

# 中華民國第 51 屆中小學科學展覽會

## 作品說明書

---

國小組 物理科

佳作

080120

舞動奇蹟—破譯動能沙擺的終極密碼

學校名稱：臺南市關廟區五甲國民小學

作者：	指導老師：
小六 陳姿云	謝文山
小六 劉韋巖	何滄文
小六 楊茜茹	
小五 林暘儒	
小五 唐聖雯	
小五 鄭宇圻	

關鍵詞：利薩如圖形、Y 擺、重力加速度

# 摘 要

Y 擺是迷人的科學之旅！

來自百貨公司"動能沙擺"的啟發，奇異的圖形深深打動我們的好奇心！

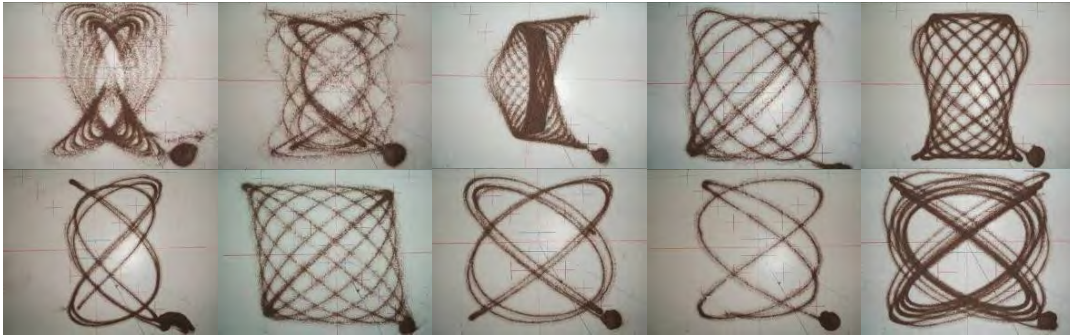
它沒辦法用一般的單擺週期來觀察，當它擺出複雜的圖形時，讓很多人都感到不知道如何研究。

剛開始進行實驗很迷惑，但是我們仍不怕辛勞，不斷探索其中的奧秘。

提出 ABH1H2 標示法、定義 T、Tx、Ty 三項測量值，研究在不同象限、擺幅、角度、AB、H1 與 H2 長度變化、擺繩材質、抖動的影響；與傳統的頻率估算法  $m:n$  及 Java 程式比對，得到  $Ty/Tx$  取代  $m:n$  的新方法，促使我們積極地去探究箇中所蘊含的物理奧妙！

提出新方法以初始條件—長度(L、l)估算擺圖變化，導出 Y 擺方程式與重力加速度 g，實驗 g 值與理論 g 值相比，誤差可在 3% 以內！

最後，請您 DIY 感受它的美！Trust me, You can make it.



## 壹、研究動機

Y 擺(Y-suspended pendulum)比單擺多點變化，卻能畫出奇幻瑰麗、令人難以捉摸的複雜圖形，這圖有個特別的名稱叫利薩如圖形(Lissajous Curve、李沙育圖形、繪圖擺)。

遇見它在新光三越的專櫃—"動能沙擺"，當你輕放擺錘，它會在白沙上來來回回有規律的擺盪。它引起我們深深的好奇和著迷！

說明書中提到這是利薩如圖形，細察歷屆科展、文獻資料，動手研究 Y 擺實驗時才明白，根本沒人說清楚它—Y 擺—是怎麼一回事[1-3]！

於是它激起了我們強烈的企圖心去尋找解答！

雖然實驗相當複雜，一時之間沒法釐清，但這就是實驗最迷人的地方，我們深入觀察、嘗試而愈加清晰！

內容涉及基礎的數學能力(小五/六代數運算、成正比等觀念)、電磁鐵與物體運動(單擺)的觀念，在加上敏銳的心靈！



## 貳、研究目的

- 一、對「利薩如圖形」、「Y 擺」進行文獻討論並判斷實驗的可行性。
- 二、尋找簡單讀出 Y 擺實驗長度變因的方法—**ABH1H2**標示法。
- 三、研究**測量時間的方法**—T、Tx、Ty 與可行性。
- 四、研究起始點—在不同的象限、角度、抖動、擺幅對 T、Tx、Ty 的影響。
- 五、討論 fx/fy 的意義與 m : n 和 Ty/Tx 的關係。
- 六、探討主長度 AB、H1、H2 變化對圖形與 T、Tx、Ty、fx/fy 的影響。

七、研究  $\left[\frac{fx}{fy}\right]^2 = \left[\frac{Ty}{Tx}\right]^2 = \frac{L}{l}$  之間的關係。

- 八、提出 Y 擺方程式並研究和重力加速度間的可能關係。

## 參、研究設備及器材

氧化鋁砂、白鋁砂、鐵砂、棉線、鐵夾、支架、刷子、升降台、完稿紙、針筒、數位相機、高速攝影機、尖嘴鉗、電磁鐵、直流電源、鐵條、電腦、分析軟體



## 肆、研究過程與方法

### 研究一、定義名詞與基礎實驗分析

#### 研究 1-1：Y 擺名詞與標示

首先，我們將支撐 Y 擺的橫桿叫做 AB 軸，它正下方直接投影在紙上的橫線我們把它叫做 X 軸(會和 AB 平行)；和 X 軸垂直的直線是 Y 軸。X、Y 軸會將完稿紙分成四個象限區域圖 1.1。

Y 擺主要由 V、I 兩個部分組成；V 字形的高以 H1 表示，I 字形的下擺繩長用 H2、h 表示；當砂筒的注射針筒長 h 是 10cm 圖 1.2。

**※實驗編號 ABH1H2：506020 標示法**

我們用長度 AB、H1 和 H2 依照從上而下的順序來編號，方便讀出實驗的長度！如編號 506020：就是 AB、H1、H2 的長度是 50、60、20cm 在進行 Y 擺實驗。※注意針筒長 h 沒有列入編號(圖 1.3)；這次研究的所有實驗都這樣來標示。

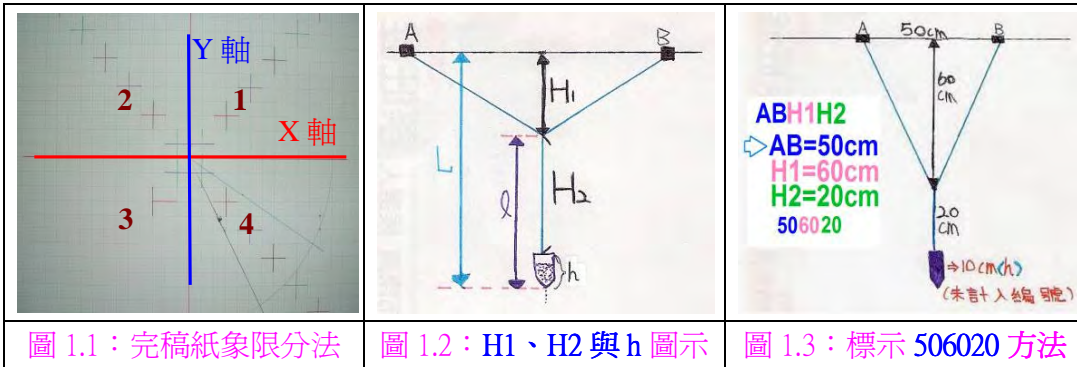


圖 1.1：完稿紙象限分法

圖 1.2：H1、H2 與 h 圖示

圖 1.3：標示 506020 方法

**※定義 T、Tx、Ty**

Y 擺不是簡單的單擺，經過我們研究發現，沒辦法用單擺的週期來量來回一次的時間，它擺圖複雜，以我們分析圖形的經驗，決定用下列的方法進行：

**初始線**：從起始點釋放，畫出第一條還沒轉彎前的線條，來當初始線。(圖 1.4 起始點到初始線間的曲線)

**T(T 時間)**：以起始點到交初始線第二次交點的時間當做 T 時間。(圖 1.4 左圖 A 到 F 的時間；右圖 A 到 C 的時間)

**Tx(x 時間)**：圖形第一次交 Y 軸到第三次再交 Y 軸的時間叫做 Tx。請仔細想想，其實這是圖形在 X 軸上來回的時間。(圖 1.4，B 到 D 的時間)

**Ty(y 時間)**：跟 Tx 一樣，圖形第一次交 X 軸到第三次再交 X 軸的時間叫做 Ty。這是圖形投影在 Y 軸上來回的時間。(圖 1.4，左圖 C 到 E 的時間；右圖：顯示出還沒完成第 3 次交 X 軸的動作)

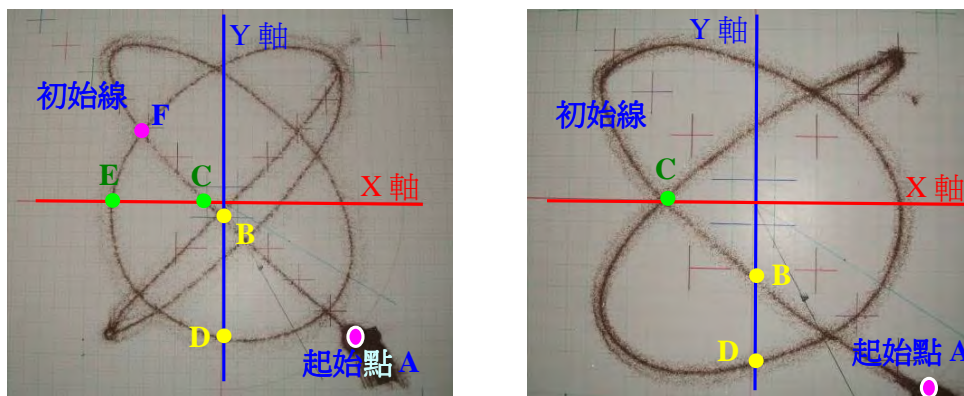
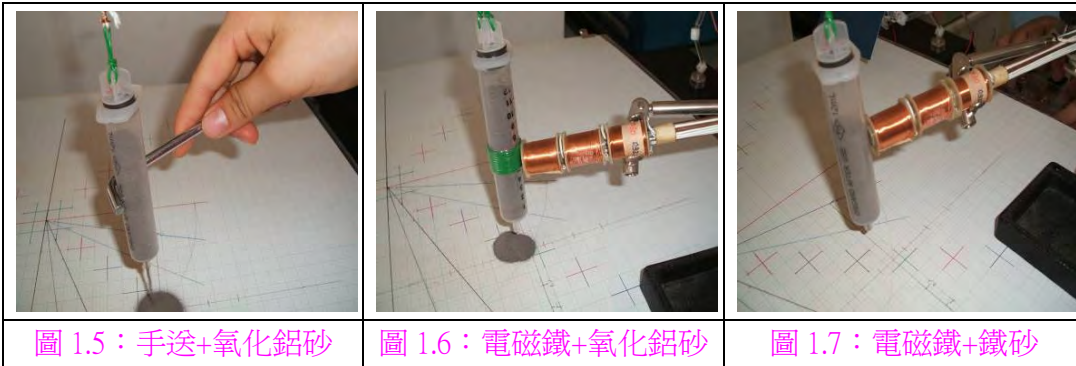


圖 1.4：定義各測量時間的起點與終點

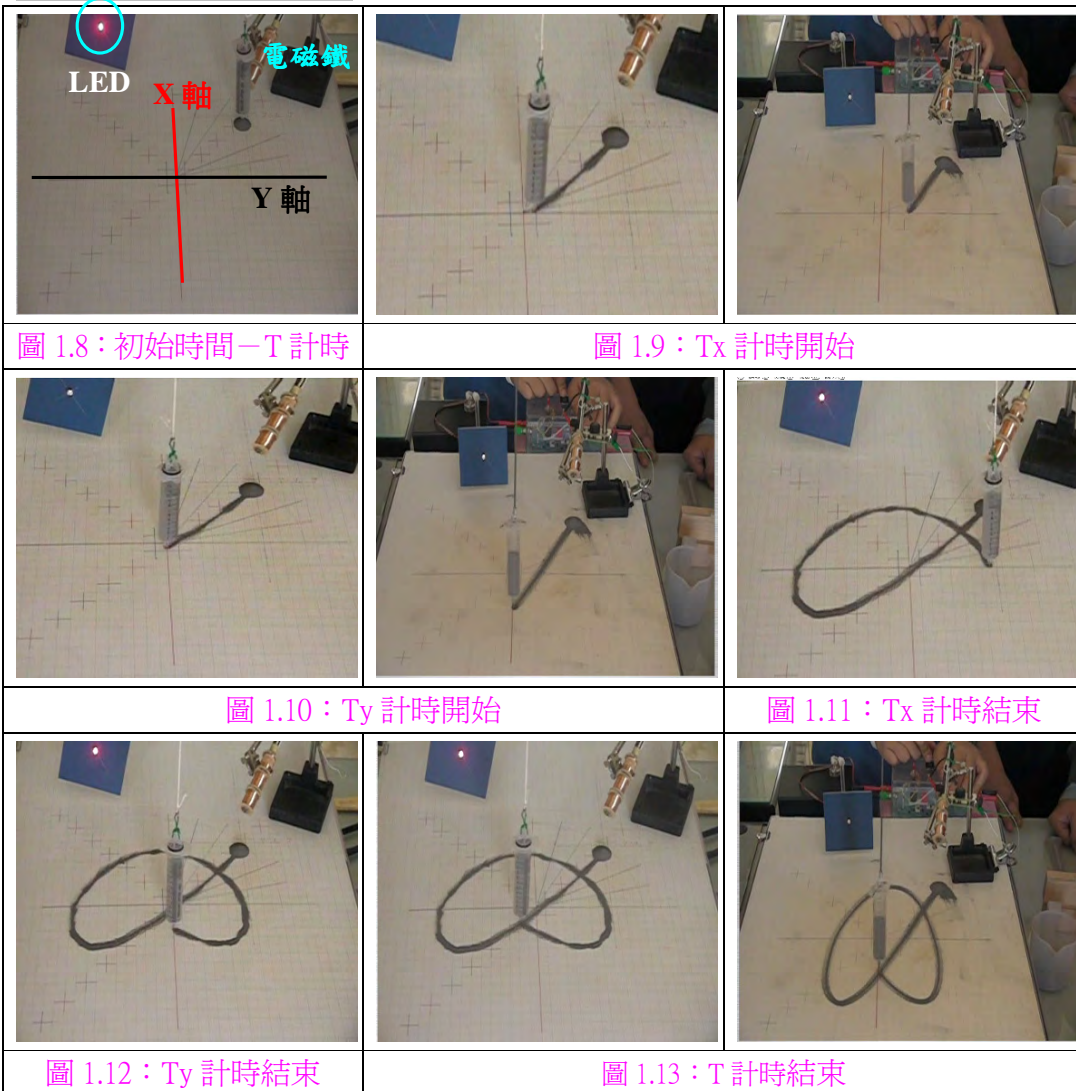
**時間的量測**

用攝影機(SANYO HD2000)對 Y 擺進行高速錄影，10 秒拍 2342 張畫面(就是 1 張=1/234.2 秒)，再以 Quick Time Player 進行格放，點算 T、Tx 與 Ty 的張數。為了方便起見，時間用"張"為單位(必要時才換算為秒)。

針筒一放開就計時，常發生測量上的誤差，每個人"感覺開始"的差異很大，才改良用電磁鐵控制，砂也從褐色氧化鋁砂改成鐵砂。(圖 1.5~1.7)



※實務量測  $T$ 、 $T_x$ 、 $T_y$  值



注意：1.因攝影的角度，紙上紅線為  $X$  軸、黑線為  $Y$  軸，皆自第四象限釋放。  
2.時間以張(影片畫面數)為單位，每張可準確至  $1/234.2$  秒。

### 研究 1-2：起始點效應(1)－不同象限釋放的差異

步驟：首先，以編號 101050(就是 ABH1H2)，讓 Y 擺的針筒自然垂放下對準 X、Y 軸的中心(原點)【我們叫做原點校正】，再將針筒拉到每一象限的中間 45 度，在擺幅 12cm(距離原點 r)釋放(圖 1.14)。比較 4 個象限圖形的差異。

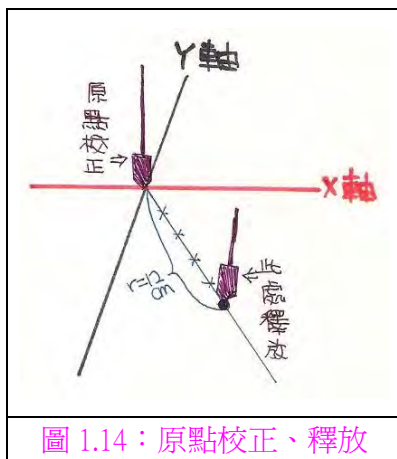
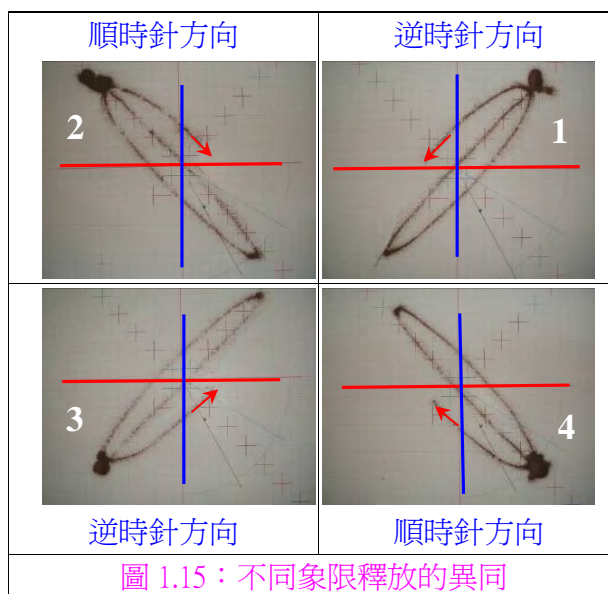


圖 1.14：原點校正、釋放

圖 1.15 看出，在不同象限釋放，但圖形具有一定的規律性：



1.由第 4 象限出發，起始擺線必定以順時間方向前進。2.相鄰兩象限，圖形的順逆方向一定相反。3.圖形間存在著對稱性。4.當起始點非常靠近 X、Y 軸時，那這兩種狀況都可能發生。

這說明不必每一區都實驗，做一區就可以知道其他區的變化。我們以下的實驗都由第四象限進行。

### 研究 1-3：起始點效應(2)－角度的影響

接下來討論在第四象限，以 505060(H2 為鐵條)在不同角度釋放(擺幅 r 為 12cm 釋放)對圖形與 T、Tx、Ty 的影響(圖 1.16~1.21)。

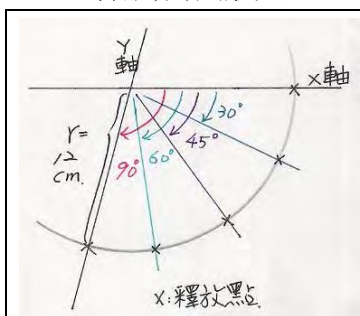


圖 1.16：不同角度釋放



圖 1.17：0°(即 X 軸)釋放



圖 1.18：30°釋放

在這些圖中(圖 1.17~1.21)可以發現：同一長度(H1、H2)擺出的圖形會相似，或者說是它們行進的軌跡會完全相同；不同的角度釋放"感覺上"是將圖形拉長或壓縮。



表 1.1：同象限不同角度釋放的影响【以 505060(但 H2 為鐵條)為例】

單擺 120cm	90°	75°	60°	45°	30°	15°	0°	單擺 70cm
T		622.00	624.67	624.00	624.33	622.00		
Tx		372.33	379.75	381.00	379.67	377.67	380.00	377.67
Ty	490.75	499.33	496.00	495.50	495.00	496.67	482.33	
fx : fy		1.332	1.305	1.299	1.308	1.277		

註：1.T、Tx 與 Ty 為時間平均值，單位：張。方法詳見研究 1-1，以下不再說明。

2.單擺 120、70cm 分別是 Y 擺(505060)的總長  $L$  與下擺總長  $l$ 。3.fx : fy = Ty : Tx。

結論：1.不同角度釋放，T、Tx 與 Ty 差異不大，幾乎不影響。

2.在圖 1.23 中，一項重要的觀察是，從 90°釋放的 Ty 值和單擺 120cm 的 T 值幾乎一樣(圖 A、B)；從 0°釋放的 Tx 值和單擺長 70cm 的 T 值幾乎一樣(圖 B、C)。

從高速攝影看到：它們的擺動是一樣的。

所以在表 1.1 中，我們把單擺 120cm 的 T 值當 Ty，單擺 70cm 的 T 值當 Tx。

很訝異看到這樣的結果，本來想偷懶一下，以單擺的時間來替代 Y 擺的週期，卻意外出現這結果，為什麼呢？我們試圖在研究 3-1 探討！

那 fx : fy 表達哪種涵義？請見下一節分析。

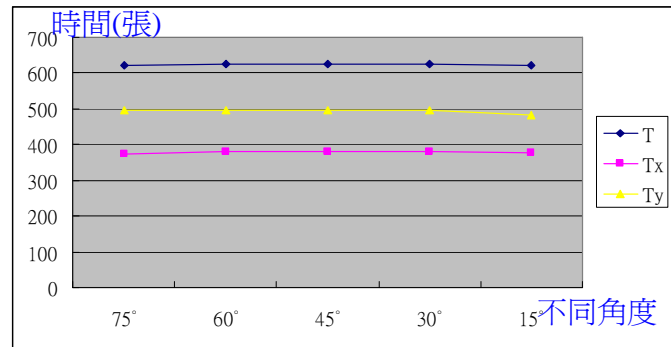


圖 1.22：不同角度釋放對 T、Tx 與 Ty 的影响 (表 1.1 部分作圖)

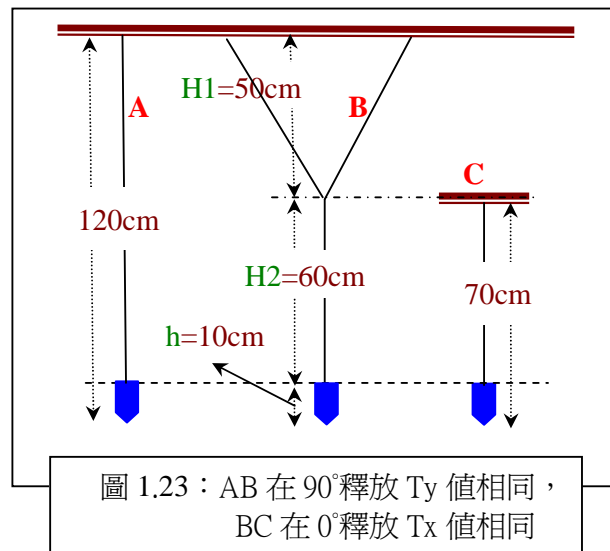


圖 1.23：AB 在 90°釋放 Ty 值相同，BC 在 0°釋放 Tx 值相同

### 研究 1-4 : $f_x : f_y$ 的意義—從 $m : n$ 估算法到 $T_y : T_x$

我們搜索資料後發現，利薩如圖形在網路上有廣泛的討論，不過都是以示波器產生的封閉性圖形為主。其中關於頻率比的簡潔判斷方法如下[5-8]：

在圖 1.24 中，利薩如圖上畫一條橫線和一條垂直線，這兩線不要經過圖上任何的交叉點。先數曲線與垂直線有  $m$  個交點，再數曲線圖與橫線有  $n$  個交點。那頻率比有下列關係：

$$x \text{ 頻率} : y \text{ 頻率} = f_x : f_y = m : n \text{-----}(1) \quad m : n \text{ 的估算法！}$$

無意中將  $m : n$  的方法和 Y 擺中具有規律的圖形比對(如圖 1.25、1.26)，觀察到  $m : n$  和  $T_y : T_x$  這兩個值的非常接近(表 1.2)，我們覺得有以下的關係：

$$f_x : f_y = T_y : T_x = m : n \text{-----}(2)$$



圖 1.24 :  $f_x/f_y=2 : 3$

圖 1.25 : 505080

圖 1.26 : 505050

表 1.2 :  $m : n$  與  $T_y : T_x$  的關係

編號	505080	505050	備註
$m : n$	5 : 4(1.250)	4 : 3(1.333)	
$T_y : T_x$	557.67 : 449.33(1.241)	449.33 : 361.17(1.358)	$T_y:T_x$ 為實驗值
誤差	0.72%	-1.88%	

註：1.以 505080 為例，誤差= $\frac{(1.250-1.241)}{1.250} \times 100\%$ 。2.括弧中的數據為比值。

其實， $f_x : f_y = T_y : T_x$  本來就成立，只是沒想到  $T_y : T_x = m : n$ ！

Y 擺不見得是封閉圖形，而  $m : n$  估算對複雜的擺圖並不容易判斷，我們以  $T_y : T_x$  代替  $m : n$ ，到這裡就不必在傷腦筋問：究竟擺到什麼程度才算完成！  
**只從  $T_y : T_x$ —初始的數據—就能決定它是屬於哪種圖形！**

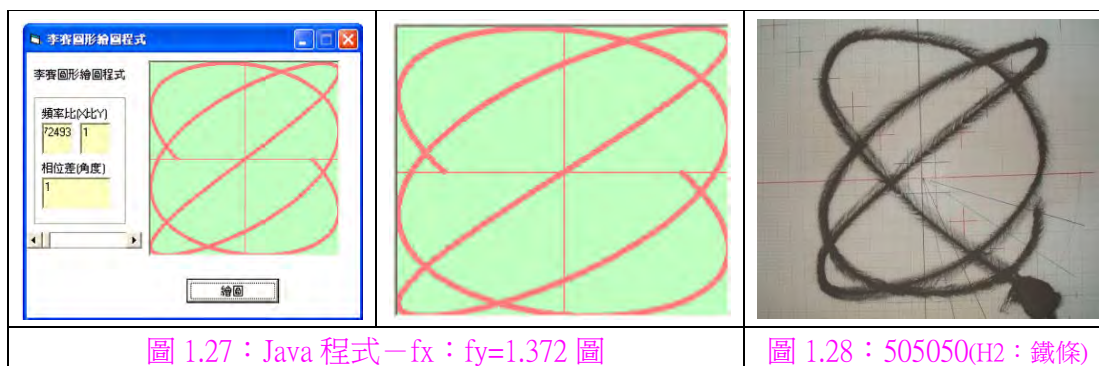


圖 1.27 : Java 程式— $f_x : f_y=1.372$  圖

圖 1.28 : 505050(H2 : 鐵條)



真的可以嗎？我們把實驗數據  $fx : fy=1.372$  代入模擬利薩如圖形的 Java 程式(圖 1.27)，發現它們相似度極高，可惜的是 Java 程式可以模擬的畫面有限[9、10]！(註：圖 1.28 多一條「初始線」)；**應用 Java 程式比對擺圖得到： $fx/fy$  就是擺圖、就是圖形軌跡！**

### 研究 1-5：起始點效應(3)－抖動與擺幅的影響

#### 抖動對 T、Tx、Ty 值的影響

實驗時 Y 擺容易因為操作不良(如電磁鐵的振動、擺繩沒靜止)，而使得圖形抖動，這對 T、Tx 與 Ty 有什麼影響？

以 1002080 為例在第 4 象限、擺幅 12cm、45°釋放為例。

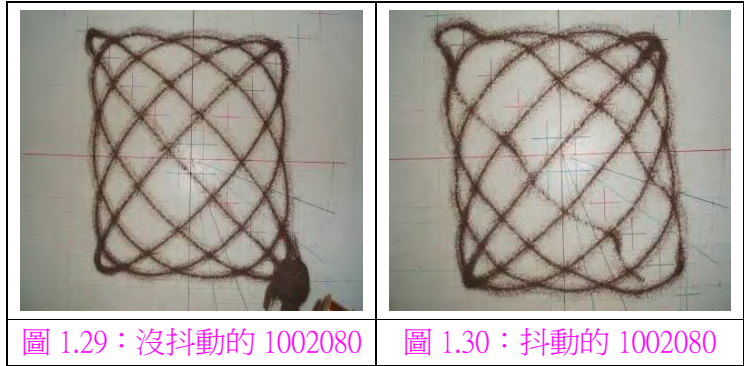


圖 1.29：沒抖動的 1002080

圖 1.30：抖動的 1002080

表 1.3：以 1002080 研究抖動對 T、Tx 與 Ty 的影響

編號	1	2	3	4	5	6	7	8
T	686	673	690	683	671	676	682	688
Tx	442	442	443	442	444	435	440	444
Ty	489	499	486	487	497	490	495	500
$fx/fy$	1.106	1.129	1.097	1.102	1.119	1.126	1.125	1.126
編號	9	10	11	12	13	14	15	16
T	685	684	677	682	681	684	693	677
Tx	446	445	439	441	442	439	440	441
Ty	500	501	485	499	490	486	491	496
$fx/fy$	1.121	1.126	1.105	1.132	1.109	1.107	1.116	1.125

註：表中藍字為圖形抖動、黑字是沒抖動的；以上均為單一次實驗值。

1.將表 1.3 中有無抖動的數據各自分開取平均，以沒抖動的數據當做標準。

有沒有抖動它們之間的 T、Tx、Ty、 $fx/fy$  的誤差分別是 0.32、0.14、0.18 與 0.03%。顯示抖動對 T、Tx、Ty、 $fx/fy$  的影響不大。

2.觀察表 1.3 中沒抖動的 T 值，最大與最小值的差為 19 張(÷234.2 張/秒)合 0.081 秒，這說明實

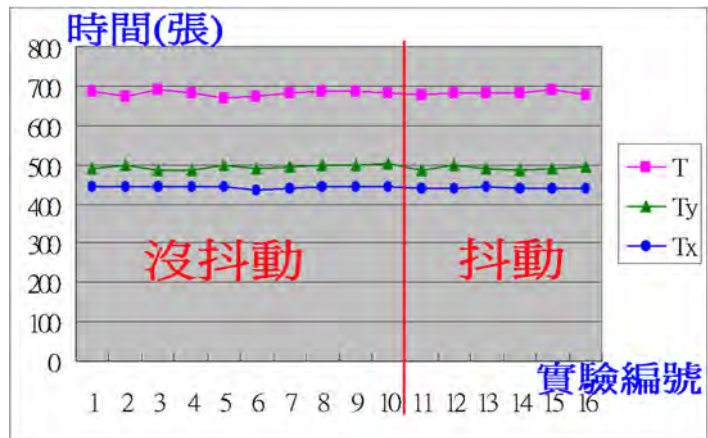


圖 1.31：有無抖動對 T、Tx 與 Ty 的影響

驗結果相當精準。

3.雖然抖動對實驗數據影響不大，但實驗時還是要讓圖形美麗漂亮。

### 擺幅對 T、Tx、Ty 值的影響

以上的實驗都是在擺幅 r 為 12cm 處釋放，我們想瞭解在不同擺幅的影響。以 1002080 為例，於第四象限 45° 方向，以 r=4.25~18.45cm 的變化進行實驗。



圖 1.32：不同擺幅圖示



圖 1.33：擺幅 7.10cm

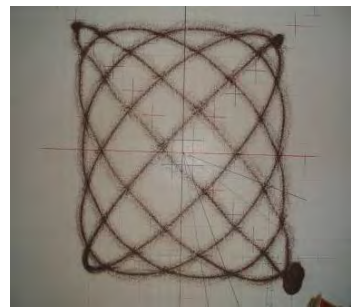


圖 1.34：擺幅 15.60cm

表 1.4：以 1002080 研究擺幅對 T、Tx 與 Ty 影響

擺幅 r	4.25cm	7.10cm	9.90cm	12.80cm	15.60cm	18.45cm
T	665.33	677.75	684.60	685.67	693.00	690.40
Tx	452.00	447.75	446.20	445.00	442.67	444.40
Ty	490.33	492.25	496.00	500.33	500.33	499.20
fx/fy	1.085	1.099	1.112	1.124	1.130	1.123

註：以上數據均為平均值。

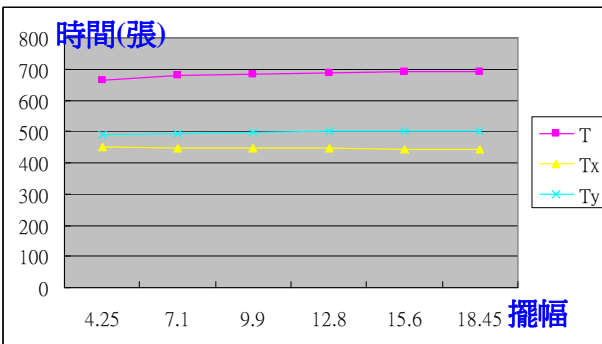


圖 1.35：擺幅對 T、Tx 與 Ty 之影響

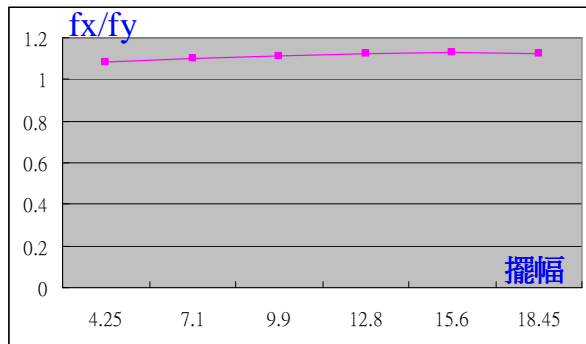


圖 1.36：擺幅對 fx/fy 之影響

我們觀察到越接近原點，fx/fy 似乎有偏差，但不容易從數字上看出；一旦擺幅太小或遠離中心，圖形線條都不美觀，容易抖動或太過怪異，但是針筒的行進路線是相同的。

往後的實驗我們統一以擺幅 r 為 12cm 處當作起始點，根據我們觀察：它在此區中的數據穩定、圖形美觀且大小適中。

## 研究二、三個關鍵長度變化的探究－AB、H1 與 H2

### 研究 2-1：AB 長度改變的影響

首先探討 Y 擺橫桿上 AB 長度變化，對圖形、T、Tx、Ty、fx/fy 的影響。

以 **AB2080** 為例，AB 由 10~100cm 改變，H1、H2 長度分別為 20、80cm，擺線為棉繩，由第四區擺幅 12cm45° 方向釋放。

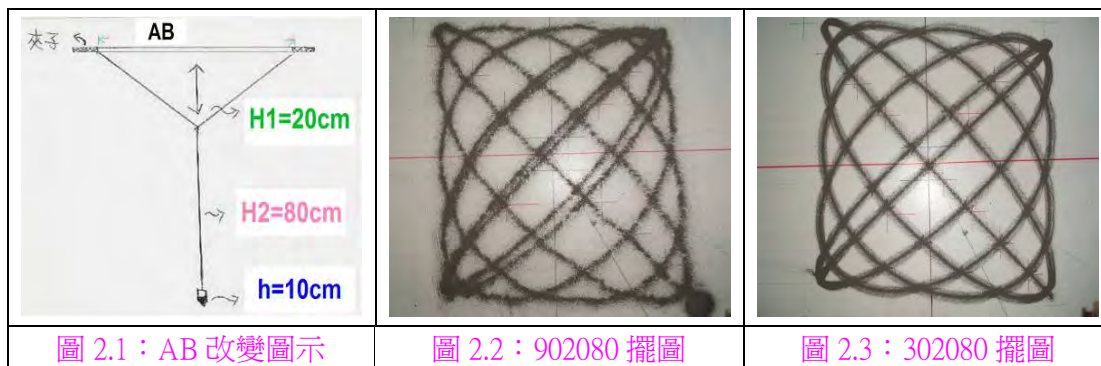


表 2.1：以 **AB2080** 研究 AB 變化的影響

編號	1002080	902080	802080	702080	602080	502080	402080	302080	202080	102080
AB 長度	100	90	80	70	60	50	40	30	20	10
T	684.10	691.25	687.25	687.00	687.00	687.25	685.13	685.00	687.75	687.00
Tx	447.40	446.50	446.50	447.00	448.33	447.75	447.22	444.11	445.75	449.00
Ty	494.10	497.25	498.00	495.00	494.33	492.50	491.89	492.22	493.75	493.00
fx/fy	1.104	1.114	1.115	1.107	1.103	1.110	1.101	1.108	1.108	1.098

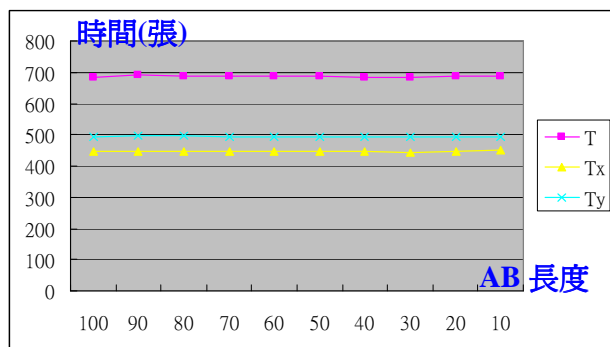


圖 2.4：AB 長度變化對 T、Tx、Ty 的影響

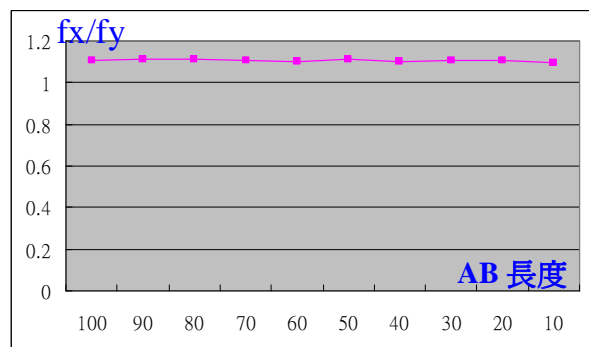


圖 2.5：AB 長度變化對 fx/fy 的影響

觀察到：橫桿上長度 AB 的變化，對圖形(圖 2.2~2.3)、行進軌跡、T、Tx、Ty 與 fx/fy 幾乎沒產生多大的改變！我們推測橫桿長度 AB 的變化不是主要的變因。這同時透露出：當 H1、H2 長度沒改變，圖形軌跡也沒變。

### 研究 2-2：當 $H1+H2=100\text{cm}$ 時

接下來固定 AB 長度 100cm，在  $H1+H2=100\text{cm}$  條件下，改變 H1 與 H2 長度(H1 每 10cm 增加)，擺繩使用棉繩，由第四區擺幅 12cm， $45^\circ$  方向釋放。

從觀察圖形的變化看出和 H1、H2 長度改變習習相關；圖形環繞著特定軌跡(基本圖形)行進，受到阻力的影響會使擺幅漸漸縮小而複雜化，最終使圖形無法判斷或呈現出美麗的紋路(見附錄)。

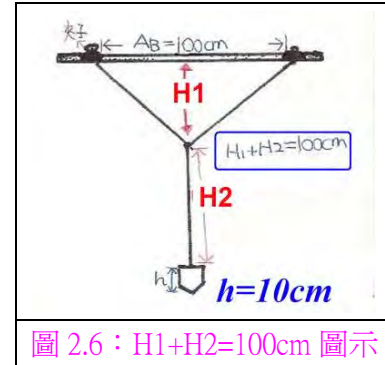


圖 2.6： $H1+H2=100\text{cm}$  圖示

1001090	1002080	1003070	1004060	1005050
1006040	1007030	1008020	1009010	1008020 美麗紋路

表 2.2：在  $H1+H2=100\text{cm}$  條件下，以  $100H1H2$ ：H1、H2 改變來探討相關的變化

編號	1001090	1002080	1003070	1004060	1005050	1006040	1007030	1008020	1009010
H1 改變	10	20	30	40	50	60	70	80	90
T	709.25	681.24	663.40	630.17	598.57	564.00	525.67	486.50	432.33
Tx	470.17	440.77	415.80	390.50	358.00	325.00	291.33	248.00	204.33
Ty	493.83	491.54	489.60	488.67	487.29	491.00	490.00	488.50	488.67
fx/fy	1.051	1.115	1.177	1.251	1.361	1.510	1.682	1.970	2.391

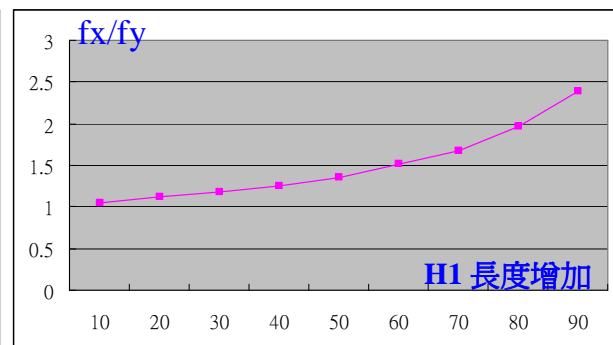
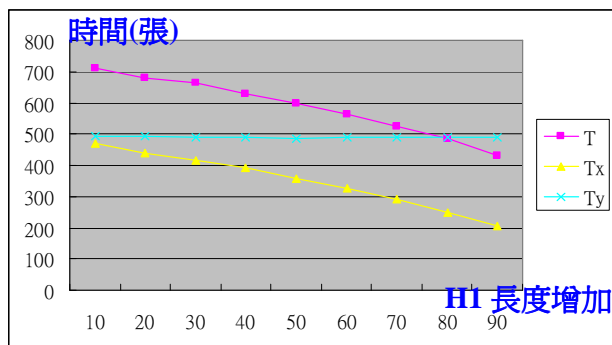


圖 2.7：以  $H1+H2=100\text{cm}$  研究 T、Tx、Ty 變化 圖 2.8：以  $H1+H2=100\text{cm}$  研究對 fx/fy 的影響

圖表中觀察到：1.當  $H1 \uparrow$  (或  $H2 \downarrow$ ) 時， $T$ 、 $T_x$  是緩慢的下降曲線，而  $f_x/f_y$  是上昇的曲線，與圖形使用  $m:n$  的估計方式兩者相當一致(也說明： $f_x/f_y$  的確可以用  $T_y/T_x$  取代  $m:n$ )。最重要的是， $T_y$  居然保持水平，無法想像！我們嘗試在研究三討論。

2.圖形中可以看出剛開始都是順時針方向擺動！

3.在  $f_x/f_y$  曲線左端，透露出當  $H1$  在小一點，會讓  $f_x/f_y$  更接近 1！喔！真的會這樣嗎？我們好奇的進行表 2.3 的實驗條件，從第四區的  $45^\circ$  方向放開，果真出現直線和橢圓形。

表 2.3：100H1100 的  $T$ 、 $T_x$ 、 $T_y$ 、 $f_x/f_y$  相關資料

H1	1.5cm	1.5cm	1.5cm	5.2cm	5.2cm
T	740	735	744	724	716
$T_x$	503	502	497	499	518
$T_y$	503	503	509	507	507
$f_x/f_y$	1.000	1.002	1.024	1.016	0.979



圖 2.9：H1=1.5cm

### 研究 2-3：當 $H1$ 改變時

緊接著討論  $H1$  改變的影響。固定  $AB$  長度 50cm、 $H2$  長度 50cm，改變  $H1$  長度 10~100cm，擺繩：棉繩，由第四區擺幅 12cm、 $45^\circ$  方向釋放(圖 2.10)。

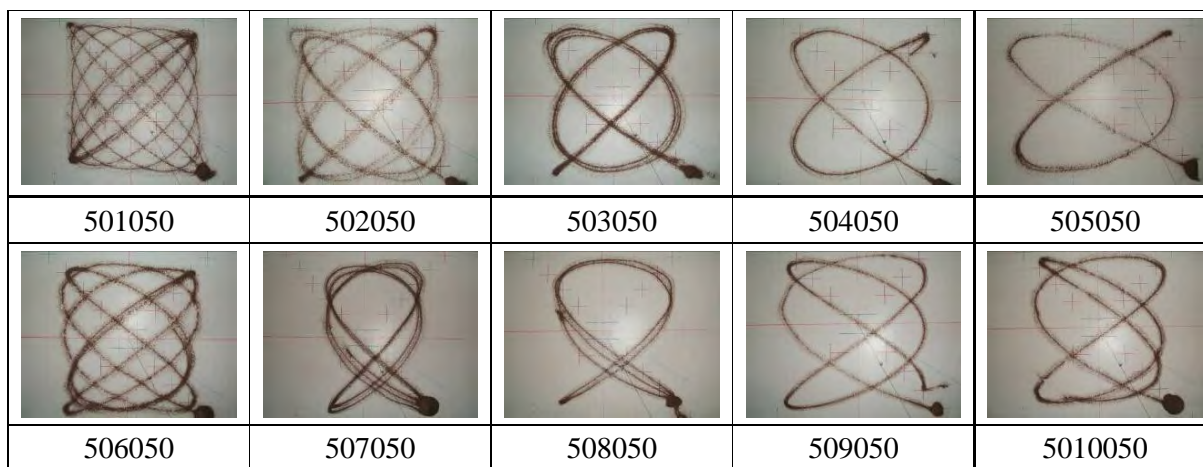


表 2.4：以 50H150 為例，說明改變  $H1$  長度對  $T$ 、 $T_x$ 、 $T_y$ 、 $f_x/f_y$  相關變化情形

編號	$H1$ 改變	T	$T_x$	$T_y$	$f_x/f_y$	編號	$H1$ 改變	T	$T_x$	$T_y$	$f_x/f_y$
501050	10	550.00	360.67	391.00	1.084	506050	60	616.33	364.67	513.67	1.409
502050	20	561.33	361.00	414.33	1.148	507050	70	632.33	364.67	537.33	1.473
503050	30	578.00	361.67	442.00	1.222	508050	80	644.17	367.50	553.83	1.507
504050	40	590.67	362.33	470.00	1.297	509050	90	650.00	368.75	571.50	1.550
505050	50	603.20	363.40	489.20	1.346	5010050	100	665.75	373.25	591.50	1.585

結論：

1.  $H1 \uparrow$  則  $T$ 、 $T_y$  和  $fx/fy \uparrow$ ，但快慢不同， $T_y$  上昇較快而  $fx/fy$  曲線趨於緩和。

2. 沒想到這裡變成  $T_x$  呈現水平線，不受  $H1$  增加的影響，它表達出哪種涵義？我們將在研究 3-1 中討論。

3. 耐心的用筆細心的自起點描繪圖形軌跡，將看到它其實是不斷重複基本圖形的過程(如 504050)，最後圖形會變得複雜；各圖形間的變化是逐漸改變基本圖形的過程，所以軌跡相似的圖形才會相鄰的靠在一起(如 507050 到 5010050；也可從  $fx/fy$  的連續變化觀察到)。

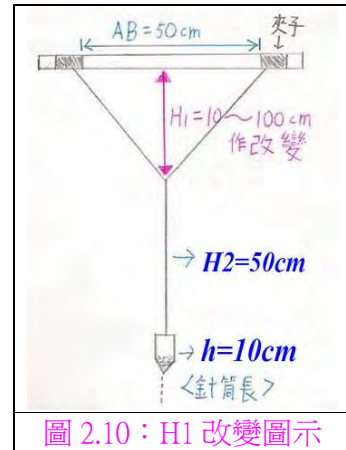


圖 2.10：H1 改變圖示

4. 各圖形間長度些微的改變，最後使得圖形個個相異(見附錄)。

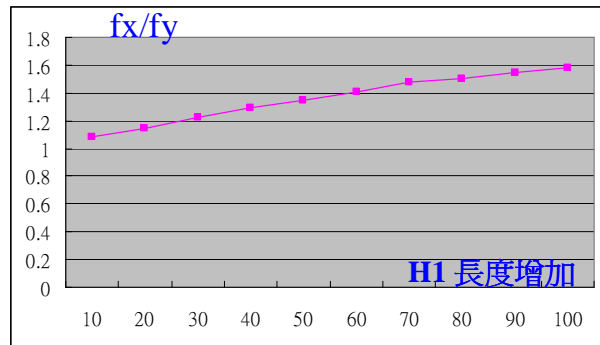
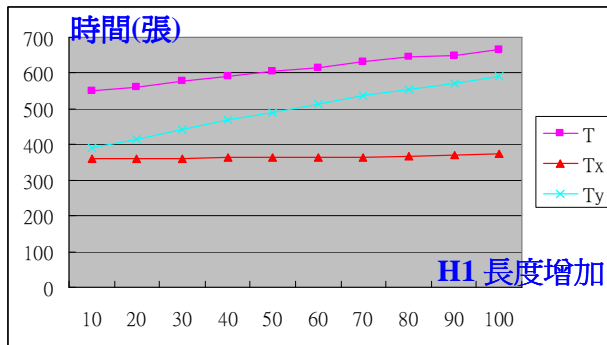


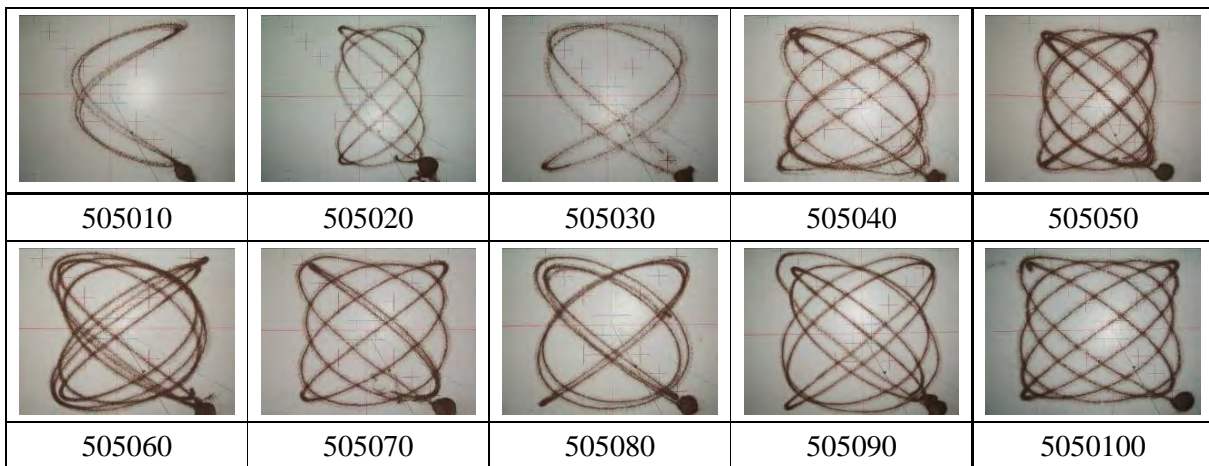
圖 2.11：以 H1 長度改變研究 T、Tx、Ty 變化

圖 2.12：以 H1 長度改變研究對  $fx/fy$  的影響

### 研究 2-4：H2 改變時

接著討論  $H2$  改變的影響。固定  $AB$  長度  $50\text{ cm}$ 、 $H1$  為  $50\text{ cm}$ ，改變  $H2$  長度由  $10 \sim 100\text{ cm}$ ，但  $H2$  的擺繩分棉繩、鐵條兩種，由第四區擺幅  $12\text{ cm}$  處， $45^\circ$  方向釋放(圖 2.13)。

一部分換上稍微複雜的擺圖，讓您體會它的錯綜複雜，乍看下圖形似乎大

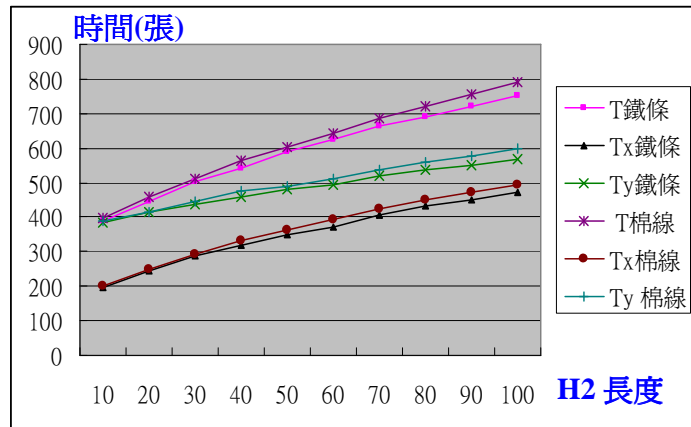
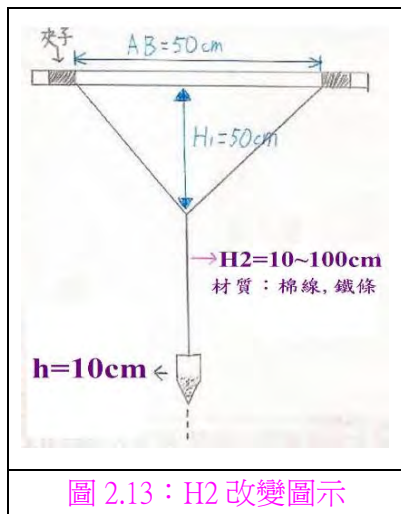


同小異，不過小小差異結局不同。但一定是來自基本圖形的不斷變化，什麼是基本圖形呢？請看陸、討論。

表 2.5：5050H2：改變 H2 長度、材質對 T、Tx、Ty、fx/fy 相關變化

編號	H2 改變	H2 使用棉繩				H2 使用鐵條			
		T	Tx	Ty	fx/fy	T	Tx	Ty	fx/fy
505010	10	396.00	200.00	390.00	1.950	390.00	197.50	384.25	1.946
505020	20	456.83	248.00	417.00	1.682	447.67	244.33	415.67	1.701
505030	30	512.00	293.33	446.67	1.523	502.67	286.33	438.67	1.532
505040	40	562.50	331.50	474.67	1.431	541.33	318.67	459.67	1.433
505050	50	602.50	361.17	490.33	1.358	587.83	349.83	480.33	1.373
505060	60	642.45	393.78	512.34	1.301	623.00	372.67	493.00	1.323
505070	70	685.50	424.50	537.00	1.265	664.00	407.50	519.00	1.274
<b>505080</b>	<b>80</b>	<b>720.33</b>	<b>449.33</b>	<b>557.67</b>	<b>1.241</b>	690.00	431.33	539.33	1.250
505090	90	755.80	470.60	574.80	1.221	719.00	449.33	549.00	1.222
5050100	100	790.33	495.67	598.67	1.208	751.67	473.25	567.50	1.199

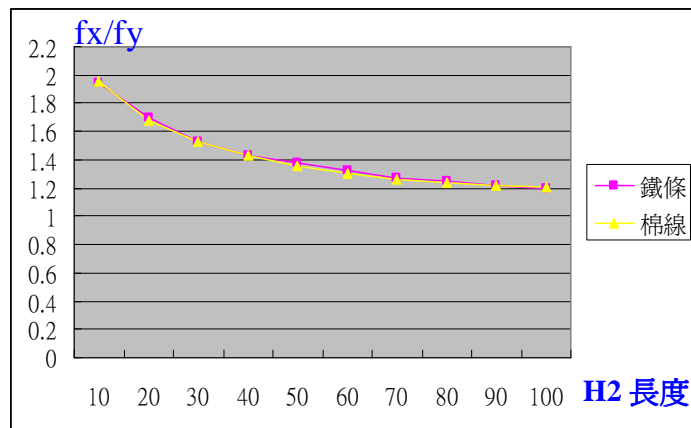
註：505080 數據在研究 3-1、3-4 中使用。



這研究觀察到：

1. H2 使用棉線的  $T$ 、 $T_x$ 、 $T_y$  會比鐵條大一些，當 H2 長度  $\uparrow$  這差異的感覺會更加明顯。

2. 雖然  $T_x$ 、 $T_y$  受到材質影響，但  $fx/fy$  卻不受影響，幾乎是重疊的一條曲線。



由此得知： $f_x/f_y$  必定與長度變化存在著密切關係；擺繩的材質會影響擺動的時間(T、 $T_x$ 、 $T_y$ )，材質愈重所花的時間愈少，使擺動來回的時間變快。

3.  $H_2 \uparrow$ ，T、 $T_x$ 、 $T_y$  均上揚，但  $f_x/f_y$  卻是下滑趨勢，這也是我們首次觀察到 T、 $T_x$ 、 $T_y$  同時上揚的情形。

**研究 2-5：針筒引起的問題： $H_1=H_2$  vs  $H_1=H_2+h$**

我們觀察到相同比例放大  $H_1$ 、 $H_2$ ，似乎擺圖相似！而我們也想了解究竟針筒的長度要不要納入考慮？所以我們設計了下面的實驗。

我們將實驗分成兩組，A 組： $H_1=H_2$ ；B 組： $H_1=H_2+h$ (針筒 h 長 10cm)來比較差異。其他實驗條件為 AB 長 50cm，從第四區擺幅 12cm 處， $45^\circ$  方向釋放，都使用棉繩。

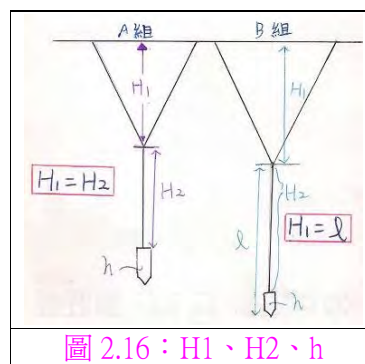


圖 2.16： $H_1$ 、 $H_2$ 、h

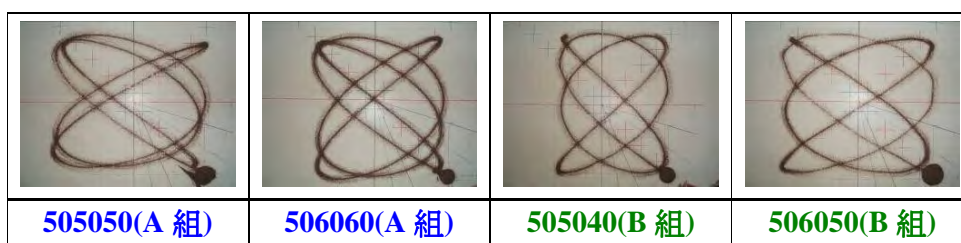


表 2.6：A、B 兩組相同比例放大對 T、 $T_x$ 、 $T_y$ 、 $f_x/f_y$  變化

A 組： $H_1=H_2$					B 組： $H_1=H_2+h$ (納入針筒長 h)				
編號	T	$T_x$	$T_y$	$f_x/f_y$	編號	T	$T_x$	$T_y$	$f_x/f_y$
501010	311.67	195.33	241.00	1.234	502010	341.00	197.00	288.67	1.465
502020	398.67	245.33	318.33	1.298	503020	424.50	247.75	354.50	1.433
503030	472.33	288.67	384.00	1.330	504030	495.15	288.25	422.25	1.465
504040	537.00	328.67	442.67	1.347	505040	563.50	329.75	469.50	1.424
505050	601.00	360.50	490.00	1.359	506050	617.67	362.67	512.33	1.413
506060	654.33	391.00	533.33	1.364	507060	667.00	389.33	555.00	1.426
507070	706.67	422.67	581.67	1.376	508070	722.33	425.00	598.33	1.408
508080	755.00	446.00	615.00	1.379	509080	771.25	452.00	635.50	1.406
509090	792.67	471.00	652.00	1.384	5010090	806.33	480.33	672.33	1.400
50100100	840.67	503.00	685.33	1.363	50110100	856.50	504.50	703.25	1.394

結論：1.由擺圖看出圖形具有高度的相似(∵彼此的  $f_x/f_y$  值接近)。2.AB 兩組中，T、 $T_x$ 、 $T_y$  都隨  $H_2$  的增加而增加，其中  $T_y$ (B 組) $>T_y$ (A 組)；但  $T_x$  值卻出奇的接近(圖形互相重疊)。3.在一定長度後 AB 兩組的  $f_x/f_y$  會彼此接近。究竟要不要列入針筒長 h，我們等待研究三來破解！



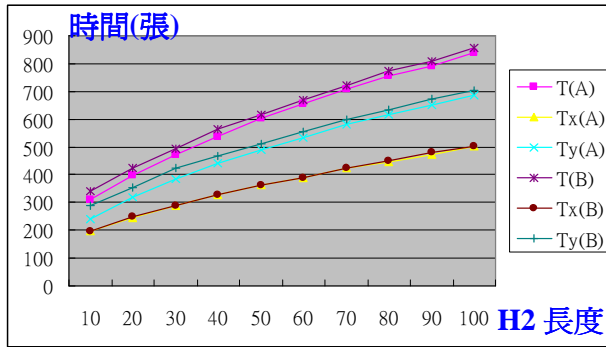


圖 2.17：A、B 兩組對 T、Tx 與 Ty 的影響

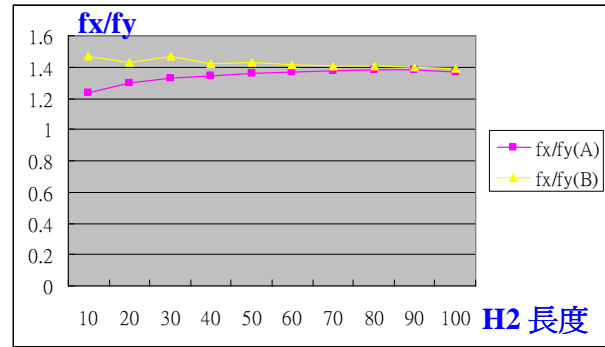


圖 2.18：A、B 兩組對 fx/fy 的影響

### 研究三、Eureka!Y 擺方程式

#### 研究 3-1：Y 擺方程式

藤井青在《物理寫真集》中對 Y 擺實驗提出一項具有建設性的看法『由於單擺的週期是由長度而定，在圖 3.1 上適當選擇兩者的長度比率(L : l)，又精確選定兩個方向開始擺動的時機，那擺圖會得到所想要的擺動形態。

如圖 3.2 中，長度是採  $L : l = 4 : 1$ ，那 X、Y 方向的頻率比為  $f_x : f_y = 2 : 1$ ，撒出的白砂會正好顯示出該組合的狀態。』文中同時提到『以上方法無法實驗證實』節錄自文獻[11]。

似乎長度  $[L : l = 4 : 1]$  和頻率  $[f_x : f_y = 2 : 1]$  存在平方關係！真的是這樣嗎？我們以 505080 為例(表 3.1)，代入各項實驗數據：

$$\frac{L}{l} = \frac{140}{90} = 1.556 ; \left[ \frac{f_x}{f_y} \right]^2 = \left[ \frac{T_y}{T_x} \right]^2 = \left[ \frac{557.67}{449.33} \right]^2 = [1.241]^2 = 1.540$$

兩個誤差 1.028%。

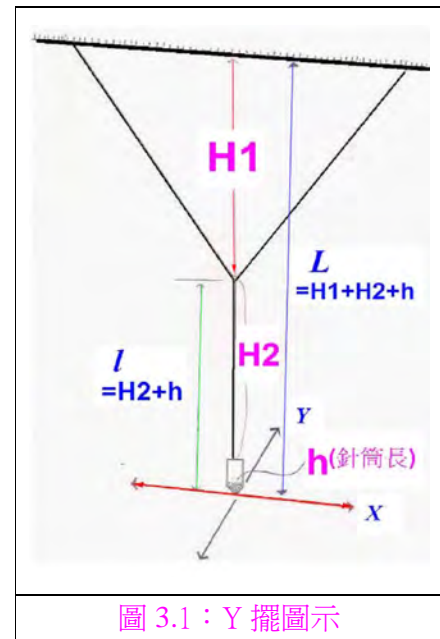


圖 3.1：Y 擺圖示

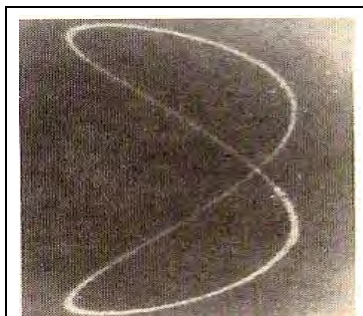


圖 3.2：  $f_x : f_y = 2 : 1$  [11]



圖 3.3：505080 擺圖

表 3.1：505080 實驗數據

505080(長度：cm)		
AB=50，H1=50，H2=80，h=10		
L	H1+H2+h	140cm
l	H2+h	90cm
T	720.33 張	3.076 秒
Tx	449.33 張	1.919 秒
Ty	557.67 張	2.381 秒
fx : fy = Ty : Tx		1.241
數據引自：表 2.5，棉繩		

所以我們認為這式子是存在的

$$\left[\frac{fx}{fy}\right]^2 = \left[\frac{Ty}{Tx}\right]^2 = \frac{L}{l} \dots\dots(1)$$

$$\frac{1}{4} \times \frac{3}{12} \Leftrightarrow \frac{1}{3} = \frac{4}{12}$$

交叉相乘、乘法具有交換律

$$\therefore \frac{Ty^2}{L} = \frac{Tx^2}{l} \dots\dots(2)$$

(2)式真的會相等嗎？繼續以 505080 為例說明(表 3.1)：

$$\frac{Ty^2}{L} = \frac{2.381^2}{140} = 0.0405 ; \frac{Tx^2}{l} = \frac{1.919^2}{90} = 0.0409$$

兩個誤差 0.99%。我們覺得(2)式是正確的！

我們嘗試以(2)式試圖解開**研究二**的實驗所產生的疑惑。

### 研究 3-2：Y 擺方程式驗證與應用(1)

以**研究二**的實驗說明如下：

#### 一、在 H1+H2=100cm(研究 2-2)實驗

在 H1+H2=100cm 條件下，為什麼 Ty 會出現一條水平線？

當總長 L 不變時，Ty 必須保持不變來滿足(2)式的要求(圖 3.4)。

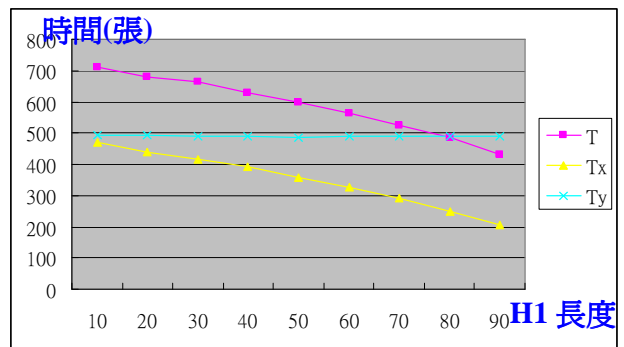
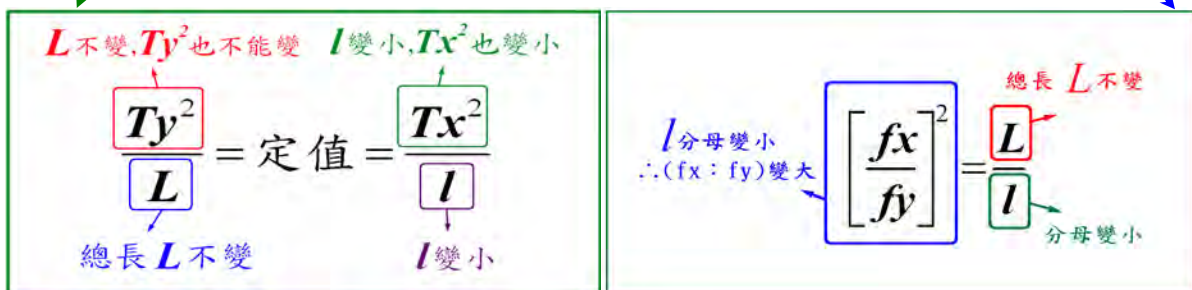


圖 3.4：H1+H2=100cm 實驗(原圖 2.7)

Tx 曲線下滑： $\because$  H1 增加(H2 減少)，使得 l 變小。 $\therefore$  Tx 跟著變小。

由(1)式可知：l 變小也造成 fx/fy  $\uparrow$ 。 $\therefore$  造成 fx/fy 曲線上揚；圖 2.8 或 3.11。



#### 二、當 H1 改變(研究 2-3)實驗

當 H1 增加時，它的 Tx 為什麼會保持不變(水平線)？

H1 增加就是下擺總長 l (H2+h) 保持不變，那 Tx 必須保持不變來滿足(2)式的要求(圖 3.5)。

Ty 曲線上揚： $\because$  H1 長度增加，使得總長度 L 增加。 $\therefore$  Ty 跟著上揚。

理所當然，fx/fy 曲線上揚是： $\because$  Ty 上升而上揚[或： $\because$  L 增加所引起的(由 1 式)]；圖 2.12 或 3.9。

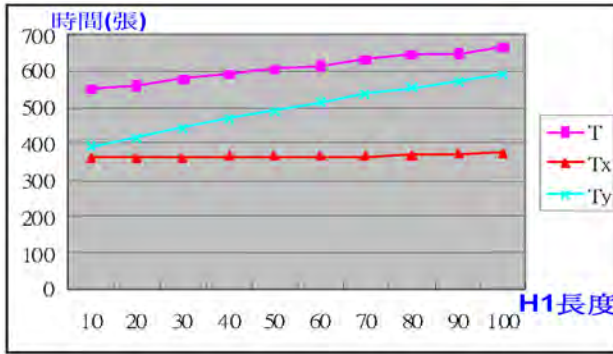


圖 3.5：H1 長度改變實驗(原圖 2.11)

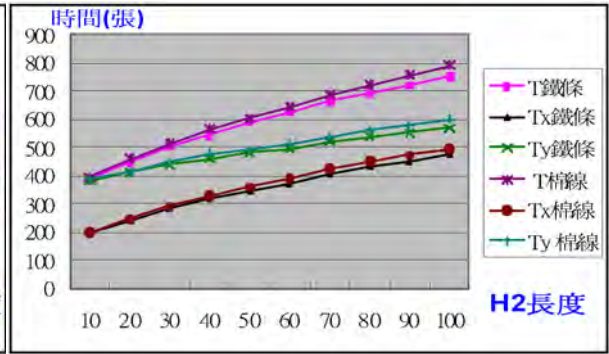


圖 3.6：H2 長度改變實驗(原圖 2.14)

### 三、當 H2 改變(研究 2-4)實驗

當 H2 增加， $L$ 、 $l$  也跟著增加。∴由(2)式可知，Tx、Ty 勢必上揚(圖 3.6)。

這實驗明白傳達：Tx、Ty 會受材質影響，但  $f_x/f_y$  不受影響—這是受到  $L/l$  比值約束的結果；圖 2.15 或 3.8。

### 四、H1=H2 vs H1=H2+h(研究 2-5)實驗

實驗分成 A 組(H1=H2)、B 組(H1=H2+h)。

結果最讓我們驚訝的是兩組的 Tx 相等而且  $Ty(B) > Ty(A)$ ，why？(圖 3.7)

我們觀察發現，它們的  $l$  值(H2+h) 相同。∴Tx 必相同[由(2)式得知，數據分析在表 3.2]。

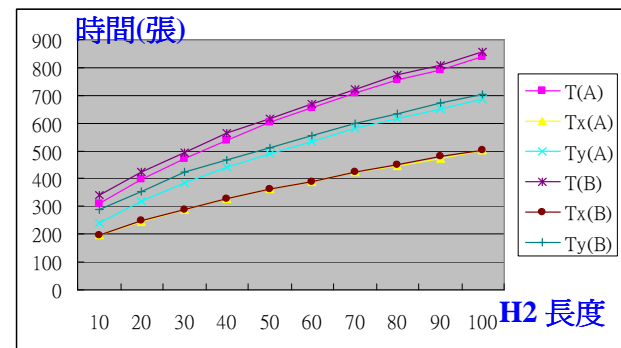


圖 3.7：A、B 兩組實驗(原 2.17)

B 組的總長  $L$  都大於 A 組，自然 Ty 也較大，由(2)式看出  $Ty(B \text{ 組}) > Ty(A \text{ 組})$ 。

表 3.2：A、B 兩組，總長  $L$  與下擺長  $l$  值

A 組	501010	502020	503030	504040	505050	506060	507070	508080	509090	50100100
$l$	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110
$L$	30	50	70	90	110	130	150	170	190	210
B 組	502010	503020	504030	505040	506050	507060	508070	509080	5010090	50110100
$l$	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110
$L$	40	60	80	100	120	140	160	180	200	220

※從上面的分析，確認影響 Tx 的關鍵在  $l$ (下擺長)、Ty 的關鍵在  $L$ (Y 擺總長)。這項研究同時解開在研究 1-3、表 1.1(p.6)中，為什麼 Y 擺從  $90^\circ$ (Y 軸)釋放的 Ty 會恰好等於等長單擺的週期(此長為  $L$ )；而從  $0^\circ$ (X 軸)釋放的 Tx 會等於等長單擺的週期(此長為  $l$ )。

※方程式  $\frac{Ty^2}{L} = \frac{Tx^2}{l}$  符合實驗的結果，這是一個非常重要的成果。

### 研究 3-3：Y 擺方程式驗證與應用(2)

我們以更多例子來確認方程式  $\left[\frac{fx}{fy}\right]^2 = \left[\frac{Ty}{Tx}\right]^2 \stackrel{L}{=} \frac{L}{l}$  的等號是否真的成立

！以 A.  $\frac{L}{l}$  當標準值和 B. 各實驗的  $\left[\frac{Ty}{Tx}\right]^2$  為實驗值，分別由 A 和 B 得到  $\left[\frac{fx}{fy}\right]^2$  曲線圖進行比對：

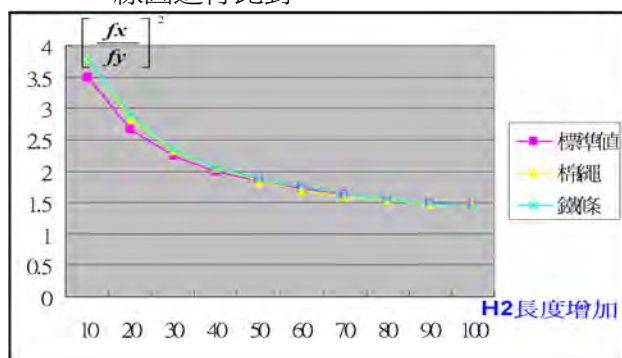


圖 3.8：H2 長度改變實驗

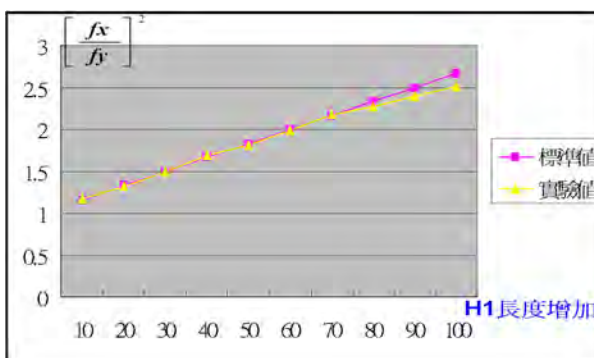


圖 3.9：H1 長度改變實驗

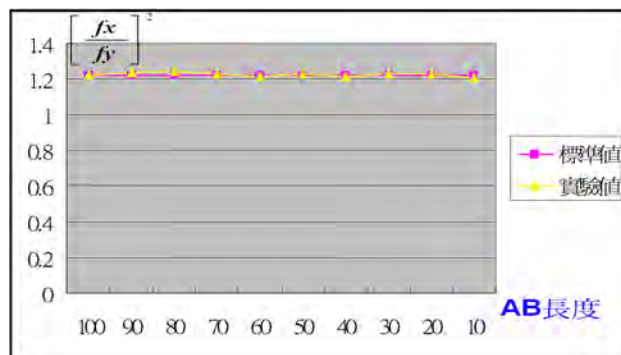


圖 3.10：AB 長度改變實驗

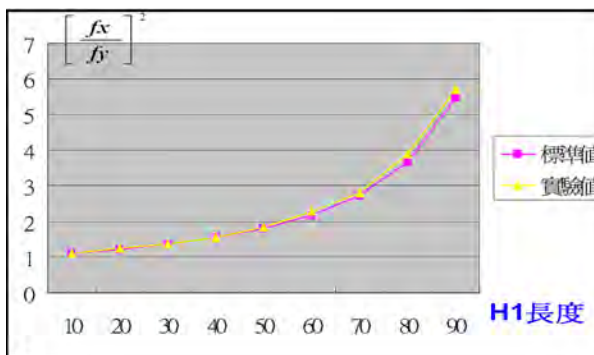


圖 3.11：H1、H2 改變(但 H1+H2=100)實驗

討論：

1. 由圖 3.8~3.11 看到： $\frac{L}{l}$  與  $\left[\frac{Ty}{Tx}\right]^2$  非常接近—幾乎重疊(圖形的趨勢也一致)。

致)： $\left[\frac{fx}{fy}\right]^2 = \left[\frac{Ty}{Tx}\right]^2 = \frac{L}{l}$  無庸置疑。

2.  $\frac{L}{l}$  是假分數： $\frac{fx}{fy} \geq 1$ ，難怪，我們一直很難找到  $\frac{fx}{fy}$  會小於 1 的情形

，原來是  $\frac{fx}{fy}$  有最小值 1(當  $L=l$ )。

實際上會不會出現  $fx/fy$  小於 1 的情況？有的，不過  $fx/fy$  值也很接近 1(表 2.3 紅字，p.12)。

3.在研究 2-5 中，實驗分成 A 組(H1=H2)與 B 組(H1=H2+h)。

表 3.3 中，A、B 兩組也分別計算標準值( $\frac{L}{l}$ )並和實驗值( $\left[\frac{Ty}{Tx}\right]^2$ )比較！

在圖 3.12 中 B 組：當 H2 愈短時，實驗容易偏離標準值誤差大；而 A 組誤差極小且整體趨勢與標準值相符合。

針筒長 h 要不要算入下擺長 l? 一定要，如果在下擺長 l 和總長 L 中不計算

針筒長 h，那誤差變大跟  $\left[\frac{fx}{fy}\right]^2$  及圖形完全不符合！

表 3.3：研究 2-5，AB 兩組  $\left[\frac{fx}{fy}\right]^2$  數值：實驗( $\left[\frac{Ty}{Tx}\right]^2$ )與標準值( $\frac{L}{l}$ )比較

H2 長度	$[fx/fy]^2$			$[fx/fy]^2$		
	A.編號	A.實驗值	A.標準值	B.編號	B.實驗值	B.標準值
10	501010	1.522	1.500	502010	2.147	2
20	502020	1.684	1.667	503020	2.053	2
30	503030	1.770	1.750	504030	2.146	2
40	504040	1.814	1.800	505040	2.027	2
50	505050	1.847	1.833	506050	2.306	2
60	506060	1.861	1.857	507060	2.008	2
70	<b>507070</b>	<b>1.894</b>	<b>1.875</b>	508070	1.982	2
80	508080	1.902	1.889	509080	1.977	2
90	509090	1.916	1.900	5010090	1.959	2
100	50100100	1.858	1.909	50110100	1.943	2

註：表中數據來源引自表 2.6(p.15)。計算如右：

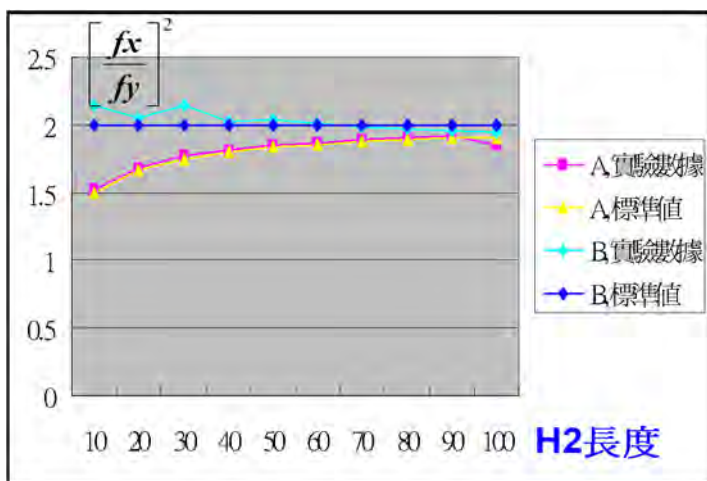


圖 3.12：研究 2-5，AB 兩組  $[fx/fy]^2$  數值－實驗值與標準值相比較

**計算舉例：507070**

507070(長度：cm)

AB=50，H1=70，H2=70，h=10

$L$	$H1+H2+h$	150cm
$l$	$H2+h$	80cm

---

T	706.67 張
Tx	422.67 張
Ty	581.67 張

---

$fx : fy = Ty : Tx = 1.376$

---

數據引自：表 2.6

---

實驗值

$$\left[\frac{Ty}{Tx}\right]^2 = \left[\frac{581.67}{422.67}\right]^2 = 1.894$$

標準值

$$\frac{L}{l} = \frac{150}{80} = 1.875$$

### 研究 3-4：重力加速度

在研究 3-1 中提到，為什麼藤井青說他的想法無法以實驗證實呢？我們深深體會這美妙的想法為什麼沒辦法經實驗證實的感覺！理由是藤井青無法清楚地說明  $T_x$ 、 $T_y$  值！

在歷屆科展、Y 擺文獻或是線上搜尋的資料都無法清楚的描述  $T_x$ 、 $T_y$  值，自然沒能真正找到  $f_x/f_y$  值，只能用  $m:n$  簡略的方式討論(詳見研究 1-4)。我們找到  $T_x$ 、 $T_y$  值，確認他的想法是對的！

繼續推導公式，滿足我們小小的好奇心！

$$\frac{T_y^2}{L} = \frac{T_x^2}{l} \dots\dots\dots(2)$$

$$\therefore \frac{T_y^2}{L} = \frac{T_x^2}{l} = \frac{T_x^2 + T_y^2}{L+l} \dots\dots\dots(3)$$

分式性質： $\frac{1}{5} = \frac{3}{15} = \frac{1+3}{5+15}$   
 也就是： $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$

讓  $T_p^2 = T_x^2 + T_y^2$  ( $T_p$  表週期)代入得到

$$\frac{T_y^2}{L} = \frac{T_x^2}{l} = \frac{T_p^2}{L+l} \dots\dots\dots(4)$$

令人好奇的是(4)式中，個別的比值真的會相等嗎？

表 3.4：以 **50H150** 為例，討論  $\frac{T_y^2}{L}$ 、 $\frac{T_x^2}{l}$ 、 $\frac{T_p^2}{L+l}$  比值是否相等？

編號	501050	502050	503050	504050	505050	506050	507050	508050	509050	5010050
A. $T_y^2 / L$	0.0398	0.0391	<b>0.0396</b>	0.0403	0.0397	0.0401	0.0405	0.0399	0.0397	0.0399
B. $T_x^2 / l$	0.0395	0.0396	<b>0.0397</b>	0.0399	0.0401	0.0404	0.0404	0.041	0.0413	0.0423
C. $T_p^2 / L+l$	0.0397	0.0393	<b>0.0396</b>	0.0401	0.0398	0.0402	0.0405	0.0403	0.0402	0.0405

註：原 **50H150** 數據取自表 2.4(p.12)－改變 H1 的研究。

在表 3.4 中，我們看到數學令人驚奇的魅力！(4)式中每一項的比值都非常的接近！

我們無意中看出一項重要的事實，不僅同一長度－"H1、H2(L、l)"的比值接近(如 503050)，在不同長度下它們的比值竟然也互相接近，比值居然不受長度改變的影響，不會吧！這些比值究竟是什麼？意味著什麼事實呢？

$$\therefore \text{單擺週期 } T = 2 \sqrt{\frac{l}{g}} \Leftrightarrow \frac{T^2}{l} = \frac{4}{g}, \text{ } g \text{ 是重力加速度} \dots\dots\dots(5)$$

我們觀察(4)式和單擺週期(5)式，互相比較後得到：

$$\frac{Ty^2}{L} = \frac{Tx^2}{l} = \frac{Tp^2}{L+l} = \frac{4}{g} \dots\dots(6)$$

重力加速度和緯度有關，由 Google 地圖或 iphone 手機可以查到學校的緯度 22.958459°N，將它代入含有緯度的 g 值計算公式[12、13]。

得到  $g=978.8177\text{cm/s}^2$  (重力加速度標準值)……(7)

將 g 值代入  $\frac{4}{g} = 0.0403$ ，與表 3.4 數據相比對，誤差非常的微小！

仍以 505080 為例(表 3.1)：

$$L = 140\text{cm} , l = 90\text{cm} , Tp^2 = Tx^2 + Ty^2 = 1.919^2 + 2.381^2 = 9.3511\text{s}^2$$

將 L、l、Tp<sup>2</sup> 代入(6)式

$$\frac{Tp^2}{L+l} = \frac{4}{g} \Rightarrow \frac{9.3511^2}{140+90} = \frac{4 \times 3.14159^2}{g}$$

得  $g=971.0126\text{cm/s}^2$  與  $g=978.8177\text{cm/s}^2$  (7 式：重力加速度標準值)相比較，誤差 0.797%。令人驚訝！

表 3.5：討論 A.  $\frac{Ty^2}{L}$ 、B.  $\frac{Tx^2}{l}$ 、C.  $\frac{Tp^2}{L+l}$  誤差比較(數據：表 3.4)

編號	501050	502050	503050	504050	505050	506050	507050	508050	509050	5010050
A 誤差%	1.28	3.00	1.88	0.00	1.66	0.61	-0.39	0.96	1.57	1.15
B 誤差%	2.00	1.82	1.45	1.09	0.51	-0.19	-0.19	-1.75	-2.44	-4.96
C 誤差%	1.61	2.49	1.71	0.50	1.25	0.34	-0.33	0.00	0.43	-0.51

註：1.T、Tx、Ty(數據引自表 2.4)單位：秒；L、l 單位：cm；2.標準值是  $4^2 / g = 0.0403$

。3. A 誤差% =  $\frac{A - 0.0403}{0.0403} \times 100\%$ ；其他 B、C 計算方式相同。

在表 3.6 中以研究二的六項實驗數據分別去計算 g 值，再和(7)式標準值比較，得到：

1.擺繩的材質的確會影響實驗 g 值，鐵條誤差大，輕繩比較理想。

為什麼對輕繩會比較有利呢？原來在單擺裡有個重要的條件，就是繩子愈輕愈好，輕到可以不考慮繩子重量。

2.下擺長 l 愈短(即 H2 愈短)會不利 g 值；從擺圖觀察，愈短的下擺長 l 圖形愈容易抖動、失敗。∴H2 愈短、誤差愈大。

3. 一般而言，擺的方程式通常是對單擺公式的修正[4]。所以，我們修正單擺公式中的長度項，讓長度項= $L+l$  成為 Y 擺方程式。

我們建議 Y 擺方程式為：

$$\left[ \frac{fx}{fy} \right]^2 = \left[ \frac{Ty}{Tx} \right]^2 = \frac{L}{l}, \quad \frac{Ty^2}{L} = \frac{Tx^2}{l}, \quad \frac{Tp^2}{L+l} = \frac{4}{g}$$

其中  $Tp^2 = Tx^2 + Ty^2$

表 3.6：不同 Y 擺實驗計算得到重力加速度  $g(\text{cm/s}^2)$  與標準  $g$  值的數據比較

H1=H2 實驗			H2 改變實驗(H2：鐵條)			H2 改變實驗(H2：棉線)		
編號	實驗 $g$ 值	誤差%	編號	實驗 $g$ 值	誤差%	編號	實驗 $g$ 值	誤差%
501010	1125.05	14.94	505010	1044.09	6.67	505010	1014.49	3.64
502020	1072.49	9.57	505020	1024.57	4.67	505020	1011.89	3.38
503030	1032.09	5.44	505030	1025.81	4.80	505030	985.79	0.71
504040	997.28	1.89	505040	1038.23	6.07	505040	968.98	-1.00
505050	994.74	1.63	505050	1042.53	6.51	505050	992.58	1.41
506060	990.29	1.17	505060	1077.21	10.05	505060	985.31	0.66
507070	963.34	-1.58	505070	1044.35	6.70	505070	970.46	-0.85
508080	975.49	-0.34	505080	1044.27	6.69	505080	971.03	-0.80
509090	970.65	-0.83	505090	1075.59	9.89	505090	980.95	0.22
50100100	958.81	-2.04	5050100	1070.75	9.39	5050100	967.82	-1.12

H1 改變實驗			AB 改變實驗			H1+H2=100cm 實驗		
編號	實驗 $g$ 值	誤差	編號	實驗 $g$ 值	誤差	編號	實驗 $g$ 值	誤差
501050	994.82	1.64	1002080	974.73	-0.42	1001090	978.06	-0.08
502050	1003.85	2.56	902080	969.67	-0.93	1002080	993.54	1.50
503050	995.82	1.74	802080	968.06	-1.10	1003070	997.15	1.87
504050	983.75	0.50	702080	973.57	-0.54	1004060	996.11	1.77
505050	991.22	1.27	602080	972.41	-0.65	1005050	1006.83	2.86
506050	982.18	0.34	502080	977.52	-0.13	1006040	999.29	2.09
507050	975.61	-0.33	402080	979.89	0.11	1007030	999.49	2.11
508050	980.29	0.15	302080	985.35	0.67	1008020	1010.05	3.19
509050	983.01	0.43	202080	978.74	-0.01	1009010	1003.39	2.51
5010050	973.82	-0.51	102080	973.97	-0.50			

註：編號紅字的表示：H2 使用鐵條，其餘藍字編號為棉繩。



## 研究四、等長度下圖形的變異

之前分析與觀察得知，等長度下(L、l)的擺圖模式是恆定的(∴fx/fy 相同)。在無意間發現如果在 Y 擺擺心(就是上 V 擺繩與下擺繩交接處)，加掛螺絲會改變這一情況(圖 4.1~3)。

以 505050 為例，擺心兩邊各放兩顆螺絲，H1、H2 皆為 50cm，擺線為棉繩，自第四區擺幅 12cm45°方向釋放。

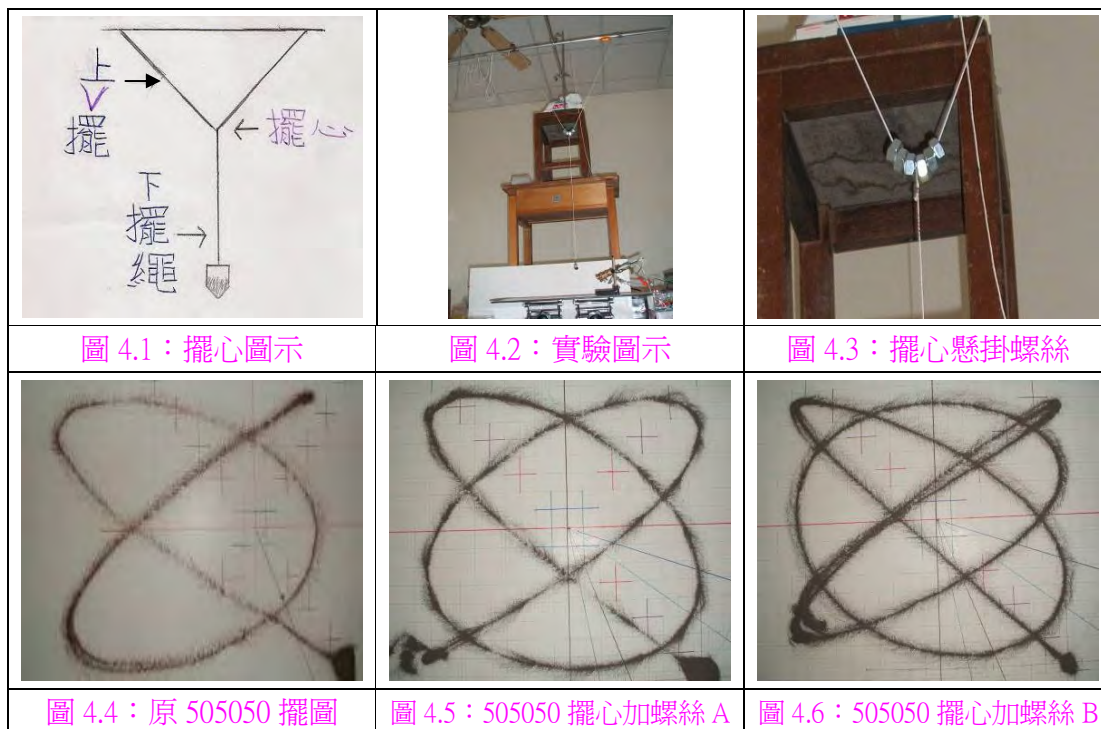


表 4.1：擺心加重對 Y 擺 T、Tx、Ty 的影響

	原 505050			擺心加螺絲(圖 4.5)A			擺心加螺絲(圖 4.6)B			
	505050	505050	平均	1	2	平均	3	4	5	平均
T	603.20	601.00	602.10	588	587	587.50	581	581	579	580.33
<b>Tx</b>	<b>363.40</b>	<b>360.50</b>	<b>361.95</b>	<b>362</b>	<b>359</b>	<b>360.50</b>	<b>361</b>	<b>360</b>	<b>360</b>	<b>360.33</b>
Ty	489.20	490.00	489.6	452	457	454.50	436	436	433	435.00
fx/fy	1.346	1.359	1.353	1.249	1.273	1.261	1.208	1.211	1.203	1.207
備註	表 2.4 表 2.6(A)			針筒鐵砂全滿時擺圖			針筒鐵砂半滿時擺圖			

註：注射筒鐵砂全滿時約重 45.7 克，半滿時約重 22.7 克，單顆螺絲重 12.58 克。

從觀察得知，1.擺心加重會影響 T、Ty、fx/fy(擺圖)，但不影響 Tx。2.首度觀察到擺重(針筒)影響擺圖的情形，盛砂的量在過程中影響擺畫的軌跡，擺心未加重前是沒有這項結果。這可能是擺心加重以後使得在擺心處擺盪的幅度加大，使針筒擺重的細微變化成爲無法忽略的一項變因，進而被呈顯出來。

## 伍、研究結果

- 研究一：**1.查尋 Y 擺的相關文獻資料；提出 **ABH1H2 標示法**方便判斷主長度的變化。2.定義 T、Tx、Ty 三個主要時間的測量方法與意義。  
3.研究**初始點效應**—不同象限(圖形對稱)、角度、抖動、擺幅對 T、Tx、Ty 與 fx/fy 對擺圖的影響，**主要在找出關鍵變因**。  
4.討論文獻頻率 **m : n** 與實驗測量值 **Ty : Tx** 的關係，研究以 Ty : Tx 精確的方法取代 m : n 方法的可行性(以 Java 程式輔助證明是可行的)。

**研究二：**將六個實驗變化整理如下表。表說明一項觀察，就是**當擺長變長，擺動變慢，T時間增加**。

		實驗變因					實驗結果			
		AB	H1	H2	L	l	T	Tx	Ty	fx/fy
研究 2-1	AB 改變	↑	—	—	—	—	—	—	—	↑
研究 2-2	H1+H2=100cm	—	↑	↓	—	↓	↓	↓	—	↘
研究 2-3	H1 改變	—	↑	—	↑	—	↑	—	↑	↘
研究 2-4	H2 改變	—	—	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↘
研究 2-5	H1=H2, 改變	—	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↘
研究 2-5	H1=H2+h, 改變	—	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↘

註：1."—"在「實驗變因」表：控制變因；在「實驗結果」表：常數、不改變。  
2."↑"：增加，"↓"：減少。

**研究三：**1.根據藤井青先生的提示，在單擺中，T(週期)與L(長度)習習相關。我們假設 Y 擺方程式為  $[fx/fy]^2 = [Ty/Tx]^2 = L/l$ ，研究發現與**研究二**的實驗幾乎相同，並可預測實驗結果。

2.比對單擺週期公式後，我們進一步修正單擺公式的長度項，得到 Y 擺週期方程

$$\text{式：} \frac{Tp^2}{L+l} = \frac{4}{g} \text{ 或 } Tp = 2 \sqrt{\frac{L+l}{g}}$$

，代入實驗值求得**重力加速度 g 值**，與理論 g 值比對誤差可在 3%以內。

在此，我們以 **Ty : Tx** 取代文獻方法 **m : n**，**精確描述 Y 擺行爲**，缺點是需要費力的點算 Tx、Ty；而由 Y 擺方程式的研究，得知  $\sqrt{L/l}$  可在實驗前推論擺圖形式 (fx/fy)，**這方法—從初始條件就能決定 Y 擺圖形—可以提供做為 Y 擺研究的新方法**。

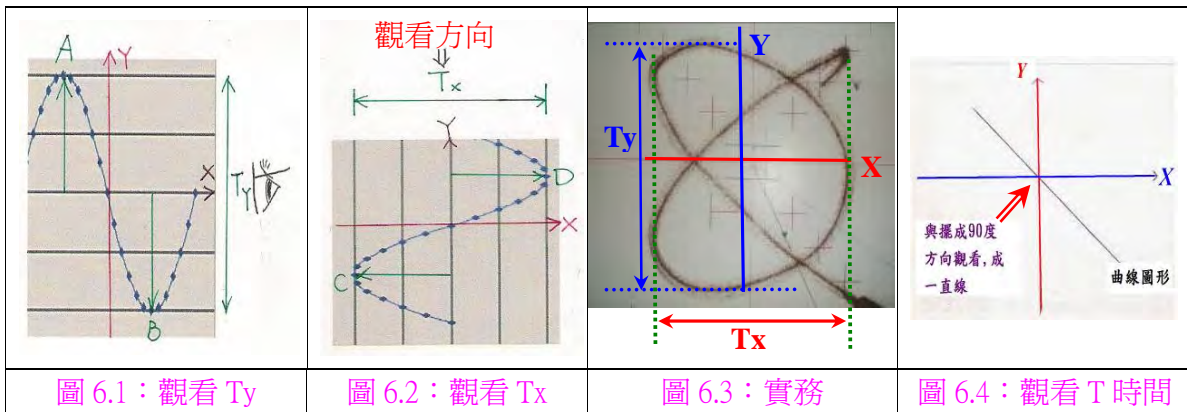
**研究四：**一旦擺長(L、l)決定，擺圖形式就被確定；我們無意中發現，只要 Y 擺擺心(H1 與 H2 交會處)，掛上重物(螺帽)，可以讓擺圖(fx/fy)產生變異。

## 陸、討 論

### 一、爲何如此定義 T、Tx、Ty？

Y擺圖形是利薩如曲線，它圖形變化複雜，同長度(H1、H2)下所得到的相同圖形或許可以找出週期，但在不同長度下圖形間變化差異太大，根本沒辦法用簡單的週期來說明。

面對這一難題，必須用不同的角度和思考，才能打破僵局進行研究。我們掌握週期的概念—來回一次的觀念，把時間分成兩個可以觀察的量：Tx 和 Ty。



**Ty**：眼睛從 X 軸的方向看到 Y 擺只在 Y 軸上來回擺動—如同在 AB 間來回穿梭，這測量到的時間叫做 Ty(y 時間)圖 6.1、6.3。

**Tx**：跟 Ty 一樣，從 Y 軸的方向看 Y 擺，只看到它在 CD 間穿梭—如同在 X 軸上來回，這來回的時間就叫 Tx(x 時間)圖 6.2~3。【見研究 1-1：Y 擺名詞與標示】

### 這樣定義 T、Tx、Ty 真的可以嗎？

感覺好像我們創造了一個新的物理量？它可以得到認同嗎？

事實上，直接以交 X、Y 軸來測定 Ty、Tx 的方法，並不特別就是物理上簡諧運動(S.H.M.)的觀念！最初分析實驗，在摸不著頭緒時，曾經請教成大物理系蔡錦俊教授討論這個想法究竟可不可以(∵也找不到更好的測量方式)！艱苦奮戰一個月，好奇將 Ty 除以 Tx—竟然會是 m：n，恍然大悟，原來我們在無意中找到新的研究方法！【m：n 見研究 1-4：fx/fy 的意義】

### 頻率比的意義何在？

假設  $f_x/f_y = T_y/T_x = 3/2$ ，表示同樣在軸上來回一次，在 X 軸上要花 2 秒(Tx)，而在 Y 軸卻要 3 秒(Ty)；換句話說，花相同的時間，Y 擺在 Y 軸上是來回 2 次(fy)，但 X 軸上卻擺了 3 次(fx)。

$$\frac{T_y}{T_x} = \frac{3 \text{ 秒}}{2 \text{ 秒}}$$

$$\frac{f_x}{f_y} = \frac{3 \text{ 次}}{2 \text{ 次}}$$

$T_x$ 、 $T_y$  都是在 X、Y 軸上來回擺動，從這觀點出發， $T_x$ 、 $T_y$  可以看成是 x 週期、y 週期。

因為  $T_x$ 、 $T_y$  在 XY 軸上所用的時間不同，造成 Y 擺圖形有豐富的變化；當我們找到圖形密碼，原本不可思議的利薩如擺圖便慢慢地褪下了神秘的面紗！

### 關於 T 的討論

當初測量 T 值是爲了評估週期測量究竟可不可能，圖 6.5(5050H2)顯示出單擺運動很難和 Y 擺運動相比，Y 擺根本不是簡單的反覆運動。我們同時考慮初始線和初始線兩邊的曲線都有變化的情形—這幾乎是一種漸進變化過程(∴ $f_x/f_y$  曲線是連續的)，才定義 T 爲：從起始點到交初始線第二次交點的時間。

可以想像成跟擺動方向成 90°的地方，看見 Y 擺只剩一條線的來回運動—這一點都不特別，實驗上就看到這情形(圖 6.4)。

最有趣的是，我們發現  $T \equiv T_p$ ，真美！【 $T_p$  見研究 3-4：重力加速度】

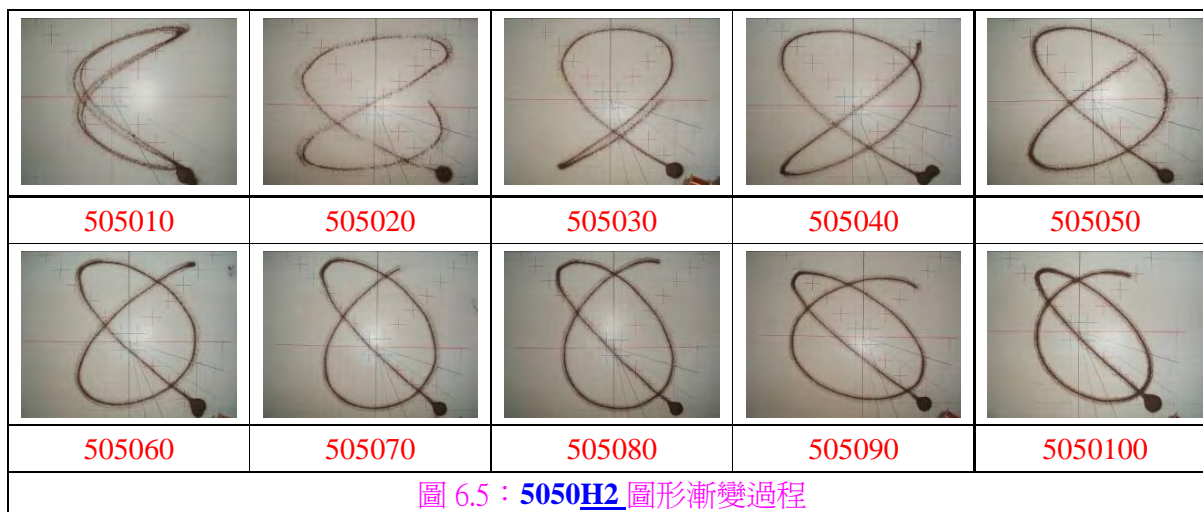
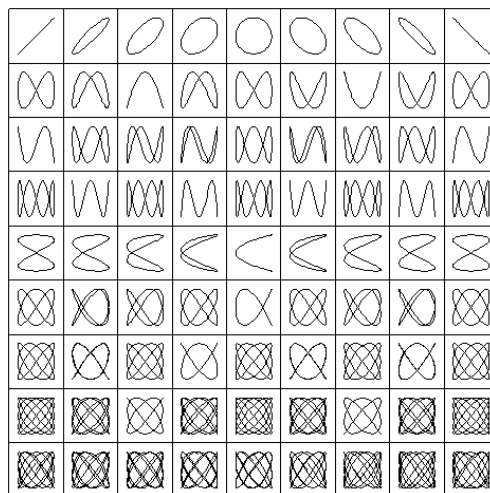


圖 6.5：5050H2 圖形漸變過程

### 二、基本圖形

在文章中常常提到基本圖形，那是指圖形總是反覆著基礎的線條進行擺動！一如右圖：

到此，相信您對這應該不陌生，有著似曾相識的感覺！沒錯就是它！[14]



## 柒、結 論

一、參加科展活動，讓我們體會科學家的付出、對研究的熱情和投入、找不到方法的無助、千頭萬緒不知如何著手的徬徨，**摸索一陣好長的時光後，曙光才從漆黑的偶然中露出訊息**，愈研究愈有心得愈有樂趣！

尋找解答的動力，鼓舞我們盡情地投入。

我們有過不畏失敗的追尋—看不到成功的機會。一旦開始成功，就好像獲得“天啓”，靈感、創意不斷地湧現，陰霾終於一掃而空。

這正是科學研究迷人的所在！探索的歷程不總是苦痛與歡欣交織成的歲月；一旦發現真理，心中的喜悅無法形容。

二、這研究非常有意思！動手 DIY，跟我們一起領略“利薩如 Y 擺”的美！

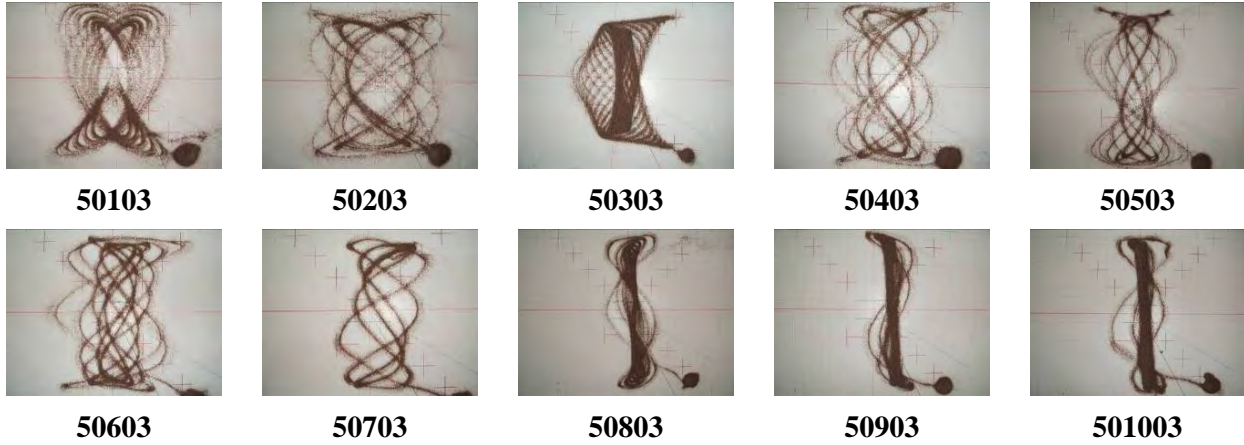
三、本研究內容無涉抄襲。

## 捌、參考文獻

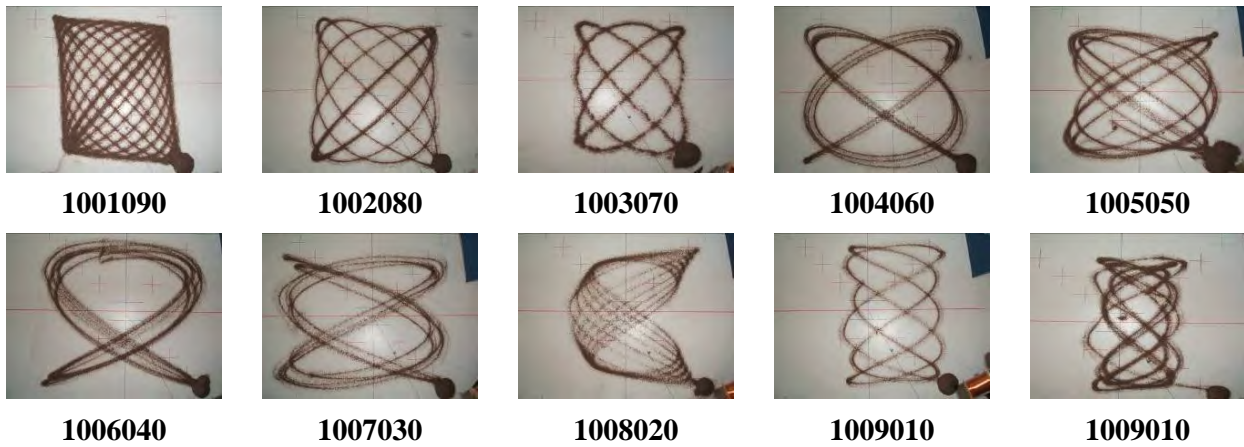
- 1.The Y-Pendulum. Retrieved March 24, 2011, from <http://www.tutelman.com/golf/shafts/FL0physics.php>
- 2.黃道恆(民 78)。不可思議的軌跡之研究。中華民國第 30 屆中小學科學展覽會。
- 3.舒幼生(2005)。力學(物理類)(233-234 頁)。北京：北京大學。
- 4.朱慶琪等(民 99)。單擺與錐擺。2009 中華民國物理教學及示範研討會論文集(193、202、204、189 頁)。東吳大學物理系。
- 5.利薩如圖形(無日期)。民 100 年 3 月 24 日，取自：  
<http://www.ngsir.netfirms.com/chinesehtm/Lissajous.htm>
- 6.利薩如圖形(無日期)。民 100 年 3 月 23 日，取自：  
<http://ic102.xtreemhost.com/viewthread.php?tid=252&extra=page%3D1>
- 7.頻率比(無日期)。民 100 年 3 月 23 日，取自：  
<http://phys.thu.edu.tw/~exp01/class/gp-exp14/lissa/lissajous-fig.htm>
- 8.李氏圖形及其切點數(無日期)。民 100 年 3 月 23 日，取自：  
<http://www.scu.edu.tw/physics/science-scu/M302/20.htm>
- 9.JAVA 程式(無日期)。民 100 年 3 月 24 日，取自：  
<http://cai.tongji.edu.cn:8888/jav/ys/L1.html>
- 10.用 VB 撰寫李賽圖形程式(無日期)。民 100 年 3 月 23 日，取自：  
<http://memo.cgu.edu.tw/yun-ju/CGUWeb/PhyExp/Exp303Oscilloscope/Exp303HomeLissajous.htm#VB>
- 11.藤井清(民 85)。物理寫真集(68-70 頁)。台北：牛頓。
- 12.Gravity of Earth. Retrieved March 24, 2011, from [http://en.wikipedia.org/wiki/Earth%27s\\_gravity](http://en.wikipedia.org/wiki/Earth%27s_gravity)
- 13.台灣各地區的重力加速度值？(無日期)民 100 年 3 月 24 日，取自：  
<http://tw.knowledge.yahoo.com/question/question?qid=1508042503748>
- 14.Lissajous-Figur. Retrieved March 24, 2011, from <http://de.wikipedia.org/wiki/Lissajous-Figur>

## 玖、附 錄

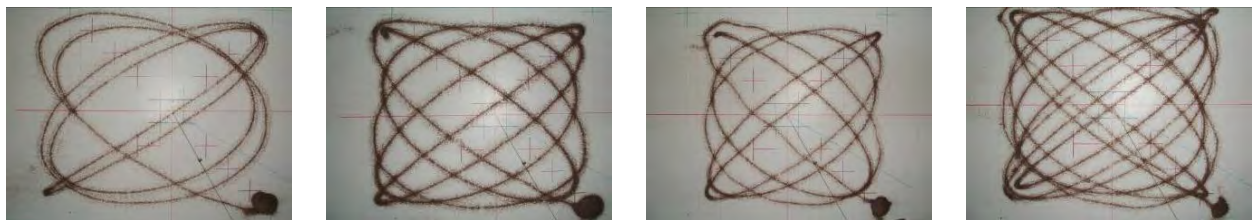
### 1. $H_1$ 改變但 $H_2$ 僅 3cm



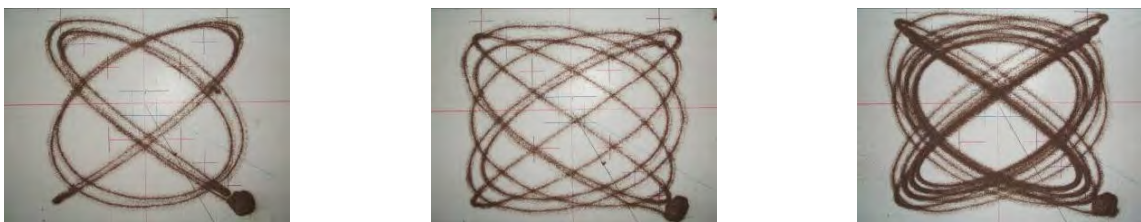
### 2. $H_1 + H_2 = 100\text{cm}$ , $H_1 = 10 \sim 90\text{cm}$



### 3. 個別圖例



**5050100**：由簡單到複雜，細心以筆臨摹，行進軌跡與最左圖同



**505080**：這是實驗中最有趣的特例，左圖為一般常見圖會漸變為中間的圖，偶而會出現右圖情況；注意右圖是左圖的對稱，所以它們的  $f_x/f_y$  相同。

## 【評語】 080120

1. 實驗結果的呈現佳。
2. 數據的誤差頗小(約百分之一)值得鼓勵。