正九邊形。
3. 在製作圓內接正七及正十一邊形時，由於摺起的第一個扇形的弓形較小，摺起來比較不容易，所以失敗的情況時常發生。測量角度時也有角度上的誤差，我們摺出的圓內接形體只能近似正七及正十一邊形。

【研究五】利用尺量出圓內接正多邊形的弓形高度、邊長及圓心至邊的距離，並觀察紀錄。

爲了了解圓內接正多邊形與圓的關係，我們進一步測量各個圓內接正多邊形的邊長及圓心到邊的距離。

圓內接圖形	弓形高度 (公分)	弓形高度 佔半徑的 比例	弓形高度佔 半徑的比例 (通分後)	邊長 (公分)	圓心至邊長的 距離 (公分)
正三角形	3	1/2	480/960	約 10.4	3
正四邊形	約 1.8	約 3/10	288/960	約 8.5	約 4.2
正五邊形	約 1.13	3/16	180/960	約 7.1	約 4.87
正六邊形	約 0.8	約 2/15	128/960	6	約 5.2
正七邊形	約 0.65	7/64	105/960	約 5.25	約 5.35
正八邊形	約 0.5	約 3/40	72/960	約 4.6	約 5.5
正九邊形	約 0.37	1/16	60/960	約 4.1	約 5.63
正十邊形	約 0.3	約 1/20	48/960	約 3.7	約 5.68
正十一邊形	約 0.28	3/64	45/960	約 3.35	約 5.7
正十二邊形	約 0.2	約 1/30	32/960	約 3.1	約 5.75
正十六邊形	約 0.15	約 1/40	24/960	約 2.3	約 5.85

由上表，我們發現：

1. 圓內接正多邊形的邊數愈多，則弓形的高度就愈小。
2. 圓內接正多邊形的邊數愈多，則其邊長就愈短，且圓心至邊長的距離則愈長。

【研究六】測量小正多邊形摺起的角度，找出摺起的角度與其內角及圓的關係。

製作小正多邊形的過程中，我們發現小正三角形的摺法是將圓內接正三角形的頂點往對邊的中點摺，摺起來的角度剛好是 60° ，也剛好將圓內接正三角形分四個小正三角形；小正方形是圓內接正四邊形的頂點往圓心摺，摺起的角度是 45° ，相鄰的兩角合起來就是小正方形的內角，也就是 $45^\circ \times 2 = 90^\circ$ 。

然而製作小正五邊形～小正十二邊形時，是將圓內接正多邊形的頂點往圓心摺，先摺出摺痕後，再依順時針或逆時針依序將摺痕摺起。我們測量摺起的角度，剛好與各圓內接正多邊形的每一個扇形圓心角一樣，即 $360^\circ/n$ 。



利用每次摺出的平角減去摺起的角度 ($180^\circ - 360^\circ/n$)，我們可以得到每個小正多邊形的一個內角角度。套用以前我們學過的內角公式 **【 $(n-2) \times 180^\circ/n$ 】**，我們發現所得到的內角角度是一樣的。資料整理如下表：

小正 n 邊形	n	各扇形圓心角 ($360^\circ/n$)	平角－扇形圓心角 $180^\circ - 360^\circ/n$	正多邊形內角公式 $(n-2) \times 180^\circ/n$
小三角形	3	120°	60°	60°
小四邊形	4	90°	90°	90°
小五邊形	5	72°	108°	108°
小六邊形	6	60°	120°	120°
小七邊形	7	約 51.4°	128.6°	約 128.6°
小八邊形	8	45°	135°	135°
小九邊形	9	40°	140°	140°
小十邊形	10	36°	144°	144°
小十一邊形	11	約 32.7°	147.3°	約 147.3°
小十二邊形	12	30°	150°	150°

二、立體形體

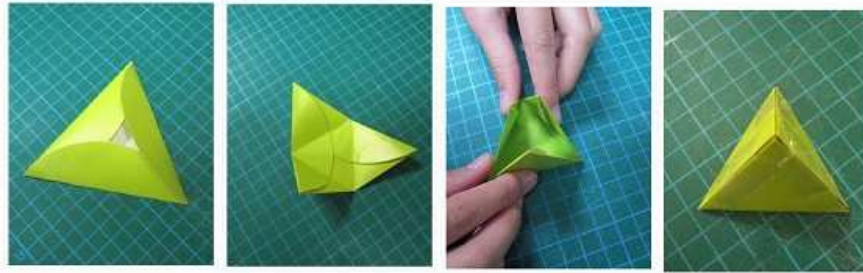
【研究七】如何利用圓內接正多邊形的延伸圖形做出各種正多面體及正三角形多面體？

思考：完成平面圖形後，從老師教導的多面體及正多面體的概念中，我們想試著利用摺出來的平面正多邊形組合，看看是否可以成功組合成各種立體形體？

(一) 正多面體

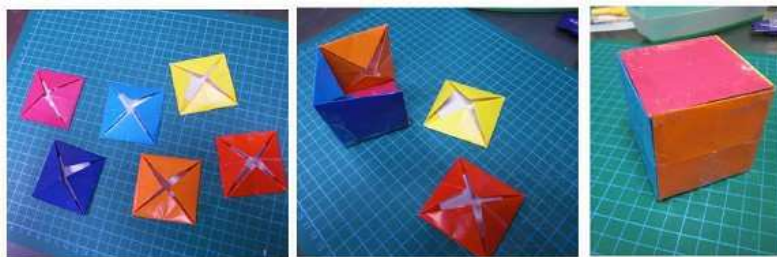
1. 正四面體

- 步驟：(1) 取出圓內接正三角形。
- (2) 將每一頂點摺向對邊的中點並展開，使圓內接正三角形分成四個小三角形。
- (3) 將其中三個小三角形往上摺起集合於一點，並用膠帶黏起，即完成正四面體。



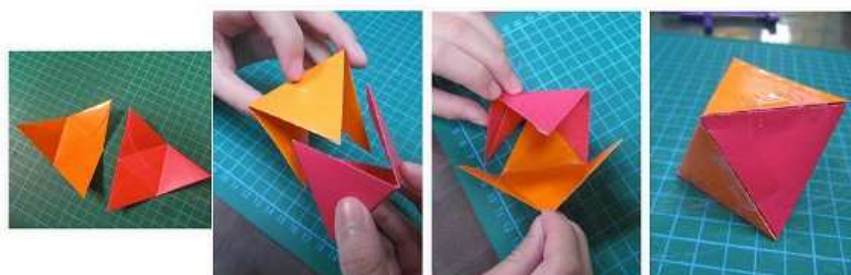
2. 正六面體

- 步驟：(1) 取出小正方形六個。
- (2) 將六個小正方形用膠帶黏起來，即可完成正六面體。



3. 正八面體

- 步驟：(1) 取出已分成四個小正三角形的圓內接正三角形兩個。
- (2) 將兩個圓內接正三角形的邊兩兩相黏貼起來，即可完成正八面體。

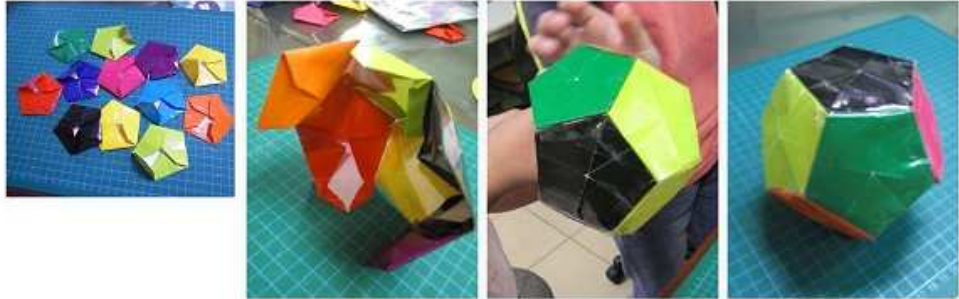


4.正十二面體

步驟：(1) 取出小正五邊形十二個。

(2) 將十二個小正五邊形黏貼起來，使正十二面體的每個頂點皆與三個小正五邊形相接。

(3) 完成正十二面體形體。



5.正二十面體

步驟：(1) 取出已分成四個小正三角形的圓內接正三角形七個。

(2) 將七個圓內接正三角形組合，使每個頂點皆與五個小正三角形接合。

(3) 完成正二十面體形體。



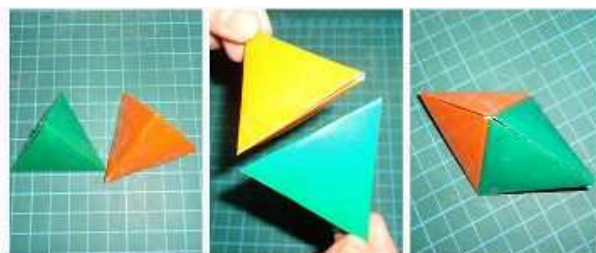
(二) 正三角形多面體

思考：我們從參考書籍【用摺紙來學數學】得知正三角形也可組合成立體圖形。利用我們摺出來的組件，真的可以做出每面為正三角形的多面體。

1.六面體

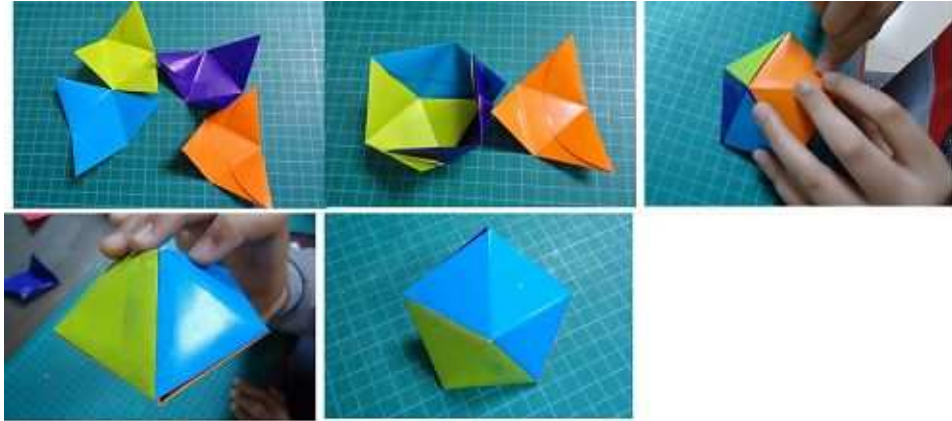
步驟：(1) 取出兩個正四面體。

(2) 將兩個正四面體各取一面貼合，即完成六面體形體。



2. 十面體

- 步驟（1）：①取出已分成四個小正三角形的圓內接正三角形四個。
②先將其中一個頂點接合五個小正三角形。
③再將另一面接合五個小正三角形，即完成十面體形體。



- 步驟（2）：①取出五個正四面體。
②將每個正四面體的一面相黏於軸心。
③完成十面體形體。

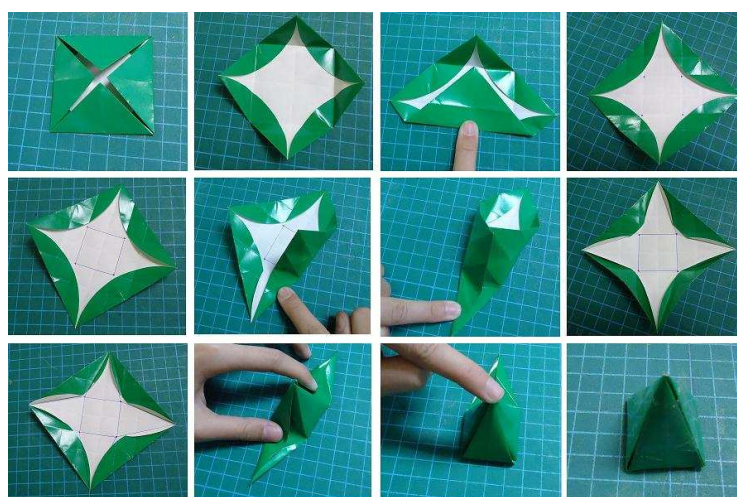


【研究八】如何利用一張圓內接正多邊形做出角錐？

思考：當我們將圓內接正多邊形的頂點對齊圓心摺，我們可以摺出平面的小正多邊形（小正三角形除外），所以若要做出角錐，則角錐底面的正多邊形一定要比小正多邊形還小。

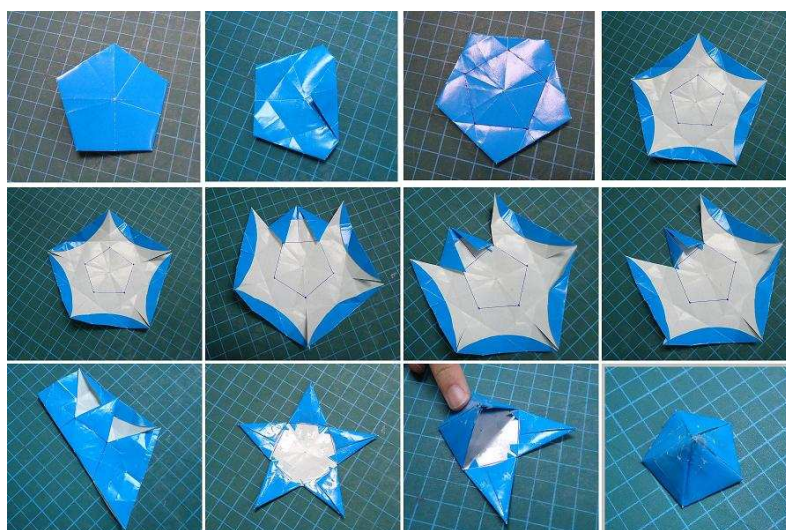
（一）四角錐

- 步驟：1. 取出一個圓內接正四邊形。
2. 將圓內接正四邊形的四頂點往圓心摺，並展開。
3. 取出圓內接正四邊形的其中一個頂點，對準對面小正四邊形邊的摺痕中點摺起並展開，其他三邊重覆同樣動作。
4. 將步驟3所得四條摺痕相交的點用筆點出，形成錐體底部的正方形。
5. 將筆點出的四個點與圓內接正四邊形的四個頂點相連的線摺出，形成錐體底部正方形的每邊皆連接一個等腰三角形。
6. 將四個等腰三角形接於一點，並用膠帶貼合，即完成四角錐形體。



(二) 五角錐

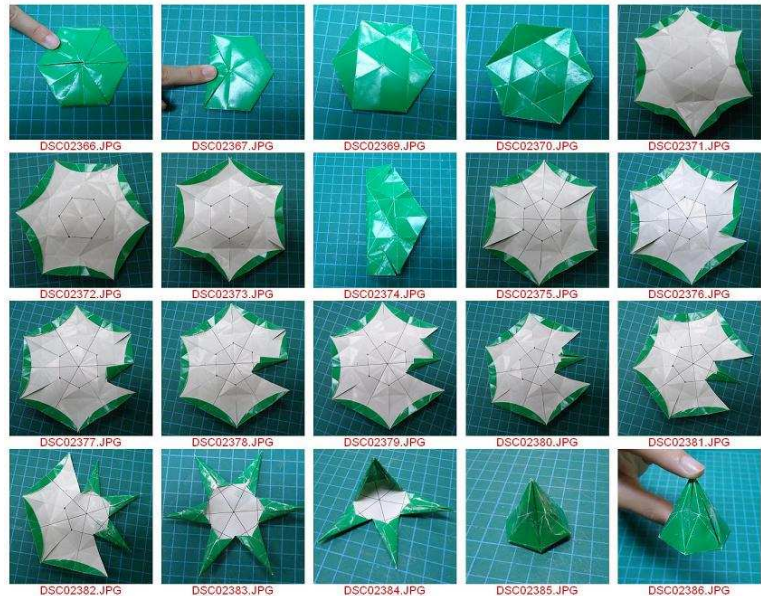
- 步驟：1. 取出一個小正五邊形（簡稱小五 A）。
2. 將小正五邊形的每一個頂點往圓心摺。
3. 將五條摺痕相交的點用筆點出，並相連接，形成一個小小正五邊形（簡稱小五 B）。
4. 將小五 B 展開成圓內接正五邊形。
5. 將小五 B 的五個頂點與圓內接正五邊形的五個頂點的連線用剪刀剪開。
6. 利用頂點對摺的方式取出小五 B 每條邊的垂直平分線。
7. 利用小五 B 每條邊的垂直平分線摺出小五 B 每條邊上的等腰三角形。
8. 將五條邊上的等腰三角形立起，集中於一點，並用膠帶貼合，即完成五角錐。



(三) 六角錐

- 步驟：1. 取出一個小正六邊形（簡稱小六 A）。
2. 將小正六邊形的每一個頂點往圓心摺。
3. 將六條摺痕相交的點用筆點出，並相連接，形成一個小小正六邊形（簡稱小六 B）。
4. 將小六 B 展開成圓內接正六邊形。
5. 將小六 B 的六個頂點與圓內接正六邊形的六個頂點的連線用剪刀剪開。

- 6.利用頂點對摺的方式取出小六 B 每條邊的垂直平分線。
- 7.利用小六 B 每條邊的垂直平分線摺出小六 B 每條邊上的等腰三角形。
- 8.將六條邊上的等腰三角形立起，集中於一點，並用膠帶貼合，即完成六角錐。



【研究九】觀察立體形體每面的形狀，並紀錄立體形體的頂點、面數及邊數，檢查是否符合尤拉公式。

我們利用已編號的圓點貼紙分別貼在每個立體形體的頂點、面及邊上，算出各立體形體的頂點、面及邊數，紀錄如下表：

立體形體名稱		每面形狀	頂點 (V)	面 (F)	邊 (E)	頂點+ 面-邊 V+ F - E
正多面體	正四面體	正三角形	4	4	6	2
	正六面體	正方形	8	6	12	2
	正八面體	正三角形	6	8	12	2
	正十二面體	正五邊形	20	12	30	2
	正二十面體	正三角形	12	20	30	2
正三角形 多面體	六面體	正三角形	5	6	9	2
	十面體	正三角形	7	10	15	2
錐體	四角錐	底：正五邊形 側面：等腰三角形	5	5	8	2
	五角錐	底：正五邊形 側面：等腰三角形	6	6	10	2
	六角錐	底：正六邊形 側面：等腰三角形	7	7	12	2

由上表的紀錄得知，我們製作出來的各種立體形體的頂點、面及邊數是符合尤公式【頂點+面-邊=2】。

陸、研究結果

一、平面圖形

- 1.要製作圓內接正多邊形，必須將圓等份成多個扇形。
- 2.要確定是否為圓內接正多邊形，我們只要利用「線對稱圖形」的概念，將圓內接圖形對摺，並觀察邊與邊、頂點和頂點是否重疊即可。
- 3.在製作圓內接正奇數邊圖形時（即：正三、五、七、九、十一邊形），我們無法以圓對摺的方式做出來，必須利用半徑等份方式，先摺出一個弓形，再利用這個弓形摺出一個扇形，並利用複製或對摺的方式摺出其餘弓形，才能完成圓內接正奇數邊圖形。
- 4.利用觀察相鄰的圓內接圖形的邊至圓心的距離，我們成功找出圓內接正奇數邊圖形的弓形高度佔半徑的比例。然而圓內接正七及正十一邊形則因其正確扇形圓心角角度無法利用公式 $360^\circ/n$ 整除，所以就有誤差值：

圓內接正奇數邊圖形	弓形高度佔半徑比例	可否摺出圓內接正奇數邊圖形	扇形圓心角誤差度數
正三角形	1/2	可	0
正五邊形	3/16	可	0
正七邊形	7/64	可摺出近似圖形	$0.4^\circ \sim 0.6^\circ$
正九邊形	1/16	可	0
正十一邊形	3/64	可摺出近似圖形	$0.2^\circ \sim 0.3^\circ$

- 5.將圓內接正三角形的頂點往對邊的中點摺，可以摺出小三角形，而將頂點往圓心摺，可以摺出小六邊形；其餘的圓內接正多邊形，只要將頂點往圓心摺，我們就可以得到小正多邊形。
- 6.觀察小三角形和小四邊形的摺法，由於摺起的邊剛好緊靠，所以角度也剛好是圓內接正三角形及四邊形各扇形圓心角（ 120° 及 90° ）的一半。
- 7.製作小正五邊形及小正六邊形時，我們同樣是將圓內接正五及正六邊形的每個頂點往圓心摺，由於每摺一次，並不會將頂點覆蓋，所以可以輕易的以順時針、逆時針或不按順序將小正五及正六邊形摺起。
- 8.將圓內接七~十二邊形的每個頂點往圓心摺，我們一樣可以摺出小正七~正十二邊形。和小正五及正六邊形不同的是，當圓內接正多邊形的邊數大於等於七時，將每個頂點往圓心摺，必定會覆蓋到其他頂點，所以必須先摺出摺痕，再依順時針或逆時針順序摺起。
- 9.製作小正五~十二邊形時，我們發現沿著摺痕摺，第一次一定摺出平角，第二次開始所摺起的角度剛好是圓內接正多邊形的扇形圓心角度數。利用平角減扇形圓心角度數（ $180^\circ - 360^\circ/n$ ），剛好是小正多邊形的一個內角，同時也是

圓內接正多邊形的一個內角。我們套用正多邊形的內角公式【 $(n-2) \times 180^\circ/n$ 】，所得到的度數與【 $180^\circ - 360^\circ/n$ 】的度數是相同的。

二、立體形體

- 1.利用圓內接正多邊形的延伸圖形（如：小正三角形、小正方形、小正五邊形），我們可以組合成五種正多面體。
- 2.利用圓內接正三角形的延伸圖形—小三角形及立體形體—正四面體，可以組合成正三角形六面體及十面體。
- 3.利用一張圓內接正多邊形，我們可以製作底面為正多邊形的角錐。製作各種角錐時，我們一定要先將底面的正多邊形摺出來，而且底面的正多邊形一定要比各圓內接圖形的延伸圖形--小正多邊形還要小，這樣才能形成立體形體。
- 4.各種角錐的側面一定是等腰三角形，且連接底面正多邊形的每條邊。觀察角錐的平面圖形，剛好是呈現放射狀的正多角星。



- 5.透過實際計算各立體形體的頂點（V）、面（F）及邊（E）的個數，的確符合尤拉公式：頂點（V）+面（F）-邊（E）=2
- 6.透過相同的製作步驟，只要能夠摺出比小正多邊形還小的正多邊形，我們可以利用一張圓內接正多邊形，製作出各種底面為正多邊形的角錐。



柒、討論

- 1、歸納圖形的種類有兩種，一種是圓內接正多邊形，另一種是從圓內接正多邊形再演進成的「小正多邊」。再利用這兩種圖形做為基礎，組合成各種不同的正多面體及錐體。
- 2、本次研究則是不使用量角器，直接利用圓形圖形的特性，也就是同個圓的半徑與直徑皆相同來進行摺紙。
- 3、徒手進行摺紙時，對於大部分的圓內接正多邊形，可透過對摺、等分圓心角或找出弓形高度的方式來製作。但是若遇到圓內接正七邊形或正十一邊形時，由於圓心角無法整除，如： $[(7-2) \times 180^\circ] / 7$ ，所獲得的內角角度約 128.6° ，由此可知，雖然透過圓的特性可以順利摺出圓內接正多邊形，但是因為邊數的關係，摺疊某些圖形時，仍然會有一些些誤差值。
- 4、本次研究中發現，若能找出弓形高度占半徑的比例，即可以找出摺出適當的圓內接正多邊形（如：圓內接正九邊形，弓形高度占半徑的 $\frac{1}{16}$ ）。因此，就可以透過這種方式摺出正多邊形，不需要使用過去利用正多邊形的各邊內角來畫出正確的正多邊形。
- 5、利用半徑為 6 公分的圓形紙，透過摺出圓心角或弓形高度佔半徑的比例，我們可以製作出各種圓內接正多邊形。若用半徑不同的圓形紙，因為本次的研究是透過等分摺出圓心角或等比例摺出弓形高度，所以也一樣可以摺出各種圓內接正多邊形。
- 6、透過製作小正多邊形，我們量出摺起的角度剛好是圓內接正多邊形的扇形圓心角度數 $(360^\circ/n)$ 。當每次摺出的平角減去摺起的角度 $(180^\circ - 360^\circ/n)$ ，可以得到小正多邊形的內角，同時也是圓內接正多邊形的內角。套用正多邊形內角公式 **【 $(n-2) \times 180^\circ/n$ 】** 所得到的內角是相同的。也就是：
$$180^\circ - 360^\circ/n = (n-2) \times 180^\circ/n$$
- 7、透過多個圓內接正多邊形或是小正多邊，可以組合出許多的立體圖形，這些立體圖形的頂點 (V)、面 (F) 與邊 (E) 的關係是 $V + F - E = 2$ ，因此在推算未知的立體圖形可以運用此公式加以檢證。

捌、結論

- 1、**過去製作多角錐的錐體，較少透過圓形摺出圓內接正多邊形，再做出各種立體形體。**這次的研究活動，不使用量角器進行角度測量，而是直接利用圓形為基礎，摺出多種圓內接正多邊形，再拼接出多種正多面體、多面體及角錐。**這次的研究發現屬於過去所沒有呈現的研究成果，正可以讓我們在平時的數學學習中，多一種管道親近多邊形及立體形體。**
- 2、若所摺疊的圓內接正多邊形圖形是某個圓內接正多邊形的延伸圖形（例如：圓內接正六邊形是圓內接正三角形的延伸圖形），其摺法只要將原本圓內接多邊形的邊長及內角再加以平分即可。

- 3、利用量角器測量得知，圓內接正七邊形、圓內接正十一邊形，其圓心角容易產生誤差，誤差值約在 $0.4^{\circ} \sim 0.6^{\circ}$ 之間，探究其原因，可能是因為正七邊形與正十一邊的邊數與內角和 360 度無法整除盡，因此會產生一些誤差值。
- 4、從摺疊圓內接正多邊形，發現製作圓內接正奇數邊圖形時，首先都必須找出圓形的半徑。之後再利用弓形高度佔半徑的比例不同的概念，找出適當的比例摺出弓形，再摺扇形，最後以圓心為中心點，將所摺出的扇形加以摺疊、複製、平分，即可完成該圓內接正奇數邊形。
- 5、當圓內接圖形的邊數愈多，則弓形高度愈小、邊長愈小，而邊到圓心的距離則愈長。
- 6、製作各種小正多邊形時，其摺起角度剛好等於扇形圓心角 ($360^{\circ}/n$)，求得的內角角度：平角－扇形圓心角 ($180^{\circ}-360^{\circ}/n$)，等同於使用正多邊形內角公式： $(n-2) \times 180^{\circ}/n$ ，兩者所獲得的結果相同。
- 7、透過此次的研究，我們瞭解一張圓內接正多邊形，可以：
 - (1) 製作各種延伸的圓內接正多邊形、小正多邊形、菱形。
 - (2) 組合各種正多面體及正三角形多面體。
 - (3) 製作各種底面為正多邊形的角錐。
- 8、從本次的研究中，再次驗證尤拉公式，透過該公式，可以清楚得知立體圖形的頂點、邊數以及面數之間的相互關係。

玖、參考資料及其它

一、參考書目

1. 數學教育協會/銀林浩編 (民 91)。用摺紙來學數學。p10~p37。台北市：益智工房。
2. 篠田幹男著 陳昭蓉譯 (民 93)。圖形的探險。p97~p130。台北市：天下遠見。
3. 川村みゆき著 鄭世彬譯 (民 98)。多面體摺紙入門。新北市：教育之友。
4. 蔡志強 孫文先編。數學立體模型製作 附：多面體研究。台北市：九章出版社。

二、參考網站

1. 維基百科 <http://wikipedia.tw/>
2. 多面體 Euler's 公式 <http://www.mathland.idv.tw/fun/eulerformula.htm>

【評語】 080403

1. 討論的內容可以再更加強，尤其深入度及豐富性也可以再進一步討論。
2. 一些多邊形摺法的規則討論，值得肯定。
3. 在難度方面可以加強。