中華民國第 51 屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組　數學科

第三名

080402

神奇的魔術方塊—餘數的應用與探討

學校名稱：桃園縣大園鄉竹圍國民小學

作者：	指導老師：
小六　蘇元熹	林徹輝
小六　廖宜翔	林芯蘭
小六　梁瀚中	
小六　陳筱妍	
小六　鄭庭雅	
小五　李奕禎	

關鍵詞：轉法、餘數、迴圈

摘要

我們發現 15 種按照規律的轉法會使魔術方塊轉回原位，並且深入的研究其中一種轉法。藉由同餘數步數的方塊會在同一個位置上的原理，能由步數推算圖形，反之亦然。在步數與圖形互相推算的同時，發現餘數的 10 個特性、由除數、餘數推算被除數的算法以及最大公因數的求法還有 3 個等式的猜測---x、y 互質時的關係。最後我們將餘數應用到日常生活當中，製造了星海羅盤。在製造的過程中，我們發現了第三個迴圈---翻轉迴圈，所以做了翻轉迴圈、餘數迴圈、方塊軌跡迴圈的探討，發現這三個迴圈有部分整數的特性。

壹、研究動機

在五上的時候，老師買了一堆的魔術方塊借給全班玩，我們一開始只比拼一面誰比較快。後來我們不滿足只拼一面，所以開始研究如何拼成 6 面。在研究過程中出現了很多的問題，例如：魔術方塊壞掉、有些方法會轉回原位等。在發現這些問題的同時，我們也試著去解決問題，並發現了魔術方塊中藏著一般人所不知道的規律。

貳、研究目的

一、如何轉成 1 面

二、如何轉成六面

三、如何判斷錯誤的魔術方塊

四、有幾種方法可回復原狀

五、轉動時有何規律

六、餘數和方塊有何關係

七、相同圖形的步數互相有何關係

八、餘數相同的數字有何特色

九、可否算出幾步後會回復原狀

十、可否藉圖形判斷這是第幾步

十一、 可否不藉由表格判斷這是第幾步

十二、 餘數的特性可否運用在日常生活中

十三、 轉法可否合併

十四、 翻轉迴圈和另外 2 種表格有何特性

參、研究設備及器材：魔術方塊、記錄紙、吸管

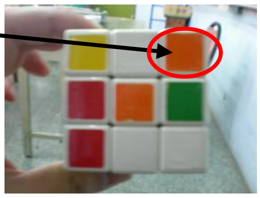
肆、研究過程或方法

一、如何轉成一面：剛接觸魔術方塊時，對於如何轉成一面還很陌生。不過在多次實驗後，我們發現只要依照下列的步驟一定可以完成一面。

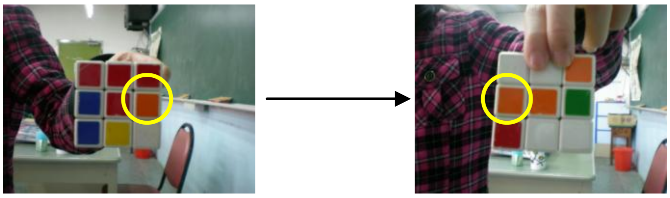
(一) 先選定一面你喜歡的顏色

(二) 完成四個邊的方塊：這時候邊的方塊有四種可能的位置。

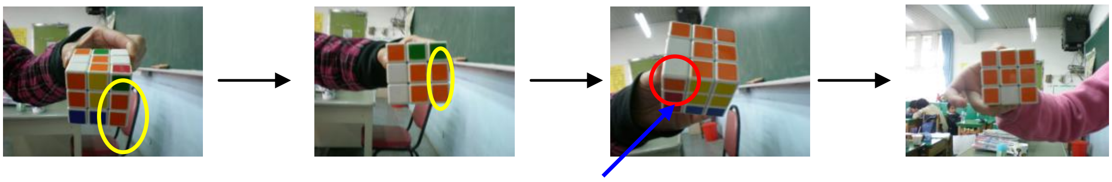
1、已經在正確位置上。



2、在對面的位置：我們只需要將這塊方塊轉到對等於空缺的位置，然後在將同一排的方塊轉下來，就可以完成了。



3、在側面：先轉開，把那一排轉下來，再轉回來即可。



4、在正確的位置上方向卻不對：這種情形比較少見，但只要把那一排轉下去，並把有問題的方塊轉開，就會形成第 2 種的位置了。

(三) 完成四個角的方塊：這時候邊的方塊有四種可能的位置，與邊的方塊類似。

(四) 只要按照上面的方法，就算是新手也很快就可以完成一面。

二、如何轉成六面：完成一面之後，我們還想要更進一步，所以想盡辦法拼成六面，後來經過詢問師長以及查詢電腦網路，我們發現其實有很多拼成六面的方法。我們歸納出其中比較簡單的三種方法如下：

(一) 公式法

(二) 轉出轉入法

(三) 順逆法

三、判斷錯誤的魔術方塊：有些同學在轉動魔術方塊時會不小心把魔術方塊掉到地上，這時候會造成方塊的顏色錯誤。有些會拼不成六面，比較嚴重的連某些面都拼不起來。為了幫助同學修理魔術方塊，我們發現魔術方塊每一塊都是獨一無二的。所以只要將方塊編號,我們就可以發現錯誤的色塊：

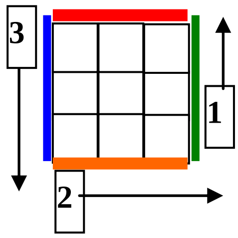
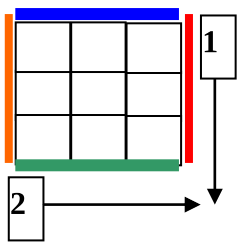
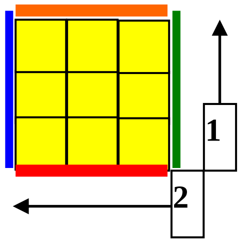
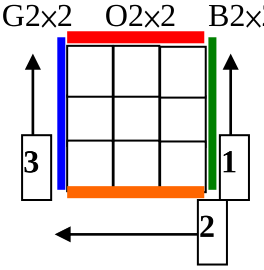
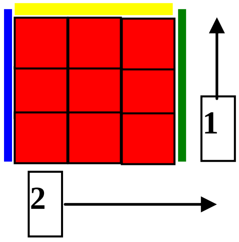
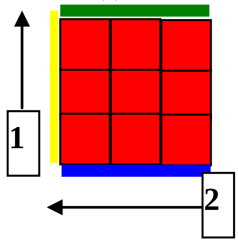
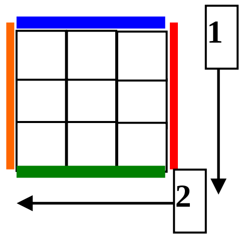
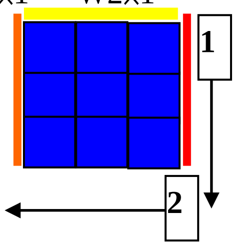
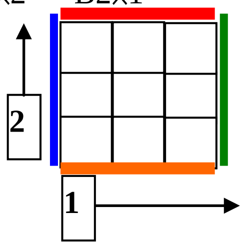
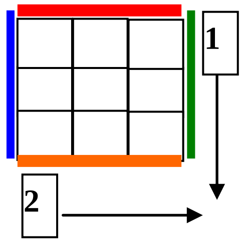
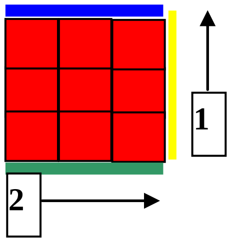
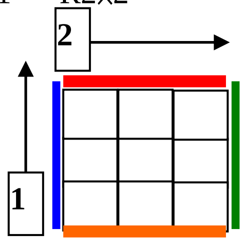
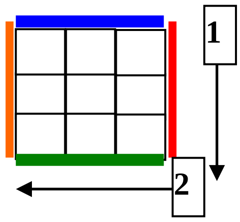
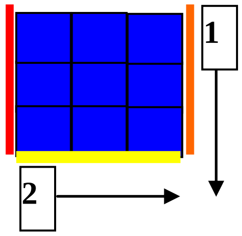
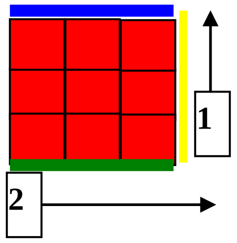
方塊類型	顏色	編號
中心	白、橘、黃、紅、藍、綠	a、b、c、d、e、f
角	白橘綠、橘綠黃	g、h
	綠黃紅、白綠紅	i、j
	白橘藍、橘藍黃	k、l
	藍黃紅、白藍紅	m、n
邊	白橘、白綠、白紅、白藍 黃橘、黃綠、黃紅、黃藍 綠橘、橘藍、藍紅、紅綠	o、p、q、r s、t、u、v w、x、y、z
我們發現魔術方塊可以轉的有 26 塊，和英文字母 26 個互相呼應，經過分類之後編號。		

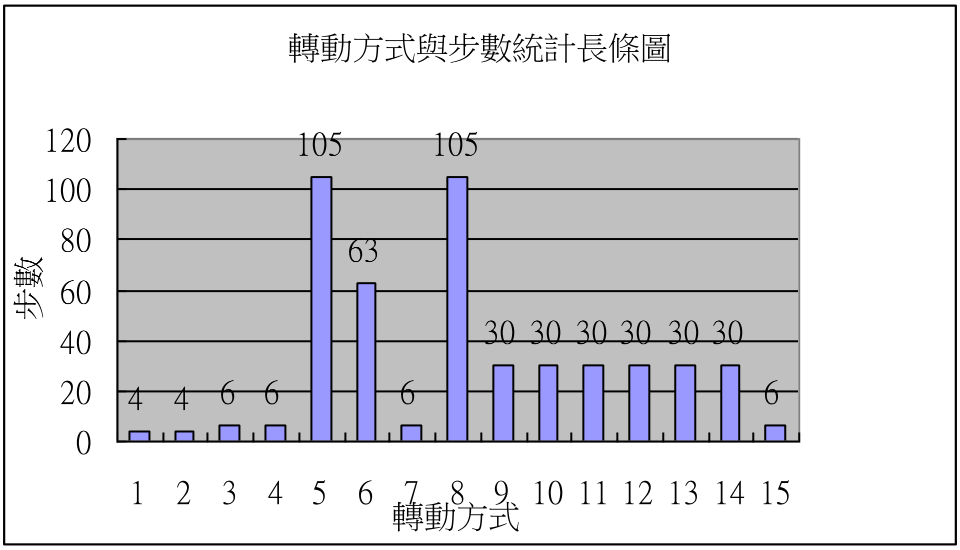
四、按照一定的規律轉會回復原狀：在能夠轉成六面，以及能夠幫忙同學修好魔術方塊之後，我們有一次在無意間發現按照一定的方向有規律的轉魔術方塊會變回原位，這是一件非常有趣的現象，所以我們做了以下的研究：

轉動方式編號：為了幫助紀錄，所以討論出轉動方塊的編號，如下表：

中心方塊顏色	編號	順時針 90 度、逆時針 90 度
紅	R	R1
		R2
黃	Y	Y1
		Y2
橘	O	O1
		O2
白	W	W1
		W2
藍	B	B1
		B2
綠	G	G1
		G2
所以如果是逆時針轉動紅色中心方塊，而後再順時針轉動綠色中心方塊，那我們可以記做：(R2,G2)如果轉動時每次轉動 2 面，則可記做：(R2×2,G2×2)		

五、統計圖：我們轉了許多轉法，發現都可以回到原位。我們把我們得到的資料畫成長條圖觀察。

1	G1×2　O1×2　B1×2 	6	R2×1　G1×1 	11	G1×1　R2×2 
2	G2×2　O2×2　B2×2 	7	G1×2　W1×2 	12	Y2×1　B2×2 
3	R2×2　G2×2 	8	R2×1　W2×1 	13	O1×2　B2×1 
4	G2×2　O1×2 	9	Y1×2　G1×1 	14	B2×1　R2×2 
5	R2×1　G2×1 	10	O2×2　Y1×1 	15	Y1×2　G1×2 



轉動方式表

1=G1×2 O1×2 B1×2	2=G2×2 O2×2 B2×2	3=R2×2 G2×2
4=G2×2 O2×1	5=R2×1 G2×1	6=R2×1 G1×1
7=G1×2 O1×2 B1×2 R1×2	8=R2×1 W2×1	9=Y1×2 G1×1
10= O2×2 Y1×1	11=G1×1 R2×2	12=Y2×1 B2×2
13= O1×2 B2×1	14=B2×1 R2×2	15=Y1×2 G1×2

我們發現

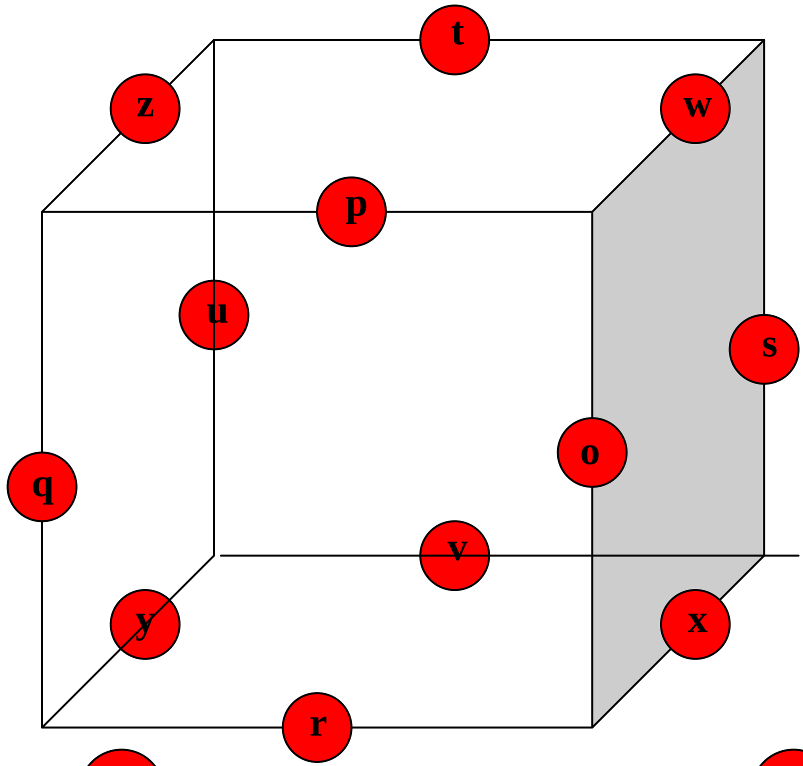
(一) 顏色不會影響步數，但轉動的方式會影響。

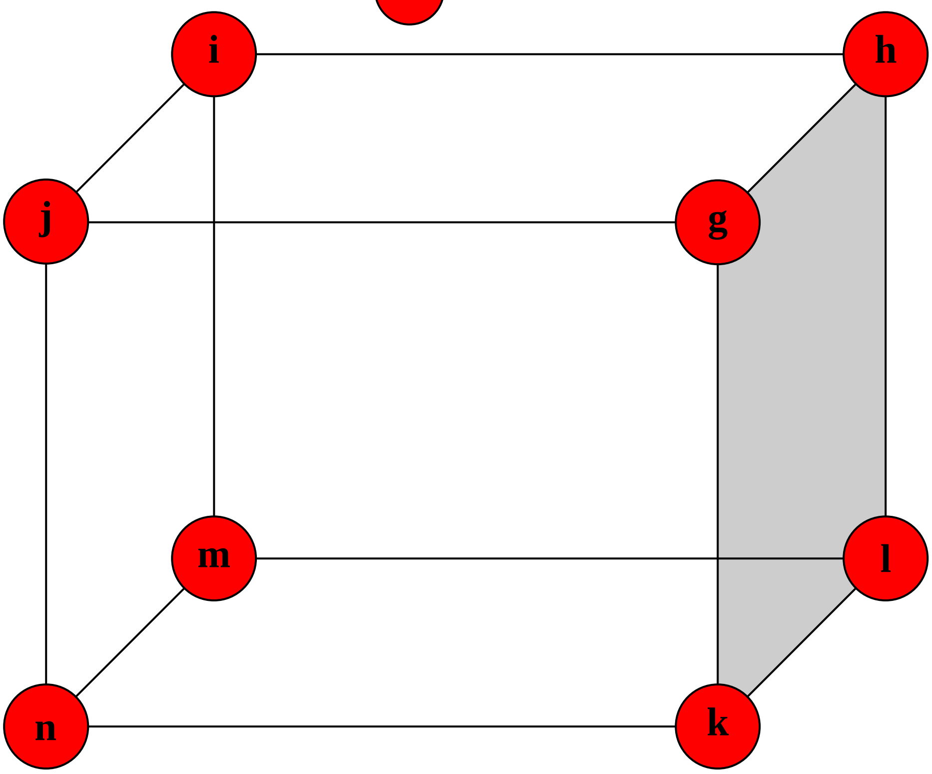
(二) 每步都轉一下，和每步轉 2 下比起來會有較多的步數。

(三) 轉回原位的步數相同時，轉動的方式可能不同。

(四) 轉動方塊相同，但轉動的方向會影響最後的步數，例如(R2×1，G2×1)=105 步，(R2×1，G1×1)=63 步。

六、立體模型：雖然統計圖讓我們知道了許多的規律，但我們想更進一層，為了避免被顏色混淆，所以我們做了立體模型來觀察角和邊的移動規律。





七、(R2×2,G2×2)的規律：

(一) 角的規律：在(R2×2,G2×2)中，有移動的角是 6 個，分別是：g、h、k、l、m、n。我們用 1 代表移動 0 代表沒移動(⟶代表進入不同的軌跡)

g	h	K	l	m	n
110110	110110	101⟶101	101⟶101	011011	011011

我們還記錄了各角移動的軌跡，用×代表那一步沒移動

g	h	K	l	m	n
lnxlgx	kmxkhx	hxkmxk	gxl nxl	xkhxkm	xl gxl n

(二) 邊的規律：在(R2×2,G2×2)中，有移動的邊是 7 個，分別是：w、y、s、x、v、r、o。我們用 1 代表移動 0 代表沒移動

w	y	S	x	v	r	o
110110	011011	1010	10101010	0101	0101	1010

我們還記錄了各邊移動的軌跡，用▲代表那一步沒移動(⟶代表進入不同的軌跡)

w	y	S	x	v	r	o
xy▲xw	▲xw▲xy	o▲s▲	w▲x⟶ y▲x	▲r▲v	▲v▲r	s▲o▲

從上面的實驗，我們可以看出相對面的方塊移動方式是相似的。所以 w、y、x 都是 6 步一個循環。v、r 是 0101，o、s 是 1010。我們發現：轉的方式和方塊的位置決定一個方塊移動的軌跡。

(三) 我們從上面發現：

1、每一個不同的部位移動方式都不同，但位置相同的移動方式卻是相似的。舉例來說：g、h 都是上面的角，所以都是 110。m、n 都是左下方的角，所以都是 011。

2、k、l 雖然在 3 步後回到原位，但是都又沒有重複之前的軌跡。只有 k、l 是回到原位後沒有循環的，其他都有循環，這是因為 k、l 是交點，所以有 2 條不同的路徑。

3、角是 6 步回到原位，邊有的是 4 步，有的是 6 步，取其最小公倍數可得 12 步。所以我們可以知道角、邊的最小公倍數就是轉回原位的步數。

八、(R2,G2)的規律：我們在上面的實驗發現位置決定一個方塊移動的軌跡，還有交點有 2 條不同的路徑，我們想應該每一個轉動的方式都會符合之前的發現。所以我們做了(R2,G2)來證明是否如此，且讓(R2×2,G2×2)與(R2,G2)互相比較，來尋找是否有沒發現的規律。

(一) 角的規律：我們把角有沒有移動的規律紀錄下來

G	1101011010	1、左邊的表格都表示回到了原位，但顏色對。想要回到顏色正確，必須經過原位 3 次。 2、我們發現 k 方塊最特別，不斷在 k、l 兩個位置之間跑動。
H	1011010110	
L	1010110101	
K	11	
M	0110101101	
N	0101101011	

我們還記錄了角的軌跡

原位 次數	**g**	**H**	**l**	**m**	**n**	**k**	轉 10 下雖然回到了原位，但是顏色不對。真正要回復原狀必須轉 30 下。
0	g	h	l	m	n	k	
1	k	g	h	m	n	l	
2	n	g	h	l	m	k	
3	n	k	g	h	m	l	
4	m	n	g	h	l	k	
5	m	n	k	g	h	l	
6	l	m	n	g	h	k	
7	h	m	n	k	g	l	
8	h	l	m	n	g	k	
9	g	h	m	n	k	l	
10	g	h	l	m	n	k	

我們發現經過 k、l 點的方塊都不會停留，且順序是 ggknnmmlhh

如將奇數次數去掉，則可得到順序為 gnmlh

(二) 邊的規律：我們把邊跑動和不動個規律紀錄下來

		1、與角不同的是，邊轉 14 步會回到原位，顏色也會回到原位。 2、我們將多出來的 1 標出來，發現剛剛好都是移到 x 這個位置的時候。
O	11010101101010	
W	10110101011010	
S	10101101010110	
X	101010	
R	01010110101011	
Y	01011010101101	
V	01101010110101	

我們還紀錄了邊的軌跡

步數＼原位	**w**	**s**	**x**	**v**	**y**	**r**	**o**
0	**w**	**s**	**x**	**v**	**y**	**r**	**o**
1	o	w	s	v	y	r	x
2	o	w	s	x	v	y	r
3	x	o	w	s	v	y	r
4	r	o	w	s	x	v	y
5	r	x	o	w	s	v	y
6	y	r	o	w	s	x	v
7	y	r	x	o	w	s	v
8	v	y	r	o	w	s	x
9	v	y	r	x	o	w	s
10	x	v	y	r	o	w	s
11	s	v	y	r	x	o	w
12	s	x	v	y	r	o	w
13	w	s	v	y	r	x	o
14	**w**	**s**	**x**	**v**	**y**	**r**	**o**

我們發現所有方塊的順序是：wwooxrryyvvxss，只有 x 是每次停一下。

如果再將奇數的步數去掉，我們可以得到更清楚的順序：woryvxs

九、餘數與方塊：從上面的實驗我們發現了很多的規律，同時也找到了些問題。這些問題和餘數有關。做了些討論和實驗如下：

(一)之前發現要轉回原位必須是邊和角的最小公倍數。我們現在又發現利用餘數可以知道魔術方塊的情形。舉例來說：如果我們要知道 102 步時的狀況可以用 102 去除以 14 和 10，我們可以得到：

邊：102÷14=7….4

步數＼原位	**w**	**s**	**x**	**v**	**y**	**r**	**o**
4	r	o	w	s	x	v	y
因為餘數是 4，所以我們知道 w 方塊在 r 點。							

角：102÷10=10….2

步數＼原位	**g**	**h**	**l**	**m**	**n**	**k**
0	n	g	h	l	m	k

透過規律知道現在的情況。例如：次數=102

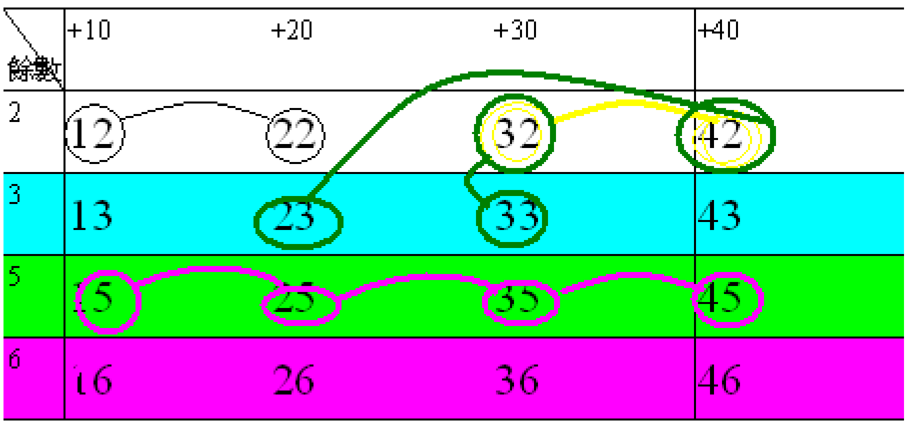
102÷14=7…4 邊=4，102÷10=10…2 角=2

邊	r	o	w	s	x	v	y	**=餘數 4**
角	n	g	h	l	m	k	**=餘數 2**	

因為餘數是 0 所以在原位，但 10÷3=3….1，是第一種顏色的位置。

如此，只要知道是第幾步，我們就可以用餘數推知魔術方塊的情況，因為相同餘數的方塊會是在同一個位置。我們還發現相同餘數的數有些有趣的特性。以角的情形為例：

餘數	+10	+20	+30	+40
2	12	22	32	42
3	13	23	33	43
5	15	25	35	45
6	16	26	36	46



1、被除數加上除數的倍數之後和被除數同餘

2、同一列的任 2 數同餘

3、甲，乙同餘，乙，丙同餘，那麼甲，丙同餘

4、同一列的任 2 數同乘以某整數之後同餘

5、 同一列的任 2 數自己乘自己同餘

6、同一列的任 4 數隨意相加減乘後同餘

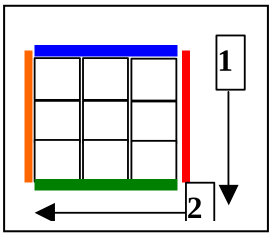
7、任 2 列的數字兩兩相加減乘後同餘

8、12、22 對 10 同餘，12÷2=6，22÷2=11，10÷2=5，得到 6、11 對 5 同餘

9、被除數xa，餘數xa

10、 被除數相加減乘，餘數也相加減乘

(二)反過來想，如果知道方塊的情形(也就是餘數)是不是就可以知道是第幾步呢?我們隨便舉了個狀況：邊=6，角=5。可是不管我們怎麼算，都找不到合適的數字。



1、所以我們乾脆把所有的情形都列出來。

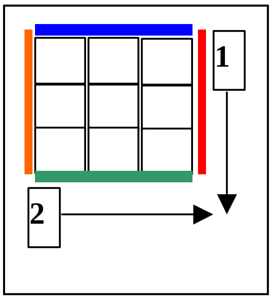
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	0
1	1		31		61		21		51		11		41	
2		2		32		62		22		52		12		42
3	43		3		33		63		23		53		13	
4		44		4		34		64		24		54		14
5	15		45		5		35		65		25		55	
6		16		46		6		36		66		26		56
7	57		17		47		7		37		67		27	
8		58		18		48		8		38		68		28
9	29		59		19		49		9		39		69	
0		30		60		20		50		10		40		70

如此只要我們把表列出來那如果出現各種情況的圖案，我們就可以對照表格找出是第幾步。例如：

邊	y	R	o	w	s	x	v	=餘數 6
角	n	g	h	l	m	k	=餘數 2	

如此對照表格我們就可以知道這是第 62 次或 132 次或 202 次…等

2、我們發現居然有些餘數相對的格子是空的，我們又找了另外一個例子來試試看。



邊 角	1	2	3	4	5	6	7	8	0
1	1	29	57	22	50	15	43	8	36
2	37	2	30	58	23	51	16	44	9
3	10	38	3	31	59	24	52	17	45
4	46	11	39	4	32	60	25	53	18
5	19	47	12	40	5	33	61	26	54
6	55	20	48	13	41	6	34	62	27
0	28	56	21	49	14	42	7	35	63

我們發現偶數對偶數會有空格。奇數對奇數會填滿。為了實驗我們的推測是否正確，所以我們又多做了些表格

	1	2	3	0
1	1		7	
2		2		8
3	9		3	
4		10		4
5	5		11	
0		6		12

這上下 2 個表格並沒有對應的轉法，只是特別列出來觀察我們的推測是否正確。

	1	2	3	4	5	0
1	1			10		
2		2			11	
3			3			12
4	13			4		
5		14			5	
6			15			6
7	7			16		
8		8			17	
0			9			18

列了 2 個表格，我們突然發現不是奇數偶數的問題，而是有沒有互質的問題：互質可填滿表格，非互質不能填滿表格。所以我們可以知道 axb=[a，b]。後來經過討論我們發現是 axb=[a，b] ×(a，b) 。

3、除了用表格來計算步數之外，我們還嘗試是否能用其他的方法計算。

例如：邊=第 6 次　可以是 6、20、34、48、62

角=第 2 次　可以是 2、12、22、32、42、52、62

所以我們可以列出邊和角的可能數字，並圈選出邊和角的相同數字，那就是目前的步數。

4、我們還想到了一個方法，例如：邊=6，角=2。求出目前的步數？

上面的題目列成算式就是：

(甲)÷14=A……6

(乙)÷10=B……2

我們把答案分成 2 部分：

甲除以 14 後餘 6，且可被 10 整除(10 的倍數)，可得甲=20

乙除以 10 後餘 2，且可被 14 整除(14 的倍數)，可得乙=42
則答案為 20+42=62(步)

5、最大公因數的算法：我們原本以為上面的算法可以用在所有的次數上，但我們後來發現只有偶數次數算的出來。所以我們做了以下的探討：

(1) 我們用 10、14 作被除數和除數發現出來的餘數都是偶數

(2) 我們研究 6、9 的次數表格發現 3 的倍數的次數可算出來(3、6、9、12…次)，所以我們發現最大公因數的倍數的次數可以算出來。也發現除了 0 以外，最小的餘數是最大公因數(餘數都可以被最大公因數整除)。

(3) 因為餘數是最大公因數的倍數，所以我們還發現：
(被除數，除數)=(除數、餘數)=(14，10)=(10，4)=(4，2)=2

(4) 因此我們可以用減的方法求出最大公因數：
14-10=4，10-4x2=2，4-2x2=0，(14，10)=2

6、餘數的探討：我們發現餘數除了同餘的特性之外，還有很多有趣的地方，為了對餘數有更多的了解，我們做了以下的探討：

(1) 被除數、除數和餘數的關係：利用上面的第三種算法我們做了以下的表格：

10，14	5，7	6、9
10÷14=0….10 20÷14=1….6 30÷14=2….2 40÷14=2….12 50÷14=3….8 60÷14=4….4 70÷14=5…. 0	5÷7=0….5 10÷7=1….3 15÷7=2….1 20÷7=2….6 25÷7=3….4 30÷7=4….2 35÷7=5….0 40÷7=5….5	6÷9=0….6 12÷9=1….3 18÷9=2….0 24÷9=2….6
餘數=2 的倍數	餘數=1 的倍數	餘數=3 的倍數

還記得驗算除法用的公式：被除數=除數x商數+餘數
我們把除數x商數移到等號左邊：被除數－除數x商數=餘數
配合上面的表格，我們發現：當(x，y)=c 時，則可發現 ax－by=c,
當 x 和 y 互質時，一定可發現整數 a,b 使得 ax－by=1

(2) 我們利用餘數的第 5 個特性和上面第一點製出下面的表格

(2)x2^1－(1)x3=1 (1)x2^2－(1)x3=1 (2)x2^3－(5)x3=1	(1)x4^1－(1)x3=1 (1)x4^2－(5)x3=1 (1)x4^3－(21)x3=1
(2)x5^1－(3)x3=1 (1)x5^2－(8)x3=1	(1)x7^1－(2)x3=1 (1)x7^2－(16)x3=1

(	2	$)x5^3$—(	83	)x3=1	(	1	$)x7^3$—(	114	)x3=1
(	2	$)x8^1$—(	5	)x3=1	(	1	$)x10^1$—(	3	)x3=1
(	1	$)x8^2$—(	21	)x3=1	(	1	$)x10^2$—(	33	)x3=1
(	2	$)x8^3$—(	341	)x3=1	(	1	$)x10^3$—(	333	)x3=1
(	2	$)x11^1$—(	7	)x3=1	(	1	$)x13^1$—(	4	)x3=1
(	1	$)x11^2$—(	40	)x3=1	(	1	$)x13^2$—(	56	)x3=1
(	2	$)x11^3$—(	887	)x3=1	(	1	$)x13^3$—(	732	)x3=1
(	2	$)x14^1$—(	9	)x3=1	(	1	$)x16^1$—(	5	)x3=1
(	1	$)x14^2$—(	65	)x3=1	(	1	$)x16^2$—(	85	)x3=1
(	2	$)x14^3$—(	1829	)x3=1	(	1	$)x16^3$—(	1365	)x3=1

(	2	$)x3^1$—(	1	)x5=1	(	4	$)x4^1$—(	3	)x5=1
(	4	$)x3^2$—(	7	)x5=1	(	1	$)x4^2$—(	3	)x5=1
(	3	$)x3^3$—(	16	)x5=1	(	4	$)x4^3$—(	51	)x5=1
(	1	$)x3^4$—(	16	)x5=1	(	1	$)x4^4$—(	51	)x5=1
(	2	$)x3^5$—(	97	)x5=1	(	4	$)x4^5$—(	819	)x5=1
(	1	$)x6^1$—(	1	)x5=1	(	3	$)x7^1$—(	5	)x5=1
(	1	$)x6^2$—(	7	)x5=1	(	4	$)x7^2$—(	39	)x5=1
(	1	$)x6^3$—(	43	)x5=1	(	2	$)x7^3$—(	137	)x5=1
(	1	$)x6^4$—(	259	)x5=1	(	1	$)x7^4$—(	480	)x5=1
(	1	$)x6^5$—(	1555	)x5=1	(	3	$)x7^5$—(	10084	)x5=1
(	2	$)x8^1$—(	3	)x5=1	(	4	$)x9^1$—(	7	)x5=1
(	4	$)x8^2$—(	31	)x5=1	(	1	$)x9^2$—(	16	)x5=1
(	3	$)x8^3$—(	307	)x5=1	(	4	$)x9^3$—(	583	)x5=1
(	1	$)x8^4$—(	819	)x5=1	(	1	$)x9^4$—(	1312	)x5=1
(	2	$)x8^5$—(	13107	)x5=1	(	4	$)x9^5$—(	47239	)x5=1

(	4	$)x2^1$—(	1	)x7=1	(	5	$)x3^1$—(	2	)x7=1
(	2	$)x2^2$—(	1	)x7=1	(	4	$)x3^2$—(	5	)x7=1
(	1	$)x2^3$—(	1	)x7=1	(	6	$)x3^3$—(	23	)x7=1
(	4	$)x2^4$—(	9	)x7=1	(	2	$)x3^4$—(	23	)x7=1
(	2	$)x2^5$—(	9	)x7=1	(	3	$)x3^5$—(	104	)x7=1
(	1	$)x2^6$—(	9	)x7=1	(	1	$)x3^6$—(	104	)x7=1
(	4	$)x2^7$—(	73	)x7=1	(	5	$)x3^7$—(	1562	)x7=1
(	2	$)x4^1$—(	1	)x7=1	(	3	$)x5^1$—(	2	)x7=1
(	4	$)x4^2$—(	9	)x7=1	(	2	$)x5^2$—(	7	)x7=1
(	1	$)x4^3$—(	9	)x7=1	(	6	$)x5^3$—(	107	)x7=1
(	2	$)x4^4$—(	73	)x7=1	(	2	$)x5^4$—(	107	)x7=1
(	4	$)x4^5$—(	585	)x7=1	(	5	$)x5^5$—(	2232	)x7=1
(	1	$)x4^6$—(	585	)x7=1	(	1	$)x5^6$—(	2232	)x7=1
(	2	$)x4^7$—(	4681	)x7=1	(	3	$)x5^7$—(	33482	)x7=1
(	6	$)x6^1$—(	5	)x7=1	(	8	$)x8^1$—(	9	)x7=1
(	1	$)x6^2$—(	5	)x7=1	(	1	$)x8^2$—(	9	)x7=1

(6)$\times 6^3$ −(185)$\times 7=1$	(1)$\times 8^3$ −(73)$\times 7=1$
(1)$\times 6^4$ −(185)$\times 7=1$	(1)$\times 8^4$ −(585)$\times 7=1$
(6)$\times 6^5$ −(6665)$\times 7=1$	(1)$\times 8^5$ −(4681)$\times 7=1$
(1)$\times 6^6$ −(6665)$\times 7=1$	**(1)$\times 8^6$ −(37449)$\times 7=1$**
(6)$\times 6^7$ −(239945)$\times 7=1$	(8)$\times 8^7$ −(342505)$\times 7=1$

我們從上面發現餘數總是有許多的規律，其中有個很特別的地方：當(x，y)=1，**x^{y-1}−(某數)$\times y=1$**

十、(R2x2,G2x2)與(R2,G2)的合併：我們藉由實驗發現的規律去推算轉法合併之後的樣子，並且實際去轉動魔術方塊，發現轉動的情形和推算的結果是一樣的。這證明了我們發現的規律是真實且可運用在其他狀況上的。

(一)先(R2,G2)後(R2x2,G2x2)

角	合併後角在 18 步後回到原位，但顏色不對。 所以完全正確需 54 步					
0	G	h	l	m	n	k
2	N	g	h	l	m	k
6	L	n	m	g	k	h
8	H	m	l	n	k	g
12	M	k	g	l	h	n
14	L	k	n	h	g	m
18	G	h	l	m	n	k

邊	順序：os wyvryx so rvxw os wyvryx so rvxw						
0	W	s	x	v	y	r	o
2	O	w	s	x	v	y	r
6	S	y	o	w	r	x	v
8	W	v	r	o	y	s	x
12	Y	r	v	s	x	o	w
14	V	y	x	w	s	r	o
18	R	x	w	y	o	v	s
20	Y	s	o	v	r	x	w
24	X	o	s	r	v	w	y
26	S	r	w	y	x	o	v
30	O	v	y	x	w	s	r
32	R	x	v	s	o	w	y
36	V	w	r	o	s	y	x

38	X	o	y	r	w	v	s
42	W	s	x	v	y	r	o

所以可以知道全部要花〔54、42〕=378 步

(二)先(R2×2,G2×2)後(R2,G2)

角	合併後角在 18 步後回到原位，但顏色不對。 所以完全正確需 54 步					
0	g	h	l	m	n	k
4	n	m	g	k	l	h
6	m	l	n	k	h	g
10	k	g	l	h	m	n
12	k	n	h	g	l	m
16	h	l	m	n	g	k
18	g	h	l	m	n	k

角根據移動的軌跡，我們發現可以分成兩種

g、m、k：順序是 k k h g n m

h、l、n：順序是 m l g n l h

邊	順序：so rvxw os wyvryx so rvxw 所以我們只要知道其中一個方塊的路徑，就可以推算出其他的路徑						
0	w	s	x	v	y	r	o
4	y	o	w	r	x	v	s
6	v	r	o	y	s	x	w
10	r	v	s	x	o	w	y
12	y	x	w	s	r	o	v
16	x	w	y	o	v	s	r
18	s	o	v	r	x	w	y
22	o	s	r	v	w	y	x
24	r	w	y	x	o	v	s
28	v	y	x	w	s	r	o
30	x	v	s	o	w	y	r
34	w	r	o	s	y	x	v
36	o	y	r	w	v	s	x
40	s	x	v	y	r	o	w
42	w	s	x	v	y	r	o

可以知道全部要花〔54、42〕=378 步，我們發現轉法的前後不影響總步數。

(四)(R2×2,G2×2)與(R2,G2)的合併其實有更簡單的做法。我們把(R2×2,G2×2)與(R2,G2) 合併轉動 6 次算成轉一步，這時我們發現轉動 3 步後，角會回到原位但顏色不對。轉動 9 步後，角會回到原位且顏色對，而邊需要 7 步，所以總共轉 9×7=63 步後會回到原位，也就是轉 63×6=378 下會回到原位。用這個方法來看會比較簡單，但用上面的方法則是能很仔細的看到每一步移動的軌跡，而且能找出較多的規律。

十一、餘數的應用：在發現了同餘和餘數的特性之後，我們仔細思考是否可將我們的發現運用到日常生活中，後來我們選擇將餘數、日期、星期結合，發明出一種可以快速算出某年某月某日是星期幾的方法：

(一) 4 月 8 號是星期五，根據同餘的特性，所以我們可以做出以下的表格：

	將要過去天數
星期五	0、7、14、21…..7n
星期六	1、8、15、22…..7n+1
星期日	2、9、16、23…..7n+2
星期一	3、10、17、24…..7n+3
星期二	4、11、18、25…..7n+4
星期三	5、12、19、26…..7n+5
星期四	6、13、20、27…..7n+6

如此根據上面的表格我們可以知道 5 月 8 日是星期天，因為 4 月小有 30 天，30÷7=4…2 是屬於 7n+2 的類型

(二) 西元 1 年 1 月 1 日是星期幾：根據上面的方法我們只要知道了日期就可以推算出星期幾。不過為了追求更快速的算法，所以我們要定一個起始的日期，所以我們決定先算出西元 1 年 1 月 1 日是星期幾。為了達成這個目標，我們先上網找出曆法的規律：

1、曆法的規律：我們知道大、小月，還有每年有 365 天或 366 天，所以重點在閏年的規定，以下是我們找出來的閏年規定：

閏年規定	4 年 1 閏	百年不閏	四百年閏	四千年不閏

2、2011/1/1 是星期幾：如果要算出西元 1 年 1 月 1 日

是星期幾，那我們要先算出 2011/1/1 是星期幾會比較快。因為 4 月 8 號是星期五，所以 4 月 1 日也是星期五。31÷7=4…3(一月和三月)，所以是星期五－六天=星期六。2011/1/1 是星期六

3、我們依照餘數的特性下面列出的表格：

年	加多少天(除以七的餘數)
普通 1 年	+1
普通 3 年	+3
4 年(3 年+閏年)	+5
20 年	5x5÷7=3….4
100 年	4x5÷7=2…6，6－1=5
400 年	5x4÷7=2…6，6+1=7=0

所以 2011－1=2010=5x400+10=5x400+4+4+2=5x0+5+5+2=12，12÷7=1…5，星期六倒數 5 天可得星期一。由此可知西元 1 年 1 月 1 日是星期一。

(三) 有西元 1 年 1 月 1 日是星期一可以定位之後，我們只要在列出百年表，十年表，月表和日表，就可以很快速的算出所有日期的星期了。

1、百年表

西元百年	加多少天(除以七的餘數)
000，401、801，1201，1601，2001，2401	+0
101，501，901，1301，1701，2101	+5
201，601，1001，1401，1801，2201	+3
301，701，1101，1501，1901，2301	+1

001	401	801	1201	1601	2001	+0
101	501	901	1301	1701	2101	+5
201	601	1001	1401	1801	2201	+3
301	701	1101	1501	1901	2301	+1

2、十年表

01	+0	07	+0	13	+1	19	+1	25	+2	31	+2	37	+3	43	+3	49	+4	55	+4
02	+1	08	+1	14	+2	20	+2	26	+3	32	+3	38	+4	44	+4	50	+5	56	+5
03	+2	09	+3	15	+3	21	+4	27	+4	33	+5	39	+5	45	+6	51	+6	57	+0
04	+3	10	+4	16	+4	22	+5	28	+5	34	+6	40	+6	46	+0	52	+0	58	+1
05	+5	11	+5	17	+6	23	+6	29	+0	35	+0	41	+1	47	+1	53	+2	59	+2
06	+6	12	+6	18	+0	24	+0	30	+1	36	+1	42	+2	48	+2	54	+3	60	+3

61	+5	67	+5	73	+6	79	+6	85	+0	91	+0	97	+1
62	+6	68	+6	74	+0	80	+0	86	+1	92	+1	98	+2
63	+0	69	+1	75	+1	81	+2	87	+2	93	+3	99	+3
64	+1	70	+2	76	+2	82	+3	88	+3	94	+4	100	+4
65	+3	71	+3	77	+4	83	+4	89	+5	95	+5		
66	+4	72	+4	78	+5	84	+5	90	+6	96	+6		

1	7		18	24	29	35		46	52	57	63		74	80	85	91		+0
2	8	13	19		30	36	41	47		58	64	69	75		86	92	97	+1
3		14	20	25	31		42	48	53	59		70	76	81	87		98	+2
4	9	15		26	32	37	43		54	60	65	71		82	88	93	99	+3
	10	16	21	27		38	44	49	55		66	72	77	83		94	100	+4
5	11		22	28	33	39		50	56	61	67		78	84	89	95		+5
6	12	17	23		34	40	45	51		62	68	73	79		90	96		+6

3、月表

月	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	十一	十二
平年	+0	+3	+3	+6	+1	+4	+6	+2	+5	+0	+3	+5
閏年	+0	+3	+4	+0	+2	+6	+0	+3	+6	+1	+4	+6

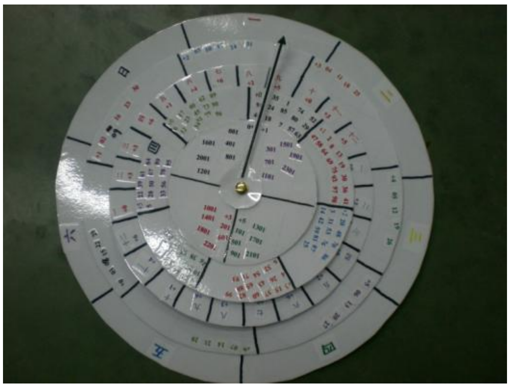
4、日表

01	+0	08	+0	15	+0	22	+0	29	+0
02	+1	09	+1	16	+1	23	+1	30	+1
03	+2	10	+2	17	+2	24	+2	31	+2

04	+3	11	+3	18	+3	25	+3		
05	+4	12	+4	19	+4	26	+4		
06	+5	13	+5	20	+5	27	+5		
07	+6	14	+6	21	+6	28	+6		

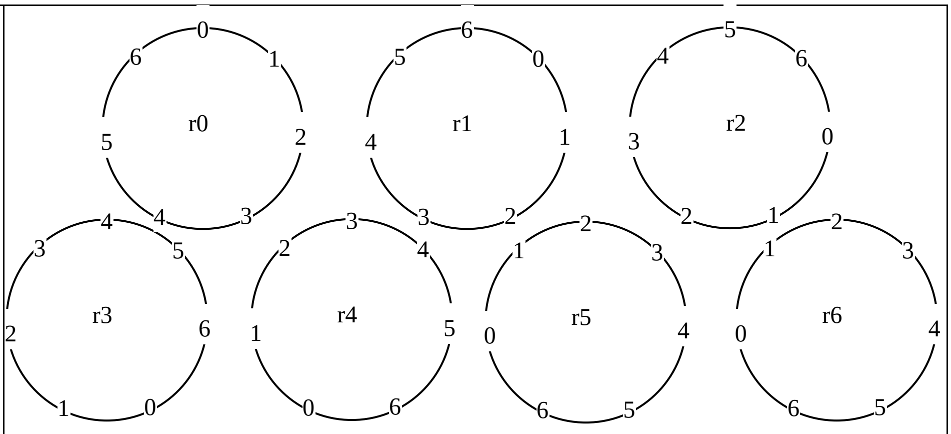
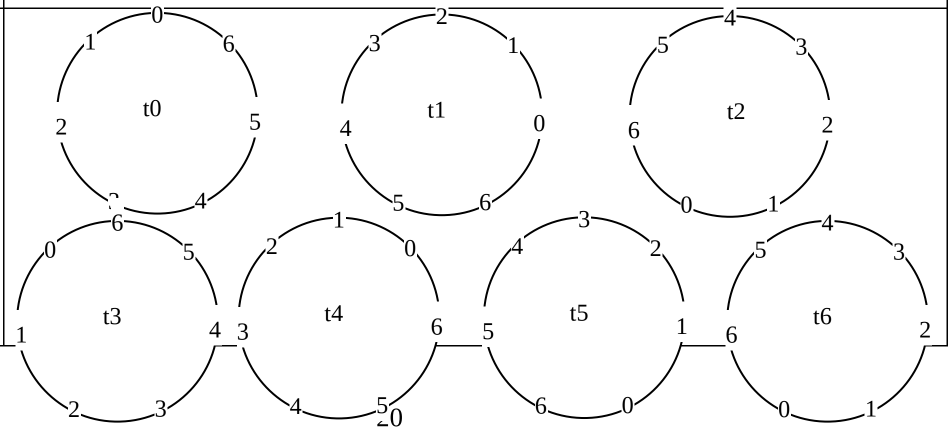
有了上面的 4 種表格，我們就可以運用餘數的特性去算出某日期的星期。

(四) 星海羅盤：我們將百年表、十年表、月表、日表製成星海羅盤，這將就算不了解日期規則的人，只要使用我們製造的星海羅盤也能輕鬆算出星期幾。



十二、相似迴圈的探討：在做星海羅盤的時候，我們發現 7 的餘數可以拿來轉，共有 7 種轉法，再配上 7 種翻法，就是共有 14 種的翻轉方法。我們把這 14 種翻轉方法製成表格，發現和之前的方塊的表格有很多的相同處。然後我們又發現 7 的餘數互相加、乘之後和上面 2 種表格有些相同，有些不同，所以拿來一起比較。

(一) 翻轉迴圈：我們找出 14 種的翻轉方法

轉 revolve	
翻 turn	

然後將這 14 種翻轉方法互相作用的結果，做成表格：

+	r0	r1	r2	r3	r4	r5	r6	t0	t1	t2	t3	t4	t5	t6
r0	r0	r1	r2	r3	r4	r5	r6	t0	t1	t2	t3	t4	t5	t6
r1	r1	r2	r3	r4	r5	r6	r0	t4	t5	t6	t0	t1	t2	t3
r2	r2	r3	r4	r5	r6	r0	r1	t1	t2	t3	t4	t5	t6	t0
r3	r3	r4	r5	r6	r0	r1	r2	t5	t6	t0	t1	t2	t3	t4
r4	r4	r5	r6	r0	r1	r2	r3	t2	t3	t4	t5	t6	t0	t1
r5	r5	r6	r0	r1	r2	r3	r4	t6	t0	t1	t2	t3	t4	t5
r6	r6	r0	r1	r2	r3	r4	r5	t3	t4	t5	t6	t0	t1	t2
t0	t0	t3	t6	t2	t5	t1	t4	r0	r5	r3	r1	r6	r4	r2
t1	t1	t4	t0	t3	t6	t2	t5	r2	r0	r5	r3	r1	r6	r4
t2	t2	t5	t1	t4	t0	t3	t6	r4	r2	r0	r5	r3	r1	r6
t3	t3	t6	t2	t5	t1	t4	t0	r6	r4	r2	r0	r5	r3	r1
t4	t4	t0	t3	t6	t2	t5	t1	r1	r6	r4	r2	r0	r5	r3
t5	t5	t1	t4	t0	t3	t6	t2	r3	r1	r6	r4	r2	r0	r5
t6	t6	t2	t5	t1	t4	t0	t3	r5	r3	r1	r6	r4	r2	r0

(二) 7 餘數加乘關係表：我們也將 7 的餘數互相作用的結果列出來

+	0	1	2	3	4	5	6	0
0	0	1	2	3	4	5	6	0
1	1	2	3	4	5	6	0	1
2	2	3	4	5	6	0	1	2
3	3	4	5	6	0	1	2	3
4	4	5	6	0	1	2	3	4
5	5	6	0	1	2	3	4	5
6	6	0	1	2	3	4	5	6

×	1	2	3	4	5	6	0
1	1	2	3	4	5	6	0
2	2	4	6	1	3	5	0
3	3	6	2	5	1	4	0

4	4	1	5	2	6	3	0
5	5	3	1	6	4	2	0
6	6	5	4	3	2	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0

(三) (R2，G2)邊的方塊軌跡表：雖然方塊軌跡表和上面的 2 種表格有些相似，但還是有些不同。所以我們把方塊軌跡表改成和這 2 種表格比較相似的樣子。

+	g	n	m	l	h
g	g	n	m	l	h
n	n	m	l	h	g
m	m	l	h	g	n
l	l	h	g	n	m
h	h	g	n	m	l

為了方便和餘數加乘關係表比較，所以我們將此表改成數字型態

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

(四) 三種表格的比較：我們比較了翻轉迴圈表、7 餘數加乘關係表、方塊軌跡表發現有特別有趣的地方

1、這三個表格都有一個元素和別人運算後，不會使別人改變。翻轉迴圈表是 r0，7 餘數加乘關係表裡加法是 0，乘法是 1，方塊軌跡表是 g。

2、除了 7 餘數加乘關係表的乘法外，都會有對稱軸使得表格的全部或部分依對稱軸相折後，兩兩成為第一點的元素。

3、這 3 個表格都有整數的封閉性和結合性。

4、7 餘數加乘關係表、方塊軌跡表有交換性，但翻轉迴圈表沒有。

伍、研究結果

一、目前知道有 3 種以上的方法可以轉回六面。

二、每一個方塊都是獨一無二的，我們按照順序給其編號—英文小寫，如此可以

知道損壞後的方塊是何處錯誤。

三、只要按照一定的規律旋轉一定會轉回原位。

四、轉回原位時，可利用角和邊的步數的最小公倍數算出全部需要幾步。但須注意有時角回到原位，顏色不一定會回到原位，需乘以 3。

五、角和邊的規律：

(一) 位置分類相同的方塊轉動的路徑一樣。

(二) 破壞規律的都是特定的方塊。

六、可以利用餘數來知到方塊目前的位置。

七、相同餘數的數字，目前發現 10 種特性：

(一) 被除數加上除數倍數之後和被除數同餘

(二) 同一列的任 2 數同餘

(三) 甲，乙同餘，乙，丙同餘，那麼甲，丙同餘

(四) 同一列的任 2 數同乘以某整數之後同餘

(五) 同一列的任 2 數自己乘自己同餘

(六) 同一列的任 4 數隨意相加減乘後同餘

(七) 任 2 列的數字兩兩相加減乘後同餘

(八) 12、22 對 10 同餘，12÷2=6，22÷2=11，10÷2=5，得到 6、11 對 5 同餘

(九) 被除數×a，餘數×a

(十) 被除數相加減乘，餘數也相加減

八、邊和角的步數數字互質時，可以填滿步數的表格。如果沒有互質則不能填滿。

九、x 和 y 互質時

(一) $xy=[x，y]$

(二) 一定可發現整數 a,b 使得 $ax-by=1$

(三) **$x^{y-1}-($ 某數 $)xy=1$**

十、可以用表格來推算出現在的魔術方塊是第幾步。

十一、邊和角的步數數字互質時，可用算式推算出是第幾步。

十二、轉法合併後，轉法先後影響方塊的軌跡，但不會影響轉動的總步數。

十三、可以用星海羅盤算出某日期是星期幾。

十四、轉法越簡單，方塊轉回原位的步數越少。

十五、發現翻轉迴圈、餘數加減、方塊軌跡和整數有許多相似的特性。

陸、討論

一、是否可以創造出自己的公式？

二、是否所有的轉法只要一直旋轉最後都會回到原位？如何證明？

三、如何證明互質時所發現的三個等式？

四、相同餘數的數字是否還有其他我們沒有發現的特性？

五、2 個除數互質時，可以由餘數算出被除數為何，那 3 個除數時或 4 個除數時，是否也可以？

六、如何用尺規做圖將圓平分七等份？

七、算出星期的方法是否能製成公式？

八、餘數的特性式否有其他的利用方法？

九、翻轉迴圈、餘數加減、方塊軌跡的特性可否運用在其他方面？

柒、結論

這次研究魔術方塊發現魔術方塊不只是可拿來拼成六面，還發現了許多方法只要按照規律轉就可以轉回原位。利用之前學會的長條圖，可以看出一些轉法和步數的關係。在研究轉回原位的同時，又知道了角、邊、總步數之間有著因數和最小公倍數。當我們深入探討方塊和餘數的關係時，又挖掘出許多相同餘數數字們間的驚喜，然後我們將餘數的特性運用在日常生活當中。雖然最後在用算式算出方塊的狀態、轉法合併和翻轉迴圈上迷失了許多時間，但能夠課本上學會的知識來研究課本外的數學，是讓人覺得快樂的一件事情。可是，魔術方塊仍有許多未解謎題等待著我們去研究、解開，依然需要繼續努力。

捌、參考資料及其他

一、魔術方塊：http://www.davidguo.idv.tw/Cube/

二、許技江的第五個魔術方塊網：http://teach.ymhs.tyc.edu.tw/t1086/R-C.htm

三、魚‧方塊達人舖：http://www.unicube.tw/06/3x3video.htm

【評語】080402

1. 推論的主題有一定的趣味性，尤其對一些特殊的例子及情況有相當深入的探討。
2. 有關羅盤的討論似可不列入。
3. 回復原狀的步數討論可以更一般性。