# 中華民國第 51 屆中小學科學展覽會

# 作品說明書

---

高中組　數學科

## 最佳(鄉土)教材獎

040422

## 擋得住的魅力—看你往哪逃

學校名稱：國立臺南第一高級中學

| 作者： | 指導老師： |
| --- | --- |
| 高二 鄭力瑋<br>高二 吳尚平<br>高二 凌　誠 | 陳盈言 |


關鍵詞：圖論、阻隔點

# 擋得住的魅力－看你往哪逃

## 摘要

所謂的阻隔點是指將圖上的點標記，而該標記可使其他點無法與之連線。我們將研究『在圖 $A$ 中欲使其子圖 $B$ 不存在所需的最少阻隔點數。』其中討論的圖 $A$、圖 $B$ 爲完全圖 $K_m$、完全二分圖 $K_{m.n}$、圈圖 $C_m$、路徑圖 $P_m$ 及其組合。

研究結果爲：

一、推導出『在圖 $K_m$、圖 $C_m$、圖 $P_m$、圖 $K_{m.n}$ 中使圖 $K_x$、圖 $C_x$、圖 $P_x$、圖 $K_{x.y}$ 不存在』這十六種組合所需最少阻隔點數的一般式。

二、『在圖 $K_m * P_q$ 中使圖 $C_x$ 不存在』中發現，當 $x-m>2$ 時，圖 $K_m * P_q$ 中的阻隔點數需逐層討論。當 $x-m\le 2$ 時，圖 $K_m * P_q$ 中最少阻隔點數的擺法爲『使每層 $K_m$ 的點數小於 $x$ 且任相鄰兩不同層 $K_m$ 上的點間最多存在一連通路徑』。

三、『在圖 $K_{m.n} * P_q$ 中使圖 $C_x$ 不存在』中發現，欲使阻隔點總數最少，需將阻隔點放在 $K_{m.n}$ 的短邊且隨著 $n$ 與 $x$ 值不同，阻隔點的擺法有其規則。

四、『在圖 $P_m * P_q$ 中使圖 $C_x$ 不存在』中，$x=4$ 時，可以分割方式得到阻隔點的擺法。在 $x=6$ 時，改以固定 $q$ 值討論橫線上的連通路徑方式討論阻隔點數。

# 壹、研究動機

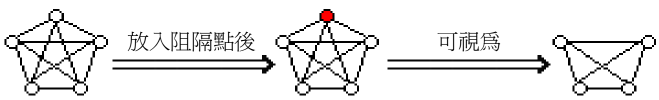
2009 年 *TRML* 思考賽試題如下：

『$P_r$ 表$1\times r$的棋盤，對於$m\times n$棋盤中的$A$圖形，以$b(m,n,A)$表示最小非負整數$k$，使得在$m\times n$棋盤中可找出$k$個格子組成的集合$B$，滿足任何一個與$A$同構的圖形都與$B$至少有一個共同的格子，則此集合$B$稱為$A$阻隔集，例如$b(2,2,P_2)=2$，試求$b(m,n,P_r)$之值。』

該題是在討論$m\times n$棋盤中使圖形$P_r$不存在所需的最少阻隔點數。我們覺得很有趣，在老師的建議下，將$m\times n$棋盤改為圖論中某些圖形進行研究。

# 貳、研究目的與問題

所謂阻隔點是指將圖上的點標記，而該標記可阻擋其他點與之連線。例如：




我們將研究

一、在圖$K_m$、圖$C_m$、圖$P_m$、圖$K_{m.n}$中使圖$K_x$、圖$C_x$、圖$P_x$、圖$K_{x.y}$不存在所需的最少阻隔點數。

二、在圖$K_m*P_q$、圖$K_{m.n}*P_q$、圖$P_m*P_q$中使圖$C_x$不存在所需的最少阻隔點數。

# 參、研究器材

紙、筆、電腦

# 肆、研究過程

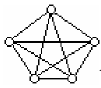
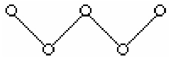
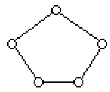
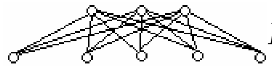
一、定義和符號

（一）定義一

1. 圖$G$是由一些點及一些連接兩點的邊所形成，圖$G$的點所形成的集合，稱為點集，記作$V_G$；圖$G$的邊所形成的集合，稱為邊集，記作$E_G$。
   （1）圖$G$中連接點$v_i$與點$v_j$的邊記作$e_{v_i,v_j}$。
   （2）$d_G(v_i)$：設$v_i$是圖$G$中的一個點，以點$v_i$為一端點的邊之個數，記作$d_G(v_i)$。
2. 圖中若限制兩點間最多連一個邊，這樣的圖稱為簡單圖，本文中討論的都是簡單圖。
   （1）完全圖$K_m$：具有$m$個點且任兩點彼此間相連的圖稱為完全圖$K_m$（$m\ge 4$），如圖$K_5$。
   （2）路徑圖$P_m$：$m$個點視為編號$1\sim m$，由點1、2、3…至$m$依序連線，每個點恰經過一次，點 1、$m$不相連，稱為路徑圖$P_m$（$m\ge 2$），如圖$P_5$。
   （3）圈圖$C_m$：$m$個點視為編號$1\sim m$，由點1、2、3…至$m$依序連線，每個點恰經

過一次，點 1、$m$ 相連使起點與終點相同，稱爲圈圖 $C_m$（$m \geq 3$），如圖 $C_5$。

（4）完全二分圖 $K_{m.n}$：將 $(m+n)$ 個點分成 $m$ 個點、$n$ 個點兩組（其中 $m \geq n,\ m \geq 3,\ n \geq 1$），不同組間任兩點彼此相連，但同組間的點皆不相連，稱爲完全二分圖 $K_{m.n}$，如圖 $K_{5.3}$。其中同組的 $m$ 個點稱爲長邊上的點，記以 $v_{m_i}\ (\forall i = 1 \sim m)$；同組的 $n$ 個點稱爲短邊上的點，記以 $v_{n_j}\ (\forall j = 1 \sim n)$。


$K_5$

$P_5$

$C_5$

$K_{5.3}$

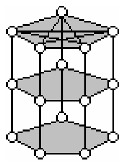
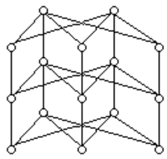
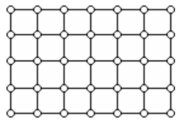
3. 圖 $A$ 中存在圖 $B$（即圖 $B$ 是圖 $A$ 的子圖）$\Leftrightarrow V_B \subset V_A$，$E_B \subset E_A$。
4. $f(A,B)$：在圖 $A$ 上使圖 $B$ 不存在所需的最少阻隔點個數。

（二）定義二

1. 圖 $A * B$：在圖 $A * B$ 中兩點 $(u,u')$ 與 $(v,v')$ 相連 $\Leftrightarrow$

   (1) $u = v$ 且 $u',v'$ 在圖形 $B$ 中相連；(2) $u' = v'$ 且 $u,v$ 在圖形 $A$ 中相連。

   如圖：

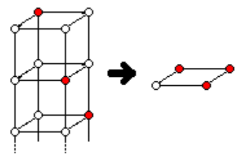

$K_5 * P_3$

$K_{3.2} * P_3$

$P_7 * P_5$

(爲整齊後以灰色色塊代表 $K_m$ 之連線)

2. $V_{K_m} = \{v_i \mid \forall i = 1 \sim m\}$，$V_{P_q} = \{u_j \mid \forall j = 1 \sim q\}$，則

   $V_{K_m} \times V_{P_q} = V_{K_m * P_q} = \{(v_i, u_j) \mid v_i \in V_{K_m}, u_j \in V_{P_q}\}$。

3. 投射：在 $A * P_q$ 圖中，將數個圖 $A$ 相對位置上的阻隔點對應到單層的圖 $A$ 上所呈現出的結果，例如：



二、研究步驟

（一）依序討論在圖 $K_m$、圖 $C_m$、圖 $P_m$、圖 $K_{m.n}$ 中分別使圖 $K_x$、圖 $C_x$、圖 $P_x$、圖 $K_{x.y}$ 不存在的各種情形。

| |
|---|
| **引理 1**：設 $\lvert V_A \rvert$ 表集合 $V_A$ 中的元素個數，若 $\lvert V_A \rvert < \lvert V_B \rvert$，則 $f(A,B) = 0$ |

【證明】

若 $\lvert V_A \rvert < \lvert V_B \rvert$，則 $V_B \not\subset V_A \Rightarrow$ 圖 $A$ 中不存在圖 $B$ $\therefore f(A,B) = 0$

1. 圖 $K_m$ 中

| |
|---|
| **引理 2**： |
| 2_1　$m \geq x$ 時，圖 $K_m$ 中任取 $x$ 個點，則存在圖 $K_x$、圖 $C_x$ 或圖 $P_x$。 |
| 2_2　$m \geq x + y$ 時，圖 $K_m$ 中任取 $(x+y)$ 個點，則存在圖 $K_{x.y}$。 |

【證明】

$m \ge x$時，圖$K_m$中任取$x$個點當作圖$K_x$之點，令其爲$v_1, v_2, ..., v_x$，則$V_{K_x} \subset V_{K_m}$，

$\because d_{K_x}(v_i) = x-1 \le d_{K_m}(v_i) = m-1 \quad \forall i = 1 \sim x$ 且 $e_{v_i,v_j} \in E_{K_m} \ \forall i, j = 1 \sim x \quad i \ne j$

$\Rightarrow E_{K_x} \subset E_{K_m}$，故圖$K_m$中存在圖$K_x$。

同理可得$C_x$、$P_x$及$K_{x.y}$之情形。

| |
|---|
| **結論一：**<br>（1）$f(K_m, K_x) = \begin{cases} m-x+1 & m \ge x \\ 0 & m < x \end{cases}$<br>$f(K_m, C_x) = \begin{cases} m-x+1 & m \ge x \\ 0 & m < x \end{cases}$<br>$f(K_m, P_x) = \begin{cases} m-x+1 & m \ge x \\ 0 & m < x \end{cases}$<br>（2）$f(K_m, K_{x.y}) = \begin{cases} m-(x+y)+1 & m \ge x+y \\ 0 & m < x+y \end{cases}$ |

【證明】

$m \ge x$時，欲使圖$K_m$中不存在圖$K_x$，由引理 2_1 知，需使圖$K_m$中的點數小於$x$，即圖$K_m$中的阻隔點數至少需$(m-x+1)$個。

$m < x$時，由引理 1 得證。

同理可得圖$C_x$、圖$P_x$及圖$K_{x.y}$之情形。

2. 圖$C_m$中

| |
|---|
| **引理 3：** 若圖$C_m$中存在圖$C_x$，則$m = x$。 |

【證明】

若$m < x$，則$V_{C_x} \not\subset V_{C_m}$

若$m > x$，圖$C_m$中任取連續相連的$x$個點當作圖$C_x$之點，令其爲$v_1, v_2, ..., v_x$，

$\because e_{v_x,v_1} \notin E_{C_m} \quad \Rightarrow E_{C_x} \not\subset E_{C_m}$

故$m \ne x$，圖$C_m$中不存在圖$C_x$。

| |
|---|
| **引理 4：**<br>4_1 $m \ge x$時，圖$C_m$中任取連續相連的$x$個點，則存在圖$P_x$。<br>4_2 $m \ge x$時，圖$P_m$中任取連續相連的$x$個點，則存在圖$P_x$。 |

【證明】

$m \ge x$時，圖$C_m$中任取連續相連的$x$個點當作圖$P_x$之點，令其爲$v_1, v_2, ..., v_x$，則$V_{P_x} \subset V_{C_m}$

$\because d_{P_x}(v_i) \le d_{C_m}(v_i) = 2 \quad \forall i = 1 \sim x$ 且$e_{v_i,v_{i+1}} \in E_{C_m} \quad \forall i = 1 \sim x-1 \quad \Rightarrow E_{P_x} \subset E_{C_m}$，

故圖$C_m$中存在圖$P_x$。

同理可得圖$P_m$中之情形。

結論二：

（1） $f(C_m, K_x) = 0$

（2） $f(C_m, C_x) = \begin{cases} 1 & m = x \\ 0 & m \neq x \end{cases}$

（3） $f(C_m, P_x) = \begin{cases} \frac{m}{x} & m \geq x, x \mid m \\ [\frac{m}{x}]+1 & m \geq x, x \nmid m \\ 0 & m < x \end{cases}$ （其中[ ]：表高斯符號）

（4） $f(C_m, K_{x.y}) = 0$

【證明】

（1） $\because d_{C_m}(v_i) = 2 \quad \forall i = 1 \sim m$ ， $d_{K_x}(v_i) = x - 1 \geq 3 \Rightarrow E_{K_x} \not\subset E_{C_m}$ ，故圖 $C_m$ 中不存在圖 $K_x$ 。

（2）由引理 3 知，圖 $C_m$ 中存在圖 $C_x$ ，只在 $m = x$ 成立，故 $f(C_m, C_x) = \begin{cases} 1 & m = x \\ 0 & m \neq x \end{cases}$ 。

（3）若 $m \geq x$ ，由引理 4_1 知，圖 $C_m$ 中欲使圖 $P_x$ 不存在，需使任連續兩個阻隔點間的點數小於 $x$ ，即圖 $C_m$ 中至少每隔 $(x-1)$ 個點要放一阻隔點。故 $x \mid m$ 時，至少需 $\frac{m}{x}$ 個阻隔點； $x \nmid m$ 時,至少需 $(\left[\frac{m}{x}\right]+1)$ 個阻隔點。

若 $m < x$ ，由引理 1 得證。

（4）圖 $K_{x.y}$ 中， $\exists v_i \ni d_{K_{x.y}}(v_i) = x \geq 3$ ， 但 $d_{C_m}(v_i) = 2 \quad \forall i = 1 \sim m \quad \Rightarrow E_{K_{x.y}} \not\subset E_{C_m}$ ，故圖 $C_m$ 中不存在圖 $K_{x.y}$ 。

3. 圖 $P_m$ 中

結論三：

（1） $f(P_m, K_x) = 0$ ； $f(P_m, K_{x.y}) = 0$

（2） $f(P_m, C_x) = 0$

（3） $f(P_m, P_x) = \begin{cases} [\frac{m}{x}] & m \geq x \\ 0 & m < x \end{cases}$ （其中[ ]：表高斯符號）

【證明】

（1）令 $v_i \in V_{P_m} \quad \forall i = 1 \sim m$ 且 $d_{P_m}(v_1) = d_{P_m}(v_m) = 1$ ， $d_{P_m}(v_i) = 2 \quad \forall i = 2 \sim m-1$

$\because d_{K_x}(v_i) = x - 1 \geq 3 > d_{P_m}(v_i) \quad \Rightarrow E_{K_x} \not\subset E_{P_m}$ ，故圖 $P_m$ 中不存在圖 $K_x$ 。

同理可得圖 $P_m$ 中不存在圖 $K_{x.y}$ 。

（2）在圖 $P_m$ 中任取連續相連的 $x$ 個點當作圖 $C_x$ 之點，令其為 $v'_1, v'_2, \ldots, v'_x$ ，

$\because e_{v'_x, v'_1} \notin E_{P_m} \quad \Rightarrow E_{C_x} \not\subset E_{P_m}$ ，故圖 $P_m$ 中不存在圖 $C_x$ 。

（3）$m \geq x$ 時，由引理 4_2 知，圖 $P_m$ 中欲使圖 $P_x$ 不存在，需使任連續兩個阻隔點間點數小於 $x$。若阻隔點總數要最少，即從距一端點第 $x$ 個點放一阻隔點，之後每間隔 $(x-1)$ 個點再放一個阻隔點，直到與另一端點之點數小於 $x$，故圖 $P_m$ 中至少需 $\left\lfloor \frac{m}{x} \right\rfloor$ 個阻隔點。

$m < x$ 時，由引理 1 得證。

4. 圖 $K_{m.n}$ 中

> 引理 5：
>
> 5_1 圖 $K_{m.n}$ 中不存在圖 $K_x$。
>
> 5_2 若圖 $K_{m.n}$ 中存在圖 $C_x$，則 $x$ 爲偶數且 $C_x$ 的點在 $K_{m.n}$ 之長、短邊上各有 $\frac{x}{2}$ 個點。
>
> 5_3 若圖 $K_{m.n}$ 中存在圖 $P_x$，則 $m+n \geq x$ 且 $P_x$ 的點在 $K_{m.n}$ 之短邊上至少 $[\frac{x}{2}]$ 個點。

【證明】

若 $e_{v_i,v_j} \in E_{K_{m.n}}$ 且 $v_i$ 爲長邊上的點，則 $v_j$ 必爲短邊上的點。因此若用兩色去染圖 $K_{m.n}$ 中的點使得任一邊的兩端點異色，則圖 $K_{m.n}$ 長邊上的點同爲一色，短邊上的點亦同爲另一色。

（1）在圖 $K_{m.n}$ 中任取 $x(x \geq 4)$ 個點，則必存在至少兩點 $v_s, v_t$ 爲同一色，因此 $e_{v_s,v_t} \notin E_{K_{m.n}} \quad \Rightarrow E_{K_x} \not\subset E_{K_{m.n}}$，故圖 $K_{m.n}$ 中不存在圖 $K_x$。

（2）圖 $K_{m.n}$ 中若存在圖 $C_x$，則圖 $C_x$ 中的點必爲二色相間，又因起點、終點爲同一點，故圖 $C_x$ 中只能有偶數個點且長、短邊上的點各有 $\frac{x}{2}$ 個。

（3）由引理 1 知，若 $m+n < x$，則圖 $K_{m.n}$ 中不存在圖 $P_x$；故圖 $K_{m.n}$ 中若存在圖 $P_x$，則 $m+n \geq x$ 且圖 $P_x$ 中的點必爲二色相間。

即 $x$ 爲奇數時，圖 $P_x$ 中在 $K_{m.n}$ 之短邊上的點爲 $[\frac{x}{2}]$ 或 $[\frac{x}{2}]+1$ 個；$x$ 爲偶數時，圖 $P_x$ 中在 $K_{m.n}$ 之短邊上的點爲 $\frac{x}{2}$ 個。

> 結論四：
>
> （1）$f(K_{m.n}, K_x) = 0$
>
> （2）$f(K_{m.n}, C_x) = \begin{cases} n - \frac{x}{2} + 1 & x\text{爲偶數且}n \geq \frac{x}{2} \\ 0 & \text{其餘} \end{cases}$
>
> （3）$f(K_{m.n}, P_x) = \begin{cases} n - [\frac{x}{2}] + 1 & m+n \geq x\text{且}n \geq [\frac{x}{2}] \\ 0 & \text{其餘} \end{cases}$ （其中[ ]：表高斯符號）
>
> （4）$f(K_{m.n}, K_{x.y}) = \begin{cases} n - x + 1 & n \geq x, m - x \geq n - y \\ m + n - 2x + 2 & n \geq x, m - x < n - y \\ \min\{m - x + 1, n - y + 1\} & n < x \end{cases}$

【證明】

（1）由引理 5_1 知， $f(K_{m.n},K_x)=0$ 。

（2）由引理 5_2 知，若圖 $K_{m.n}$ 之長、短邊上的點數至少有一邊小於 $\frac{x}{2}$ ，則圖 $K_{m.n}$ 中不存在圖 $C_x$ ，故至少需 $(n-\frac{x}{2}+1)$ 個阻隔點。

（3）由引理 5_3 知，當 $m+n\geq x$ 且 $n\geq[\frac{x}{2}]$ 時，若 $K_{m.n}$ 之短邊上的點數小於 $\left[\frac{x}{2}\right]$ ，則圖 $K_{m.n}$ 中不存在圖 $P_x$ ，故至少需 $(n-[\frac{x}{2}]+1)$ 個阻隔點。

（4）當 $m<x$ 或 $n<y$ 時，由引理 1 知，圖 $K_{m.n}$ 中不存在圖 $K_{x.y}$ ，因此考慮 $m\geq x,n\geq y$ 的情況。

Case1. $n\geq x$ ，

令條件一：『圖 $K_{m.n}$ 之長邊上的點數小於 $x$ 』或『圖 $K_{m.n}$ 之短邊上的點數小於 $y$ 』，此時所需的最少阻隔點數為 $\min\{(m-x+1),(n-y+1)\}$ 。

條件二：『圖 $K_{m.n}$ 之長邊上的點數小於 $y$ 』或『圖 $K_{m.n}$ 之短邊上的點數小於 $x$ 』，此時所需的最少阻隔點數為 $\min\{(m-y+1),(n-x+1)\}=n-x+1$ 。

若在『圖 $K_{m.n}$ 之長邊、短邊上分別任取 $x$ 、 $y$ 個點』或『圖 $K_{m.n}$ 之長邊、短邊上分別任取 $y$ 、 $x$ 個點』，則圖 $K_{m.n}$ 中存在圖 $K_{x.y}$ 。故欲使圖 $K_{m.n}$ 中不存在圖 $K_{x.y}$ ，需條件一與條件二均成立，因此

①若 $\min\{(m-x+1),(n-y+1)\}=n-y+1$ ，則需 $(n-x+1)$ 個阻隔點。

②若 $\min\{(m-x+1),(n-y+1)\}=m-x+1$ ，則需 $(m+n-2x+2)$ 個阻隔點。

Case2. $n<x$ ，

若在『圖 $K_{m.n}$ 之長邊、短邊上分別任取 $x$ 、 $y$ 個點』，則圖 $K_{m.n}$ 中存在圖 $K_{x.y}$ 。因此使圖 $K_{m.n}$ 中不存在圖 $K_{x.y}$ 所需的最少阻隔點數為 $\min\{(m-x+1),(n-y+1)\}$ 。

（二）討論在圖 $K_m*P_q$ 中使圖 $C_x$ 不存在所需的最少阻隔點數

1. $x=3$ 時

圖 $K_m*P_q$ 中若有圖 $C_3$ 存在，則 $C_3\subset K_m$ 。由 $f(K_m,C_x)=m-x+1$ 知，圖 $K_m*P_q$ 中欲使圖 $C_3$ 不存在，需在每層 $K_m$ 上放 $(m-2)$ 個阻隔點，如圖 1-1，故：

$$\boxed{f(K_m*P_q,C_3)=q(m-2)}$$

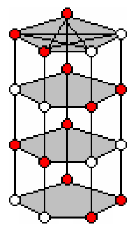


圖 1-1

【證明】

若 $f(K_m*P_q,C_3)=l<q(m-2)$ ，由平均原理知，必有一層 $K_m$ 上的阻隔點數小於 $(m-2)$ 。由 $f(K_m,C_3)=m-2$ 知，此時必有一 $C_3$ 存在。

2. $4\leq x\leq 8$ 時

圖 $K_m*P_q$ 中若有圖 $C_x$ 存在，需考慮單層上的 $C_x$ 及跨層的 $C_x$ ，如圖 1-2。

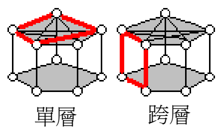


圖 1-2

**引理 6：** 圖 $K_m * P_q$ 中若有跨層的圖 $C_x$，則存在相鄰兩不同層 $K_m$ 上的點間至少有兩條連通路徑。

【證明】

若 $C_x \subset K_m * P_q$，但 $C_x \not\subset K_m$，設 $(v_i,u_r) \in V_{K_m * P_q}$，此時與 $(v_i,u_r)$ 相連的點爲 $(v_t,u_r)$ $\forall t = 1 \sim m$ 與 $(v_i,u_{r-1})$ 、$(v_i,u_{r+1})$ 。因 $C_x$ 是起點與終點爲同一點的路徑，故若此路徑存在一邊由點 $(v_i,u_r) \to$ 點 $(v_i,u_{r+1})$ 時，必存在另一邊使此路徑由點 $(v_s,u_{r+1}) \to$ 點 $(v_s,u_r)$ 。

由引理 6 知，若相鄰兩不同層 $K_m$ 上的點間最多存在一條連通路徑，則圖 $K_m * P_q$ 中不存在跨層的圖 $C_x$，因此可得下列引理：

**引理 7：** $x - m \le 2$ 時，圖 $K_m * P_q$ 中使跨層的圖 $C_x$ 不存在所需最少阻隔點數的唯一方法：『使任相鄰兩不同層 $K_m$ 上的點間最多存在一連通路徑』。

【證明】

圖 $K_m * P_q$ 中欲使跨二層的圖 $C_x$ 不存在的方法有：（1）使相鄰兩層 $K_m$ 上最多共留下 $(x-1)$ 個點，此時該兩層 $K_m$ 上至少共需 $(2m - x + 1)$ 個阻隔點。（2）使相鄰兩不同層 $K_m$ 的點間最多一連通路徑，此時該兩層 $K_m$ 至少需 $(m-1)$ 個阻點。 $x - m \le 2$ 時，則 $2m - x + 1 \ge m - 1$ ，故最少阻隔點數的方法爲『使任相鄰兩不同層 $K_m$ 上的點間最多存在一連通路徑』。

Check: 方法的唯一性

考慮存在相鄰兩不同層 $K_m$ 上有兩條連通路徑的情形，令其第 $r$ 與 $r+1$ 層 $K_m$ ，

（I）欲証若該兩層阻隔點總數不變，則必有 $C_x$ 存在：

設該兩層 $K_m$ 上的阻隔點總數仍爲 $(m-1)$ ，$\because 2m - (m-1) \ge x$ ，故存在一圖 $C_x$ 。

（II）欲証若存在擺法使圖 $K_m * P_q$ 中跨層的圖 $C_x$ 不存在，則所需阻隔點數>$(m-1)$：

此時若第 $r$ 與 $r+1$ 層 $K_m$ 上的點數≧ $x$ ，則存在 $C_x$，故阻隔點數至少 $(2m - x + 1)$ ，但 $2m - x + 1 > m - 1$ 。

因此欲使跨二層的圖 $C_x$ 不存在所需最少阻隔點數的唯一方法爲『使任相鄰兩不同層 $K_m$ 上的點間最多存在一連通路徑』。而採此方法的同時，跨三層以上的圖 $C_x$ 亦不存在。故圖 $K_m * P_q$ 中使跨層的圖 $C_x$ 不存在所需最少阻隔點數的唯一方法爲『使任相鄰兩不同層 $K_m$ 上的點間最多存在一連通路徑』。

**定理一：** $x - m \le 2$ 時，圖 $K_m * P_q$ 中使圖 $C_x$ 不存在所需最少阻隔點數的唯一方法：

（1）若 $m \ge x$，則每層 $K_m$ 上至少放 $(m - x + 1)$ 個阻隔點且需使任相鄰兩不同層 $K_m$ 上的點間最多存在一連通路徑。

（2）若 $m < x$ ，則任相鄰兩層 $K_m$ 上共放 $(m-1)$ 個阻隔點且使任相鄰兩不同層 $K_m$ 上的點間最多存在一連通路徑。

【證明】$x-m\le 2$時，

（1）若$m\ge x$，由引理 2_1 知，圖$K_m$中有單層的圖$C_x$存在，由$f(K_m,C_x)=m-x+1$知，欲使單層的圖$C_x$不存在，每層$K_m$上至少需$(m-x+1)$個阻隔點。由引理 7 知，欲使跨層的圖$C_x$不存在所需的最少阻隔點數的唯一方法為『使相鄰兩不同層$K_m$上的點間最多存在一連通路徑』。故圖$K_m*P_q$中使圖$C_x$不存在所需最少阻隔點數的方法為『每層$K_m$上至少放$(m-x+1)$個阻隔點且使任相鄰兩不同層$K_m$上的點間最多存在一連通路徑』。

Check: 方法的唯一性

（I）若存在一$K_m$上的阻隔點數$<(m-x+1)$，則出現單層的圖$C_x$。

（II）考慮存在第$r$與$r+1$層$K_m$上有兩條連通路徑的情形

①欲証若該兩層阻隔點總數不變，則必有$C_x$存在：

Case1. 設圖$K_m*P_q$中於第$r$、$r+1$層$K_m$上的阻隔點數分別為$(m-x+1)$、$(x-2)$，此時該兩層$K_m$尚有$(m+1)$個點，$\because m+1\ge x$，故存在一圖$C_x$。

Case2. 設圖$K_m*P_q$中於第$r$與$r+1$層$K_m$上的阻隔點數皆為$(m-x+1)$，此時該兩層$K_m$尚有$2(x-1)$個點，$\because 2(x-1)\ge x$，故存在一圖$C_x$。

②欲証若存在擺法使圖$K_m*P_q$中的圖$C_x$不存在，則該兩層$K_m$所需阻隔點數$>2(m-x+1)$：

設圖$K_m*P_q$中於第$r$與$r+1$層$K_m$上的阻隔點數分別為$a$、$b$ $(m-x+1\le a,b\le m)$，此時若$a+b<2m-x+1$，則存在一圖$C_x$。因此$a+b\ge 2m-x+1$，但$2m-x+1>2(m-x+1)$。

（2）若$m<x$，由引理 2_1 知僅考慮跨層的圖$C_x$。由引理 7 知，欲使跨層的圖$C_x$不存在所需最少阻隔點數的唯一方法為『使任相鄰兩不同層$K_m$上的點間最多存在一連通路徑』，故任相鄰兩層$K_m$上共放$(m-1)$個阻隔點。

至於$x-m\ge 2$時，圖$K_m*P_q$中的阻隔點數需逐層討論。

因此圖$K_m*P_q$中使圖$C_x(x=4\sim 8)$不存在所需最少阻隔點數如下：

（1）圖$K_m*P_q$中使圖$C_4$不存在

$m=4$時，奇數層$K_4$放 1 個阻隔點，偶數層$K_4$放 2 個阻隔點，如圖 1-3。

$m\ge 5$時，各層$K_m$需$(m-3)$個阻隔點，如圖 1-4。

故得

$m=4$時，$f(K_4*P_q,C_4)=3[\frac{q}{2}]+\begin{cases}1 & q\text{為奇數}\\ 0 & q\text{為偶數}\end{cases}$ （其中［ ］：表高斯符號）

$m\ge 5$時，$f(K_m*P_q,C_4)=q(m-3)$

（2）圖$K_m*P_q$中使圖$C_5$不存在

$m=4$時，奇數層$K_4$不放阻隔點，偶數層$K_4$放 3 個阻隔點，如圖 1-5。

$m=5$時，奇數層$K_5$放 1 個阻隔點且偶數層$K_5$放 3 個阻隔點，如圖 1-6。

$m=6$時，奇數層$K_6$放 2 個阻隔點且偶數層$K_6$放 3 個阻隔點，如圖 1-7。

$m \geq 7$ 時，各層 $K_m$ 需 $(m-4)$ 個阻隔點，如圖 1-8。

故得

| |
|---|
| $m=4,5,6$ 時， |
| $f(K_m * P_q, C_5) = (m-1)[\frac{q}{2}] + \begin{cases} (m-4) & q\text{為奇數} \\ 0 & q\text{為偶數} \end{cases}$ （其中 [ ]：表高斯符號） |
| $m \geq 7$ 時， $f(K_m * P_q, C_5) = q(m-4)$ |

（3）圖 $K_m * P_q$ 中使圖 $C_6$ 不存在

$m=4$ 時，奇數層 $K_4$ 不放阻隔點，偶數層 $K_4$ 放 3 個阻隔點，如圖 1-9。

$m=5$ 時，奇數層 $K_5$ 不放阻隔點，偶數層 $K_5$ 放 4 個阻隔點，如圖 1-10。

$m=6,7,8$ 時，奇數層 $K_m$ 需 $(m-5)$ 個阻隔點且偶數層 $K_m$ 需 4 個阻隔點，如圖 1-11。

$m \geq 9$ 時，各層 $K_m$ 需 $(m-5)$ 個阻隔點，如圖 1-12。

故得

| |
|---|
| $m=4,5$ 時， $f(K_m * P_q, C_6) = (m-1)[\frac{q}{2}]$ |
| $m=6,7,8$ 時， $f(K_m * P_q, C_6) = (m-1)[\frac{q}{2}] + \begin{cases} m-5 & q\text{為奇數} \\ 0 & q\text{為偶數} \end{cases}$ |
| $m \geq 9$ 時， $f(K_m * P_q, C_6) = q(m-5)$ |
| （其中 [ ]：表高斯符號） |

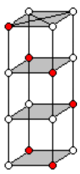


圖 1-3

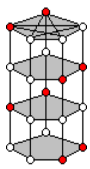


圖 1-4

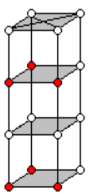


圖 1-5

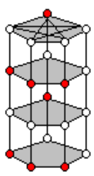


圖 1-6

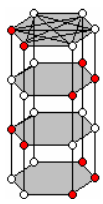


圖 1-7

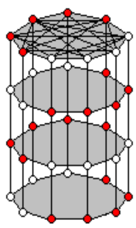


圖 1-8

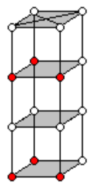


圖 1-9

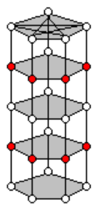


圖 1-10

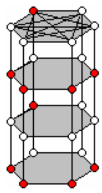


圖 1-11

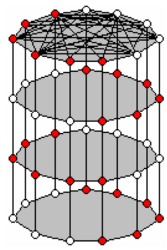


圖 1-12

（4）圖 $K_m * P_q$ 中使圖 $C_7$ 不存在

$m=4$ 時，$\because x-m>2$，故逐層討論。

任相鄰兩層 $K_4$ 中欲阻擋 $C_7$，至少需 2 個阻隔點，故其阻隔點數分別為 0,2 或 1,1 兩種情形。而任相鄰三層 $K_4$ 中若存在跨三層 $C_7$，則跨層連通路徑有 2 種，如圖 1-13。故欲阻擋跨三層 $C_7$ 有兩種方法：①任相鄰三層 $K_4$ 之阻隔點投射後無空格②任相鄰三層中，其中一相鄰兩層 $K_4$ 阻隔點投射後剩1空格。

以下各層 $K_4$ 上的阻隔點，先考慮相鄰兩層後再考慮相鄰三層的情形。第一、二層 $K_4$ 分別放 0、2 個阻隔點，比較方法①②，第三層放1個阻隔點，使二、三層阻隔點投射後剩1空格。第四層至少放1個阻隔點，比較方法①②，放1個阻隔點。第五層至少放1個阻隔點，比較方法①②，放 2 個阻隔點，使四、五層阻隔點投射後剩1空格。第六層比較方法①②，可不放阻隔點。第七層至少放 2 阻隔點，比較方法①②，放 2 個阻隔點，使五、六、七層阻隔點投射後無空格。

故得各層阻隔點數之有序列爲 $\{0,2,1,1,2,0,2,1,1,2,\cdots\}$ $(0,2,1,1,2$ 爲一循環)。如圖 1-14

$m=5$ 時，奇數層 $K_5$ 不放阻隔點，偶數層 $K_5$ 放 4 個阻隔點，如圖 1-15。
$m=6$ 時，奇數層 $K_6$ 不放阻隔點，偶數層 $K_6$ 放 5 個阻隔點，如圖 1-16。
$m=7,8,9,10$，奇數層 $K_m$ 需 $(m-6)$ 個阻隔點且偶數層 $K_m$ 需 5 個阻隔點，如圖 1-17。
$m\ge 11$，各層 $K_m$ 需 $(m-6)$ 個阻隔點，如圖 1-18。

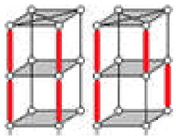


圖 1-13

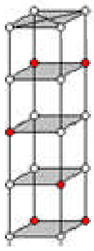


圖 1-14

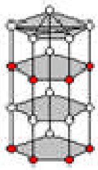


圖 1-15

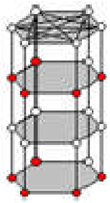


圖 1-16

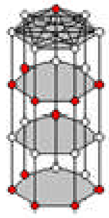


圖 1-17

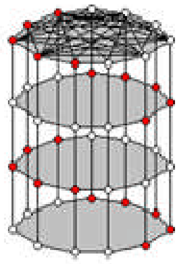


圖 1-18

故得

$m=4$ 時，$f(K_4 * P_q, C_7)=\begin{cases} 2 & q=2 \\ 3 & q=3 \\ 4[\frac{q}{3}] & q=3k+1, k\ge 1 \\ 4[\frac{q}{3}]+2 & q=3k+2, k\ge 1 \\ 4[\frac{q}{3}]-2 & q=3k, k\ge 2 \end{cases}$ （其中 [ ]：表高斯符號）

$m=5,6$ 時，$f(K_m * P_q, C_7)=(m-1)[\frac{q}{2}]$

$m=7,8,9,10$ 時，$f(K_m * P_q, C_7)=(m-1)[\frac{q}{2}]+\begin{cases} m-6 & q\text{爲奇數} \\ 0 & q\text{爲偶數} \end{cases}$

$m\ge 11$ 時，$f(K_m * P_q, C_7)=q(m-6)$

（5）圖 $K_m * P_q$ 中使圖 $C_8$ 不存在

$m=4$ 時，$\because x-m>2$，故逐層討論。

任相鄰二層 $K_4$ 中欲阻擋 $C_8$，至少需1個阻隔點。任相鄰三層 $K_4$ 中若存在跨三層 $C_7$，則跨層連通路徑有3種，如圖 1-19。考慮第 $r,r+1,r+2$ 層 $K_4$：①第 $r,(r+1)$ 與 $(r+1),(r+2)$ 層間各有兩條跨二層的連通路徑。 ②有一條跨三層的連通路徑及第 $r,(r+1)$ 與 $(r+1),(r+2)$ 層間各有一條跨二層的連通路徑，且第 $r,(r+1),(r+2)$ 層至少還有1空格。 ③有兩條跨二層的連通路徑，且第 $r,(r+2)$ 層至少還有 2 空格。

以下各層 $K_4$ 上的阻隔點，先考慮相鄰兩層後再考慮相鄰三層。
第一、二層分別放 0、1 個阻隔點。第三層放 2 個阻隔點，使第二、三層阻隔點投射後剩一空格。第四層不放阻隔點。第五層放 2 個阻隔點，使三、四、五層阻隔點投射後剩 2 空格。第六層放1個阻隔點，使第五、六層阻隔點投射後剩1空

格。第七層不放阻隔點。第八層放3個阻隔點。第九層不放阻隔點。第十層放2個阻隔點。故得各層阻隔點數之有序列為：$\{0,1,2,0,2,1,0,3,0,1,2,0,2,1,0,3,\cdots\}$ $(0,1,2,0,2,1,0,3$為一循環) 。如圖 1-20。

$m=5$時，$\because x-m>2$ ，故逐層討論。

任相鄰兩層$K_5$中欲阻擋$C_8$，至少需3個阻隔點，故其阻隔點數分別為0,3或1,2兩種。而任相鄰三層$K_5$中若存在跨三層$C_8$ ，則跨層連通路徑有三種，如圖1-21。①第$r,(r+1)$與$(r+1),(r+2)$層間各有兩條跨二層的連通路徑。②有一條跨三層的連通路徑及第$r,(r+1)$與$(r+1),(r+2)$層間各有一條跨二層的連通路徑，且第$r,(r+1),(r+2)$層至少還有1空格。③有兩條跨二層的連通路徑，且第$r,(r+2)$層至少還有2空格。

以下各層$K_5$上的阻隔點，先考慮相鄰兩層後再考慮相鄰三層的情形。
第一、二層分別放 0、3 個阻隔點。第三層放1個阻隔點，使二、三層阻隔點投射後剩1空格。第四層放2個阻隔點。第五層放2個阻隔點，使第四、五層阻隔點投射後剩1空格。第六層放1個阻隔點。第七層放2個阻隔點。故得各層阻隔點數之有序列為：$\{0,3,1,2,2,1,2,2,\cdots\}$ $(1,2,2$為一循環) 。如圖 1-22。

$m=6,7$時，奇數層$K_m$不放阻隔點，偶數層$K_m$放$(m-1)$個阻隔點，如圖 1-23。
$m=8,9,10,11,12$時，奇數層$K_m$需$(m-7)$個阻隔點且偶數層$K_m$需 6 個阻隔點，如圖 1-24。
$m\geq 13$ ，各層$K_m$需$(m-7)$個阻隔點，如圖 1-25。

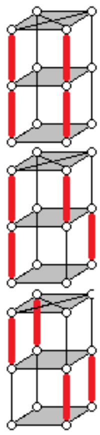


圖 1-19

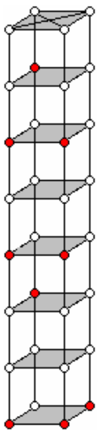


圖 1-20

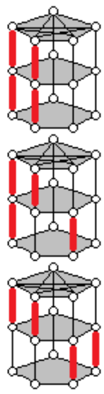


圖 1-21

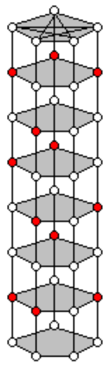


圖 1-22

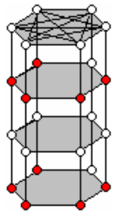


圖 1-23

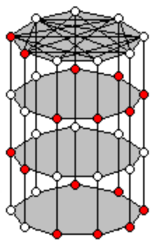


圖 1-24

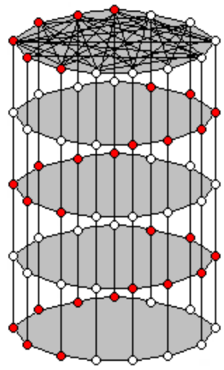


圖 1-25

故得

$$m=4\text{時，}\quad f(K_4*P_q,C_8)=9[\frac{q}{8}]+\begin{cases}0 & a=1\\1 & a=2\\3 & a=3\\3 & a=4\\5 & a=5\\6 & a=6\\6 & a=7\\0 & a=0\end{cases}\quad q\equiv a \mod 8$$

$m=5$時，$q=2$， $f(K_5*P_2,C_8)=3$

$q=3$， $f(K_5*P_3,C_8)=4$

$$q\ge 4，\quad f(K_5*P_q,C_8)=9[\frac{q}{5}]-1+\begin{cases}1 & a=1\\ 4 & a=2\\ 4 & a=3\\ 7 & a=4\\ 0 & a=5\end{cases}\quad q\equiv a \mod 5$$

$m=6,7$時，$f(K_m*P_q,C_8)=(m-1)[\frac{q}{2}]$

$m=8,9,10,11,12$時，$f(K_m*P_q,C_8)=(m-1)[\frac{q}{2}]+\begin{cases}m-7 & q\text{為奇數}\\ 0 & q\text{為偶數}\end{cases}$

$m\ge 13$時， $f(K_m*P_q,C_8)=q(m-7)$ （其中［ ］：表高斯符號）

（三）討論在圖$K_{m.n}*P_q$中使圖$C_x$不存在所需的最少阻隔點數

1. 若$x$為奇數，則$K_{m.n}*P_q$中不存在$C_x$，故$f(K_{m.n}*P_q,C_x)=0$。

【證明】

若用兩色去染圖$K_{m.n}*P_q$中的點使得任一邊的兩端點異色，此時圖$K_{m.n}*P_q$中若存在圖$C_x$，則圖$C_x$中的點必為二色相間且又起點、終點為同一點，故$x$必為偶數。

2. $x=4$時

圖$K_{m.n}*P_q$中可能有單層的圖$C_4$、跨二層的圖$C_4$，

引理 8.

8_1 $n\ge 2$，圖$K_{m.n}*P_q$中存在單層的圖$C_4$。

8_2 $n\ge 1$，圖$K_{m.n}*P_q$中存在跨二層的圖$C_4$。

【證明】

（1）$n\ge 2$，在某層$K_{m.n}$之長、短邊上各取 2 個點，即存在一單層的圖$C_4$。

（2）在第$r$與$r+1$層$K_{m.n}$間，取點$(v_{m_s},u_r)$、$(v_{m_s},u_{r+1})$、$(v_{n_t},u_{r+1})$、$(v_{n_t},u_r)$，即存在一跨二層的圖$C_4$。

**引理 9.** 圖$K_{m.n}*P_q$中欲使跨二層的圖$C_4$不存在所需最少阻隔點數的唯一方法：

『使任相鄰兩層$K_{m.n}$之短邊上的點間無連通的邊』。

【證明】

圖$K_{m.n}*P_q$中跨二層的圖$C_4$僅有一類，即相鄰兩層$K_{m.n}$間之長邊上的點及短邊上的點各有一連通的邊，如圖 2-1。因此欲使跨二層的圖$C_4$不存在，需使圖$K_{m.n}*P_q$中任相鄰兩層$K_{m.n}$間之長邊上的點或短邊上的點無連通的邊。而使兩層$K_{m.n}$間之長邊上的點無連通的邊，至少需$m$個阻隔點；使兩層$K_{m.n}$間之短邊上的點無連通的邊，至少需$n$個阻隔點。因$m\ge n$，故最少阻隔點數的方法為『使任兩層$K_{m.n}$之短邊上的點間無連通的邊』。

Check: 方法的唯一性

考慮存在相鄰兩層 $K_{m.n}$ 之短邊上的點至少有一連通的邊

（I）欲証若該兩層阻隔點總數不變，則必有 $C_4$ 存在：

設圖 $K_{m.n}*P_q$ 中第 $r$ 與 $r+1$ 層 $K_{m.n}$ 間之長邊、短邊上的阻隔點總數分別爲 $n-a$ 、$a$ $(0\le a<n)$，$\because m\ge n-a$，故此兩層 $K_{m.n}$ 間之長邊上的點至少有一連通的邊，即一圖 $C_4$ 存在。

（II）欲証若存在擺法使圖 $K_{m.n}*P_q$ 中跨二層的圖 $C_4$ 不存在，所需阻隔點≧ $n$ ：

設有一路徑由點 $(v_{n_t},u_r)\to$ 點 $(v_{n_t},u_{r+1})$，則不存在路徑使得點 $(v_{m_s},u_{r+1})\to$ 點 $(v_{m_s},u_r)$ ，此時需阻隔點數至少爲 $m$ ，但 $m\ge n$ 。

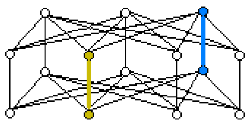


圖 2-1

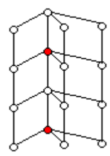


圖 2-2

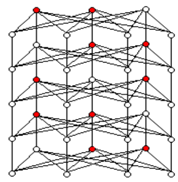


圖 2-3

**定理二**：圖 $K_{m.n}*P_q$ 中使圖 $C_4$ 不存在所需最少阻隔點數的唯一方法：

（1） $n=1$ 時，偶數層 $K_{m.n}$ 之短邊上放滿阻隔點，如圖 2-2。

（2） $n\ge 2$ 時，每層 $K_{m.n}$ 之短邊上放 $(n-1)$ 個阻隔點，採『使相鄰兩層 $K_{m.n}$ 之短邊上的阻隔點投射後無空格』的方式，如圖 2-3。

【證明】

（1） $n=1$ 時，由引理 8 知僅考慮跨二層的圖 $C_4$ 。由引理 9 知此阻隔點數最少的唯一方法爲『奇數層 $K_{m.n}$ 之短邊放滿阻隔點』或『偶數層 $K_{m.n}$ 之短邊放滿阻隔點』。因此使圖 $K_{m.n}*P_q$ 中阻隔點總數最少的唯一方法爲『偶數層 $K_{m.n}$ 之短邊放滿阻隔點』。

（2） $n\ge 2$ 時，由引理 8 知需考慮單層與跨二層的圖 $C_4$ 。由 $f(K_{m.n},C_x)=n-\frac{x}{2}+1$ 知，欲使單層的圖 $C_4$ 不存在，每層 $K_{m.n}$ 之短邊上至少需 $(n-1)$ 個阻隔點。

$\because 2(n-1)\ge n$ ，由引理 9 知，欲使跨二層的圖 $C_4$ 不存在，這些阻隔點採『使相鄰兩層 $K_{m.n}$ 之短邊上的阻隔點投射後無空格』。

Check: 方法的唯一性

（I）若存在某層 $K_{m.n}$ 之短邊上的阻隔點數 $<(n-1)$ ，則出現單層的圖 $C_4$ 。

（II）考慮第 $r$ 與 $r+1$ 層 $K_{m.n}$ 之短邊上的阻隔點投射後至少有一空格的情形，

①欲證若該兩層阻隔點總數不變，則必有 $C_4$ 存在：

設圖 $K_{m.n}*P_q$ 中每層 $K_{m.n}$ 之短邊上放 $(n-1)$ 個阻隔點，因 $K_{m.n}$ 之長邊上無阻隔點，故第 $r$ 與 $r+1$ 層 $K_{m.n}$ 間之短邊及長邊上各有一連通的邊，即存在一圖 $C_4$ 。

②欲證若存在擺法使圖 $K_{m.n}*P_q$ 中的圖 $C_4$ 不存在，則該兩層所需阻隔點故 $>2(n-1)$ ：因該兩層 $K_{m.n}$ 之長邊上無連通的邊，故至少需再有 $m$ 個阻隔點。但 $m+2(n-1)>2(n-1)$ 。

故得

$$f(K_{m.n}*P_q,C_4)=\begin{cases}[\frac{q}{2}] & n=1\\ q(n-1) & n\neq 1\end{cases}$$ （其中［ ］：表高斯符號）

3. $x=6$時

圖$K_{m.n}*P_q$中可能有單層的圖$C_6$、跨二層的圖$C_6$及跨三層的圖$C_6$，

**引理 10.**

10_1 $n\geq 3$，圖$K_{m.n}*P_q$中存在單層的圖$C_6$。

10_2 $n\geq 1$，圖$K_{m.n}*P_q$中存在跨二層及跨三層的圖$C_6$。

【證明】

（1）$n\geq 3$時，在某層$K_{m.n}$之長、短邊上各取 3 個點，則存在單層的圖$C_6$。

（2）$n\geq 1$時，若用黃、藍兩色將圖$K_{m.n}*P_q$中的點染色，使得各層$K_{m.n}$長邊上的點爲黃色，短邊上的點爲藍色。

依下列方式依序連結其點顏色及$P_q$坐標，可得跨二層的圖$C_6$。

Case1. $\boxed{黃(r)黃(r+1)}藍(r+1)\boxed{黃(r+1)黃(r)}藍(r)$

或 $\boxed{藍(r)藍(r+1)}黃(r+1)\boxed{藍(r+1)藍(r)}黃(r)$

Case2. $\boxed{黃(r)黃(r+1)}\ \boxed{藍(r+1)藍(r)}黃(r)藍(r)$

或 $\boxed{黃(r)黃(r+1)}藍(r+1)黃(r+1)\boxed{藍(r+1)藍(r)}$

依下方式依序連結其點顏色及$P_q$坐標，可得跨三層的圖$C_6$。

$\boxed{黃(r)\boxed{黃(r+1)}}\ \boxed{黃(r+2)}\ \boxed{\ 藍(r+2)\boxed{藍(r+1)}}\ \boxed{藍(r)}$ ，

**引理 11.** 圖$K_{m.n}*P_q$中欲使跨二層的圖$C_6$不存在所需最少阻隔點數的唯一方法：

『任相鄰兩層$K_{m.n}$中有一層$K_{m.n}$之短邊上放滿阻隔點』。

【證明】

$n\geq 1$時，不失一般性，考慮圖$K_{m.n}*P_q$中存在於第$r$與$r+1$層$K_{m.n}$間之跨二層的圖$C_6$，則此$C_6$恰有兩類：

Case1. 『在第$r$與$r+1$層$K_{m.n}$間之長邊上的點有兩段連通的邊且此二層$K_{m.n}$之短邊上各有另一點』或『在第$r$與$r+1$層$K_{m.n}$間之短邊上的點有兩段連通的邊且此二層$K_{m.n}$之長邊上各有另一點』。

Case2. 在第$r$與$r+1$層$K_{m.n}$間之長邊及短邊上的點各有一段連通的邊且此二層$K_{m.n}$中任一層之長邊及短邊上各有另一點。

令條件一：『第$r$與$r+1$層$K_{m.n}$間之長邊上的點最多一段連通的邊』；

條件二：『第$r$或$r+1$層$K_{m.n}$之短邊上無點』；

條件三：『第$r$與$r+1$層$K_{m.n}$間之短邊上的點最多一條連通的邊』；

條件四：『第$r$或$r+1$層$K_{m.n}$之長邊上無點』

今欲使 Case1 中的$C_6$不存在，則『條件一或條件二有一需成立』且『條件三或條件四有一需成立』。

① 條件一與條件三均成立，至少需$(m+n-2)$個阻隔點。

② 條件一與條件四均成立，至少需$m$個阻隔點。

③ 條件二與條件三均成立，至少需$n$個阻隔點。

④ 條件二與條件四均成立，至少需$(m+n)$個阻隔點。

故欲得最少阻隔點數需選擇③條件二與條件三均成立的情況，使第$r$或$r+1$層$K_{m.n}$之短邊上無點，而此時 Case2 中的$C_6$也不存在。因此圖$K_{m.n}*P_q$中欲使跨二層的圖$C_6$不存在，所需最少阻隔點數的擺法為『任相鄰兩層$K_{m.n}$中有一層$K_{m.n}$之短邊上放滿阻隔點』。

Check: 方法的唯一性

考慮存在第$r$與$r+1$層$K_{m.n}$之短邊上皆未放滿阻隔點的情形

（I）欲證若該兩層阻隔點總數不變，則必有$C_6$存在：

設圖$K_{m.n}*P_q$中於第$r$ 、 $r+1$層$K_{m.n}$之短邊上的阻隔點數分別為$a$ 、 $b$ $(0\le a,b<n,a+b\le n)$且該兩層之長邊上的阻隔點總數為$(n-a-b)$ ，此時該兩層$K_{m.n}$之『長邊上的點有兩段連通的邊且短邊上各有另一點』或『短邊上的點有兩段連通的邊且長邊上各有另一點』，即存在一圖$C_6$ 。

（II）欲證若存在擺法使圖$K_{m.n}*P_q$中跨二層的圖$C_6$不存在，所需阻隔點$>n$ ：

設圖$K_{m.n}*P_q$中於第$r$ 、 $r+1$層$K_{m.n}$之短邊上的阻隔點數分別為$a$ 、 $b$ $(0\le a,b<n)$ ，

①$a+b=n$時，若長邊上的阻隔點總數$<(m-1)$ ，則該兩層$K_{m.n}$之長邊上的點有兩段連通的邊且短邊上各有一點，必存在一圖$C_6$ 。故該兩層$K_{m.n}$之長邊的阻隔點總數$\ge(m-1)$ 。

②$a+b<n$時，

Case1. $a+b=n-1$ ，若長邊上的阻隔點總數$<(m-1)$ ，則該兩層$K_{m.n}$長邊上的點有兩段連通的邊且短邊上各有一點，必存在一圖$C_6$ 。故該兩層$K_{m.n}$之長邊上的阻隔點總數$\ge(m-1)$ 。

Case2. $a+b\le n-2$ ，若長邊上的阻隔點總數$<m$ ，則該兩層$K_{m.n}$短邊上有兩段連通的邊且長邊上各有一點，必存在一圖$C_6$ 。故該兩層$K_{m.n}$之長邊上的阻隔點總數$\ge m$ 。

分析跨三層的圖$C_6$之結構不難發現，當以『任相鄰兩層$K_{m.n}$中有一層$K_{m.n}$之短邊上放滿阻隔點』方式使跨二層的圖$C_6$不存在時，跨三層的圖$C_6$亦不存在，故得以下定理：

**定理三**：圖$K_{m.n}*P_q$中欲使圖$C_6$不存在所需最少阻隔點數的唯一方法：

（1）$n=1,2$時，偶數層$K_{m.n}$之短邊放滿阻隔點，如圖 2-4。

（2）$n\ge 3$時，奇數層$K_{m.n}$之短邊放$(n-2)$個阻隔點且偶數層$K_{m.n}$之短邊放滿阻隔點，如圖 2-5。

【證明】

（1）$n=1,2$ 時，由引理 10 知僅考慮跨二層及跨三層的圖 $C_6$。由引理 11 知，欲使此圖 $C_6$ 不存在且阻隔點數最少的方法爲『奇數層 $K_{m.n}$ 之短邊放滿阻隔點』或『偶數層 $K_{m.n}$ 之短邊放滿阻隔點』。因此使圖 $K_{m.n}*P_q$ 中阻隔點總數最少的唯一方法即『偶數層 $K_{m.n}$ 之短邊放滿阻隔點』。

（2）$n\ge 3$ 時，由引理 10 知需考慮單層、跨二層及跨三層的圖 $C_6$。由 $f(K_{m.n},C_x)=n-\dfrac{x}{2}+1$ 知，欲使單層的圖 $C_6$ 不存在，每層 $K_{m.n}$ 之短邊上至少需 $(n-2)$ 個阻隔點。由引理 11 知，欲使跨二層的圖 $C_6$ 不存在所需的最少阻隔點數的唯一方法爲『任相鄰兩層 $K_{m.n}$ 中有一層 $K_{m.n}$ 之短邊上放滿阻隔點』。故使圖 $K_{m.n}*P_q$ 中之阻隔點總數最少的方法爲『奇數層 $K_{m.n}$ 之短邊放 $(n-2)$ 個阻隔點且偶數層 $K_{m.n}$ 之短邊放滿阻隔點』。

Check: 方法的唯一性

（I）若存在有一 $K_{m.n}$ 之短邊上的阻隔點數 $<(n-2)$，則出現單層的圖 $C_6$。

（II）考慮存在第 $r$ 與 $r+1$ 層 $K_{m.n}$ 之短邊上皆未放滿阻隔點的情形

①欲證若該兩層阻隔點數不變，則必有 $C_6$ 存在：

設圖 $K_{m.n}*P_q$ 中於第 $r$、$r+1$ 層 $K_{m.n}$ 之短邊上的阻隔點數分別爲 $n-2$、$a$ $(n-2\le a<n)$ 且該兩層之長邊上的阻隔點總數爲 $(n-a)$，此時該兩層 $K_{m.n}$ 之長邊上的點有兩段連通的邊且短邊上各有另一點，即存在一圖 $C_6$。

②欲證若存在擺法使圖 $K_{m.n}*P_q$ 中的圖 $C_6$ 不存在，則該兩層 $K_{m.n}$ 所需阻隔點數 $>(2n-2)$

設圖 $K_{m.n}*P_q$ 中於第 $r$、$r+1$ 層 $K_{m.n}$ 之短邊上的阻隔點數分別爲 $a$、$b$ $(n-2\le a,b<n)$，若長邊上的阻隔點總數 $<(m-1)$，則該兩層 $K_{m.n}$ 長邊上的點有兩段連通的邊且短邊上各有一點，必存在一圖 $C_6$。故該兩層 $K_{m.n}$ 之長邊上的阻隔點總數 $\ge(m-1)$。但此時該兩層 $K_{m.n}$ 上的阻隔點總數 $>(2n-2)$。

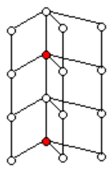


圖 2-4

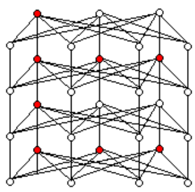


圖 2-5

故得

$$f(K_{m.n}*P_q,C_6)=\begin{cases} n[\dfrac{q}{2}] & n=1,2 \\ (n-2)[\dfrac{q+1}{2}]+n[\dfrac{q}{2}] & n\ge 3 \end{cases}$$

（其中 [ ]：表高斯符號）

4. $x=8$ 時

圖 $K_{m.n}*P_q$ 中若存在圖 $C_8$，需考慮單層的圖 $C_8$、跨二層的圖 $C_8$ 及跨三層的圖 $C_8$。

**引理 12.**
12_1 $n \geq 4$，圖 $K_{m.n} * P_q$ 中存在單層的圖 $C_8$。
12_2 $n \geq 2$，圖 $K_{m.n} * P_q$ 中存在跨二層的圖 $C_8$。
12_3 $n \geq 1$，圖 $K_{m.n} * P_q$ 中存在跨三層的圖 $C_8$。

**引理 13.** 圖 $K_{m.n} * P_q$ 中欲使跨二層的圖 $C_8$ 不存在所需最少阻隔點數的唯一方法：
在 $K_{m.n}$ 之短邊上阻隔點個數之有序列爲 $\{0,n,0,n,0,n,...\}$
（$0,n$ 爲一循環）

**引理 14.** 圖 $K_{m.n} * P_q$ 中欲使跨三層的圖 $C_8$ 不存在所需最少阻隔點數的唯一方法：
在 $K_{m.n}$ 之短邊上阻隔點個數之有序列爲 $\{0,0,n,n,0,0,n,n,0,0,n,n,...\}$
（$0,0,n,n$ 爲一循環）

引理 12~14 證明限於篇幅，予以省略。

**引理 15.** 圖 $K_{m.n} * P_q$ 中欲使跨二層及跨三層的圖 $C_8$ 不存在所需最少阻隔點數的唯一方法：在 $K_{m.n}$ 之短邊上阻隔點個數之有序列爲 $\{0,n,n,0,n,n,0,n,n,...\}$
（$0,n,n$ 爲一循環）

【證明】
由引理 13 知，圖 $K_{m.n} * P_q$ 中若跨二層的圖 $C_8$ 不存在，則各層 $K_{m.n}$ 之短邊上的阻隔點數之有序列需滿足：任兩非『0』數字間最多連續出現一個『0』。
由引理 14 知，圖 $K_{m.n} * P_q$ 中若跨三層的圖 $C_8$ 不存在，則各層 $K_{m.n}$ 之短邊上的阻隔點數之有序列需滿足：任兩非『0』數字間最多連續出現兩個『0』且數字『$n$』成對出現。
因此圖 $K_{m.n} * P_q$ 中使跨二層及跨三層的圖 $C_8$ 不存在，各層 $K_{m.n}$ 之短邊上最少阻隔點個數之有序列需滿足：任兩非『0』數字間最多連續出現一個『0』且數字『$n$』成對出現，即 $\{0,n,n,0,n,n,0,n,n,...\}$。

Check: 方法的唯一性

考慮第 $r$、$r+1$ 與 $r+2$ 層 $K_{m.n}$ 之短邊上至少有兩層未放滿阻隔點的情形：
（I）欲證此三層 $K_{m.n}$ 之阻隔點總數爲 $2n$ 時，必有圖 $C_8$ 存在：
①若第 $r$、$r+1$ 層或第 $r+1$、$r+2$ 層之短邊上未放滿阻隔點，則必有跨兩層的 $C_8$ 存在。
②若第 $r$、$r+2$ 層之短邊上未放滿阻隔點，則必有跨三層的 $C_8$ 存在。
（II）欲證若有其他擺法使圖 $C_8$ 不存在，則所需阻隔點數 $\geq 2n$：
①若第 $r$ 或 $r+2$ 層 $K_{m.n}$ 中，只有一層 $K_{m.n}$ 之短邊阻隔點數爲 $n$，令其爲第 $r$ 層，則
Case1. 第 $r+1$ 及 $r+2$ 層 $K_{m.n}$ 之短邊上的阻隔點數皆爲 $(n-1)$，此時共需 $(3n-2)$ 個阻隔點，但 $3n-2 \geq 2n$。
Case2. 若第 $r+1$ 及 $r+2$ 層 $K_{m.n}$ 之短邊上的阻隔點數皆小於 $(n-1)$，則第 $r+1$ 或 $r+2$ 層 $K_{m.n}$ 之長邊上至少有 $m$ 個阻隔點，但 $n+m \geq 2n$。

②若第$r+1$層$K_{m.n}$之短邊阻隔點數爲$n$：

則第$r$或$r+2$層$K_{m.n}$之長邊上至少有$m$個阻隔點，但$n+m\geq 2n$。

③若此三層$K_{m.n}$之短邊上的阻隔點數皆小於$n$：

令此三層$K_{m.n}$之短邊阻隔點數分別爲 $a,b,c\ (0\leq a,b,c<n)$ 且長邊阻隔點分別爲 $x,y,z\ (0\leq x,y,z<m)$，

先考慮跨三層的$C_8$：欲使『在第$r$、$r+1$與$r+2$層$K_{m.n}$間之長邊上的點有兩段跨三層連通的邊，且第$r$、$r+2$層$K_{m.n}$之層短邊各有另一點』的$C_8$不存在，則長邊之連通路徑最多一條，故$x+y+z\geq m-1$。

欲使『在第$r$、$r+1$與$r+2$層$K_{m.n}$間之短邊上的點有兩段跨三層連通的邊，且第$r$、$r+2$層$K_{m.n}$之層長邊各有另一點』的$C_8$，則$a+b+c\geq n-1$。

再考慮跨二層的$C_8$：欲使跨兩層的$C_8$，則相鄰兩層$K_{m.n}$之長邊或短邊上的阻隔點數投射後全滿，故：

Case1. $\begin{cases} x+y\geq m \\ b+c\geq n \end{cases}$，但$a+b+c+x+y+z\geq x+y+b+c\geq m+n\geq 2n$

Case2. $\begin{cases} a+b\geq n \\ b+c\geq n \end{cases}$，但

$$(a+b+c)+(x+y+z)\geq(2n-b)+(x+y+z)\geq 2n+(m-1)-b\geq 2n$$

Case3. $\begin{cases} x+y=m \\ y+z=m \end{cases}$，但

$$(a+b+c)+(x+y+z)\geq(n-1)+(2m-y)=m+n+(m-y-1)\geq m+n\geq 2n$$

**定理四**：圖$K_{m.n}*P_q$中欲使圖$C_8$不存在所需的最少阻隔點數爲：

（1）$n=1$時，在$K_{m.n}$之短邊上阻隔點個數之有序列爲$\{0,0,n,n,0,0,n,n,0,0,n,n,...\}$（$0,0,n,n$爲一循環），如圖 2-6。

（2）$n=2,3$時，在$K_{m.n}$之短邊上阻隔點個數之有序列爲$\{0,n,n,0,n,n,0,n,n,...\}$（$0,n,n$爲一循環），如圖 2-7。

（3）$n\geq 4$時，在$K_{m.n}$之短邊上阻隔點個數之有序列爲 $\{n-3,n,n,n-3,n,n,n-3,n,n,...\}$（$n-3,n,n$爲一循環），如圖 2-8。

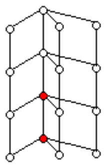


圖 2-6

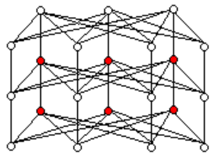


圖 2-7

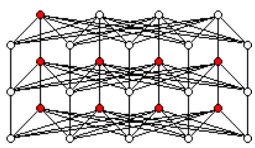


圖 2-8

【證明】

（1）$n=1$時，由引理 12 知僅考慮跨三層的圖$C_8$。由引理 14 知欲使圖$C_8$不存在所需最少阻隔點數爲：在$K_{m.n}$之短邊的阻隔點數之有序列爲$\{0,0,n,n,0,0,n,n,0,0,n,n,...\}$。

（2）$n=2,3$時，由引理 12 知僅考慮跨二層及跨三層的圖$C_8$。由引理 15 知欲使圖$C_8$不存在所需最少阻隔點數爲：在$K_{m.n}$之短邊上阻隔點個數之有序列爲$\{0,n,n,0,n,n,0,n,n,...\}$。

（3）$n \ge 4$時，由引理 12 知需考慮有單層、跨二層及跨三層的圖$C_8$。由 $f(K_{m.n}, C_x) = n - \frac{x}{2} + 1$知，欲使單層的圖$C_8$不存在，每層$K_{m.n}$之短邊上至少需 $(n-3)$個阻隔點。由引理 15 知，欲使跨二層、跨三層的圖$C_8$不存在所需最少阻隔點數：在$K_{m.n}$之短邊上阻隔點個數之有序列爲$\{0,n,n,0,n,n,0,n,n,...\}$。故圖 $K_{m.n} * P_q$中欲使圖$C_8$不存在所需的最少阻隔點數：在$K_{m.n}$之短邊上阻隔點個數之有序列爲$\{n-3,n,n,n-3,n,n,n-3,n,n,...\}$。

Check: 方法的唯一性

（I）若存在某一層$K_{m.n}$之短邊上的阻隔點數$<(n-3)$，則出現單層的圖$C_8$。

（II）考慮第$r$、$r+1$與$r+2$層$K_{m.n}$之短邊上阻隔點數皆$\ge(n-3)$，但至少有兩層未放滿阻隔點的情形：

①欲證在此三層共有$2n+(n-3)$個阻隔點時，必有圖$C_8$存在：

（i）若爲第$r$與$r+1$層或第$r+1$與$r+2$層$K_{m.n}$之短邊上未放滿阻隔點，則有跨兩層的圖$C_8$存在。

（ii）若爲第$r$與$r+2$層$K_{m.n}$之短邊上未放滿阻隔點，則有跨三層的圖$C_8$存在。

②欲證若有其他擺法使圖$C_8$不存在，則所需阻隔點故$\ge 2n+(n-3)$：

（i）若在第$r$或$r+2$層$K_{m.n}$中，只有一層$K_{m.n}$短邊阻隔點數爲$n$，令其爲第$r$層，則第$r+1$或$r+2$層$K_{m.n}$之長邊至少需$m$個阻隔點，此時阻隔點數至少$n+m+(n-3)$，但$n+m+(n-3)\ge 2n+(n-3)$。

（ii）若第$r+1$層$K_{m.n}$短邊阻隔點個數爲$n$，則第$r$或$r+2$層$K_{m.n}$之長邊至少$m$個阻隔點，此時阻隔點數至少$n+m+(n-3)$，但 $n+m+(n-3)\ge 2n+(n-3)$。

（iii）若此三層$K_{m.n}$之短邊阻隔點數皆$<n$：

令此三層短邊阻隔點數分別爲$a,b,c$ $(n-3\le a,b,c<n)$且長邊阻隔點分別爲$x,y,z$ $(0\le x,y,z<m)$，

先考慮跨三層的$C_8$：若使『在第$r$、$r+1$與$r+2$層$K_{m.n}$間之長邊上的點有兩段跨三層連通的邊，且第$r$、$r+2$層$K_{m.n}$之層短邊各有另一點』的$C_8$不存在，則長邊之連通路徑最多一條，此時$x+y+z\ge m-1$。

若使『在第$r$、$r+1$與$r+2$層$K_{m.n}$間之短邊上的點有兩段跨三層連通的邊，且第$r$、$r+2$層$K_{m.n}$之層長邊各有另一點』的$C_8$，則$a+b+c\ge n-1$。

再考慮跨二層的$C_8$：此時相鄰兩層之長或短邊上的阻隔點投射後全滿，則：

Case1. $\begin{cases} x+y\ge m \\ b+c\ge n \end{cases}$，但$a+(b+c)+(x+y)+z\ge(n-3)+m+n\ge(n-3)+2n$

Case2.

若$1\le n\le 5$，則$\begin{cases} a+b\ge n \\ b+c\ge n \end{cases}$，

但$(a+b+c)+(x+y+z)\ge 2n+(m-1-b)\ge 2n+(n-3)$

若$n\ge 6$，則$\begin{cases} a+b\ge 2(n-3) \\ b+c\ge 2(n-3) \end{cases}$

但$(a+b+c)+(x+y+z)\ge(4n-12)+(m-1)=2n+(m+2n-13)\ge 2n+(n-3)$

Case3. $\begin{cases} x+y=m \\ y+z=m \end{cases}$，但

$(a+b+c)+(x+y+z)\geq 3(n-3)+(2m-y)=m+n+(n-3)+[2(n-3)+m-y-1]$

$\geq m+n+(n-3)\geq 2n+(n-3)$

故得

| |
|---|
| $n=1$時， $f(K_{m.1}*P_q,C_8)=2[\frac{q}{4}]+\begin{cases}1 & q\equiv 3(\mathrm{mod}\,4)\\ 0 & 其餘\end{cases}$ |
| $n=2,3$時， $f(K_{m.n}*P_q,C_8)=2n[\frac{q}{3}]+\begin{cases}n & q\equiv 2(\mathrm{mod}\,3)\\ 0 & 其餘\end{cases}$ |
| $n\geq 4$時， $f(K_{m.n}*P_q,C_8)=(n-3)[\frac{q+2}{3}]+2n[\frac{q}{3}]+\begin{cases}n & q\equiv 2(\mathrm{mod}\,3)\\ 0 & 其餘\end{cases}$ |
| （其中［ ］：表高斯符號） |

（四）討論在圖 $P_m*P_q$ $(m\geq q)$ 中使圖 $C_x$ 不存在所需的最少阻隔點數

1. $x$ 為奇數，則圖 $P_m*P_q$ 不存在圖 $C_x$，故 $f(P_m*P_q,C_x)=0$。

2. $x=4$時

$P_m*P_q$ 視為 $(m-1)\times(q-1)$ 個方格，從左上角起將其分割成 $2\times 2$ 之不重疊的分割格，若餘下最後一橫列（直行），則將此橫列（直行）由左而右（由上而下）分割成以 $1\times 2$ 之不重疊的分割格，直至完全分割或剩餘 $1\times 1$ 的分割格，如圖 3-1。此時這每個分割格中至少需 1 個阻隔點方可擋 $C_4$，故得：

| |
|---|
| $f(P_m*P_q,C_4)=[\frac{m}{2}]\cdot[\frac{q}{2}]$ （其中［ ］：表高斯符號） |

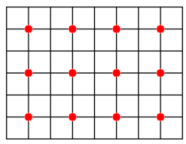
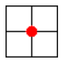
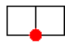


圖 3-1

【證明】

圖 $P_m*P_q$ 中有 $(m-1)\times(q-1)$ 個 $C_4$，其中1個阻隔點可擋 4 個 $C_4$ 、2 個 $C_4$ 、1 個 $C_4$ 。

Case1. $m-1=2k,n-1=2t,(k,t\in\mathbb{N})$時，若阻隔點數為 $(\left[\frac{m}{2}\right]\left[\frac{q}{2}\right]-1)$，最多可擋 $4(\left[\frac{2k+1}{2}\right]\left[\frac{2t+1}{2}\right]-1)$ 個 $C_4$，又 $4kt-4<4kt=(m-1)(q-1)$，故存在 $C_4$。

Case2. $m-1=2k,n-1=2t+1,(k\in\mathbb{N},t\in\mathbb{N}\cup\{0\})$時，若阻隔點數為 $(\left[\frac{m}{2}\right]\left[\frac{q}{2}\right]-1)$，最多可擋 $4(\left[\frac{2k+1}{2}\right]\left[\frac{2t+1}{2}\right])+2(\left[\frac{2k+1}{2}\right]-1)$ 個 $C_4$，又

$4kt+2k-2<4kt+2k=(m-1)(q-1)$，故存在 $C_4$。

Case3. $m-1=2k+1, n-1=2t+1, (k,t\in \mathbb{N}\cup\{0\})$ 時，若阻隔點數為 $(\left[\frac{m}{2}\right]\left[\frac{q}{2}\right]-1)$，最多可擋 $4(\left[\frac{2k+1}{2}\right]\left[\frac{2t+1}{2}\right])+2(\left[\frac{2k+1}{2}\right])+2(\left[\frac{2t+1}{2}\right])+1-1=4kt+2k+2t$ 個 $C_4$

又 $4kt+2k+2t<4kt+2k+2t+1=(m-1)(q-1)$，故存在 $C_4$。

3. $x=6$ 時

圖 $C_6$ 視為 $1\times 2$ 或 $2\times 1$ 的長方格，因此欲使圖 $C_6$ 不存在的方法為使相鄰兩縱線及兩橫線的連通路徑最多剩一條。$\because m\geq q$，故固定 $q$ 值來討論，方法為二：①使 $q$ 條橫線保留部分的連通路徑 ②使 $q$ 條橫線無連通路徑。

（1）$q=2$

①使一條橫線無連通路徑，如圖 3-2。②使兩條橫線無連通路徑，如圖 3-3。比較①②後，選擇阻隔點數最少的方法①。

（2）$q=3$

①使一條橫線無連通路徑，如圖 3-4。②使三條橫線無連通路徑，如圖 3-5。比較①②後，選擇阻隔點數最少的方法①。

（3）$q=4$

①使兩條橫線無連通路徑，如圖 3-6。②使四條橫線無連通路徑，如圖 3-7。比較①②後，選擇阻隔點數最少的方法①。

（4）$q=5$

①使三條橫線無連通路徑，如圖 3-8。②使五條橫線無連通路徑，如圖 3-9。比較①②後，選擇阻隔點數最少的方法①。

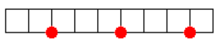


圖 3-2

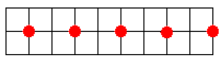


圖 3-4

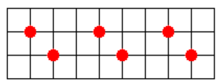


圖 3-6

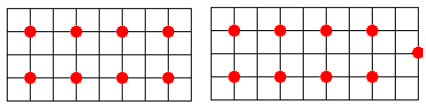


圖 3-8

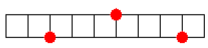


圖 3-3

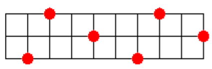


圖 3-5

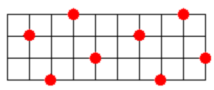


圖 3-7

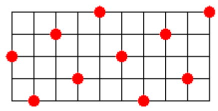


圖 3-9

故得

$$f(P_m * P_2, C_6)=\left[\frac{m}{3}\right]$$

$$f(P_m * P_3, C_6)=\left[\frac{m}{2}\right]$$

$$f(P_m * P_4, C_6)=2\left[\frac{m}{3}\right]+\begin{cases}1 & m=3k+2\\ 0 & \text{其餘}\end{cases}$$

$$f(P_m * P_5, C_6)=2\left[\frac{m}{2}\right]+\begin{cases}-1 & m\text{是偶數}\\ 0 & m\text{是奇數}\end{cases}$$

（其中 [ ]：表高斯符號）

（5）$q=6$

①使四條橫線無連通路徑，如圖 3-10。②使六條橫線無連通路徑，如圖 3-11。比較①②後，選擇阻隔點數最少的方法①。故得

$$f(P_m * P_6, C_6) = 8 + 7[\frac{m-7}{6}] + \begin{cases} 0 & a=1 \\ 2 & a=2 \\ 3 & a=3 \\ 4 & a=4 \\ 5 & a=5 \end{cases} \quad (m-7) \equiv a (\bmod 6)$$

（其中［　］：表高斯符號）

【證明】

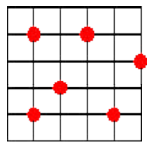


圖 3-10

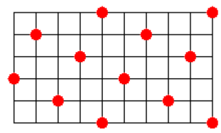


圖 3-11

先證 $f(P_6 * P_6, C_6) = 6$

具體構造如圖 3-10，$\therefore f(P_6 * P_6, C_6) \le 6$。

另一方面證明 $f(P_6 * P_6, C_6) \ge 6$ 如下：

圖 $P_6 * P_6$ 中使圖 $C_6$ 不存在，需滿足下列兩條件：（I）任相鄰兩橫線至少要放入 2 個阻隔點，且阻隔點間最多間隔 2 個點。（II）任相鄰兩縱線至少要放入 2 個阻隔點，且阻隔點間最多間隔 2 個點。

綜合（I）（II），六條縱線上任相鄰兩縱線至少需 2 個阻隔點且任相鄰三縱線至少需 3 個阻隔點，因此最少阻隔點數之有序列爲 $\{0,2,1,1,1,1\}$。$\therefore f(P_6 * P_6, C_6) \ge 6$

再證 $f(P_7 * P_6, C_6) = 8$

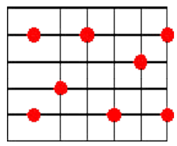


圖 3-12

具體構造如圖 3-12，$\therefore f(P_7 * P_6, C_6) \le 8$

另一方面證明 $f(P_7 * P_6, C_6) \ge 8$ 如下：

圖 $P_7 * P_6$ 中使圖 $C_6$ 不存在，由上述討論知七條縱線上任相鄰兩縱線至少需 2 個阻隔點且任相鄰三縱線至少需 3 個阻隔點，因此阻隔點數之有序列至少爲 $\{0,2,1,1,1,1,1\}$。考慮連續五條縱線上各放 1 阻隔點的情形：

當各縱線僅有 1 阻隔點且六條橫線中至少一條未放阻隔點，此時必存在圖 $C_6$。故七條縱線上阻隔點數之有序列至少爲 $\{0,2,1,1,1,1,2\}$。$\therefore f(P_7 * P_6, C_6) \ge 8$

證明 $f(P_m * P_6, C_6)$

接續圖 $P_7 * P_6$，如圖 3-13，六條橫線在第 6、7、8 縱線間的連通路徑僅爲第 1、3、5 橫線，且第 7、8 縱線僅有一連通路徑，即相鄰兩縱線、橫線間皆無連通路徑，故不需再放阻隔點且第 8 縱線等同爲第 1 縱線，此時第 8~13 縱線可如圖 3-14 的方式擺放阻隔點，但第 7~9 縱線間必存在一圖 $C_6$，故第 8~13 縱線上的阻隔點需多 1 個，因此最少阻隔點數之有序列爲 $\{0,2,1,1,1,2\}$。而第 14 縱線同第 8 縱線，故接續皆爲 $0,2,1,1,1,2$ 一循環，如圖 3-15。

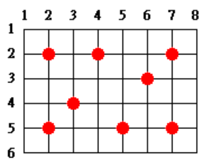


圖 3-13

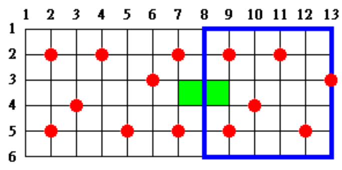


圖 3-14

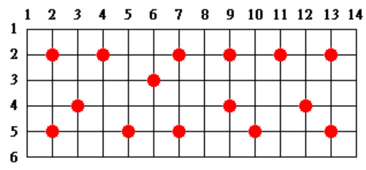


圖 3-15

（6）$q=7$

①使四條橫線無連通路徑，如圖 3-16。②使七條橫線無連通路徑，如圖 3-17。比較①②後，選擇阻隔點數最少的方法①。

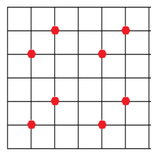


圖 3-16

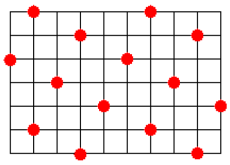


圖 3-17

故得

$$f(P_m * P_7, C_6) = 4[\frac{m}{3}] + \begin{cases} 0 & a=0,1 \\ 2 & a=2 \end{cases} \quad m \equiv a(\bmod 3)$$（其中［ ］：表高斯符號）

【證明】

具體構造如圖 3-16，$\therefore f(P_m * P_7, C_6) \le 4[\frac{m}{3}] + \begin{cases} 0 & a=0,1 \\ 2 & a=2 \end{cases} \quad m \equiv a(\bmod 3)$

另一方面證明 $f(P_m * P_7, C_6) \ge 4[\frac{m}{3}] + \begin{cases} 0 & a=0,1 \\ 2 & a=2 \end{cases} \quad m \equiv a(\bmod 3)$

圖 $P_m * P_7$ 中使圖 $C_6$ 不存在，需滿足下列兩條件：（I）任相鄰三條縱線至少需 2 個阻隔點，且阻隔點間最多間隔 2 個點。（II）任相鄰二條橫線至少需 1 個阻隔點，且阻隔點間最多間隔 2 個點。

先任取相鄰三縱線，考慮條件 I，此三縱線上需 2 個阻隔點，此時此三縱線必存在兩組相鄰兩橫線上無阻隔點，由條件 II 知，此時該兩組橫線至少各需 1 個阻隔點，故此三縱線阻隔點數之有序列至少爲 $\{0,2,2\}$。不失一般性，令第 1、2、3 條縱線上的阻隔點數爲 0、2、2，此時第 2、3、4 縱線間、相鄰兩橫線間皆無連通路徑，故第 4 縱線不需再放阻隔點且可視爲第 1 縱線，因此阻隔點數爲 $0,2,2$ 一循環，$\therefore f(P_m * P_7, C_6) \ge 4[\frac{m}{3}] + \begin{cases} 0 & a=0,1 \\ 2 & a=2 \end{cases} \quad m \equiv a(\bmod 3)$。

（7）仿上討論 $q=8,9,10$ 發現：若 $q$ 條橫線的無連通路徑數越少，隨著 $m$ 值增加，阻隔點數增加越快；反之，若採皆無連通路徑的方法，則阻隔點數均勻增加。因此我們猜測當 $q \ge 8$，採用下列使 $q$ 條橫線無連通路徑的擺法將可得到最少阻隔點數，但這部份尚未確認。

【擺法】

『過點 $(a,1)$ 分別作斜率 $-2$、$\frac{1}{2}$ 之兩直線，再作與該兩直線平行且距離爲 $\sqrt{5}k(k \in \square)$ 的直線。所有直線與圖 $P_m * P_q$ 的交點爲格子點之處皆放一阻隔點。』（其中 $a$ 值因 $q$ 值而平移）如圖 3-18

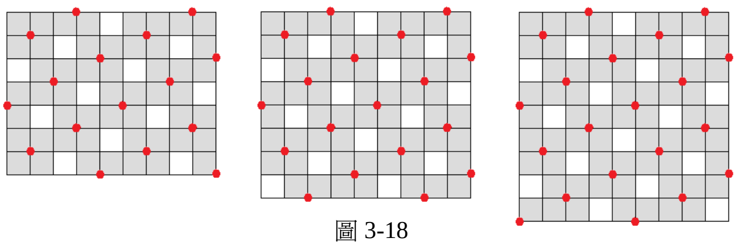


圖 3-18

# 伍、研究結果

一、圖 $K_m$ 、圖 $C_m$ 、圖 $P_m$ 、圖 $K_{m.n}$ 中使圖 $C_x$ 、圖 $K_x$ 、圖 $P_x$ 、圖 $K_{x.y}$ 不存在所需的最少阻隔點數

| | |
|---|---|
| $f(K_m,K_x)=\begin{cases} m-x+1 & m\ge x \\ 0 & m<x \end{cases}$<br>$f(K_m,C_x)=\begin{cases} m-x+1 & m\ge x \\ 0 & m<x \end{cases}$<br>$f(K_m,P_x)=\begin{cases} m-x+1 & m\ge x \\ 0 & m<x \end{cases}$<br>$f(K_m,K_{x.y})=\begin{cases} m-(x+y)+1 & m\ge x+y \\ 0 & m<x+y \end{cases}$ | $f(K_{m.n},K_x)=0$<br>$f(K_{m.n},C_x)=\begin{cases} n-\frac{x}{2}+1 & x\text{為偶數且}n\ge\frac{x}{2} \\ 0 & \text{其餘} \end{cases}$<br>$f(K_{m.n},P_x)=\begin{cases} n-[\frac{x}{2}]+1 & m+n\ge x\text{且}n\ge[\frac{x}{2}] \\ 0 & \text{其餘} \end{cases}$<br>$f(K_{m.n},K_{x.y})=\begin{cases} n-x+1 & n\ge x, m-x\ge n-y \\ m+n-2x+2 & n\ge x, m-x<n-y \\ \min\{m-x+1,n-y+1\} & n<x \end{cases}$ |
| $f(C_m,K_x)=0$<br>$f(C_m,C_x)=\begin{cases} 1 & m=x \\ 0 & m\ne x \end{cases}$<br>$f(C_m,P_x)=\begin{cases} \frac{m}{x} & m\ge x, x\mid m \\ [\frac{m}{x}]+1 & m\ge x, x\nmid m \\ 0 & m<x \end{cases}$<br>$f(C_m,K_{x.y})=0$ | $f(P_m,K_x)=0$<br>$f(P_m,C_x)=0$<br>$f(P_m,P_x)=\begin{cases} [\frac{m}{x}] & m\ge x \\ 0 & m<x \end{cases}$<br>$f(P_m,K_{x.y})=0$ |

二、圖 $K_m * P_q$ 中使圖 $C_x$ 不存在所需的最少阻隔點數

$$f(K_m * P_q, C_3) = q(m-2)$$

$m=4$ 時， $f(K_4 * P_q, C_4) = 3[\frac{q}{2}] + \begin{cases} 1 & q\text{爲奇數} \\ 0 & q\text{爲偶數} \end{cases}$

$m \geq 5$ 時， $f(K_m * P_q, C_4) = q(m-3)$

$m=4,5,6$ 時， $f(K_m * P_q, C_5) = (m-1)[\frac{q}{2}] + \begin{cases} (m-4) & q\text{爲奇數} \\ 0 & q\text{爲偶數} \end{cases}$

$m \geq 7$ 時， $f(K_m * P_q, C_5) = q(m-4)$

$m=4,5$ 時， $f(K_m * P_q, C_6) = (m-1)[\frac{q}{2}]$

$m=6,7,8$ 時， $f(K_m * P_q, C_6) = (m-1)[\frac{q}{2}] + \begin{cases} m-5 & q\text{爲奇數} \\ 0 & q\text{爲偶數} \end{cases}$

$m \geq 9$ 時， $f(K_m * P_q, C_6) = q(m-5)$

$m=4$ 時， $f(K_4 * P_q, C_7) = \begin{cases} 2 & q=2 \\ 3 & q=3 \\ 4[\frac{q}{3}] & q=3k+1, k\geq 1 \\ 4[\frac{q}{3}]+2 & q=3k+2, k\geq 1 \\ 4[\frac{q}{3}]-2 & q=3k, k\geq 2 \end{cases}$

$m=5,6$ 時， $f(K_m * P_q, C_7) = (m-1)[\frac{q}{2}]$

$m=7,8,9,10$ 時， $f(K_m * P_q, C_7) = (m-1)[\frac{q}{2}] + \begin{cases} m-6 & q\text{爲奇數} \\ 0 & q\text{爲偶數} \end{cases}$

$m \geq 11$ 時， $f(K_m * P_q, C_7) = q(m-6)$

$$m=4\text{時，}\ f(K_4*P_q,C_8)=9[\frac{q}{8}]+\begin{cases}0 & a=1\\ 1 & a=2\\ 3 & a=3\\ 3 & a=4\\ 5 & a=5\\ 6 & a=6\\ 6 & a=7\\ 0 & a=0\end{cases}\quad q\equiv a \mod 8$$

$$m=5\text{時，}\ q=2\text{，}\ f(K_5*P_2,C_8)=3$$

$$q=3\text{，}\ f(K_5*P_3,C_8)=4$$

$$q\geq 4\text{，}\ f(K_5*P_q,C_8)=9[\frac{q}{5}]-1+\begin{cases}1 & a=1\\ 4 & a=2\\ 4 & a=3\\ 7 & a=4\\ 0 & a=5\end{cases}\quad q\equiv a \mod 5$$

$$m=6,7\text{時，}\ f(K_m*P_q,C_8)=(m-1)[\frac{q}{2}]$$

$$m=8,9,10,11,12\text{時，}\ f(K_m*P_q,C_8)=(m-1)[\frac{q}{2}]+\begin{cases}m-7 & q\text{為奇數}\\ 0 & q\text{為偶數}\end{cases}$$

$$m\geq 13\text{時，}\ f(K_m*P_q,C_8)=q(m-7)$$

三、圖 $K_{m.n}*P_q$ 中使圖 $C_x$ 不存在所需的最少阻隔點數

$$f(K_{m.n}*P_q,C_4)=\begin{cases}[\frac{q}{2}] & n=1\\ q(n-1) & n\neq 1\end{cases}$$

$$f(K_{m.n}*P_q,C_6)=\begin{cases}n[\frac{q}{2}] & n=1,2\\ (n-2)[\frac{q+1}{2}]+n[\frac{q}{2}] & n\geq 3\end{cases}$$

$$n=1\text{時，}\ f(K_{m.1}*P_q,C_8)=2[\frac{q}{4}]+\begin{cases}1 & q\equiv 3(\bmod 4)\\ 0 & \text{其餘}\end{cases}$$

$$n=2,3\text{時，}\ f(K_{m.n}*P_q,C_8)=2n[\frac{q}{3}]+\begin{cases}n & q\equiv 2(\bmod 3)\\ 0 & \text{其餘}\end{cases}$$

$$n\geq 4\text{時，}\ f(K_{m.n}*P_q,C_8)=(n-3)[\frac{q+2}{3}]+2n[\frac{q}{3}]+\begin{cases}n & q\equiv 2(\bmod 3)\\ 0 & \text{其餘}\end{cases}$$

四、圖 $P_m*P_q$ 中使圖 $C_x$ 不存在所需的最少阻隔點數

$$f(P_m*P_q,C_4)=[\frac{m}{2}]\cdot[\frac{q}{2}]$$

$q=2$時， $f(P_m*P_q,C_6)=\left\lceil\frac{m}{3}\right\rceil$

$q=3$時， $f(P_m*P_q,C_6)=\left\lceil\frac{m}{2}\right\rceil$

$q=4$時， $f(P_m*P_q,C_6)=2\left\lfloor\frac{m}{3}\right\rfloor+\begin{cases}1 & m=3k+2\\ 0 & \text{其餘}\end{cases}$

$q=5$時， $f(P_m*P_q,C_6)=2\left\lceil\frac{m}{2}\right\rceil+\begin{cases}-1 & m\text{是偶數}\\ 0 & m\text{是奇數}\end{cases}$

$q=6$時， $f(P_m*P_6,C_6)=8+7[\frac{m-7}{6}]+\begin{cases}0 & a=1\\ 2 & a=2\\ 3 & a=3\\ 4 & a=4\\ 5 & a=5\end{cases}\quad (m-7)\equiv a(\bmod 6)$

$q=7$時， $f(P_m*P_7,C_6)=4[\frac{m}{3}]+\begin{cases}0 & a=0,1\\ 2 & a=2\end{cases}\quad m\equiv a(\bmod 3)$

## 陸、討論與未來展望

一、『在圖$K_m*P_q$、圖$K_{m.n}*P_q$中使圖$C_x$不存在』的討論中，藉由分析圖$C_x$的結構，找到使圖$C_x$不存在所需的最少阻隔點數。目前討論到$x\le 8$，未來可朝$x>8$努力。

二、『在圖$P_m*P_q$中使圖$C_x$不存在』的討論中，$x=4$時，我們成功以分割方式得到最少阻隔點數。但在$x=6$時，以此方式卻遭遇許多困難，因此改以固定$q$值討論橫線上的連通路徑方式，在$q\le 7$成功找出規律，而$q\ge 8$，則是推測出可能的阻隔點數，目前我們正在此部分努力。

## 柒、結論

一、『在圖$K_m$、圖$C_m$、圖$P_m$、圖$K_{m.n}$中使圖$K_x$、圖$C_x$、圖$P_x$、圖$K_{x.y}$不存在所需的最少阻隔點數』的討論中，我們推導出這十六種組合所需最少阻隔點數的一般式及阻隔點的擺法。

二、『在圖$K_m*P_q$中使圖$C_x$不存在』中發現，當$x-m>2$時，圖$K_m*P_q$中的阻隔點數需逐層討論。當$x-m\le 2$時，圖$K_m*P_q$中最少阻隔點數的擺法爲『使每層$K_m$的點數小於$x$且任相鄰兩不同層$K_m$上的點間存在最多一連通路徑』。

三、『在圖 $K_{m.n} * P_q$ 中使圖 $C_x$ 不存在』中發現，欲使阻隔點總數最少需將阻隔點放在 $K_{m.n}$ 的短邊。$x=4$ 時，阻隔點的擺法爲『每層 $K_{m.n}$ 之短邊上的點數小於 2 且任相鄰兩不同層 $K_{m.n}$ 之短邊上的點間無連通路徑』。$x=6$ 時，阻隔點的擺法爲『每層 $K_{m.n}$ 之短邊上的點數小於 3 且任相鄰兩層 $K_{m.n}$ 中有一層 $K_{m.n}$ 之短邊上放滿阻隔點』。$x=8$ 時，在 $K_{m.n}$ 之短邊上放阻隔點個數之有序列爲：$n=1$ 時，$\{0,0,n,n,0,0,n,n,0,0,n,n,...\}$（$0,0,n,n$ 爲一循環）；$n=2,3$ 時，$\{0,n,n,0,n,n,0,n,n,...\}$（$0,n,n$ 爲一循環）；$n \geq 4$ 時，$\{n-3,n,n,n-3,n,n,n-3,n,n,...\}$（$n-3,n,n$ 爲一循環）。

四、『在圖 $P_m * P_q$ 中使圖 $C_x$ 不存在』中，$x=4$ 時，我們成功以分割方式得到最少阻隔點數。但在 $x=6$ 時，改以固定 $q$ 值討論橫線上的連通路徑方式，在 $q \leq 7$ 成功找出規律。

# 捌、參考文獻


一、傅恆霖（民 84）。圖上的數字。數學傳播，十九卷三期。

二、胡大同、嚴鎮軍（2000）。國際數學奧林匹克大陸訓練教材。九章出版社。頁 278~303，頁 358~378。

三、嚴鎮軍（2007）。高中數學競賽教程。九章出版社。頁 441~465。

四、*TRML* 思考賽試題與解答（2009）。

# 【評語】040422

本作品探討在一圖中需除去多少頂點(稱為“阻隔點”)和與之相連的邊，方能使特定種類的子圖不存在。作者進行詳盡而完整之探討，其耐心與研究精神值得肯定。然而，作者群似未能完全理解作品所討論特定類型圖之重要性與特質，因此未來宜再強化結果之完整性。