

# 中華民國第 51 屆中小學科學展覽會 作品說明書

---

國小組 物理科

080122

古老的大鐘～「擺」的研究

學校名稱：彰化縣花壇鄉花壇國民小學

作者：  小六 粘耀勻 小六 張聖偉 小六 李祥綸 小六 黃柏儒	指導老師：  黃小玲 劉娟敏
---	-------------------------

關鍵詞：單擺、複擺、週期測量

## 作品名稱：古老的大鐘-『擺』的研究

### 摘要

在阿祖的『紅眠床』下，藏了二個塵封已久的時鐘，它們有異於現代的時鐘的設計-鐘擺，透過鐘擺穩定的擺動，就可以準確地計時了！

我們為了瞭解『擺鐘』的特性，設計五項實驗探討『單擺』與『複擺』規律擺動的性質，研究單擺擺長、擺錘質量、擺動角度對單擺週期的影響，以及支點位置、加重物於複擺上對複擺週期的影響。為了能準確地量測出上述因素對單擺(複擺)所造成的影響，我們設計一個線圈，利用電腦軟體進行時間的測量，所得的結果比利用碼錶所測量的結果準確。

我們研究發現單擺擺動的週期會受到單擺擺長和擺動角度的影響，但擺錘質量的因素對單擺週期的影響不大，在合理的誤差範圍下，可以說與擺錘質量無關！而複擺擺動的週期會因支點的位置改變而變化，但不是遞增或遞減的關係，而是有一個極小值的曲線關係；當加上重物於複擺上時，週期的大小會因重物位置的不同，而有規律性的變化。

## 壹、研究動機

阿祖走了，在親戚朋友不捨的情況下，阿祖安詳地離開了我們！

在整理阿祖的遺物時，在阿祖那古色古香的『紅眠床』下，找到了二個塵封已久的時鐘。阿公說這二個時鐘都是有歷史的，一個是阿祖的嫁粧，已經七十幾年，另一個是阿公創業時所買的，也有三十幾年的歷史了。

『它們還可以用嗎？』這是我的疑問，阿公說：『阿祖的那個還可以用哦！』，於是我迫不及待去找一顆全新的電池來試試看，沒想到阿公說：『它是不需要裝電池，就可以準確地計時的！』不需要電池？怎麼可能？所有的時鐘都需要裝電池才會動的，為什麼它不用裝電池？一連串的疑問，引發我們研究這『古老的大鐘』所蘊藏的奧秘。



➤ 阿公創業時所買的



➤ 阿祖的嫁粧

## 貳、研究目的

針對『古老的大鐘』中『鐘擺』的設計，探討其中所蘊藏的奧秘

- 一、探討『單擺』規律擺動的性質，研究單擺週期與擺繩長度的關係。
- 二、探討『單擺』規律擺動的性質，研究單擺週期與擺錘質量的關係。
- 三、探討『單擺』規律擺動的性質，研究單擺週期與擺動角度的關係。
- 四、探討『複擺』規律擺動的性質，研究複擺週期與支點位置的關係。
- 五、探討『複擺』規律擺動的性質，研究加重物於複擺上對複擺週期的影響。

## 參、研究設備及器材

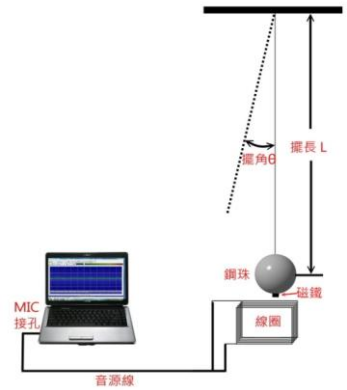
筆記型電腦、線圈、音源線、牛筋繩、透明塑膠管、鋼珠、碼錶。

## 肆、研究過程或方法

### 一、單擺週期(T)與擺繩長度(L)的關係

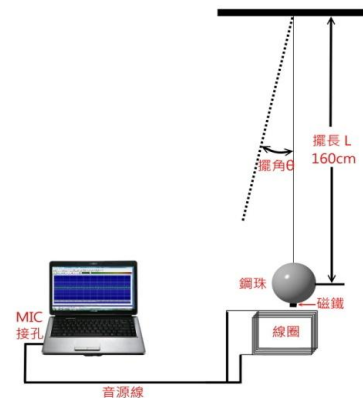
1. 取一段足夠長度的牛筋繩(約 250cm)，一端利用熱熔膠固定於一顆鋼珠上。

- 牛筋繩另一端取適當長度固定於支架上，其餘的牛筋繩整理整齊，避免影響單擺的擺動。紀錄支點至鋼珠中心的長度(擺長  $L$ )。
- 將磁鐵固定於鋼珠下方，並將量測線圈置於磁鐵下方，調整磁鐵與量測線圈的位置，使單擺擺動時，磁鐵與量測線圈不會互相碰撞，且磁鐵可經過量測線圈的正上方。
- 將量測線圈另一端接於電腦的麥克風輸入孔，執行 GoldWave 軟體，實驗裝置如右圖。
- 控制單擺擺動幅度(擺角  $\theta$ )在  $5^\circ$  的範圍內，利用碼錶紀錄單擺來回擺動十次的時間，同時利用 GoldWave 紀錄量測線圈所產生波形。
- 重複步驟 5 五次，利用所得資料計算平均週期  $T$ 。
- 重複步驟 2-6，改變不同的擺長長度，計算不同擺繩長度的單擺週期。
- 利用實驗結果分析單擺週期與擺繩長度的關係並比較碼錶與 GoldWave 軟體測得單擺週期的差異。



## 二、單擺週期( $T$ )與擺錘質量( $m$ )的關係

- 取一段足夠長度的牛筋繩(約 180cm)，一端利用熱熔膠固定於一顆鋼珠上。
- 牛筋繩另一端取長度為 160cm(支點至鋼珠中心的長度)(擺長  $L$ )固定於支架上，其餘的牛筋繩整理整齊，避免影響單擺的擺動。
- 將磁鐵固定於鋼珠下方，並將量測線圈置於磁鐵下方，調整磁鐵與量測線圈的位置，使單擺擺動時，磁鐵與量測線圈不會互相碰撞，且磁鐵可經過量測線圈的正上方。
- 將量測線圈另一端接於電腦的麥克風輸入孔，執行 GoldWave 軟體，實驗裝置如右圖。
- 控制單擺擺動幅度(擺角  $\theta$ )在  $5^\circ$  的範圍內，利用碼錶紀錄單擺來回擺動十次的時間，同時利用 GoldWave 紀錄量測線圈所產生波形。
- 重複步驟 5 五次，利用所得資料計算平均週期  $T$ 。





平均週期  $T$ 。

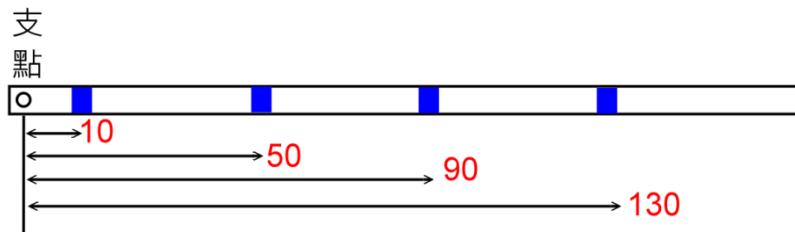
6. 重複步驟 2-6，改變不同的固定孔位置，計算不同固定孔位置的擺動週期。

7. 利用實驗結果分析擺動週期與不同固定孔位置的關係。

### 五、古老的大鐘

1. 取四段長度為 160cm 的透明塑膠管，分別在距離一端 1cm 的位置鑽洞(支點)。

2. 利用鋸子在透明塑膠管不同的位置鋸一個缺口，以便固定鋼珠，編號 1 的透明塑膠管缺口位置示意圖如下所示：



其他的透明塑膠管缺口位置(距支點的距離)如下表所示：

編號	缺口位置 1	缺口位置 2	缺口位置 3	缺口位置 4
1	10	50	90	130
2	20	60	100	140
3	30	70	110	150
4	40	80	120	160

3. 利用步驟 1 所鑽的洞固定透明塑膠管於支架上，將一顆鋼珠利用步驟 2 所鋸的缺口固定於透明塑膠管上。

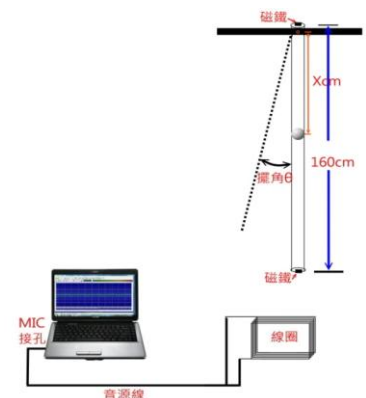
4. 於透明塑膠管二端分別固定一個磁鐵，並將量測線圈置於磁鐵下方，調整磁鐵與量測線圈的位置，使透明塑膠管擺動時，磁鐵與量測線圈不會互相碰撞，且磁鐵可經過量測線圈的正上方，實驗裝置如下圖。

5. 控制透明塑膠管擺動幅度(擺角  $\theta$ ) 在  $5^\circ$  的範圍內，利用 GoldWave 紀錄量測線圈所產生波形。

6. 重複步驟 5 數次，利用所紀錄的波形計算平均週期  $T$ 。

7. 重複步驟 3-6，改變鋼珠固定的位置，計算不同固定孔位置的擺動週期。

8. 利用實驗結果分析擺動週期與不同固定孔位置的關係。



## 伍、研究結果

### 一、單擺週期(T)與擺繩長度(L)的關係

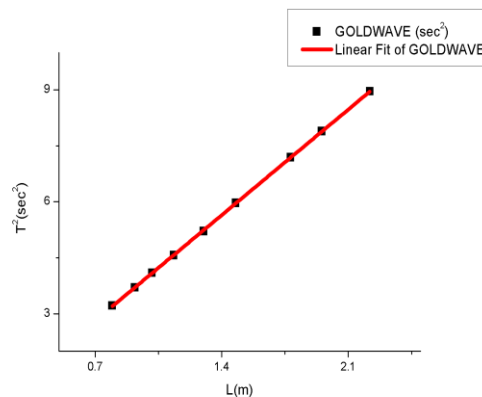
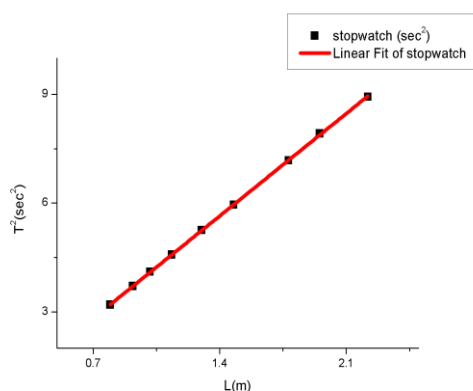
1. 實驗結果如下表所示(簡表，詳細實驗數據請參考附錄)

利用碼錶測量的結果		利用 GOLDWAVE 測量的結果	
擺長 L(m)	平均週期 T(sec)	擺長 L(m)	平均週期 T(sec)
0.795	1.787	0.795	1.7939
0.920	1.925	0.920	1.9244
1.015	2.027	1.015	2.0240
1.135	2.139	1.135	2.1374
1.300	2.291	1.300	2.2830
1.478	2.440	1.478	2.4427
1.781	2.679	1.781	2.6806
1.954	2.814	1.954	2.8082
2.220	2.988	2.220	2.9931

2. 將上列的實驗結果，利用科學繪圖軟體，作平均週期的平方( $T^2$ )與擺長(L)的關係圖如下：

(1) 利用碼錶測量的結果：

(2) 利用 GOLDWAVE 測量的結果：



3. 由上列的關係圖，我們發現平均週期的平方( $T^2$ )與擺長(L)的關係圖中，數據的分佈接近一直線，因此我們利用科學繪圖軟體，計算出一條最接近這些數據分佈的直線(上圖中的紅色線)，並根據科學繪圖軟體求得此一直線的資料如下：

	利用碼錶測量的結果	利用 GOLDWAVE 測量的結果
斜率 S	4.0344	4.03799
$g = \frac{4\pi^2}{S}$	9.78545 m/s <sup>2</sup>	9.77675 m/s <sup>2</sup>
參考值	9.76516m/s <sup>2</sup>	
誤差(%)	0.21%	0.12%

根據我們所找到的資料，一個理想的單擺，在小角度( $\theta < 5^\circ$ )的擺動時，其週期(T)與擺線長度(L)的關係式如下：

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \quad g: \text{重力加速度}$$

將上式取平方後，可得下列如果：

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g} L$$

由上式可知， $T^2$  與  $L$  為線性關係(正比)， $\frac{4\pi^2}{g}$  即為此直線的斜率；利用此一關係式，我們計算出重力加速度的大小如上表所示，由參考資料得知，台中地區的  $g$  值，其參考值為  $9.76516\text{m/s}^2$ ，與我們的實驗結果比較，兩者的誤差非常的小。

4. 由此實驗結果，我們可以發現利用量測線圈和 GOLDWAVE 軟體，來作為測量單擺週期(時間)的儀器，其準確性非常好，比利用碼錶檢測測的結果，誤差更小，結果更準確！



## 二、單擺週期(T)與擺錘質量(m)的關係

1. 實驗結果如下表所示(簡表，詳細實驗數據請參考附錄)

鋼珠 個數	擺錘質 量 m(g)	利用碼錶測量的結果		利用 GOLDWAVE 測量的 結果	
		平均週期 T(sec)	差異	平均週期 T(sec)	差異
1	45.1	2.543	0.002	2.5385	-0.0033
2	90.2	2.536	-0.004	2.5384	-0.0034
3	136.3	2.529	-0.012	2.5347	-0.0071
4	180.4	2.540	-0.001	2.5431	0.0013
5	225.5	2.536	-0.005	2.5333	-0.0085

2. 上表中，『差異』值的計算方式，是利用實驗一所得的結果，從單擺的週期公式：

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \quad g: \text{重力加速度}$$

其中，擺長  $L=1.6\text{m}$ ，重力加速度為  $9.78545\text{m/s}^2$ (利用碼錶測量的結果)及  $9.77675\text{m/s}^2$ (利用 GOLDWAVE 測量的結果)，計算出單擺的週期為 2.541 秒(以碼錶為測量工具)及 2.5418 秒(以 GOLDWAVE 為測量工具)。

3. 由上列的實驗分析，我們發現單擺的週期並不會因為擺錘質量增加，而有明顯的改變，這個結果與我們所查的資料相符合；另外，比較兩種測量工具之間的差異，我們同樣發現，利用量測線圈和 GOLDWAVE 軟體，來作為測量單擺週期(時間)的儀器，其準確性非常好，比利用碼錶測量的結果，誤差更小，結果更準確，因此，在接下來的幾個實驗中，我們只利用量測線圈和 GOLDWAVE 軟體，來作為測量擺動週期(時間)的儀器。

### 三、單擺週期(T)與擺動幅度(擺角 $\theta$ )的關係

1. 實驗結果如下表所示(簡表，詳細實驗數據請參考附錄)

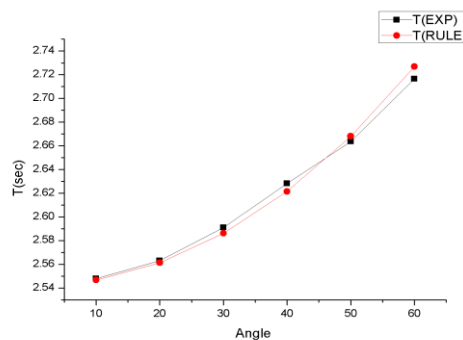
擺角 $\theta$ (度)	擺動 10 次 的擺角減 少量( $\Delta\theta$ )	初始擺角 $\theta + \frac{\Delta\theta}{2}$	平均 週期 T(sec)	理論週期 參考值 (sec)	差異
10	0	10	2.5479	2.5467	0.0012
20	2	21	2.5631	2.5613	0.0018
30	4	32	2.5911	2.5861	0.0050
40	6	43	2.6283	2.6214	0.0069
50	8	54	2.6637	2.6681	-0.0045
60	16	68	2.7165	2.7269	-0.0104
70	20	80			

2. 根據我們找到的資料，當單擺擺動的角度不是很小時，其週期的公式需修正為：

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \times \left[ 1 + \frac{1}{4} \sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right) + \frac{9}{64} \sin^4\left(\frac{\theta_0}{2}\right) + \frac{25}{256} \sin^6\left(\frac{\theta_0}{2}\right) \right]$$

其中 $\theta_0$ 為單擺的擺繩最初從靜止處釋放時與垂直線之夾角，在我們的實驗中，擺繩長度(L)為 1.6m，重力加速度 g 值為 9.77675 m/s<sup>2</sup>(利用 GOLDWAVE 測量的結果)，計算出的『理論週期參考值』如上表所示，與實驗的結果作比較，最大誤差約在 0.4%左右。

3. 將上列的實驗結果(黑色方點)與理論參考值(紅色圓點)，利用科學繪圖軟體，作週期(T)與擺角( $\theta$ )的關係圖如下：



4. 在上表中，擺角 70° 的實驗中，因為擺動的幅度太大了，以致無法控制讓單擺穩定擺動，所以無法取得實驗的數據。

#### 四、擺繩質量不可忽略(複擺)之擺動週期的測量

1. 實驗結果如下表所示(簡表，詳細實驗數據請參考附錄)

支點距 末端位置 (m)	支點距質 心位置 h(m)	平均 週期 T(sec)	理論週期 參考值 (sec)	差異	誤差 (%)
0.01	0.79	2.0933	2.0689	-0.0244	1.18
0.06	0.74	2.0625	2.0377	-0.0248	1.22
0.11	0.69	2.0350	2.0086	-0.0263	1.31
0.16	0.64	2.0134	1.9825	-0.0309	1.56
0.21	0.59	1.9950	1.9602	-0.0347	1.77
0.26	0.54	1.9801	1.9431	-0.0370	1.90
0.31	0.49	1.9737	1.9330	-0.0407	2.10
0.36	0.44	1.9744	1.9325	-0.0419	2.17
0.41	0.39	1.9923	1.9452	-0.0471	2.42
0.46	0.34	2.0291	1.9765	-0.0526	2.66
0.51	0.29	2.0966	2.0351	-0.0615	3.02
0.56	0.24	2.2014	2.1351	-0.0663	3.11
0.61	0.19	2.3892	2.3024	-0.0868	3.77
0.66	0.14	2.6987	2.5920	-0.1067	4.12
0.71	0.09	3.2671	3.1520	-0.1151	3.65

2. 根據我們找到的資料，當單擺的擺繩質量不可忽略時，這種情形稱為複擺或物理擺，嚴格來說，所有真實的都屬於複擺，而單擺其實只是一種理想的狀態而已。在複擺的擺動中，如果物體是做小角度(擺角小於 $5^\circ$ )的擺動，其週期為

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{Mgh}} = 2\pi \sqrt{\frac{I_{cm} + Mh^2}{Mgh}}$$

$\left\{ \begin{array}{l} M: \text{複擺的總質量} \\ h: \text{支點距質心的距離} \\ I: \text{通過支點的轉動慣量} \\ I_{cm}: \text{通過質心的轉動慣量} \end{array} \right.$

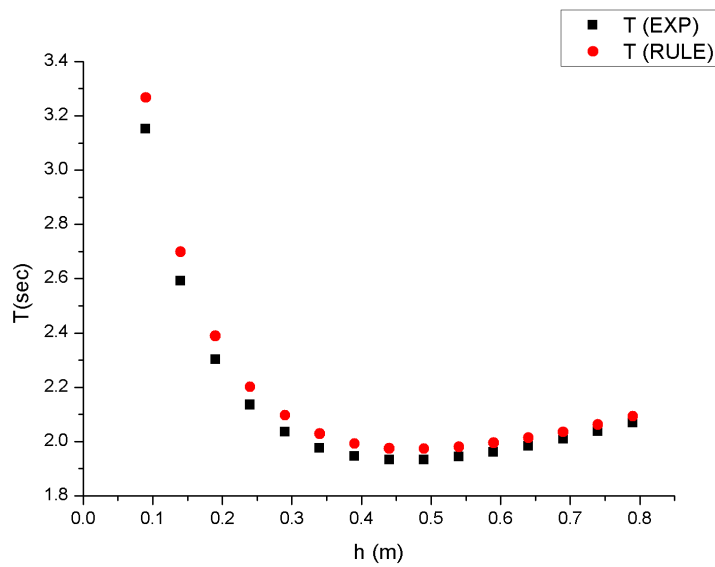
而我們實驗所使用的透明塑膠管，其通過質心、轉軸的轉動慣量

$$I_{cm} = \frac{1}{12}ML^2 \quad (L: \text{透明塑膠管全長 } 1.6\text{m}), \text{ 根據此公式, 計算出不同}$$

支點位置的擺動週期如上表所示，與實驗結果相比較，其誤差最大

值為 4.12%。

3. 將上列的實驗結果與理論值，利用科學繪圖軟體，作週期(T)與支點距質心位置(h)的關係圖如下：



其中黑色方點表示實驗值，紅色圓點表示理論值，兩者所形成的曲線非常相似，表示這項實驗的結果與理論相當符合。

## 五、古老的大鐘

1. 實驗結果如下表所示(簡表，詳細實驗數據請參考附錄)

鋼珠距末端位置 X(m)	平均週期 T(sec)	理論週期 參考值 (sec)	差異	誤差 (%)
0.1	2.0794	2.0756	0.0038	0.18
0.2	2.0549	2.0836	-0.0287	1.38
0.3	2.0333	2.0968	-0.0635	3.03
0.4	2.0539	2.1152	-0.0614	2.90
0.5	2.0359	2.1387	-0.1028	4.81
0.6	2.0388	2.1670	-0.1282	5.92
0.7	2.0339	2.2000	-0.1661	7.55
0.8	2.0652	2.2374	-0.1722	7.70
0.9	2.0681	2.2791	-0.2110	9.26
1.0	2.0884	2.3249	-0.2365	10.1
1.1	2.0982	2.3744	-0.2762	11.6
1.2	2.1326	2.4275	-0.2949	12.1
1.3	2.1557	2.4839	-0.3281	13.2
1.4	2.1847	2.5434	-0.3587	14.1
1.5	2.2097	2.6058	-0.3960	15.2
1.6	2.2510	2.6709	-0.4199	15.7

2. 根據實驗四的結果，複擺的週期可以用下列式子表示

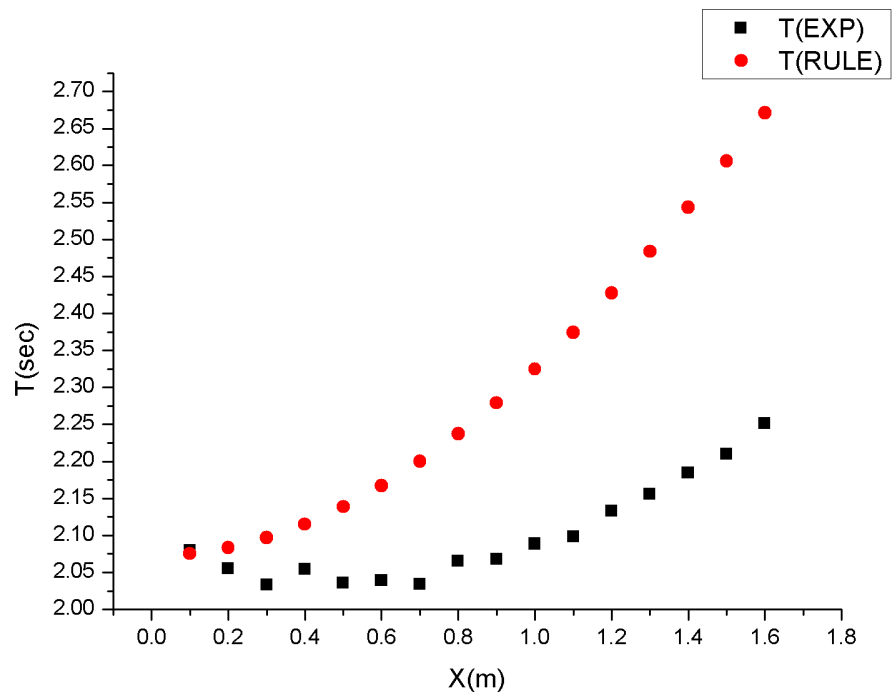
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{Mgh}}$$

如果我們將支點固定在透明塑膠管的一端，則透明塑膠管的轉動慣量為  $\frac{1}{3}ML^2$ ；若在透明塑膠管距支點 X 的位置固定一顆質量為 m 的鋼珠，則會增加轉動慣量  $mX^2$ ，因此加上一顆鋼珠的複擺，其週期公式變成：

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{Mgh}} = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{1}{3}ML^2 + mX^2}{Mg \frac{L}{2}}}$$

根據此公式，計算出不同鋼珠位置的擺動週期如上表所示，與實驗結果相比較，其誤差最大值為 15.7%。

3. 將上列的實驗結果與理論值，利用科學繪圖軟體，作週期(T)與鋼珠位置(X)的關係圖如下：



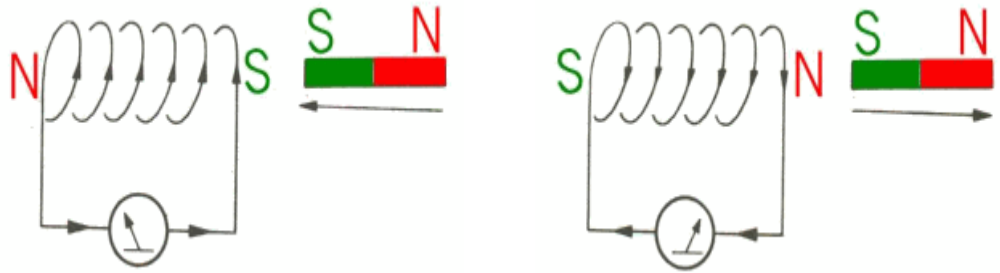
其中黑色方點表示實驗值，紅色圓點表示理論值，兩者所形成的曲線，說明隨著鋼珠距支點距離增加，擺動週期有愈來愈大的趨勢，但是實驗值的增加速率比理論值來得小，而且鋼珠距支點距離愈大時，兩者的差異愈大。在我們的討論中，嘗試修正此一現象，但是最後還是沒有成功！

## 陸、討論

### 一、準確量測時間的利器-線圈與 GOLDWAVE 軟體

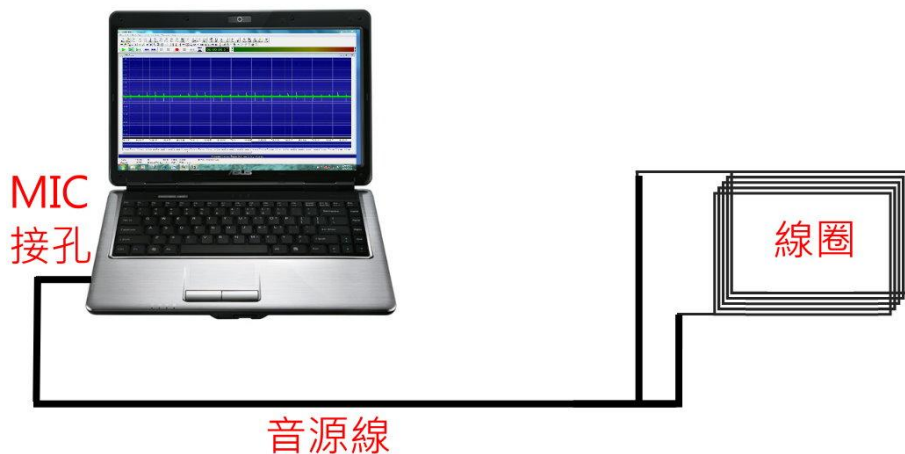
在我們的實驗中，準確量測時間的大小是決定實驗成敗的關鍵，因此，除了使用傳統的碼錶測量時間外，更希望能找到一個比碼錶更能準確計時的工具！利用網路找尋相關的討論，終於在歷屆科展的參展資料中，發現一種可以準確測量時間的工具-線圈與 GOLDWAVE 軟體

1. 這項測量工具主要利用電磁感應的原理來產生感應電流，並利用電腦的錄音功能，將所產生的感應電流，以類似錄音的方式將訊息紀錄起來，而 GOLDWAVE 軟體就是一個不錯的錄音軟體，同時 GOLDWAVE 軟體也提供我們在後續資料判讀上，相當大的便利，使我們的實驗結果與理論相符合。
2. 利用電磁感應的原理，可以在線圈產生感應電流，在指導老師的說明下，可以用下圖來說明：

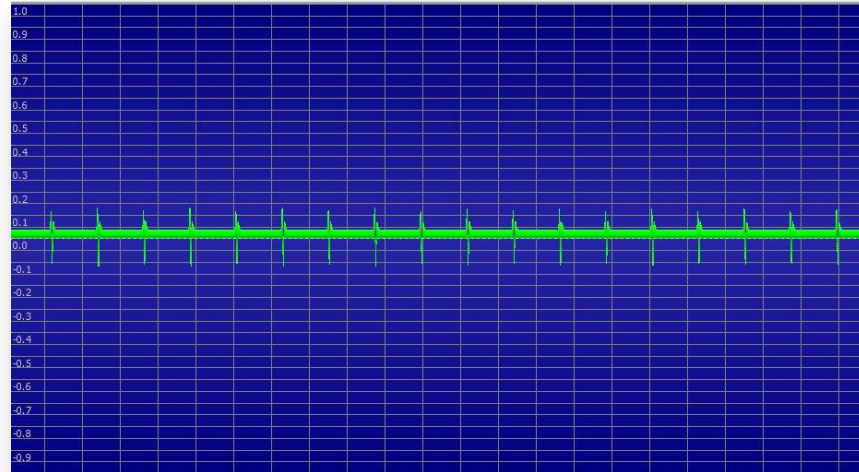


在上圖中，當磁鐵接近或遠離線圈時，線圈會產生感應電流。因此我們在單擺的擺錘上，吸上一顆強力磁鐵，並將線圈置於擺錘擺動路徑中的最低點，如此在單擺擺動時，就會產生接近或遠離線圈的效果，在線圈上就會產生感應電流。

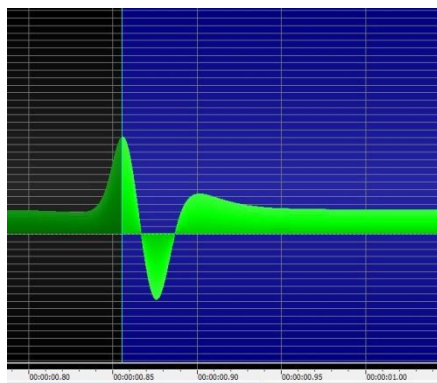
3. 將線圈上的感應電流利用音源線連接電腦的麥克風接孔，如下圖所示：



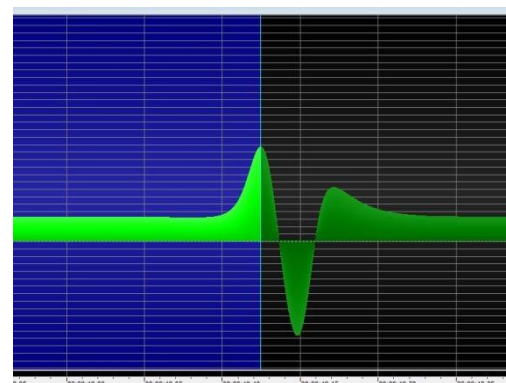
此時電腦會將感應電流視為如同我們使用麥克風，所產生的聲音訊號，因此，我們利用 GOLDWAVE 軟體作為錄音的工具，將感應電流的訊號紀錄下來，如下圖所示：



4. 在紀錄下來的波形中，我們利用 GOLDWAVE 軟體的放大功能，即可將原本密集的波形展開來，方便我們判選正確的時間位置，如下圖所示：



➤ 實驗數據紀錄起點



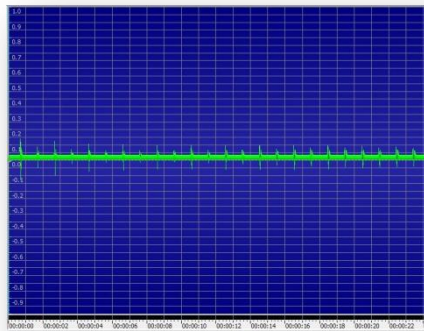
➤ 實驗數據紀錄終點

從上面的實驗圖形，可以看出當擺錘經過線圈時，會產生上下起伏的波形(電流訊號)，為了準確紀錄擺動週期的時間，在選取波形時，必須是相同的狀態，在我們這次的實驗中，都是以波形的**最高位置**為基準，來決定擺動的週期。而在實驗中，我們發現來回擺動一次時，會產生二個波形，因此，如果要紀錄十個週期的時間，就必須要紀錄二十個波形的時間間隔。

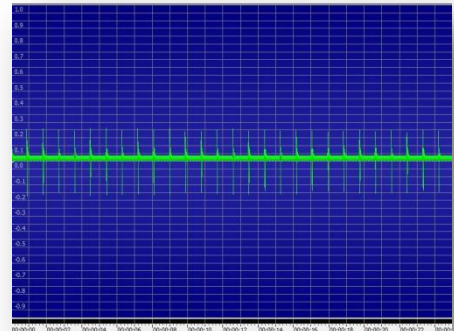
5. 在實驗的過程中，我們發現磁鐵移動的速率愈快時，所產生的感應電流愈大，在 GOLDWAVE 軟體上所產生的錄音波形就愈明顯，觀察單擺的擺動過程中，擺錘擺動路徑中的最低點速率最快，這個位



置也是單擺不擺動時的平衡位置，因此，在實驗前，線圈擺放的位置要在擺錘的正下方，單擺擺動時，才能測到較好的訊號。

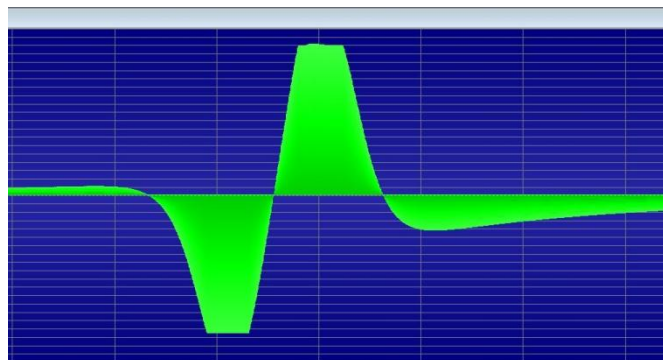


➤ 擺錘速率較小時的波形



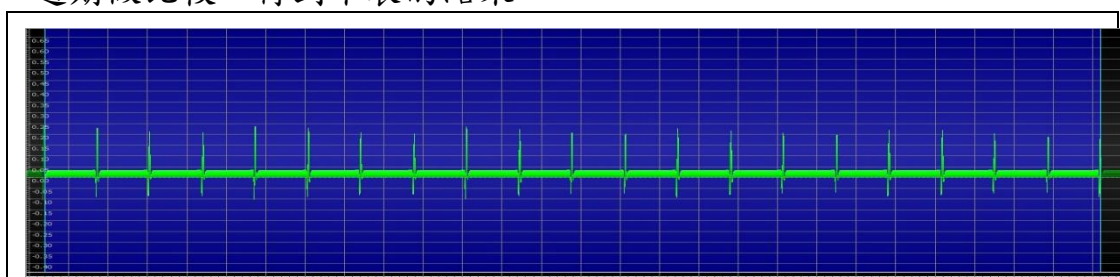
➤ 擺錘速率較小時的波形

但在進行單擺大角度擺動的實驗中，因為此時擺錘的速率非常快，會產生更大的感應電流，在電腦中，會有避免因過大電流而造成電腦損壞的保護裝置，因此所產生的波形會變成如下圖的形狀：



## 二、影響單擺週期的因素

1. 單擺是一種理想的擺動狀態，它需假設所有的質量均集中在一個小點上，而且擺繩必須沒有質量，在真實的情況下，這是不可能存在的！在我們的實驗中，我們使用半徑約 1cm 的鋼珠作為擺錘，使用牛筋繩作為擺繩，利用電子秤量測鋼珠與牛筋繩的重量，分別為 45.1 公克與 0.1 公克，兩者相差約 450 倍，因此，我們可以忽略牛筋繩的質量，而擺繩的長度則由支點量測至鋼珠的中心，如此就可以模擬出較理想的單擺狀態。
2. 週期是指單擺來回擺動一次所需要的時間，因此在最初的實驗中，我們利用碼錶直接量測單擺來回擺動一次的時間，結果發現單擺的週期並沒有固定，而是不規則的變動，探究其原因，才發現是因為只量測一次時，所產生的誤差會很大，因此我們改用量測十次的週期後，再將所得的結果計算出單擺的週期，減少因測量所造成的誤差。
3. 單擺擺動的週期性是非常穩定的，我們觀察利用電腦所紀錄的波形，分析單擺每次來回擺動所需的時間與選取十次週期所計算的平均週期做比較，得到下表的結果：



週期 編號	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
時間 (sec)	2.678	2.685	2.677	2.684	2.676	2.685	2.675	2.684	2.677	2.685
平均 週期	2.681(sec)									
差異	0.003	0.004	0.004	0.003	0.005	0.004	0.006	0.003	0.003	0.004
誤差 (%)	0.11	0.15	0.15	0.11	0.19	0.15	0.22	0.11	0.11	0.15

從上表的分析中，可以發現每次單擺的擺動週期與平均週期的差異誤差最大值只有 0.22%，也就是說，如果我們直接以電腦紀錄的波形，判讀單擺擺動一次的週期，與判讀十次的週期再計算其平均週

期，兩者之間的差異並不大，但為了與碼錶的計時結果相比較，還是採用十次週期的平均週期，作為我們的實驗結果。

4. 在我們研究單擺擺動週期與擺長之間的關係時，計算出重力加速度的大小 $=9.77675 \text{ m/s}^2$ ，與理論值 $9.76516 \text{ m/s}^2$ ，只有 0.12% 的誤差。重力加速度是一個物體受重力作用的情況下所具有的加速度，它與物體的質量大小無關，但是會隨著不同的高度與緯度而改變，但是如果高度(或緯度)差異不大時，可以視為一固定值，因此在科學上，是一個非常重要的常數，在我們整個實驗中，所有的公式都需要這個常數加入計算，由此可見其重要性。
5. 在探討擺動角度對單擺週期的影響時，我們發現在單擺進行大角度擺動時，經過數次擺動以後，其擺動角度會與原本設定的角度小，也就是說擺動角度會逐漸減小，為了減少這項因素造成實驗的誤差，我們預先測量單擺擺動十次之後，擺角減少的大小 $\Delta\theta$ ，然後讓單擺重新由原設定的擺角加上擺角減少的大小 $\Delta\theta$ 的一半進行實驗，如此可使單擺擺動十之後，擺角的平均值恰為設定的擺角大小。
6. 針對影響單擺擺動週期的因素，我們探討了擺繩長度、擺錘質量與擺動角度這三個因素，發現如果在擺動角度(擺角 $\theta$ )在 $5^\circ$ 的範圍內，則單擺擺動的週期只與擺繩的長度有關，而擺錘的質量對單擺擺動的週期沒有什麼影響。但是當單擺在進行大角度擺動時，其週期就需要利用複雜的公式進行修正，這對我們而言，是非常困難的，因此只套用其修正後的結果，利用 EXCEL 的函數計算功能，將理論值計算出來。

### 三、擺繩質量不可忽略(複擺)之擺動週期的探討

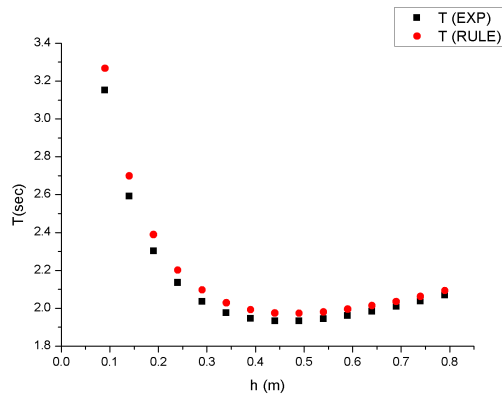
1. 由於複擺的理論相當的複雜，其週期的公式：

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{Mgh}} = 2\pi \sqrt{\frac{I_{cm} + Mh^2}{Mgh}}$$

{ M : 複擺的總質量  
h : 支點距質心的距離  
I : 通過支點的轉動慣量  
I<sub>cm</sub> : 通過質心的轉動慣量

已經超過我們的推導計算能力，因此在整個探討的過程，都需要老師從旁協助指導，以及利用 EXCEL 的函數計算功能，才能完成理論數據的計算。

2. 從下圖的實驗圖形，我們發現複擺的週期會隨不同的支點位置而改變，但不是遞增或遞減的關係，而是有一個轉折，也就是說有週期

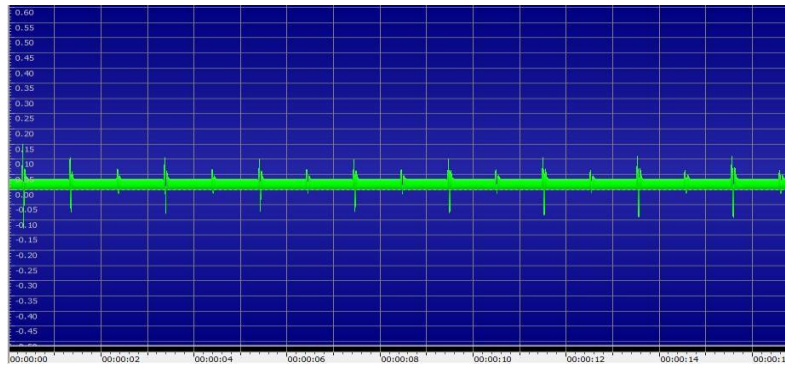


的極小值，老師說用微積分理論就可找出複擺週期極小值的支點位置，但是我們無法理解微積分理論，於是老師指導我們藉由 EXCEL 的函數計算功能，找出複擺週期極小值的支點位置約在 0.338m 的位置，而從我們的實驗數據中，複擺週期的極小值大約出現在 0.31m~0.36m 之間，兩者的結果相當符合。

3. 從實驗數據中，我們發現複擺週期的實驗結果都比理論值小，探討其原因，可能是下列因素：

- (1) 轉動慣量的準確性：在這個實驗中，我們是使用圓柱形的透明塑膠管，在管子上鑽取數個小洞做為支點，並假設透明塑膠管的質量是均勻的，質量中心在透明塑膠管中間的位置，這些因素都可能影響轉動慣量的大小。
- (2) 擺動的方向沒有在一平面上：在複擺擺動的過程中，雖然很努力地控制透明塑膠管能穩定地擺動，但是我們發現並不是每一次透明塑膠管下方的磁鐵，都能準確地通過線圈的中心，

導致實驗所紀錄的波形，會有高低不同的情形，如下圖所示。



- (3) 支點的摩擦力：複擺擺動時，透明塑膠管與支點間會有摩擦力存在，使擺動的幅度逐漸變小，影響週期的大小。
- (4) 每次擺動時的起始擺角：從單擺的實驗中，我們可以發現擺角會影響擺動的週期，因此在每次的實驗中，我們都控制擺角在  $5^\circ$  以內，以降低這項因素對週期的影響。

#### 四、古老的大鐘

1. 我們觀察在家中所找到擺鐘的構造時，發現擺鐘是利用下方的『複擺』-鐘擺，規律地擺動來計時的，下圖就是鐘擺的真實面貌：



➤ 『阿公』級的複擺

➤ 『阿祖』級的複擺

從上圖中，我們發現兩個鐘擺下方都有一個可以旋轉的螺絲，稱為『校準螺絲』，目的是為了調整鐘擺的週期，使其能準確地擺動計時。

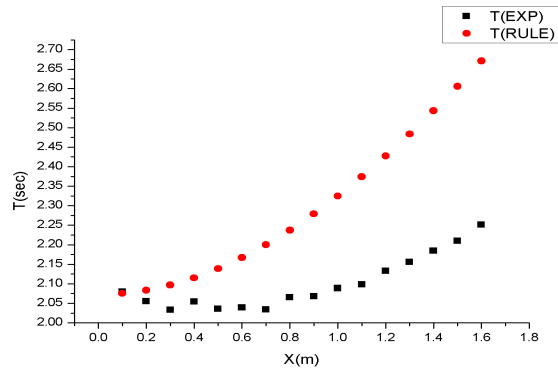
2. 我們希望藉由這個實驗，瞭解擺鐘能夠準確計時的原理，因此利用在透明塑膠管的不同位置，固定一顆鋼珠，來模擬擺鐘擺動週期不準確時，可以利用鐘擺下方的『校準螺絲』來調整週期的大小的可行性，並且根據實驗四中的複擺理論，推論實驗的準確性。
3. 從實驗四的討論中，我們知道複擺的週期公式為：

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{Mgh}} \quad \begin{cases} M : \text{複擺的總質量} \\ h : \text{支點距質心的距離} \\ I : \text{通過支點的轉動慣量} \end{cases}$$

如果我們將加上的小鋼珠(質量  $m$ )視為一個質點時，則對距離鋼珠為  $X$  的支點而言，增加的轉動慣量為  $mX^2$ ，代入上列的公式中，可以得到下列的結果(支點的位置固定在透明塑膠管的末端，透明塑膠管的轉動慣量  $= \frac{1}{3}ML^2$ )：

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{Mgh}} = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{1}{3}ML^2 + mX^2}{Mg \frac{L}{2}}}$$

將上列的公式，利用 EXCEL 計算週期  $T$  與鋼珠距支點的距離  $X$  的關係時，我們發現此複擺的週期會隨著  $X$  的增加而增加，而將我們的實驗結果與理論值作成關係圖後，可以得到下圖的結果：



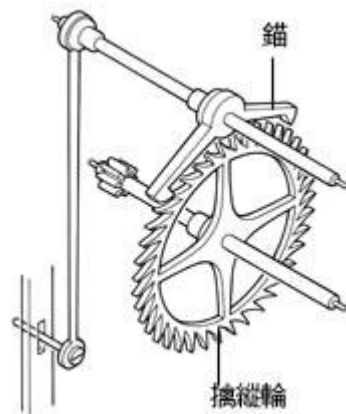
從這個圖形中，我們發現雖然實驗的結果與理論值都是呈現遞增的趨勢，但是兩者之間的差異會愈來愈大，我們從三個方面探討其原因：

- (1) 理論錯誤，公式不正確：這個因素不是我們的能力所能探討，於是我們請求指導老師以及多位自然科老師的幫忙，大致都認為這個理論沒有問題，因為理論值與實驗值都是呈現遞增的情形，因此，我們朝第二個因素尋求改善。
- (2) 摩擦力造成擺動週期變小：這項因素主要是由支點與透明塑膠管之間的摩擦力，以及擺動時的空氣阻力所造成，因此我們將原本的支點由鐵釘，改為經過加工的美工刀片(保留刀刃，將其磨成細長狀)，利用刀刃的部分作為支撐透明塑膠管的支點，再次進行測量週期的實驗，發現週期將可增加 0.1 秒，有些微的改善，但是還是有很大的誤差存在！
- (3) 轉動慣量的準確性：在這個實驗中，我們是使用圓柱形的透明塑膠管，在管子上取四個小洞做為固定鋼珠的位置，並假設透明塑膠管的質量是均勻的，質量中心在透明塑膠管中間的位置，這些因素都可能影響轉動慣量的大小。

上述的三個因素中，摩擦力的影響將造成 0.1 秒的實驗誤差，我們認為大部分的原因是轉動慣量的誤差所造成的，因此，如果能夠準確的算出轉動慣量的大小，將可以減少這個實驗所造成的誤差，這也是我們將來努力的目標！

4. 在我們尋找擺鐘的相關資訊時，我們發現讓擺鐘可以準確計時，除了複擺這個功臣以外，還有另外一個大功臣，稱為『錨形擒縱器』，

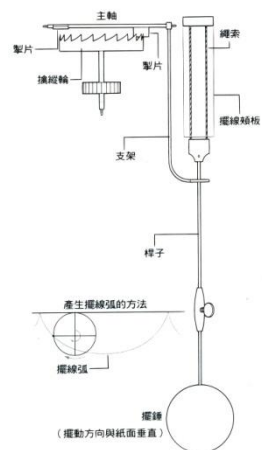
它的樣子如下左圖所示，而在真實的擺鐘內，位置在下右圖箭頭所指的位置上：



根據科學人雜誌 2002 年 11 月號的說明：

1670 年左右由英國人發明的錨形擒縱器，是一種貌似船錨的槓桿裝置。鐘擺擺動時會帶動這個錨桿，卡住又鬆脫擒縱輪上的鋸齒，以此控制擒縱輪不可逆轉地一次次前進固定的時段。與早期擺鐘所使用的立軸擒縱器不同的是，錨形擒縱器可以讓鐘擺只擺盪很小的幅度，於是就沒有必要讓鐘擺保持在擺線上運行。另外，這項發明也讓細長的秒擺實際可行，因而產生一種嶄新直立在地板的鐘殼設計，也就是後來所謂的爺爺鐘。

原來在 16 世紀時，伽利略與其他科學家都知道單擺具有計時的潛力，但是第一個設計出擺鐘的人則是惠更斯，由於單擺在大角度擺動時，其週期會受擺角時影響，因此惠更斯在鐘擺的懸吊點裝了兩片彎曲的『擺線頰板』，使得每一次鐘擺的週期都會一樣，如右的側視圖所示，而『錨形擒縱器』更改善了擺鐘計時的準確性，自 1670 年左右一直延續到現在，已經有三百多年的歷史了！





## 柒、結論

### 一、單擺週期(T)與擺繩長度(L)的關係

從實驗的結果中，我們發現單擺的週期平方( $T^2$ )與擺繩的長度(L)呈線性關係，並利用所求的直線斜率計算出重力加速度  $g$  的大小為  $9.78545 \text{ m/s}^2$ (利用碼錶測量的結果)和  $9.77675 \text{ m/s}^2$ (利用 GOLDWAVE 軟體測量的結果)，並與理論值  $9.76516 \text{ m/s}^2$  比較，其誤差分別為 0.21% 及 0.12%，誤差非常的小，而且利用 GOLDWAVE 軟體測量的結果優於利用碼錶測量的結果。

### 二、單擺週期(T)與擺錘質量(m)的關係

從實驗的結果中，我們發現在擺動角度小於 5 度的限制下，單擺的週期與擺錘質量沒有關係！在這項實驗中，我們同時利用碼錶和 GOLDWAVE 軟體進行單擺週期的測量，同樣可以發現利用 GOLDWAVE 軟體測量的結果優於利用碼錶測量的結果，因此在往後的幾項實驗中，我們僅利用 GOLDWAVE 軟體來作為測量擺動週期的工具。

### 三、單擺週期(T)與擺動幅度(擺角 $\theta$ )的關係

從實驗的結果中，我們發現當擺動的角度較大時，必須要透過修正公式修正單擺的週期，而且進行實驗時，也必須針對經過十次擺動後，擺角會減少的情形進行修正，才能得到較準確的實驗結果。

### 四、擺繩質量不可忽略(複擺)之擺動週期的測量

在這項實驗結果中，我們測量出複擺週期隨支點位置改變而變化的曲線，並與理論推導的結果相比較，兩者之間相當符合，最大誤差約 4.12%；同時，我們發現複擺的週期並不是呈現遞增或遞減的情形，而是存在一個極小值的週期，以長度 1.6m 的複擺而言，其最小週期的支點位置約是在距離末端 0.31m~0.36m 之間(理論值約為 0.338m)。

### 五、古老的大鐘

在這項實驗中，我們模擬『古老的大鐘』中鐘擺的設計，在複擺中不同的位置加上一顆鋼珠，以觀察週期的變化。結果發現複擺的週期，隨著鋼珠與支點距離的增加而遞增，但是如果與理論推導的結果相比較，雖然週期遞增的結果是正確的，但是實驗值與理論值之間的差異會愈來愈大，最大誤差達到 15.7%，我們探討幾項可能的因素，其中摩擦力的因素約可以減少 0.1 秒的誤差，但是效果不明顯。

## 捌、參考資料及其他

### 一、參考資料：

1. 翁秉仁 譯(2002)。計時器史話。科學人，9，88-98。
2. 實驗九：單擺與複擺（無日期）。彰化縣：彰化師大物理系。  
2011年2月20日，取自：  
<http://www.phys.ncue.edu.tw/space/index.php/2010-01-25-08-45-41/137-2010-01-24-10-05-29>。
3. 探討複擺擺動週期與擺長的關係(無日期)。彰化縣：原斗國中。2010年11月10日，取自：[www.ydjh.chc.edu.tw/nature/htc/3-17.DOC](http://www.ydjh.chc.edu.tw/nature/htc/3-17.DOC)。
4. 百度百科：重力加速度，百度百科網。2011年4月2日，取自：  
<http://baike.baidu.com/view/79858.htm#sub79858>。
5. 廖慧怡、廖雅玲、林采伶、林俞婷(2001)。以感應電流測量重力加速度及瞬時速度。中華民國第四十一屆科學展覽專輯。
6. 翰林出版社作者群。國民中學自然與生活科技三年級(上)。台南市：翰林

二、實驗數據詳表：

1.單擺週期(T)與擺繩長度(L)的關係

擺長(m)	利用碼錶測量的結果				利用 GOLDWAVE 測量的結果			
	10 次週期的 時間(sec)	週期 (sec)	平均 (sec)	測量值與平均 值差異	10 次週期的 時間(sec)	週期 (sec)	平均 (sec)	測量值與平均 值差異
0.795	17.82	1.782	1.787	0.005	17.934	1.7934	1.7939	0.0005
	17.94	1.794		-0.007	17.945	1.7945		-0.0006
	17.68	1.768		0.019	17.934	1.7934		0.0005
	17.90	1.790		-0.003	17.947	1.7947		-0.0008
	18.00	1.800		-0.013	17.936	1.7936		0.0003
0.920	19.32	1.932	1.925	-0.007	19.250	1.9250	1.9244	-0.0006
	19.15	1.915		0.010	19.241	1.9241		0.0003
	19.25	1.925		0.000	19.232	1.9232		0.0012
	19.37	1.937		-0.012	19.243	1.9243		0.0001
	19.16	1.916		0.009	19.254	1.9254		-0.0010
1.015	20.37	2.037	2.027	-0.010	20.246	2.0246	2.0240	-0.0006
	20.13	2.013		0.014	20.227	2.0227		0.0013
	20.34	2.034		-0.007	20.237	2.0237		0.0003
	20.31	2.031		-0.004	20.250	2.0250		-0.0010
	20.18	2.018		0.009	20.242	2.0242		-0.0002
1.135	21.40	2.140	2.139	-0.001	21.370	2.1370	2.1374	0.0004
	21.50	2.150		-0.011	21.370	2.1370		0.0004
	21.37	2.137		0.002	21.377	2.1377		-0.0003
	21.35	2.135		0.004	21.375	2.1375		-0.0001
	21.31	2.131		0.008	21.377	2.1377		-0.0003
1.300	22.84	2.284	2.291	0.007	22.829	2.2829	2.2830	0.0001
	22.88	2.288		0.003	22.834	2.2834		-0.0004
	23.00	2.300		-0.009	22.818	2.2818		0.0012
	22.94	2.294		-0.003	22.825	2.2825		0.0005
	22.91	2.291		0.000	22.845	2.2845		-0.0015
1.478	24.40	2.440	2.440	0.000	24.437	2.4437	2.4427	-0.0010
	24.46	2.446		-0.006	24.421	2.4421		0.0006
	24.54	2.454		-0.014	24.423	2.4423		0.0004
	24.22	2.422		0.018	24.427	2.4427		0.0000
	24.37	2.437		0.003	24.428	2.4428		-0.0001
1.781	26.72	2.672	2.679	0.007	26.803	2.6803	2.6806	0.0003
	27.00	2.700		-0.021	26.806	2.6806		0.0000
	26.72	2.672		0.007	26.801	2.6801		0.0005
	26.87	2.687		-0.008	26.814	2.6814		-0.0008
	26.62	2.662		0.017	26.808	2.6808		-0.0002
1.954	28.00	2.800	2.814	0.014	28.076	2.8076	2.8082	0.0006
	28.19	2.819		-0.005	28.085	2.8085		-0.0003
	28.19	2.819		-0.005	28.072	2.8072		0.0010
	28.22	2.822		-0.008	28.090	2.8090		-0.0008
	28.09	2.809		0.005	28.088	2.8088		-0.0006
2.220	29.66	2.966	2.988	0.022	29.936	2.9936	2.9931	-0.0005
	29.94	2.994		-0.006	29.931	2.9931		0.0000
	29.93	2.993		-0.005	29.918	2.9918		0.0013
	29.91	2.991		-0.003	29.939	2.9939		-0.0008
	29.97	2.997		-0.009	29.933	2.9933		-0.0002

## 2. 單擺週期(T)與擺錘質量(m)的關係

鋼珠個數	質量 m(g)	利用碼錶測量的結果					利用 GOLDWAVE 測量的結果				
		10 次週期的時間 (sec)	週期 (sec)	平均 (sec)	測量值與平均值差異	測量值與參考值差異	10 次週期的時間 (sec)	週期 (sec)	平均 (sec)	測量值與平均值差異	測量值與參考值差異
1	45.1	25.43	2.543	2.543	0.000	0.0027	25.385	2.5385	2.5385	0.0000	-0.0033
		25.43	2.543		0.000		25.382	2.5382		0.0003	
		25.34	2.534		0.009		25.385	2.5385		0.0000	
		25.44	2.544		-0.001		25.386	2.5386		-0.0001	
		25.53	2.553		-0.010		25.388	2.5388		-0.0003	
2	90.2	25.41	2.541	2.536	-0.005	-0.0047	25.387	2.5387	2.5384	-0.0003	-0.0034
		25.25	2.525		0.011		25.383	2.5383		0.0001	
		25.32	2.532		0.004		25.380	2.5380		0.0004	
		25.50	2.550		-0.014		25.387	2.5387		-0.0003	
		25.32	2.532		0.004		25.384	2.5384		0.0000	
3	135.3	25.22	2.522	2.529	0.007	-0.0115	25.344	2.5344	2.5347	0.0003	-0.0071
		25.10	2.510		0.019		25.334	2.5334		0.0013	
		25.46	2.546		-0.017		25.353	2.5353		-0.0006	
		25.28	2.528		0.001		25.354	2.5354		-0.0007	
		25.40	2.540		-0.011		25.348	2.5348		-0.0001	
4	180.4	25.41	2.541	2.540	-0.001	-0.0005	25.426	2.5426	2.5431	0.0005	0.0013
		25.50	2.550		-0.010		25.422	2.5422		0.0009	
		25.41	2.541		-0.001		25.432	2.5432		-0.0001	
		25.32	2.532		0.008		25.441	2.5441		-0.0010	
		25.37	2.537		0.003		25.432	2.5432		-0.0001	
5	225.5	25.50	2.550	2.536	-0.014	-0.0047	25.338	2.5338	2.5333	-0.0005	-0.0085
		25.44	2.544		-0.008		25.336	2.5336		-0.0003	
		25.18	2.518		0.018		25.325	2.5325		0.0008	
		25.34	2.534		0.002		25.327	2.5327		0.0006	
		25.34	2.534		0.002		25.339	2.5339		-0.0006	

## 3. 單擺週期(T)與擺動幅度(擺角 $\theta$ )的關係

擺角(度)	利用 GOLDWAVE 測量的結果				
	10 次週期的時間(sec)	週期(sec)	平均(sec)	測量值與平均值差異	測量值與參考值差異
10	25.464	2.5464	2.5479	0.0015	0.0012
	25.471	2.5471		0.0008	
	25.482	2.5482		-0.0003	
	25.480	2.5480		-0.0001	
	25.496	2.5496		-0.0017	
20	25.617	2.5617	2.5631	0.0014	0.0018
	25.639	2.5639		-0.0008	
	25.644	2.5644		-0.0013	
	25.631	2.5631		0.0000	
	25.622	2.5622		0.0009	
30	25.919	2.5919	2.5911	-0.0008	0.0050
	25.917	2.5917		-0.0006	
	25.913	2.5913		-0.0002	
	25.871	2.5871		0.0040	
	25.933	2.5933		-0.0022	
40	26.184	2.6184	2.6283	0.0099	0.0069
	26.274	2.6274		0.0009	
	26.323	2.6323		-0.0040	
	26.242	2.6242		0.0041	
	26.392	2.6392		-0.0109	
50	26.643	2.6643	2.6637	-0.0006	-0.0045
	26.661	2.6661		-0.0024	
	26.637	2.6637		0.0000	
	26.615	2.6615		0.0022	
	26.627	2.6627		0.0010	
60	27.101	2.7101	2.7165	0.0064	-0.0104
	27.100	2.7100		0.0065	
	27.165	2.7165		0.0000	
	27.176	2.7176		-0.0011	
	27.281	2.7281		-0.0116	

#### 4. 擺繩質量不可忽略(複擺)之擺動週期的測量

支點距末端位置(m)	支點距質心位置(m)	10次週期的時間(sec)	週期(sec)	平均(sec)	測量值與平均值差異
0.01	0.79	20.937	2.0937	2.0933	-0.0004
		20.927	2.0927		0.0006
		20.935	2.0935		-0.0002
0.06	0.74	20.624	2.062	2.0625	0.0001
		20.621	2.062		0.0004
		20.631	2.063		-0.0006
0.11	0.69	20.341	2.034	2.0350	0.0009
		20.338	2.034		0.0012
		20.370	2.037		-0.0020
0.16	0.64	20.128	2.013	2.0134	0.0006
		20.109	2.011		0.0025
		20.165	2.017		-0.0031
0.21	0.59	19.971	1.997	1.9950	-0.0021
		19.929	1.993		0.0021
		19.949	1.995		0.0001
0.26	0.54	19.811	1.981	1.9801	-0.0010
		19.788	1.979		0.0013
		19.804	1.980		-0.0003
0.31	0.49	19.758	1.976	1.9737	-0.0021
		19.716	1.972		0.0021
		19.737	1.974		0.0000
0.36	0.44	19.749	1.975	1.9744	-0.0005
		19.781	1.978		-0.0037
		19.703	1.970		0.0041
0.41	0.39	19.919	1.992	1.9923	0.0004
		19.927	1.993		-0.0004
		19.923	1.992		0.0000
0.46	0.34	20.279	2.028	2.0291	0.0012
		20.269	2.027		0.0022
		20.326	2.033		-0.0035
0.51	0.29	20.949	2.095	2.0966	0.0017
		20.975	2.098		-0.0009
		20.973	2.097		-0.0007
0.56	0.24	22.015	2.202	2.2014	-0.0001
		21.991	2.199		0.0023
		22.036	2.204		-0.0022
0.61	0.19	23.873	2.387	2.3892	0.0019
		23.901	2.390		-0.0009
		23.901	2.390		-0.0009
0.66	0.14	26.975	2.698	2.6987	0.0012
		26.912	2.691		0.0075
		27.073	2.707		-0.0086
0.71	0.09	32.702	3.270	3.2671	-0.0031
		32.673	3.267		-0.0002
		32.637	3.264		0.0034

## 5. 古老的大鐘

鋼珠位置(m)	10次週期的時間(sec)	週期(sec)	平均(sec)	測量值與平均值差異
0.10	20.799	2.0799	2.0794	-0.0005
	20.791	2.0791		0.0003
	20.792	2.0792		0.0002
0.20	20.539	2.0539	2.0549	0.0010
	20.546	2.0546		0.0003
	20.562	2.0562		-0.0013
0.30	20.327	2.0327	2.0333	0.0006
	20.332	2.0332		0.0001
	20.340	2.0340		-0.0007
0.40	20.548	2.0548	2.0539	-0.0009
	20.532	2.0532		0.0007
	20.536	2.0536		0.0003
0.50	20.345	2.0345	2.0359	0.0014
	20.361	2.0361		-0.0002
	20.370	2.0370		-0.0011
0.60	20.383	2.0383	2.0388	0.0005
	20.375	2.0375		0.0013
	20.405	2.0405		-0.0017
0.70	20.324	2.0324	2.0339	0.0015
	20.341	2.0341		-0.0002
	20.351	2.0351		-0.0012
0.80	20.654	2.0654	2.0652	-0.0002
	20.654	2.0654		-0.0002
	20.648	2.0648		0.0004
0.90	20.675	2.0675	2.0681	0.0006
	20.689	2.0689		-0.0008
	20.679	2.0679		0.0002
1.00	20.886	2.0886	2.0884	-0.0002
	20.881	2.0881		0.0003
	20.885	2.0885		-0.0001
1.10	20.973	2.0973	2.0982	0.0009
	20.986	2.0986		-0.0004
	20.987	2.0987		-0.0005
1.20	21.329	2.1329	2.1326	-0.0003
	21.326	2.1326		0.0000
	21.323	2.1323		0.0003
1.30	21.559	2.1559	2.1557	-0.0002
	21.565	2.1565		-0.0008
	21.548	2.1548		0.0009
1.40	21.847	2.1847	2.1847	0.0000
	21.842	2.1842		0.0005
	21.851	2.1851		-0.0004
1.50	22.093	2.2093	2.2097	0.0004
	22.099	2.2099		-0.0002
	22.100	2.2100		-0.0003
1.60	22.504	2.2504	2.2510	0.0006
	22.512	2.2512		-0.0002
	22.514	2.2514		-0.0004

## 【評語】 080122

研究主題較一般性的題目，利用線圈和電腦的輔助得到較準確的週期測量是值得鼓勵的方法。