中華民國第51屆中小學科學展覽會

作品說明書

高中組　數學科

040421

向日葵的螺旋華爾滋

學校名稱：國立彰化高級中學

作者：	指導老師：
高二 林羿旻 高二 林楷欣 高二 林聖恩	蔡其南

關鍵詞：連分數、螺旋結構、Lucas數列

向日葵的螺旋華爾滋

摘　　要

仿照向日葵花盤生長的模式，我們單純的以數學方法：改變發散角 φ ，研究原基排列的規則，有以下研究目的。

一、發散角與螺旋結構之關係

二、發散角產生雙螺旋結構的特性

三、發散角為 2π 的有理倍數亦產生雙螺旋結構

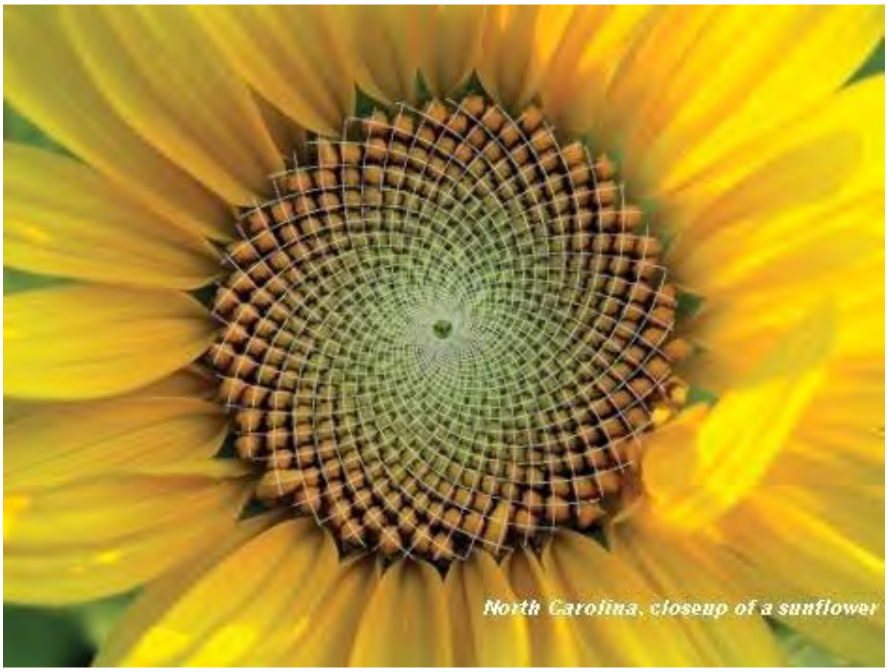
四、螺旋數目為 *Lucas* 數列相鄰兩項的向日葵的發散角與性質

以 $\frac{\varphi}{2\pi}$ 的連分數求得近似分數的分母構成 S_φ 數列，便可作出以 S_φ 數列為單螺旋數目的原基排列；原基產生雙螺旋結構亦存在，但是螺旋數目並非必為 S_φ 數列中相鄰兩項。發散角即便為 2π 的有理倍數，而使得固定間隔順序的原基會共直線，但是並不影響原基產生雙螺旋結構。螺旋數目為 *Lucas* 數列相鄰兩項的向日葵的發散角，經由連分數相關概念計算而得 $\varphi_L = \frac{4\pi}{5+\sqrt{5}}$，其螺旋數目與黃金角所產生的雙螺旋結構性質相似。

壹、研究動機

向日葵花盤上的雙螺旋排列，呈現一幅美麗的圖案，吸引我們想進一步地去了解此種螺旋現象。參考全國中小學科學展覽第四十九屆科展作品「**向日葵裏的黃金項鍊**」:研究發現向日葵花盤上的原基發散角爲黃金角，原基形成了雙螺旋結構，螺旋數目又分別是費氏數列相鄰的兩項；然而發散角度若是其他的角度，原基是否也能形成雙螺旋呢？又 *Lucas* 數列相鄰的兩項螺旋數目也曾出現在向日葵的花盤上，這又是怎麼一回事？我們抱著一大票的疑惑，踏上了尋找向日葵螺旋華爾茲的道路！有別於「**向日葵裏的黃金項鍊**」，我們應用了完全不同的數學方法解決了螺旋現象與發散角的關係。

(逆時針 29 條螺線，順時針 47 條螺線)



貳、研究目的

仿照向日葵花盤生長的模式：以「原基沿著生成螺線生長」爲已知的條件，**發散角爲固定值**的情形之下，單純以數學的觀點研究原基排列的螺旋現象，歸納出以下幾點研究目的：

一、發散角與螺旋結構之關係

二、發散角產生雙螺旋結構的特性

三、發散角爲 2π 的有理倍數亦產生雙螺旋結構

四、螺旋數目爲 *Lucas* 數列相鄰兩項的向日葵的發散角與性質

參、研究設備及器材

一、文房四寶（ 筆、紙、尺、立可白 ）

二、電腦軟體：*Word*、*Excel*、*Geogebra*

肆、研究方法及過程

仿照向日葵花盤生長的模式，以數學方法定義下列名詞：

生成螺線　爲一對數螺線，極坐標方程式爲 $r=a^{\theta}, 0<a<1$；

原基　形狀爲圓形，圓心在生成螺線上，半徑與原點的距離成正比，比值爲 $p\,(0<p<1)$，意即：原基的圓心與原點的距離爲 R，則原基的半徑爲 pR；

發散角　兩個前後順序的原基之間和原點所構成的角度爲定值，其共同值就稱爲「發散角」。本作品中，發散角以 φ 表示，並且除了第三點：發散角爲 2π 的有理倍數外，其他各點之 φ 值皆爲 2π 的無理倍數。

爲了要單純的**以數學方法研究原基排列的規則**，我們做出以下假設：

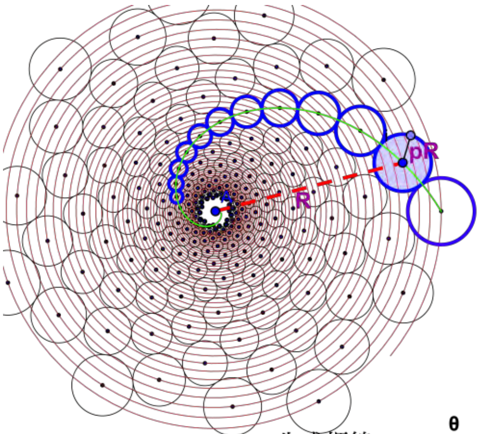
① 同一生成螺線上的原基不可重疊。

② 同一生成螺線上的原基，其 p 值應固定。

③ 不必考慮原基的位置及數量，研究的重點在於原基排列的結構。

④ 本作品中 $\frac{\varphi}{2\pi}$ 的第 k 個漸近分數表示爲 $\frac{p_k}{q_k}$ (參閱第 4 頁)

⑤ 定義數列 $S_{\varphi}=\langle q_1, q_2, q_3, \cdots\cdots \rangle$



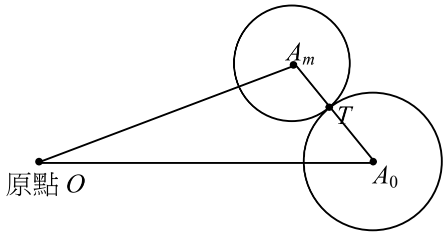
生成螺線 $r=a^{\theta}$

一、發散角與螺旋結構之關係

在「**向日葵裏的黃金項鍊**」作品中，有一些相關的概念與數學符號在本次研究中引用，介紹如下：

① 選定一初始原基標示爲 A_0，假設 A_m 爲後續第 m 個產生的原基，並與 A_0 相切；

則 $p^2=1-2\times\dfrac{\cos m\varphi+1}{a^{m\varphi}+\dfrac{1}{a^{m\varphi}}+2}$



證明

令$\overline{OA_0}=a^{\theta}$　A_m 爲沿生成螺線逆時針旋轉 $m\varphi$ 產生的第 m 個原基 $\therefore\overline{OA_m}=a^{\theta+m\varphi}=a^{\theta}\times a^{m\varphi}$

$\because$原基的半徑與原點的距離成正比　　$\therefore\overline{A_0T}=p\overline{OA_0}=pa^{\theta}$、$\overline{A_mT}=p\overline{OA_m}=pa^{\theta}\times a^{m\varphi}$

餘弦定理　$(pa^{\theta}+pa^{\theta}\times a^{m\varphi})^2=a^{2\theta}+a^{2\theta}\times a^{2m\varphi}-2\times a^{\theta}\times(a^{\theta}\times a^{m\varphi})\times\cos m\varphi$

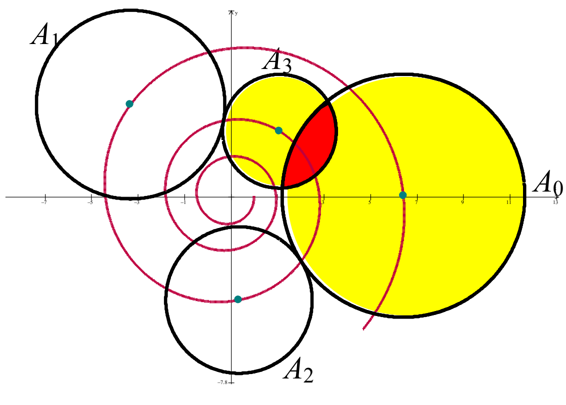
$\Rightarrow p^2a^{2\theta}(1+a^{m\varphi})^2=a^{2\theta}(1+a^{2m\varphi}-2\times a^{m\varphi}\times\cos m\varphi)$

$$\Rightarrow p^2=\frac{1+a^{2m\varphi}-2\times a^{m\varphi}\times\cos m\varphi}{(1+a^{m\varphi})^2}=\frac{(1+a^{2m\varphi}+2a^{m\varphi})-2\times a^{m\varphi}\times\cos m\varphi-2a^{m\varphi}}{(1+a^{m\varphi})^2}$$

$$=\frac{(1+a^{2m\varphi}+2a^{m\varphi})-2a^{m\varphi}(\cos m\varphi+1)}{1+a^{2m\varphi}+2a^{m\varphi}}=1-2\times\frac{a^{m\varphi}(\cos m\varphi+1)}{1+a^{2m\varphi}+2a^{m\varphi}}=1-2\times\frac{\cos m\varphi+1}{a^{m\varphi}+\dfrac{1}{a^{m\varphi}}+2}$$

原基間的相切與選定的初始原基 A_0 無關，即$\forall\ i\in\mathbf{N}$，原基 A_i 與原基 A_{m+i} 也會相切，生成螺線的 p^2 值應爲 A_0 與 A_m, $\forall m\in N$ 相切所計算出來的 p^2 值中最小的那一個。

比如說：計算出原基 A_0 與 A_2 相切的 p^2 值令爲 u，原基 A_0 與 A_3 相切的 p^2 值令爲 v，若 $u>v$，且此生成螺線取 u 作 p^2 值，則原基 A_0 與 A_2 雖然相切，但是 $v<u$，原基 A_0 與 A_3 會重疊，這樣不合理！



② 定義函數 $P_a(m)=1-2\times\dfrac{\cos m\varphi+1}{a^{m\varphi}+\dfrac{1}{a^{m\varphi}}+2}$, $m\in\mathbf{N}$、函數 $Q(a)=min\{P_a(m)\mid m\in\mathbf{N}\}$

(一)$\frac{\varphi}{2\pi}$ 的連分數

我們發現：$m\in\boldsymbol{N}$，$P_a(m)$愈小，$\cos m\varphi$ 的值似乎就愈大，因此如何讓有向角 $m\varphi$ 的終邊與 x 軸正向愈靠近，便成了我們的目標。

① $\frac{\varphi}{2\pi}$ 的連分數寫成 $\frac{\varphi}{2\pi}=\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cfrac{1}{\cdots+\cfrac{1}{a_n+\cfrac{1}{\cdots\cdots}}}}}}$，其中 $a_1, a_2\cdots\cdots a_n\cdots$皆為正整數。

簡便起見，簡寫為$[a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots, a_n,\cdots\cdots]$。

② 令 $p_0=p_1=1$、$q_0=1$、$q_1=a_1$ 且 $\begin{cases}p_k=a_kp_{k\text{-}1}+p_{k\text{-}2}\\ q_k=a_kq_{k\text{-}1}+q_{k\text{-}2}\end{cases}, k\geq 2$，則 $\frac{p_k}{q_k}$ 稱為此連分數之第 k 個漸近分數，漸近分數是所有分母不超過 q_k 的分數中最接近者，也就是說它們是 $\frac{\varphi}{2\pi}$ 的最佳漸近分數。我們定義數列 $S_\varphi=<q_1, q_2, q_3, \cdots\cdots>$。

③ $\forall k\in\boldsymbol{N}$，$\frac{p_{2k\text{-}1}}{q_{2k\text{-}1}}>\frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}}$ 且 $\frac{p_{2k}}{q_{2k}}>\frac{p_{2k\text{-}2}}{q_{2k\text{-}2}}$，亦即偶數項部分形成嚴格遞增數列，而奇數項部分形成嚴格遞減數列。

例一 $\varphi=\sqrt{5}$，則 $\frac{\sqrt{5}}{2\pi}\fallingdotseq 0.355881=[2, 1, 4, 3, 1, 4, 1, 7, \cdots\cdots]$，

可以輾轉相除法運算之 (式中小數為 6 位小數之近似值)

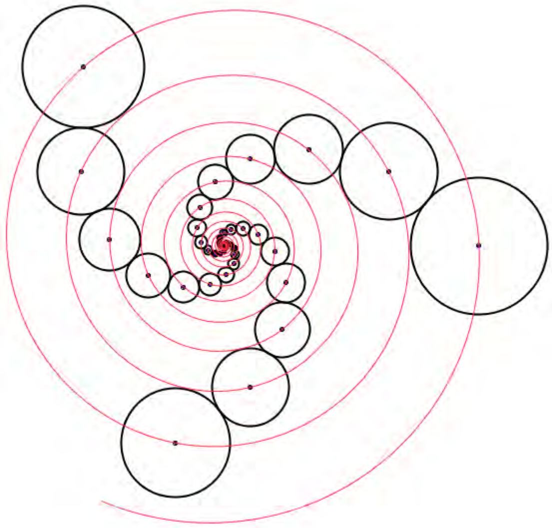
2	1	0.355881	0
	0.711763	0	
4	0.288237	0.355881	1
	0.270575	0.288237	
1	0.017662	0.067644	3
	0.014657	0.052987	
1	0.003005	0.014657	4
	0.002637	0.01202	
	0.000368	0.002637	7
		0.002573	
		0.000064	

而漸近分數依序為 $\frac{1}{2}=0.5$, $\frac{1}{3}\fallingdotseq 0.333333$, $\frac{5}{14}\fallingdotseq 0.357143$, $\frac{16}{45}\fallingdotseq 0.355556$, $\frac{21}{59}\fallingdotseq 0.355932$, $\frac{100}{281}\fallingdotseq 0.355872$, $\frac{121}{340}\fallingdotseq 0.355882$, $\frac{947}{2661}\fallingdotseq 0.355881$

$\Rightarrow S_{\sqrt{5}}=<2, 3, 14, 45, 59, 281, 340, 2661, \cdots\cdots>$

而且偶數項嚴格遞增，奇數項嚴格遞減，即 $\frac{1}{2}>\frac{5}{14}>\frac{21}{59}>\frac{121}{340}>\cdots\cdots>\frac{947}{2661}>\frac{100}{281}>\frac{16}{45}>\frac{1}{3}$

有了連分數這個工具，我們嘗試黃金角以外的角度，於是取了 $\varphi=\sqrt{5}$ 作爲發散角，並用之前介紹過的連分數公式，找出 $\frac{\sqrt{5}}{2\pi}$ 的 $S_{\sqrt{5}}=<2, 3, 14, 45, 59, 281, 340, 2661, \cdots\cdots>$，並套用和研究向日葵螺旋結構一樣的方法，結果發現：任意發散角可找到最小的 p^2 值而形成單螺旋結構，且看以下各點的討論。



(二)旋轉 $q_k\varphi$ 角後的原基，與初始原基的夾角

因爲 $\frac{p_k}{q_k}$ 是 $\frac{\varphi}{2\pi}$ 的第 k 個漸近分數，所以 $q_k\varphi$ 會愈來愈接近 $p_k{\cdot}2\pi$，而且只要 m 值不是 q_k 數列中的一項，$m\varphi$ 終邊大都離 x 軸正向很遠(夾角大)。

定理一　$\forall m\in\mathbf{N}$，若 $q_k<m<q_{k+1}$，其中 $k\in\mathbf{N}$，$\frac{p_k}{q_k}$ 爲 $\frac{\varphi}{2\pi}$ 的第 k 個漸近分數，

則 $\cos m\varphi<\cos q_k\varphi$ 。

證明　$\forall n\in\mathbf{N}$，$\left|\frac{n}{m}-\frac{\varphi}{2\pi}\right|>\left|\frac{p_k}{q_k}-\frac{\varphi}{2\pi}\right|\Rightarrow|m\varphi-2n\pi|>|q_k\varphi-2p_k\pi|\times\frac{m}{q_k}>|q_k\varphi-2p_k\pi|$

$\Rightarrow\cos m\varphi<\cos q_k\varphi$ 。

例二　$\varphi=\sqrt{5}$ 時，$q_k\varphi$ 在$-180°\sim180°$的同界角如下

q_k	2	3	14	45	59	281	340
$q_k\varphi$ 同界角	$-103.77°$	$24.35°$	$-6.36°$	$5.28°$	$-1.08°$	$0.95°$	$-0.13°$

除了 $q_1=2$ 之外，其餘會根據 k 的奇偶性不同，$q_k\varphi$ 會分別落在第一象限及第四象限，而且 $\cos q_k\varphi$ 遞增趨近於 1。

(三)$Q(a)$值存在且等於 $P_a(q_k)$

1.m 是正整數，則存在 q_k 使得 $P_a(m)\geq P_a(q_k)$

定理二　若 m 爲正整數，則存在某一正整數 k，使得 $q_k\leq m<q_{k+1}$，且 $P_a(m)\geq P_a(q_k)$。

證明　很顯然的，存在某一正整數 k，使得 $q_k\leq m<q_{k+1}$，

① 若 $m=q_k$，則 $P_a(m)=P_a(q_k)$

② 若 $q_k<m<q_{k+1}$，則由**定理一** $\cos m\varphi<\cos q_k\varphi\Rightarrow\cos m\varphi+1<\cos q_k\varphi+1$

又 $q_k<m\Rightarrow q_k\varphi<m\varphi\Rightarrow a^{q_k\varphi}+\dfrac{1}{a^{q_k\varphi}}+2<a^{m\varphi}+\dfrac{1}{a^{m\varphi}}+2$ (由於 $f(x)=a^x+\dfrac{1}{a^x}+2$ 在 $x\geq0$ 時遞增)

$$\therefore\ \frac{\cos m\varphi+1}{a^{m\varphi}+\frac{1}{a^{m\varphi}}+2}<\frac{\cos q_k\varphi+1}{a^{q_k\varphi}+\frac{1}{a^{q_k\varphi}}+2}\Rightarrow1-2\times\frac{\cos m\varphi+1}{a^{m\varphi}+\frac{1}{a^{m\varphi}}+2}>1-2\times\frac{\cos q_k\varphi+1}{a^{q_k\varphi}+\frac{1}{a^{q_k\varphi}}+2}\Rightarrow P_a(m)>P_a(q_k)$$

由①②得 $P_a(m)\geq P_a(q_k)$。

2.$Q(a)$存在性（ 固定生成螺線後，p 值有最小值的存在性 ）

定理三　若生成螺線方程式爲 $r=a^\theta(0<a<1)$，且令 $p^2=P_a(q_k), k\in\mathbf{N}$，

則$\forall n>\dfrac{1}{\varphi}log_a\dfrac{(1-p)^2}{1-p^2}$，$P_a(n)>P_a(q_k)$恆成立。

證明　令 $x=a^{n\varphi}$，因爲 $P_a(n)=1-2\times\dfrac{\cos n\varphi+1}{x+\frac{1}{x}+2}>1-2\times\dfrac{2}{x+\frac{1}{x}+2}$

所以欲使 $P_a(n)>P_a(q_k)$，即求 $\dfrac{2}{x+\frac{1}{x}+2}<\dfrac{\cos q_k\varphi+1}{a^{q_k\varphi}+\frac{1}{a^{q_k\varphi}}+2}=\dfrac{1-p^2}{2}$ 之 x 的範圍即可！

$$\frac{2}{x+\frac{1}{x}+2}<\frac{1-p^2}{2}\Rightarrow(1-p^2)x^2-(2+2p^2)x+(1-p^2)>0\Rightarrow x<\frac{(1-p)^2}{1-p^2} \text{ 或 } x>\frac{(1+p)^2}{1-p^2}>1(\text{不合})$$

$$x<\frac{(1-p)^2}{1-p^2}\Rightarrow a^{n\varphi}<\frac{(1-p)^2}{1-p^2}\Rightarrow n\varphi>log_a\frac{(1-p)^2}{1-p^2}\Rightarrow n>\frac{1}{\varphi}log_a\frac{(1-p)^2}{1-p^2}$$

定理四　若生成螺線方程式爲 $r=a^{\theta}(0<a<1)$，則必存在 $k\in\mathbf{N}$，使得 $Q(a)=P_a(q_k)$。

證明　令 $p^2=P_a(q_1)$、$t=\frac{1}{\varphi}log_a\frac{(1-p)^2}{1-p^2}$ 且存在 m 使得 $q_m\le t<q_{m+1}$，

由**定理三** $\forall n>t$，$P_a(n)$恆大於 $P_a(q_1)$，即 $Q(a)=min\{P_a(q_1), P_a(q_2), \cdots\cdots, P_a(q_m)\}$

顯然，必存在 $k\in\mathbf{N}$，使得 $Q(a)=P_a(q_k)$。

定理三可以讓我們在有限的 q_k 值中尋找 $P_a(q_k)$最小值，即 $Q(a)$值，請看下例。

例三　生成螺線 $r=0.99^{\theta}$、發散角 $\varphi=\sqrt{5}\Rightarrow S_{\sqrt{5}}=<2, 3, 14, 45, 59, 281, 340, 2661, \cdots\cdots>$

$$p^2=P_{0.99}(q_1)=1-2\times\frac{\cos 2\sqrt{5}+1}{0.99^{2\sqrt{5}}+\frac{1}{0.99^{2\sqrt{5}}}+2}\fallingdotseq 0.619167\Rightarrow t=\frac{1}{\sqrt{5}}log_{0.99}\frac{(1-p)^2}{1-p^2}=94.615919$$

$59\le t<281\Rightarrow Q(0.99)=min\{P_{0.99}(2), P_{0.99}(3), P_{0.99}(14), P_{0.99}(45), P_{0.99}(59)\}=P_{0.99}(14)=0.027345$

q_k	$a^{q_k\varphi}+\frac{1}{a^{q_k\varphi}}+2$	$\cos q_k\varphi+1$	$P_a(q_k)$
2	4.002021	0.762052	0.619167
3	4.004547	1.911031	0.045569
14	4.099808	1.993849	0.027345
45	5.112908	1.995762	0.219324
59	6.031210	1.999822	0.336842
281	554.792151	1.999863	0.992791
340	2083.616110	1.999997	0.998080

(四)螺旋結構的產生、方向與螺線數目

我們已經知道：螺旋結構是生成螺線上相鄰的原基所形成。當固定生成螺線 $r=a^{\theta}$時，必存在某一正整數 k，使得 $Q(a)=P_a(q_k)$，則每間隔 q_k 個原基序的兩原基必相切，此時原基排

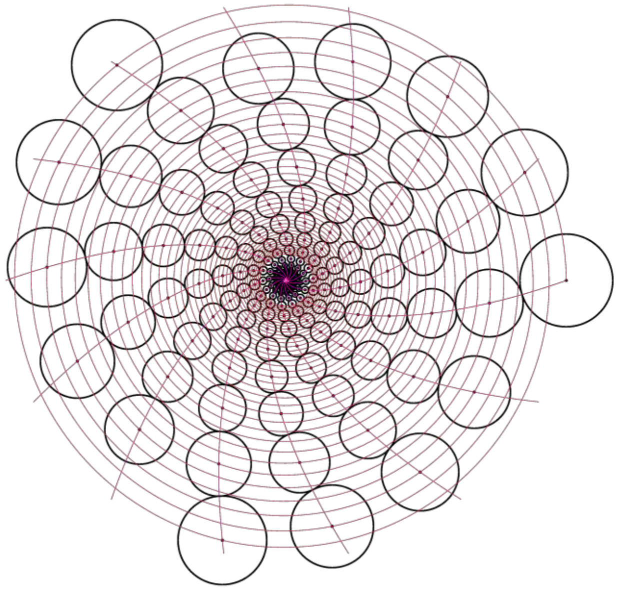
列的螺旋結構產生的螺線數目便爲 q_k 條，而且漸近分數的偶數項嚴格遞增，奇數項嚴格遞減，所以 k 爲奇數時，螺旋方向爲逆時針；k 爲偶數時，螺旋方向爲順時針。

例四　生成螺線 $r=0.99^{\theta}$、發散角 $\varphi=\sqrt{5}$、$Q(0.99)=P_{0.99}(14)=0.027345$，則每間隔 14 個原基序的兩原基必相切，所以螺旋結構產生的螺線數目便爲 14 條。

$a=0.99$　　$\varphi=\sqrt{5}$　　$t=94.615919(S_{\varphi}=\langle 2, 3, 14, 45, 59, 281, \cdots\cdots \rangle)$

q_k	$a^{q_k\varphi}+\dfrac{1}{a^{q_k\varphi}}+2$	$\cos q_k\varphi+1$	$P_a(q_k)$
2	4.002021	0.762052	0.619167
3	4.004547	1.911031	0.045569
14	4.099808	1.993849	0.027345
45	5.112908	1.995762	0.219324
59	6.031210	1.999822	0.336842

$Q(0.99)=P_{0.99}(14)$，每間隔 14 個原基序的兩原基必相切，螺旋方向爲逆時針

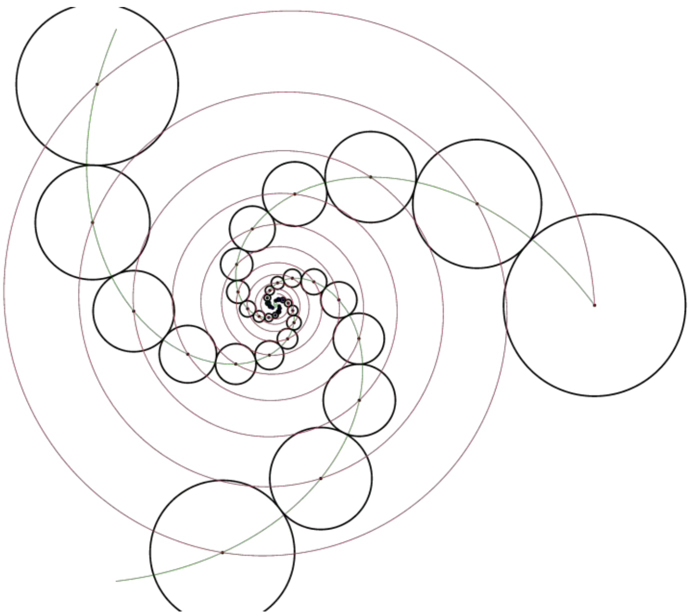


例五　生成螺線 $r=0.95^{\theta}$、發散角 $\varphi=2.25$、$Q(0.95)=P_{0.95}(3)=0.081305$，則每間隔 3 個原基序的兩原基必相切，所以螺旋結構產生的螺線數目便爲 3 條。

$a=0.95$　　$\varphi=2.25$　　$t=18.178525(S_{\varphi}=\langle 2, 3, 11, 14, 67, \cdots\cdots \rangle)$

q_k	$a^{q_k\varphi}+\dfrac{1}{a^{q_k\varphi}}+2$	$\cos q_k\varphi+1$	$P_a(q_k)$
2	4.053515	0.789204	0.610607
3	4.121077	1.893006	0.081305
11	5.840074	1.927644	0.339856
14	7.230348	1.996468	0.447753

$Q(0.95)=P_{0.95}(3)$，每間隔 3 個原基序的兩原基必相切，螺旋方向爲順時針



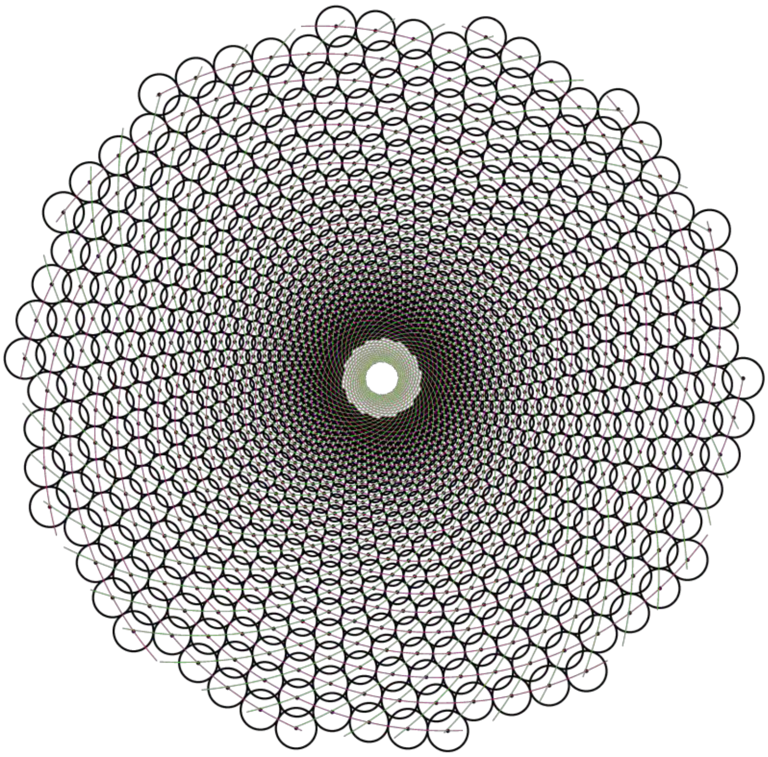
二、發散角產生雙螺旋結構的特性

對於任意發散角及生成螺線，皆可使原基排列成一單螺旋結構；然而發散角 φ 時，是否存在生成螺線 $r=a^{\theta}$，可讓原基排列成雙螺旋結構？

以下 3 個例子：假設欲使原基 A_0 同時與 A_{q_k}、A_{q_s}相切，則令 $x=a^{\varphi}$，解方程式 $\dfrac{\cos q_k\varphi+1}{x^{q_k}+\dfrac{1}{x^{q_k}}+2}=\dfrac{\cos q_s\varphi+1}{x^{q_s}+\dfrac{1}{x^{q_s}}+2}$ 必在開區間 (0, 1) 恰有一解(見**定理五**)，此解所得生成螺線 $r=a^{\theta}$ 卻不一定使 $P_a(q_k)=P_a(q_s)$最小，此時會產生原基重疊的不合理結構。若選擇適當的 q_k、q_s 值，有可能產生螺旋方向相同的雙螺旋結構！這是 φ 為黃金角時不可能發生的現象。

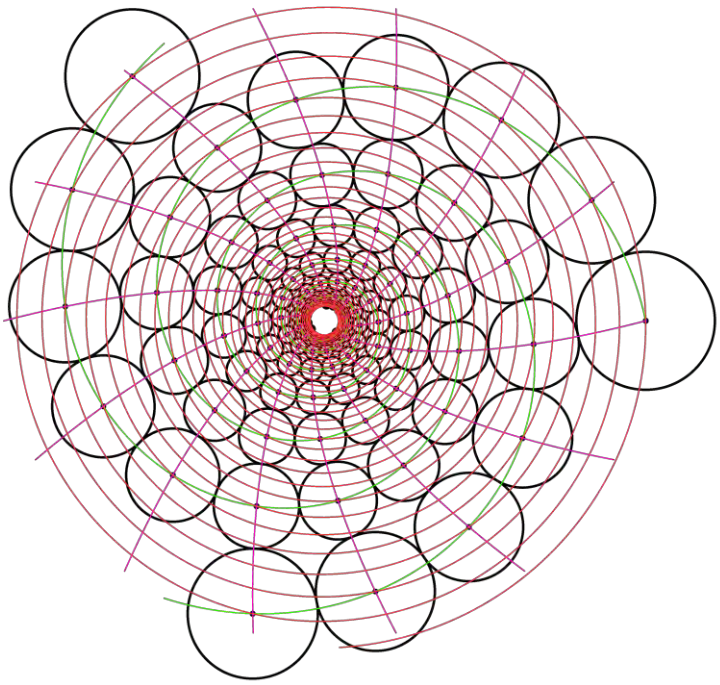
例六　$\varphi=\sqrt{5}$，欲使原基 A_0 同時與 A_{14}、A_{45} 相切，解方程式 $\dfrac{\cos 14\sqrt{5}+1}{x^{14}+\dfrac{1}{x^{14}}+2}=\dfrac{\cos 45\sqrt{5}+1}{x^{45}+\dfrac{1}{x^{45}}+2}$

得 $x=0.998552=a^{\sqrt{5}}\Rightarrow a=0.999352$ 但 $P_a(14)=P_a(45)=0.003178$ 並非最小值，$P_a(59)=0.001913$ 才是最小值，所以 A_0 會與 A_{59} 重疊。原基重疊是不合理的結構！



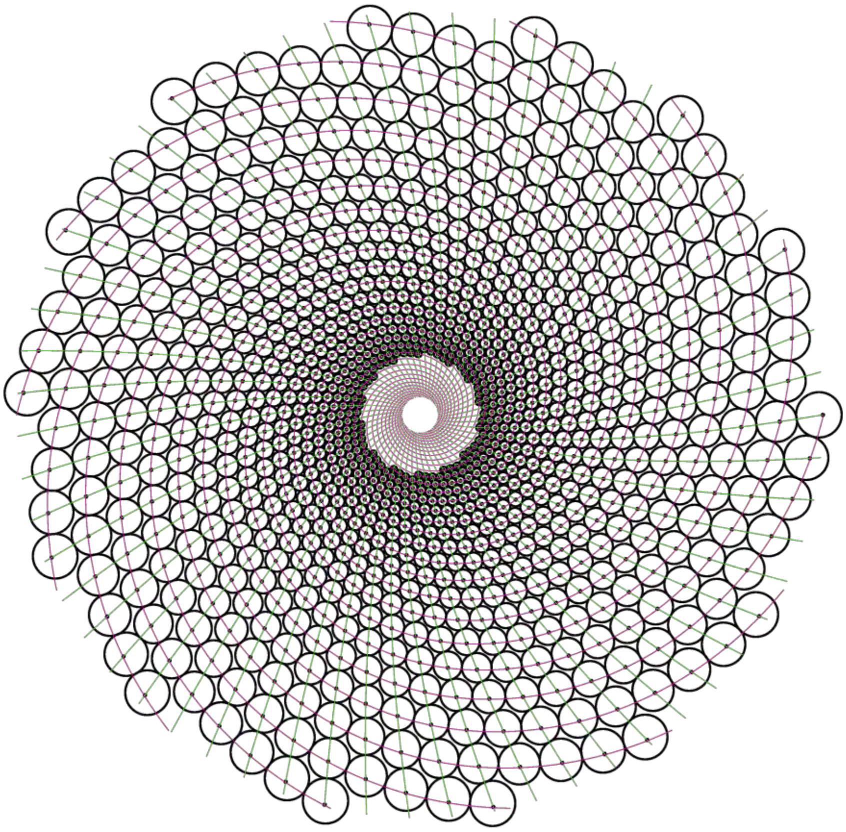
例七　$\varphi=\sqrt{5}$，欲使原基 A_0 同時與 A_3、A_{14} 相切，解方程式 $\dfrac{\cos 3\sqrt{5}+1}{x^3+\dfrac{1}{x^3}+2}=\dfrac{\cos 14\sqrt{5}+1}{x^{14}+\dfrac{1}{x^{14}}+2}$

得 $x=0.970212=a^{\sqrt{5}}\Rightarrow a=0.986567$ 且 $P_a(3)=P_a(14)=0.046448$ 恰為最小值。所以形成逆時針方向 14 條、順時針方向 3 條的雙螺旋結構。



例八　$\varphi=\sqrt{5}$，欲使原基 A_0 同時與 A_{14}、A_{59} 相切，解方程式 $\dfrac{\cos 14\sqrt{5}+1}{x^{14}+\dfrac{1}{x^{14}}+2}=\dfrac{\cos 59\sqrt{5}+1}{x^{59}+\dfrac{1}{x^{59}}+2}$

得 $x=0.998093=a^{\sqrt{5}} \Rightarrow a=0.999147$ 且 $P_a(14)=P_a(59)=0.003254$ 恰爲最小値。所以形成方向皆逆時針 14 條、59 條的雙螺旋結構。



(一)雙螺旋結構意義及檢測方法

給定發散角 φ，欲找尋生成螺線 $r=a^{\theta}$ 使得原基 A_0 同時與 A_{q_k}、A_{q_v} 相切，且此時 $P_a(q_k)$ 爲最小値，數學式可寫成：

$$\begin{cases} ① \ P_a(q_k)=P_a(q_v) \ (\text{ 原基 } A_0 \text{ 同時與 } A_{q_k}\text{、}A_{q_v} \text{ 相切 }) \\ ② \ P_a(q_k)\leq P_a(q_n) \quad \forall n\in \mathbf{N} \ (\text{ 原基不會重疊 }) \end{cases}$$

①式 $P_a(q_k)=P_a(q_v)$ 可化簡爲 $\dfrac{\cos q_k\varphi+1}{a^{q_k\varphi}+\dfrac{1}{a^{q_k\varphi}}+2}=\dfrac{\cos q_v\varphi+1}{a^{q_v\varphi}+\dfrac{1}{a^{q_v\varphi}}+2}$，

令 $x=a^{\varphi}$，再化簡爲多項方程式 $sx^{2q_k}-x^{q_k+q_v}+(2s-2)x^{q_k}-x^{q_k-q_v}+s=0$，

其中 $0<s=\dfrac{\cos q_v\varphi+1}{\cos q_k\varphi+1}<1$，利用以下**定理五**可得方程式在開區間 $(0, 1)$ 有唯一解，所以找到了生成螺線 $r=a^{\theta}$。

② $\forall n\in \mathbf{N}$，$P_a(q_k)\leq P_a(q_n)$，意即 $P_a(q_k)$是最小値。

根據**定理三**：令 $p^2=P_a(q_k)$，$\forall n>\dfrac{1}{\varphi}log_a\dfrac{(1-p)^2}{1-p^2}$，$P_a(n)>P_a(q_k)$恆成立，所以可以對 $P_a(q_k)$ 是否爲最小值做檢測，若 $P_a(q_k)$並非最小，則雙螺旋數 q_k、q_v 就不存在。

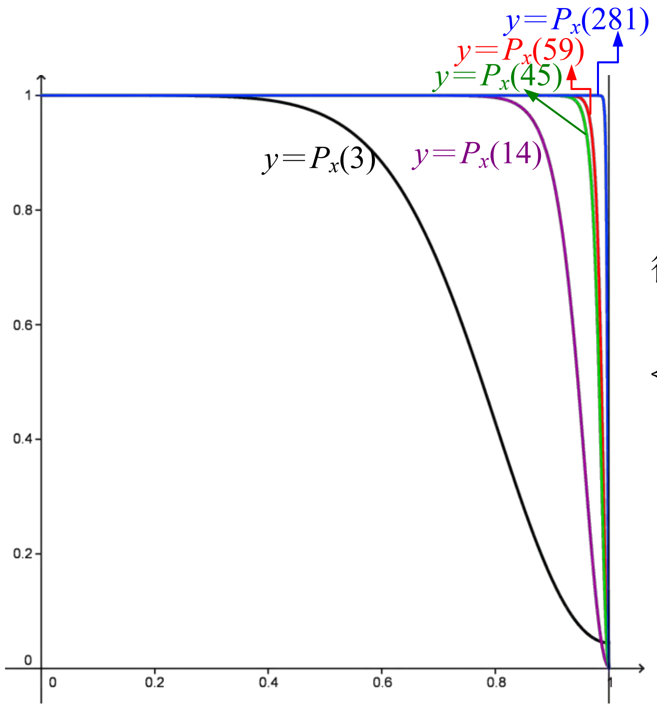
定理五　若 $s\in\boldsymbol{R}$ 且 $0<s<1$，m、$n\in\boldsymbol{N}$ 且 $m>n$，則 $sx^{2m}-x^{m+n}+(2s-2)x^m-x^{m-n}+s=0$ 在開區間 $(0, 1)$ 有唯一解。(證明請參閱「**向日葵裏的黃金項鍊**」**定理十三**)

(二)函數 $P_x(q_k)$的性質

我們不滿足：求出相切時的生成螺線 $r=a^{\theta}$ 後，再對 $P_a(q_k)$是否爲最小值做檢測。φ 爲黃金角時，雙螺旋數必爲 *Fibonacci* 數列相鄰兩項；φ 不爲黃金角的情況，雙螺旋數又有怎樣的特性？雖然可以使用 *Geogebra* 作出許多雙螺旋結構圖，但是真正找到答案，卻是投入了相當久的時間的成果。

我們先研究 x 的函數 $P_x(q_k)=1-2\times\dfrac{\cos q_k\varphi+1}{x^{q_k\varphi}+\dfrac{1}{x^{q_k\varphi}}+2}$：

例九　以 $\varphi=\sqrt{5}$爲例：作出 $y=P_x(3)$、$y=P_x(14)$、$y=P_x(45)$、$y=P_x(59)$、$y=P_x(281)$圖形如下，

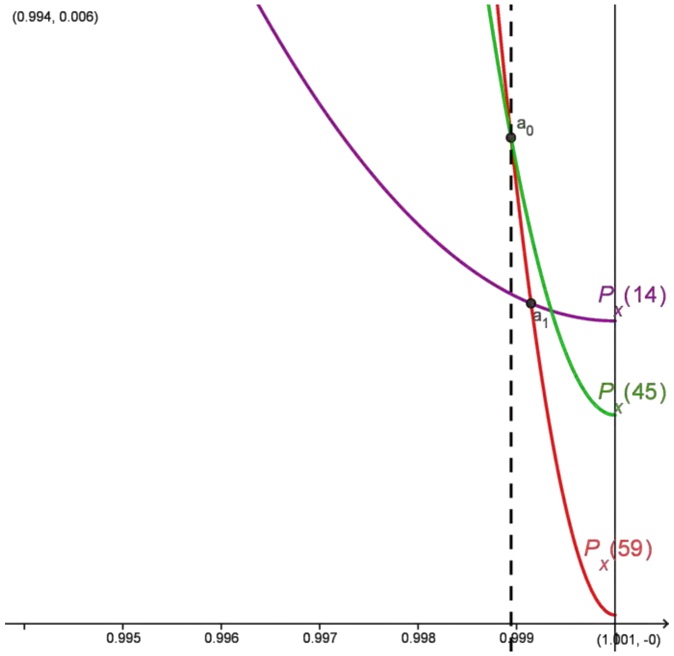


得以下三點結論：

$$\begin{cases} ① \; y=P_x(q_k) \text{ 爲嚴格遞減函數} \\ ② \text{ 任兩個函數恰有一個交點 (定理五)} \\ ③ \text{ 若 } u>v\text{，則} \begin{cases} \text{交點左方 } P_x(q_u)>P_x(q_v) \\ \text{交點右方 } P_x(q_u)<P_x(q_v) \end{cases} \end{cases}$$

兩函數的交點是什麼意義？參考以下的放大圖形，比如說：$P_x(45)=P_x(59)$的解爲 a_0，表示生成螺線 $r=a_0^{\theta}$ 能使原基 A_0 與 A_{45}、A_{59} 同時相切，但是 $y=P_x(14)$橫越點$(a_0, P_{a_0}(45))$下方，所以 $P_{a_0}(14)<P_{a_0}(45)$，生成螺線 $r=a_0^{\theta}$ 卻使原基 A_0 與 A_{14} 產生重疊；$P_x(14)=P_x(59)$的解爲 a_1，

表示生成螺線 $r=a_1{}^{\theta}$ 能使原基 A_0 與 A_{14}、A_{59} 同時相切，且 $\forall n\in\boldsymbol{N}$，$P_{a_1}(14)\le P_{a_1}(q_n)$，生成螺線 $r=a_1{}^{\theta}$ 使原基排列產生螺旋數 14 與 59 的雙螺旋結構。



定理六　給定 $q_k\in S_\varphi$，$P_x(q_k)$ 為嚴格遞減函數。

證明　設 $x_1>x_2$，則 $(x_1{}^{q_k\varphi}+\frac{1}{x_1{}^{q_k\varphi}})-(x_2{}^{q_k\varphi}+\frac{1}{x_2{}^{q_k\varphi}})=(x_1{}^{q_k\varphi}-x_2{}^{q_k\varphi})+(\frac{1}{x_1{}^{q_k\varphi}}-\frac{1}{x_2{}^{q_k\varphi}})$

$$=(x_1{}^{q_k\varphi}-x_2{}^{q_k\varphi})+\frac{x_2{}^{q_k\varphi}-x_1{}^{q_k\varphi}}{x_1{}^{q_k\varphi}x_2{}^{q_k\varphi}}=(x_1{}^{q_k\varphi}-x_2{}^{q_k\varphi})\left(\frac{x_1{}^{q_k\varphi}x_2{}^{q_k\varphi}-1}{x_1{}^{q_k\varphi}x_2{}^{q_k\varphi}}\right)<0$$

所以 $P_{x_1}(q_k)-P_{x_2}(q_k)=2(\cos q_k\varphi+1)\left(\dfrac{1}{x_2{}^{q_k\varphi}+\frac{1}{x_2{}^{q_k\varphi}}+2}-\dfrac{1}{x_1{}^{q_k\varphi}+\frac{1}{x_1{}^{q_k\varphi}}+2}\right)$

$$=2(\cos q_k\varphi+1)\left(\frac{1}{x_2{}^{q_k\varphi}+\frac{1}{x_2{}^{q_k\varphi}}+2}-\frac{1}{x_1{}^{q_k\varphi}+\frac{1}{x_1{}^{q_k\varphi}}+2}\right)$$

$$=2(\cos q_k\varphi+1)\left(\frac{(x_1{}^{q_k\varphi}+\frac{1}{x_1{}^{q_k\varphi}})-(x_2{}^{q_k\varphi}+\frac{1}{x_2{}^{q_k\varphi}})}{(x_2{}^{q_k\varphi}+\frac{1}{x_2{}^{q_k\varphi}}+2)(x_1{}^{q_k\varphi}+\frac{1}{x_1{}^{q_k\varphi}}+2)}\right)<0$$

(三)給定任意發散角時，必存在生成螺線使得原基排列形成雙螺旋結構

我們藉由函數 $P_x(q_k)$的分析，利用函數 $P_x(q_k)-P_x(q_n)=0$ 的唯一解及連續性質，來證得：必能找到生成螺線使得原基排列形成雙螺旋結構。

定理七　發散角 φ，給定 $q_k\in S_\varphi$，定義函數 $f_n(x)=\dfrac{\cos q_n\varphi+1}{x^{q_n\varphi}+\dfrac{1}{x^{q_n\varphi}}+2}-\dfrac{\cos q_k\varphi+1}{x^{q_k\varphi}+\dfrac{1}{x^{q_k\varphi}}+2}=P_x(q_k)-P_x(q_n)$

由**定理五**可設方程式 $f_n(x)=0$ 在開區間(0, 1)的唯一解爲 a_n，且顯然 $y=f_n(x)$爲連續函數。

試證：(1) 存在唯一 $u\in\mathbf{N}, u>k$，使得 $\begin{cases}P_{a_u}(q_u)\le P_{a_u}(q_n)\\P_{a_n}(q_u)\le P_{a_n}(q_n)\end{cases}$，$\forall n\in\mathbf{N}$，$n>k$。

(2) 若 $k\ne 1$，則存在唯一 $v\in\mathbf{N}, v<k$，使得 $\begin{cases}P_{a_v}(q_v)\le P_{a_v}(q_n)\\P_{a_n}(q_v)\le P_{a_n}(q_n)\end{cases}$，$\forall n\in\mathbf{N}$，$n<k$。

證明　(1)根據**定理三**：$\forall n>\dfrac{1}{\varphi}log_{a_{k+1}}\dfrac{(1-p)^2}{1-p^2}$，$P_{a_{k+1}}(n)>P_{a_{k+1}}(q_k)$恆成立，其中 $p^2=P_{a_{k+1}}(q_k)$。

令 q_s 爲 S_φ 中小於等於 $\dfrac{1}{\varphi}log_{a_{k+1}}\dfrac{(1-p)^2}{1-p^2}$ 的最大值，則

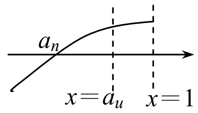
$\forall m>s, m\in\mathbf{N}$　$f_m(a_{k+1})=P_{a_{k+1}}(q_k)-P_{a_{k+1}}(q_m)<0$ 又 $f_m(1)=P_1(q_k)-P_1(q_m)>0$

$\because$ $y=f_m(x)$連續且 $f_m(x)=0$ 在(0, 1)有唯一解，利用勘根原理：$f_m(x)=0$ 的根 $a_m>a_{k+1}$

令 $a_u=min\{a_n|n>k,n\in\mathbf{N}\}=min\{a_{k+1}, a_{k+2},\cdots, a_s\}\Rightarrow f_u(a_u)=P_{a_u}(q_k)-P_{a_u}(q_u)=0\Rightarrow P_{a_u}(q_u)=P_{a_u}(q_k)$

① 設 $q_n>q_k$ 使得 $P_{a_u}(q_n)<P_{a_u}(q_u)=P_{a_u}(q_k)\Rightarrow f_n(a_u)=P_{a_u}(q_k)-P_{a_u}(q_n)>0$

又 $f_n(1)=P_1(q_k)-P_1(q_n)=\dfrac{\cos q_n\varphi+1}{1+1+2}-\dfrac{\cos q_k\varphi+1}{1+1+2}>0$

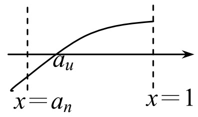


$\because$ $y=f_n(x)$連續且 $f_n(x)=0$ 在(0, 1)有唯一解，利用勘根原理：$f_n(x)=0$ 的根 $a_n<a_u$，矛盾！

$\therefore$ $P_{a_u}(q_u)\le P_{a_u}(q_n)$，$\forall n\in\mathbf{N}$，$n>k$

② 設存在 $q_n>q_k$ 使得 $P_{a_n}(q_u)>P_{a_n}(q_n)=P_{a_n}(q_k)\Rightarrow f_u(a_n)=P_{a_n}(q_k)-P_{a_n}(q_u)<0$

又 $f_u(1)=P_1(q_k)-P_1(q_u)=\dfrac{\cos q_u\varphi+1}{1+1+2}-\dfrac{\cos q_k\varphi+1}{1+1+2}>0$



$\because$ $y=f_u(x)$連續且 $f_u(x)=0$ 在(0, 1)有唯一解，利用勘根原理：$f_u(x)=0$ 的根 $a_n<a_u$，矛盾！

$\therefore$ $P_{a_n}(q_u)\le P_{a_n}(q_n)$，$\forall n\in\mathbf{N}$，$n>k$

(2) 若 $k\ne 1$，令 $a_v=max\{a_1, a_2,\cdots, a_{k-1}\}\Rightarrow f_v(a_v)=P_{a_v}(q_k)-P_{a_v}(q_v)=0\Rightarrow P_{a_v}(q_v)=P_{a_v}(q_k)$

仿(1)之證法可得 $\begin{cases}P_{a_v}(q_v)\le P_{a_v}(q_n)\\P_{a_n}(q_v)\le P_{a_n}(q_n)\end{cases}$，$\forall n\in\mathbf{N}$，$n<k$。

定理八　發散角φ，給定 $q_k\in S_\varphi$，$P_x(q_k)-P_x(q_n)=0$ 在開區間$(0, 1)$的唯一解設為 a_n

由**定理七**存在 u、$v\in\mathbf{N}, u>k>v$，使得$\forall n\in\mathbf{N}$，$\begin{cases}P_{a_u}(q_u)\le P_{a_u}(q_n)\\ P_{a_n}(q_u)\le P_{a_n}(q_n)\end{cases}, n>k$，$\begin{cases}P_{a_v}(q_v)\le P_{a_v}(q_n)\\ P_{a_n}(q_v)\le P_{a_n}(q_n)\end{cases}, n<k$。

則 (1) 若 $a_u\ge a_v$，則 $\begin{cases}P_{a_u}(q_u)\le P_{a_u}(q_n)\\ P_{a_v}(q_v)\le P_{a_v}(q_n)\end{cases}$，$\forall n\in\mathbf{N}$，即：

生成螺線 $r=a_u^{\theta}$時，原基排列形成螺旋數為 q_k、q_u 的雙螺旋結構；

生成螺線 $r=a_v^{\theta}$時，原基排列形成螺旋數為 q_k、q_v 的雙螺旋結構。

(2) 若 $a_u<a_v$，則① $P_{a_u}(q_u)\ge P_{a_u}(q_v)$且 $P_{a_v}(q_u)\le P_{a_v}(q_v)$；

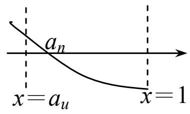
即：生成螺線 $r=a_u^{\theta}$或 $r=a_v^{\theta}$時，原基排列皆出現重疊現象。

② $P_x(q_u)-P_x(q_v)=0$ 的唯一解設為 a，則$\forall n\in\mathbf{N}$，$P_a(q_n)\ge P_a(q_u)=P_a(q_v)$。

即：生成螺線 $r=a^{\theta}$時，原基排列形成螺旋數為 q_u、q_v 的雙螺旋結構。

證明

(1)$q_n>q_k$時，$P_{a_u}(q_u)\le P_{a_u}(q_n)$成立（**定理七**）

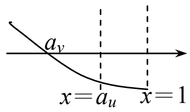


$q_n<q_k$時，設 $P_{a_u}(q_n)<P_{a_u}(q_u)=P_{a_u}(q_k)\Rightarrow P_{a_u}(q_k)-P_{a_u}(q_n)>0$ 又 $P_1(q_k)-P_1(q_n)<0$

利用勘根原理：$P_x(q_k)-P_x(q_n)=0$ 的根 $a_n>a_u\ge a_v$，矛盾！($a_v=max\{a_1, a_2,\cdots, a_{k\text{-}1}\}$)

$\therefore\forall n\in\mathbf{N}$，$P_{a_u}(q_u)\le P_{a_u}(q_n)$　同理可證：$\forall n\in\mathbf{N}$，$P_{a_v}(q_v)\le P_{a_v}(q_n)$

(2)① 設 $P_{a_u}(q_k)=P_{a_u}(q_u)<P_{a_u}(q_v)\Rightarrow P_{a_u}(q_k)-P_{a_u}(q_v)<0$ 又 $P_1(q_k)-P_1(q_v)<0$



$\because$ $y=P_x(q_k)-P_x(q_v)$連續且 $P_x(q_k)-P_x(q_v)=0$ 在$(0, 1)$有唯一解，

利用勘根原理：$P_x(q_k)-P_x(q_v)=0$ 的根 $a_v<a_u$，矛盾！

$\therefore$ $P_{a_u}(q_u)\ge P_{a_u}(q_v)$。同理可證：$P_{a_v}(q_u)\le P_{a_v}(q_v)$。

② $P_x(q_u)-P_x(q_v)=0$ 的解 a 滿足 $a_u<a<a_v$

假設 $w\in\mathbf{N}$，使得 $u>w>k$，且 $P_a(q_w)<P_a(q_u)$，則

i) $P_a(q_w)-P_a(q_u)<0$

ii) $u>w>k\Rightarrow a_w>a_u\Rightarrow P_{a_u}(q_w)-P_{a_u}(q_u)>0$

iii) $u>w\Rightarrow q_u>q_w$ 又 $P_1(q_w)-P_1(q_u)>0$ 且 $P_x(q_w)-P_x(q_u)=0$ 在$(0, 1)$有唯一解設為 a_w，

利用勘根原理：$\forall x<a_w\Leftrightarrow P_x(q_w)-P_x(q_u)<0$，取 $\beta<min\{a_w,a_u\}\Rightarrow P_\beta(q_w)-P_\beta(q_u)<0$

由 *i)*、*ii)*、*iii)*再次利用勘根原理：$P_x(q_w)-P_x(q_u)=0$ 在區間(β, a_u)、(a_u, a)皆有一根，矛盾！

$\therefore P_a(q_w) \geq P_a(q_u)$。同理可證：$w \in \mathbf{N}$，使得 $k > w > v$ 時，$P_a(q_w) \geq P_a(q_u)$。

即 $\forall n \in \mathbf{N}$，$P_a(q_n) \geq P_a(q_u)$。

我們將爲**定理七、定理八**舉例說明如下：

例十　$\varphi = \sqrt{5}$、$S_\varphi = \{\underset{q_1}{2}, \underset{q_2}{3}, \underset{q_3}{14}, \underset{q_4}{45}, \underset{q_5}{59}, \underset{q_6}{281}\}$ 選定 $k = 3 \Rightarrow q_k = q_3 = 14$，

(1) $P_x(q_3) - P_x(q_4) = 0$ 的解 $a_4 = 0.999352$

$$\Rightarrow p^2 = P_{a_4}(q_3) \Rightarrow \frac{1}{\varphi} log_{a_4} \frac{(1-p)^2}{1-p^2} = 77.915889 \Rightarrow \forall m > 5，a_m > a_4 \text{ 恆成立}$$

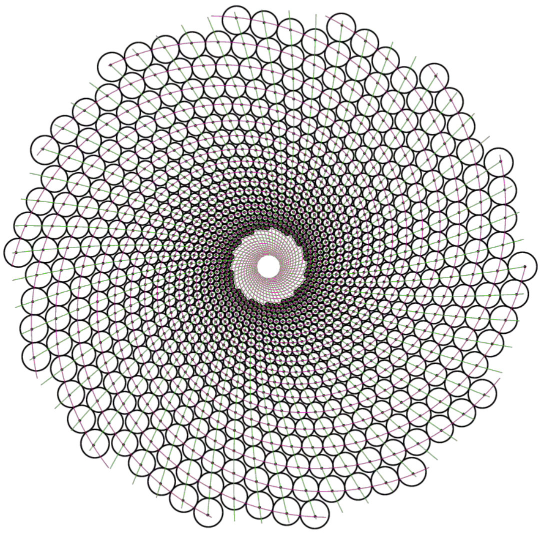
$$\begin{cases} P_x(q_3) - P_x(q_4) = 0 \text{ 的解 } a_4 = 0.999352 \\ P_x(q_3) - P_x(q_5) = 0 \text{ 的解 } a_5 = 0.999147 \end{cases} \Rightarrow min\{a_4, a_5\} = a_5 = 0.999147$$

$$\Rightarrow \begin{cases} P_{a_5}(q_5) \leq P_{a_5}(q_n) \\ P_{a_n}(q_5) \leq P_{a_n}(q_n) \end{cases}，\forall n \in \mathbf{N}，n > 3。$$

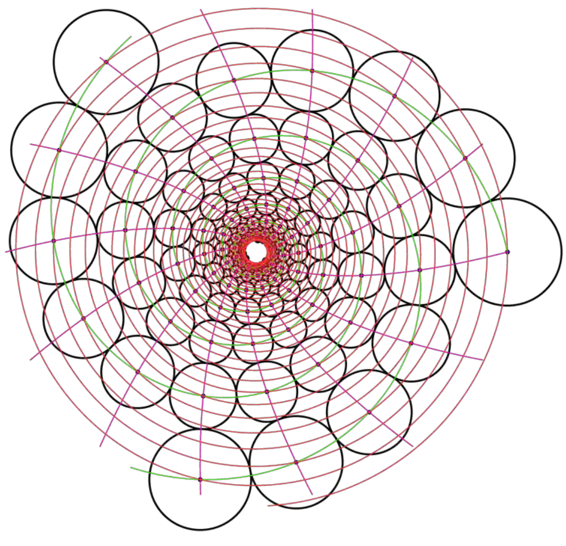
(2) $$\begin{cases} P_x(q_3) - P_x(q_1) = 0 \text{ 的解 } a_1 = 0.933579 \\ P_x(q_3) - P_x(q_2) = 0 \text{ 的解 } a_2 = 0.986567 \end{cases} \Rightarrow max\{a_1, a_2\} = a_2 = 0.986567$$

$$\Rightarrow \begin{cases} P_{a_2}(q_2) = 0.046448 < 0.619322 = P_{a_2}(q_1) \\ P_{a_1}(q_2) = 0.093517 < 0.627834 = P_{a_1}(q_1) \end{cases}。$$

因爲 $a_5 > a_2$，所以生成螺線 $r = a_5{}^\theta$ 時，原基排列形成螺旋數爲 14、59 的雙螺旋結構；生成螺線 $r = a_2{}^\theta$ 時，原基排列形成螺旋數爲 14、3 的雙螺旋結構。



$r = a_5{}^\theta = 0.999147^\theta$



$r = a_2{}^\theta = 0.986567^\theta$

例十一　$\varphi=\sqrt{5}$、$S_\varphi=\{\underset{q_1}{2},\ \underset{q_2}{3},\ \underset{q_3}{14},\ \underset{q_4}{45},\ \underset{q_5}{59},\ \underset{q_6}{281}\}$選定 $k=4\Rightarrow q_k=q_4=45$，

(1) $P_x(q_4)-P_x(q_5)=0$ 的解 $a_5=0.998943$

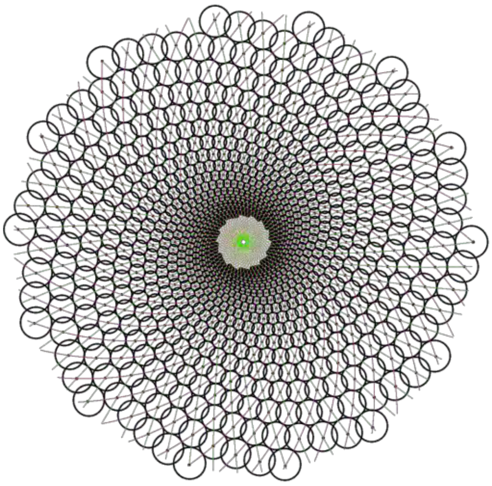
$$\Rightarrow p^2=P_{a_5}(q_4)\Rightarrow\frac{1}{\varphi}log_{a_5}\frac{(1-p)^2}{1-p^2}=59.538922\Rightarrow\forall m>5，a_m>a_5\ \text{恆成立}$$

$$\Rightarrow min\{a_5\}=a_5=0.998943\Rightarrow\begin{cases}P_{a_5}(q_5)\le P_{a_5}(q_n)\\P_{a_n}(q_5)\le P_{a_n}(q_n)\end{cases}，\forall n\in\boldsymbol{N}，n>4。$$

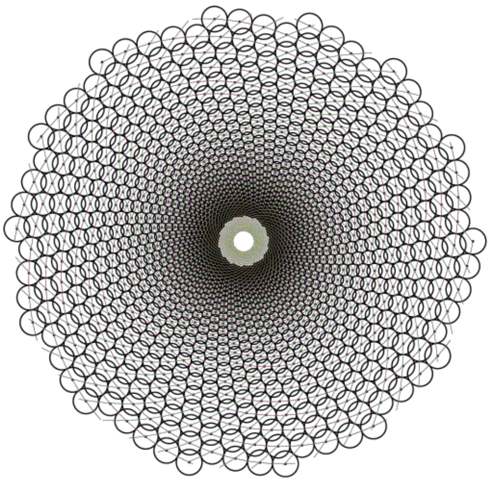
$$\text{(2)}\ \begin{cases}P_x(q_4)-P_x(q_1)=0\ \text{的解}\ a_1=0.979095\\P_x(q_4)-P_x(q_2)=0\ \text{的解}\ a_2=0.995844\\P_x(q_4)-P_x(q_3)=0\ \text{的解}\ a_3=0.999352\end{cases}\Rightarrow max\{a_1,a_2,a_3\}=a_3=0.999352$$

$$\Rightarrow\begin{cases}P_{a_3}(q_3)=0.003178<0.618975=P_{a_3}(q_1)\\P_{a_1}(q_3)=0.104610<0.619823=P_{a_1}(q_1)\end{cases}、\begin{cases}P_{a_3}(q_3)=0.003178<0.044489=P_{a_3}(q_2)\\P_{a_2}(q_3)=0.007299<0.044671=P_{a_2}(q_2)\end{cases}。$$

因爲 $a_5<a_3$，所以生成螺線 $r=a_5{}^\theta$ 或 $r=a_3{}^\theta$ 時，原基排列皆出現重疊現象。

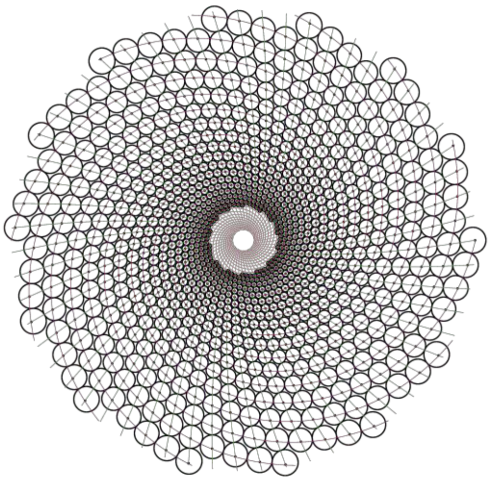


$r=a_5{}^\theta=0.998943^\theta$



$r=a_2{}^\theta=0.995844^\theta$

所以解方程式 $P_x(q_3)-P_x(q_5)=0$ 得 $a=0.998943$，生成螺線 $r=a^\theta$ 時，原基排列形成螺旋數爲 14、59 的雙螺旋結構。



$r=a^\theta=0.998943^\theta$

三、發散角為 2π 的有理倍數亦產生雙螺旋結構

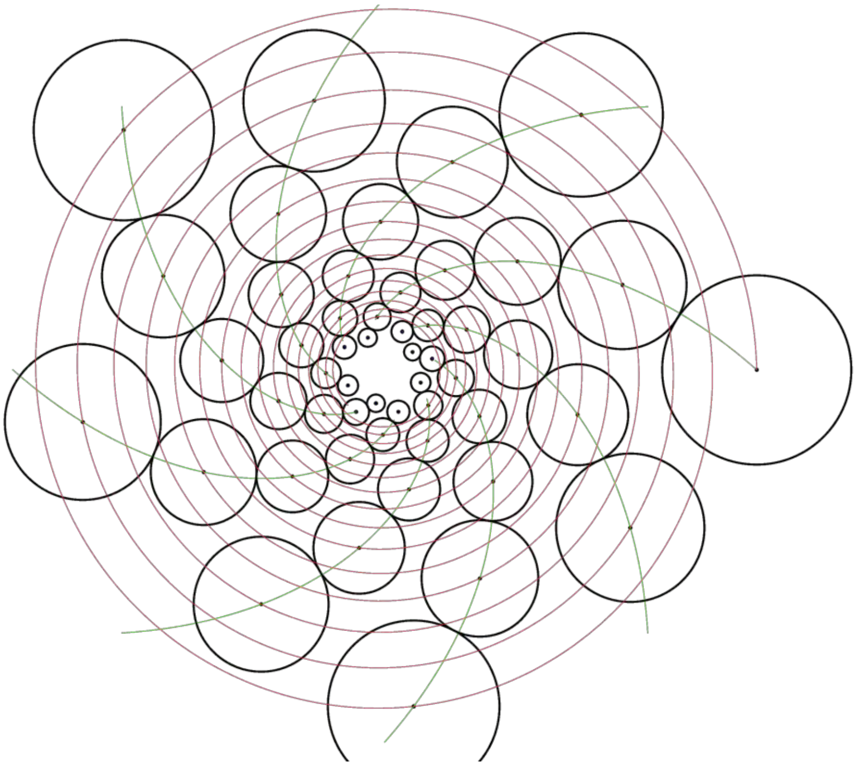
在 $\dfrac{\varphi}{2\pi}=\dfrac{n}{m}$(最簡分數)時，代表每 m 個原基會落在同一直線上，$\dfrac{\varphi}{2\pi}$ 的連分數為有限集合，S_φ亦為有限集合，我們仍然可以對任意生成螺線 $r=a^\theta$ 求得 $Q(a)$值產生單螺旋結構；或是求出適當的生成螺線來產生雙螺旋結構，**定理七**、**定理八**在有限集合 S_φ的條件下顯然成立。

例十二　生成螺線 $r=0.98^\theta$、發散角 $\varphi=\dfrac{21}{55}\times 2\pi$、$Q(0.98)=P_{0.98}(8)=0.064674$，則每間隔 8 個原基序的兩原基必相切，所以螺旋結構產生的螺線數目便為 8 條。

$a=0.98$　　$\varphi=\dfrac{21}{55}\times 2\pi$　　$t=33.992958(S_\varphi=<2, 3, 5, 8, 13, 21, \cdots\cdots>)$

q_k	$a^{q_k\varphi}+\dfrac{1}{a^{q_k\varphi}}+2$	$\cos q_k\varphi+1$	$P_a(q_k)$
2	4.009404	1.085575	0.458486
3	4.021179	1.610648	0.198918
5	4.059014	1.841254	0.092758
8	4.152232	1.941844	0.064674
13	4.410298	1.974012	0.104817
21	5.128506	1.993482	0.222588

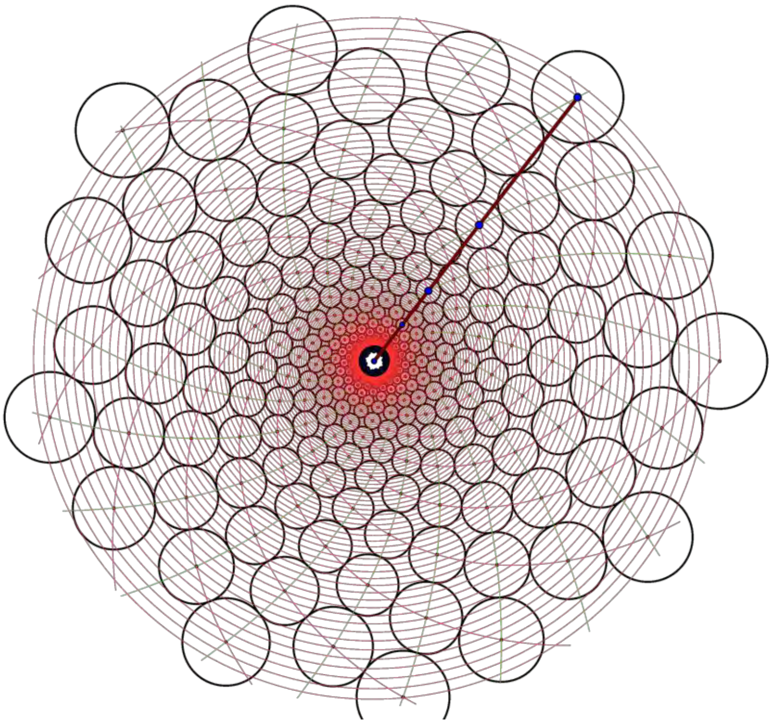
$Q(0.98)=P_{0.98}(8)$，每間隔 8 個原基序的兩原基必相切，螺旋方向為順時針



例十三 $\varphi=\frac{21}{55}\times 2\pi$，欲使原基 A_0 同時與 A_{13}、A_{21} 相切，解方程式

$$\frac{\cos(13\times\frac{21}{55}\times 2\pi)+1}{x^{13}+\frac{1}{x^{13}}+2}=\frac{\cos(21\times\frac{21}{55}\times 2\pi)+1}{x^{21}+\frac{1}{x^{21}}+2}$$ 得 $x=0.988036=a^{\frac{21}{55}\times 2\pi}\Rightarrow a=0.994996$

且 $P_a(13)=P_a(21)=0.019011$ 恰爲最小値，形成逆時針方向 13 條、順時針方向 21 條的雙螺旋結構，且原基每 55 個會共直線！



四、螺旋數目爲 *Lucas* 數列相鄰兩項的向日葵的發散角與性質

在向日葵花田裡，真實存在著螺旋數目爲 *Lucas* 數列相鄰兩項的向日葵，這樣的向日葵其發散角究竟爲何？雙螺旋結構性質又是如何？

(一)*Lucas* 向日葵的發散角 φ_L

Lucas 數列爲 $<1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, \cdots\cdots>$，寫成遞迴式 $\begin{cases}L_1=1、L_2=3\\ L_{n+2}=L_{n+1}+L_n\end{cases}$。

設 *Lucas* 向日葵的發散角爲 φ_L，則 $\frac{\varphi_L}{2\pi}$ 的連分數應爲 $[3, 1, 1, 1, 1, 1, \cdots\cdots]$，再利用

$\begin{cases}q_0=1、q_1=a_1\\ q_{k+2}=a_{k+2}q_{k+1}+q_k\end{cases}$ 可得 $S_{\frac{\varphi_L}{2\pi}}=<1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, \cdots\cdots>$ 即 *Lucas* 數列。

輾轉相除法

3	1 $3\times\frac{\varphi_L}{2\pi}$	$\frac{\varphi_L}{2\pi}$ 0	0
1	$1-3\times\frac{\varphi_L}{2\pi}$ ……	$\frac{\varphi_L}{2\pi}$ ……	1
1	…… ……	…… ……	1
1	…… ……	…… ……	1

$\dfrac{\frac{\varphi_L}{2\pi}}{1-3\times\frac{\varphi_L}{2\pi}}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ 方能使接下來的運算值皆為 1，

$$\frac{\frac{\varphi_L}{2\pi}}{1-3\times\frac{\varphi_L}{2\pi}}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Rightarrow\frac{\varphi_L}{2\pi}=\frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}{1+3\times\frac{1+\sqrt{5}}{2}}=\frac{2}{5+\sqrt{5}}\Rightarrow\varphi_L=\frac{4\pi}{5+\sqrt{5}}\fallingdotseq 1.736630\fallingdotseq 99.501553^\circ$$

(二)*Lucas* 向日葵雙螺旋結構的性質

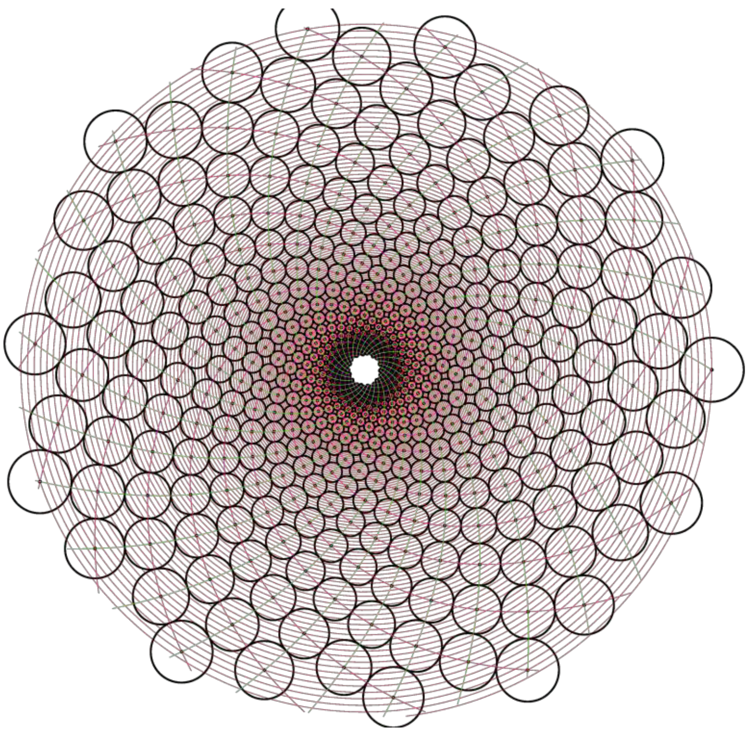
Lucas 向日葵的雙螺旋結構可仿照 *Fibonacci* 數列所產生的性質加以推論，兩者比較如下：

①*Fibonacci* 向日葵的發散角 $(3-\sqrt{5})\pi$，雙螺旋結構中的兩螺旋數目必為數列相鄰的兩項。

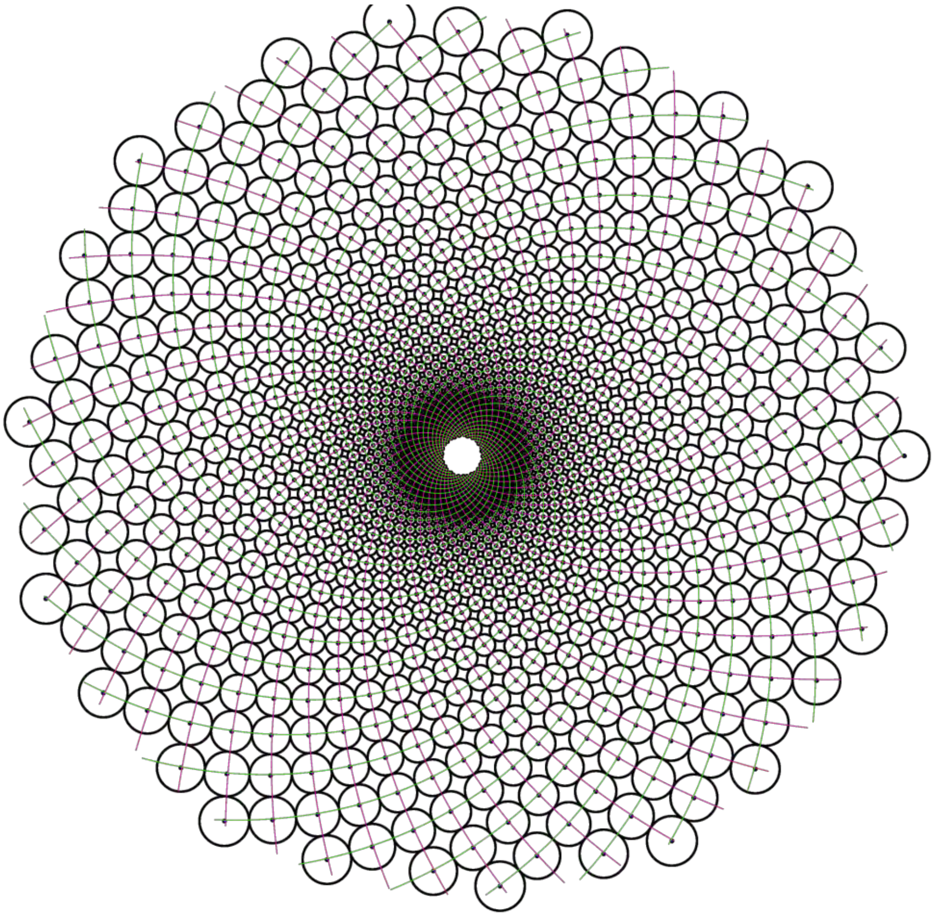
②*Lucas* 向日葵的發散角 $\dfrac{4\pi}{5+\sqrt{5}}$，雙螺旋結構中的兩螺旋數目必為數列相鄰的兩項。

例十四　$r=0.996883^{\theta}$、$\varphi=\dfrac{4\pi}{5+\sqrt{5}}$、$Q(0.996883)=P_{0.996883}(18)=P_{0.996883}(29)=0.008481$，

螺旋結構產生的螺線數目，逆時針 18 條、順時針 29 條。



例十五　$r=0.998816^{\theta}$、$\varphi=\dfrac{4\pi}{5+\sqrt{5}}$、$Q(0.998816)=P_{0.998816}(29)=P_{0.998816}(47)=0.003228$，螺旋結構產生的螺線數目，逆時針 47 條、順時針 29 條。



伍、研究結果與討論

本文研究任意發散角 φ 的條件下，生成螺線 $r=a^{\theta}$ 改變如何使原基排列構成單螺旋結構與雙螺旋結構，進而推論出 *Lucas* 數列爲螺旋數目的雙螺旋結構，其發散角與雙螺旋結構的性質。請看以下結論：

一、發散角與螺旋結構之關係

(一)$\dfrac{\varphi}{2\pi}$ 的連分數可求得最佳漸近分數 $<\dfrac{p_k}{q_k}>$。我們定義數列 $S_{\varphi}=<q_1, q_2, q_3, \cdots\cdots>$。

(二)旋轉 $q_k\varphi$ 角後的原基，與初始原基的夾角 cos 值會愈來愈接近 1。

(三)生成螺線 $r=a^{\theta}$ 時，$P_a(m)$的最小值必存在且等於 $P_a(q_k)$, $q_k\in S_\varphi$。

(四)生成螺線 $r=a^{\theta}$ 時，必存在 $q_k\in S_\varphi$，$P_a(q_k)$爲最小值，則原基排列產生螺旋結構的螺線數目爲 q_k 條，而且 k 爲奇數時，螺旋方向爲逆時針；k 爲偶數時，螺旋方向爲順時針。

二、發散角產生雙螺旋結構的特性

(一)雙螺旋結構意義爲：給定發散角 φ，原基 A_0 同時與 A_{q_k}、A_{q_v}相切，

數學式可寫爲：$\begin{cases} ① \ P_a(q_k)=P_a(q_v) \ (\text{原基 } A_0 \text{ 同時與 } A_{q_k}\text{、}A_{q_v} \text{ 相切}) \\ ② \ P_a(q_k)\le P_a(q_n) \quad \forall n\in\boldsymbol{N} \ (\text{原基不會重疊}) \end{cases}$

可證得 ① 式 a 值有唯一解；② 式只需檢驗 $n\le\dfrac{1}{\varphi}log_a\dfrac{(1-p)^2}{1-p^2}$，$P_a(n)\ge P_a(q_k)$成立即可，

，若 $P_a(q_k)$並非最小，則雙螺數 q_k、q_v 就不存在。

(二)函數 $P_x(q_k)$的性質 $\begin{cases} ① \ y=P_x(q_k) \text{ 爲嚴格遞減函數} \\ ② \ \text{任兩個函數 } P_x(q_u)\text{、}P_x(q_v) \text{ 恰有一個交點 (由}\textbf{定理五}\text{)} \\ ③ \ \text{若 } u>v\text{，則} \begin{cases} \text{交點左方 } P_x(q_u)>P_x(q_v) \\ \text{交點右方 } P_x(q_u)<P_x(q_v) \end{cases} \end{cases}$

(三)給定任意發散角 φ 時，

① 存在唯一 $u\in\boldsymbol{N}, u>k$，使得 $\begin{cases} P_{a_u}(q_u)\le P_{a_u}(q_n) \\ P_{a_n}(q_u)\le P_{a_n}(q_n) \end{cases}$，$\forall n\in\boldsymbol{N}$，$n>k$。

② 若 $k\neq 1$，則存在唯一 $v\in\boldsymbol{N}, v<k$，使得 $\begin{cases} P_{a_v}(q_v)\le P_{a_v}(q_n) \\ P_{a_n}(q_v)\le P_{a_n}(q_n) \end{cases}$，$\forall n\in\boldsymbol{N}$，$n<k$。

亦可證得：必存在生成螺線 $r=a^{\theta}$ 使得原基排列形成雙螺旋結構。

三、在 $\dfrac{\varphi}{2\pi}=\dfrac{n}{m}$(最簡分數)時，代表每 m 個原基會落在同一直線上，$\dfrac{\varphi}{2\pi}$ 的連分數爲有限集合，S_φ亦爲有限集合，我們仍然可以對任意生成螺線 $r=a^{\theta}$ 求得 $Q(a)$值產生單螺旋結構；或是求出適當的生成螺線來產生雙螺旋結構，**定理七**、**定理八**在有限集合 S_φ的條件下顯然成立。

四、螺旋數目爲 *Lucas* 數列相鄰兩項的向日葵的發散角 $\varphi_L=\dfrac{4\pi}{5+\sqrt{5}}\doteqdot 1.736630\doteqdot 99.501553°$

Lucas 向日葵的雙螺旋結構可仿照 *Fibonacci* 數列所產生的性質加以推論，兩者比較如下：

① *Fibonacci* 向日葵的發散角 $(3-\sqrt{5})\pi$，雙螺旋結構中的兩螺旋數目必爲數列相鄰的兩項。

② *Lucas* 向日葵的發散角 $\dfrac{4\pi}{5+\sqrt{5}}$，雙螺旋結構中的兩螺旋數目必爲數列相鄰的兩項。

陸、結論與應用

給定任意發散角 φ，我們可以配合生成螺線 $r=a^{\theta}$，取適當 $P_a(q_k)$值讓原基構成單螺旋結構；亦可找到適當的 q_u、q_v 值及生成螺線 $r=a^{\theta}$，讓原基構成雙螺旋結構，在本文當中皆已經做得非常詳盡的探討。再者，生物界中可發現 *Lucas* 數列爲螺旋數的向日葵，經過計算可得發散角爲 $\dfrac{4\pi}{5+\sqrt{5}}$，並且利用 *Geogebra* 驗證得 *Lucas* 數列爲螺旋數的雙螺旋結構。螺旋結構應是生物界中極爲重要的生物結構，期盼本文成果可以對生物結構的研究有所助益！

另外，我們在研究證明過程尚有兩處未能做深入有效解決的問題：

一、原基是否有可能形成三螺旋結構？也就是：是否存在生成螺線 $r=a^{\theta}$，使得 $P_a(q_k)=P_a(q_u)=P_a(q_v)$且爲最小值？經過觀察函數圖形 $y=P_x(q_k)$, $\forall k\in\mathbf{N}$ 的交點，似乎沒有三個函數圖形同時交於同一點的情形發生，想要證明又不知如何下手！猜測：三螺旋結構應該不存在。有待往後繼續研究！

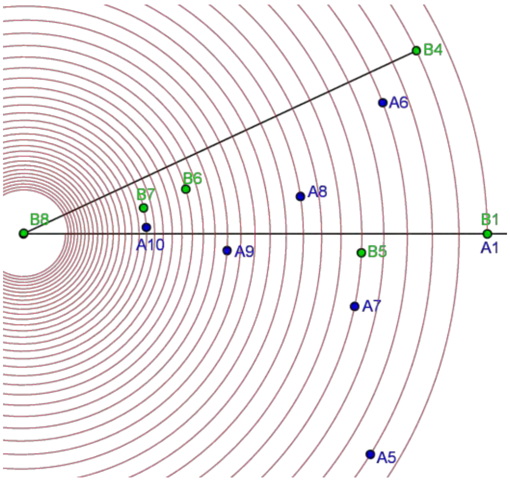
二、本文研究螺旋結構的出發點，其實是根據向日葵的原基生長特性爲基礎，爲了找出 *Lucas* 向日葵的發散角及其特性開始投入研究，但是我們愈來愈迷惑：向日葵之所以發散角爲黃金角，是因爲雙螺旋結構使向日葵花頭最密實、最有效的堆排，然而我們卻證明並作圖得到了許多不同發散角仍然可以形成雙螺旋結構，那麼最密實的結構何以判定？我們試著把密實的意義再重新檢視一遍，發現：原基排列造成的相切會在視覺上形成螺旋結構，能稱之爲密實嗎？固定發散角 φ，會使原基雙切產生的是因爲生成螺線 $r=a^{\theta}$，但是每一個原基間的角度並不會被生成螺線所影響，而只取決於發散角 φ，所以我們開始不考慮生成螺線，而只考慮發散角 φ，有如下兩點發現：

(1) 黃金角 $\varphi_F=(3-\sqrt{5})\pi$，它的 $\dfrac{\varphi_F}{2\pi}$ 的連分數爲 $[1, 1, 1, 1, 1, \cdots]$ 皆爲 1，因爲連分數必爲

正整數，所以其連分數是任意發散角的 $\frac{\varphi}{2\pi}$ 中最小的連分數。

$\varphi_L=\frac{4\pi}{5+\sqrt{5}}$，它的 $\frac{\varphi_L}{2\pi}$ 的連分數爲 $[2, 1, 1, 1, 1, \cdots]$ 除第 1 項外其餘皆爲 1，所以是除了 $\frac{\varphi_F}{2\pi}$ 的連分數外，第 2 小的連分數。

(2) 以生成螺線 $r=0.99^{\theta}$ 爲例，黃金角 $\varphi_F=(3-\sqrt{5})\pi$，產生原基符號 A、及另一發散角 $\varphi=\sqrt{5}$，產生原基符號 B。選定 $A_1=B_1$，連接 $\overline{OA_1}=\overline{OB_1}$，則以 $\overline{OB_4}$ 爲邊界來觀察：原基 A_6、A_7、A_8、A_9、A_{10}、……較能均勻分佈，遠高於原基 B_6、B_7、B_8、……的分佈。



向日葵會產生 *Fibonacci* 或 *Lucas* 數列螺旋數目的雙螺旋結構，應與上述兩點有關！

柒、參考文獻

高中數學康熙版第二冊第三章第六節複數的極式

周哲賢、許冠章、陳重光、盧俁智。向日葵裏的黃金項鍊。**國立臺灣科學教育館第四十九屆全國中小學科學展覽高中組第三名。**

林聰源。認識連分數。**數學傳播，第二卷第三期**

，取自：*http://episte.math.ntu.edu.tw/articles/mm/mm_02_3_08/index.html*

【評語】040421

本作品將第四十九屆全國科展作品“向日葵裡的黃金項鍊”，拓展到任意發散角之情況。研究結合極座標與連分數等工具，為一高中數學跨章節整合之範例，值得讚許。在本作品中，雖已一併推導出 Lucas 數列的發散角，也驗証了生物領域所發現向日葵的螺旋數，然而整體研究方法之創新及完整性仍有再提昇的空間。此外，建議作者群應於作品之展示或口頭報告中明確指出所引用文獻之相關結果與比較。