

中華民國第 51 屆中小學科學展覽會 作品說明書

高中組 數學科

第一名

040420

論正 $2n$ 邊形與一點決定的三角形面積比

學校名稱：國立臺南第一高級中學

作者： 高二 吳佳鴻 高二 蔡雯詠	指導老師： 蕭健忠
-------------------------	--------------

關鍵詞：正 $2n$ 邊形、三角函數、面積

得獎感言



起初，對於一題競賽試題的好奇引領我們開始了本次的研究，回想研究過程發生的一切，真是充滿了艱辛與驚奇！在這條漫長的研究道路上，我們面臨無數挫折，有時許多次的辛苦探索，換來的卻是一場空。這樣的結果令我們心灰意冷，然而，我們慶幸當時並沒有選擇放棄，而支持我們的最大動力或許就是研究時所伴隨的快樂吧！看到結果的驚喜和喜悅，以及想出獨特的證明方法而解決問題的成就感，使我們堅持下來，熬過最辛苦的階段。而這一切的辛苦都是值得的，我們不僅從科展中學習到科學研究的要領以及取得令人驚艷的結果，最重要的更是那種樂在其中的感覺。經過這一年多來的研究，我們的作品所得到的讚賞，實給予我們極大的支持與鼓勵。我們將秉持著對於科學的熱愛，繼續探索這世界上的許多「未知」。

最後，感謝所有曾經指導過我們的老師、教授，感謝學校對於科學研究的支持，也感謝所有一路上陪著我們、支持我們的家人與同學。正因為有了你們，我們才能擁有這樣豐碩的成果，也才能淺嘗榮耀的甘甜！

論正 $2n$ 邊形與一點決定的三角形面積比

摘要

本次研究的靈感來自於能力競賽中，一道證明由六邊形內部一點 P 所導致的面積比值為 1 的問題(詳見第 3 頁)。這份報告主要的目的，在探討推廣到正 $2n$ 邊形內部時的情況，並求出將 P 點移至外部時任一點的面積比值。

這次研究利用 GSP 協助了解圖形的性質，並善用解析幾何和輔助線作圖。報告中的許多證明，可以用「各個三角形的高相加」的觀念搭配三角函數運算做出結論。

文中結果顯示，除了證明：當 P 點在正 $2n$ 邊形內部時，必滿足面積比值為 1 外，並提供了當 P 點在正 $2n$ 邊形外部時，面積比值的各種可能性。其證明方法，可作為解決正 $2n$ 邊形面積問題的重要參考。

Abstract

The inspiration of this research comes from one of the questions in the ability competition. The question needs to be proved that the inner P point in the hexagon will cause the area ratio equals to 1 (See the 3rd page for details). The main purpose of this research is to discuss and popularize this property to the situation of the $2n$ sides regular polygon, and also get the area ratio when the P point is moved anywhere outside the hexagon.

GSP is used to help understand the property of each graph. Analytic geometry and auxiliary line are also well made use of. Many of the proof methods in this research use the concept of adding the heights of each triangle and come with the operation of trigonometric function to make the final result.

The result of the research not only shows that when P point is inside the $2n$ sides regular polygon, the area ratio equals to 1 but also provides some possibilities of the area ratio when P point is outside the $2n$ sides regular polygon. The proof methods used in this research can be the important reference to solve the questions about the area ratio of the $2n$ sides regular polygon.

壹、研究動機

在解能力競賽試題時，我們發現了一個有趣的題目：「 P 是正六邊形內任意一點，試證明 $\square A_1A_2P + \square A_3A_4P + \square A_5A_6P = \square A_2A_3P + \square A_4A_5P + \square A_6A_1P$ 。」我們很快的知道，對正 $2n$ 邊形這個性質仍然是對的。但是，如果 P 點在正 $2n$ 邊形外部時，是否有相同的結果？藉由 GSP 的幫助，我們知道一般的情形是不會相等的，而哪些點可以使等式成立呢？我們對這個問題感到好奇，希望找到隱藏在這個題目背後的秘密。

貳、研究目的

一、討論正 $2n$ 邊形時，是否有相同的結果？

二、 P 點在正 $2n$ 邊形外部時，哪些點可以使等式成立？

三、研究 P 點在正 $2n$ 邊形 $A_1A_2\dots A_{2n-1}A_{2n}$ 外部時，面積比 $\lambda = \frac{\square A_2A_3P + \square A_4A_5P + \dots + \square A_{2n}A_1P}{\square A_1A_2P + \square A_3A_4P + \dots + \square A_{2n-1}A_{2n}P}$ 的性質。

參、研究設備及器材

紙、筆、電腦 (GSP)

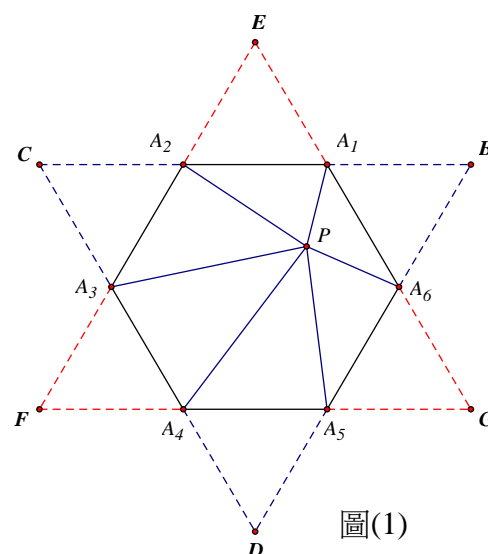
肆、研究過程與方法

一、由原題推廣到正 $2n$ 邊形：

(一)原題的證明：

如右圖(1)，延長 $\overline{A_1A_2}$ 交 $\overline{A_5A_6}$ 於 B 點。延長 $\overline{A_1A_2}$ 交 $\overline{A_3A_4}$ 於 C 點。延長 $\overline{A_5A_6}$ 交於 $\overline{A_3A_4}$ 於 D 點。

由正六邊形的外角為 60° ，可知 $\square A_1A_6B$ 、 $\square A_2A_3C$ 、 $\square A_4A_5D$ 均為正三角形。



圖(1)

因此 $\overline{A_6B} = \overline{A_5A_6} = \overline{A_5D}$ 、 $\overline{A_1B} = \overline{A_1A_2} = \overline{A_2C}$ 、 $\overline{A_4D} = \overline{A_3A_4} = \overline{A_3C}$

所以 $\square A_1A_2P = \frac{1}{3}\square BCP$ ， $\square A_3A_4P = \frac{1}{3}\square CDP$ ， $\square A_5A_6P = \frac{1}{3}\square BDP$

三式相加，得到 $\square A_1A_2P + \square A_3A_4P + \square A_5A_6P = \frac{1}{3}\square BCP + \frac{1}{3}\square CDP + \frac{1}{3}\square BDP = \frac{1}{3}\square BCD$

同理，延長 $\overline{A_2A_3}$ 、 $\overline{A_4A_5}$ 交於 E 點，延長 $\overline{A_2A_3}$ 、 $\overline{A_1A_6}$ 交於 F 點，延長 $\overline{A_4A_5}$ 交 $\overline{A_1A_6}$ 於 G 點。

利用同樣方法可推得 $\square A_2A_3P + \square A_4A_5P + \square A_6A_1P = \frac{1}{3}\square EGF$ ，又由邊長關係知 $\square EFG = \square BCD$

$\therefore \square A_1A_2P + \square A_3A_4P + \square A_5A_6P = \square A_2A_3P + \square A_4A_5P + \square A_6A_1P$ ，故得證。

(二) 正 $2n$ 邊形的情形：

證明：對於正 $2n$ 邊形 $A_1A_2\dots A_{2n-1}A_{2n}$ ， P 為此正 $2n$ 邊形邊上或內部任意一點，則

$$\square A_1A_2P + \square A_3A_4P + \dots + \square A_{2k-1}A_{2k}P + \dots + \square A_{2n-1}A_{2n}P = \square A_2A_3P + \square A_4A_5P + \dots + \square A_{2k}A_{2k+1}P + \dots + \square A_{2n}A_1P$$

〈證明〉為方便說明，假設正 $2n$ 邊形邊長為 a ，並令

$$\square A_1A_2P + \square A_3A_4P + \dots + \square A_{2k-1}A_{2k}P + \dots + \square A_{2n-1}A_{2n}P = S_1，$$

$$\square A_2A_3P + \square A_4A_5P + \dots + \square A_{2k}A_{2k+1}P + \dots + \square A_{2n}A_1P = S_2。$$

如圖(2)延長 $\overline{A_1A_2}$ 交 $\overline{A_3A_4}$ 於 B_1 ， $\overline{A_3A_4}$ 交 $\overline{A_5A_6}$ 於

B_3 ， $\dots\dots \overline{A_{2k-1}A_{2k}}$ 交 $\overline{A_{2k+1}A_{2k+2}}$ 於 B_{2k-1} ， $\dots\dots \overline{A_{2n-1}A_{2n}}$ 交

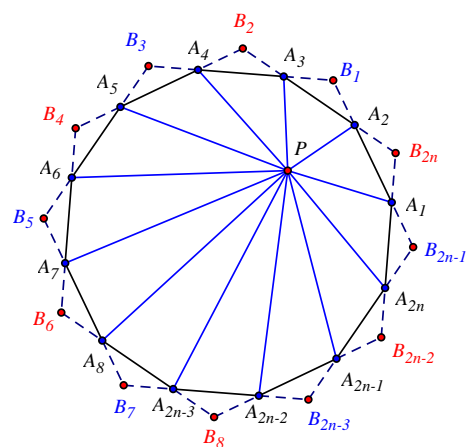
$\overline{A_1A_2}$ 於 B_{2n-1} 。由於 $\square A_2A_3B_1$ 、 $\square A_4A_5B_3$ 、 $\dots\dots \square A_{2n}A_1B_{2n-1}$ 均

互相全等，故 $B_1B_3\dots B_{2k-1}\dots B_{2n-1}$ 為正 n 邊形。又設此正 n 邊形的邊長為 b ，並令 $a = qb$ (q 為

常數) $\Rightarrow \square A_1A_2P = q\square B_{2n-1}B_1P$ ， $\square A_3A_4P = q\square B_1B_3P$ ， $\dots\dots \square A_{2n-1}A_{2n}P = q\square B_{2n-3}B_{2n-1}P$

$$\therefore S_1 = \square A_1A_2P + \square A_3A_4P + \dots + \square A_{2n-1}A_{2n}P = q(\square B_{2n-1}B_1P + \square B_1B_3P + \dots + \square B_{2n-3}B_{2n-1}P) = qS_{B_1B_3\dots B_{2n-1}}$$

同理，延長 $\overline{A_2A_3}$ 交 $\overline{A_4A_5}$ 於 B_2 ， $\overline{A_4A_5}$ 交 $\overline{A_6A_7}$ 於 B_4 ， $\dots\dots \overline{A_{2k}A_{2k+1}}$ 交 $\overline{A_{2k+2}A_{2k+3}}$ 於 B_{2k} ， $\dots\dots$



圖(2)

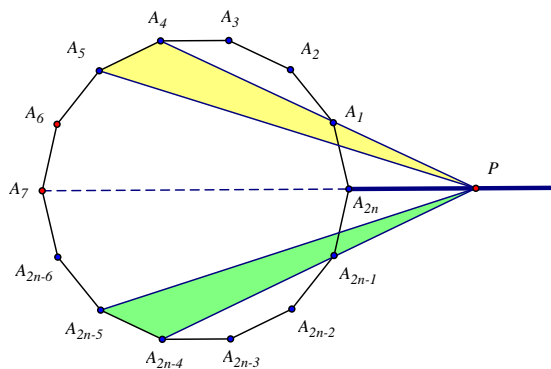
$\overline{A_{2n}A_1}$ 交 $\overline{A_2A_3}$ 於 B_{2n} 。易知正 n 邊形 $B_2B_4\dots B_{2k}\dots B_{2n}$ 邊長亦為 b ，所以 $S_{B_1B_3\dots B_{2n-1}} = S_{B_2B_4\dots B_{2n}}$ 。利用同前之方法可推得 $S_2 = qS_{B_2B_4\dots B_{2n}}$ 。故 $S_1 = qS_{B_1B_3\dots B_{2n-1}} = qS_{B_2B_4\dots B_{2n}} = S_2$ ，得證。

二、當 P 點在正 $2n$ 邊形外部時， $\lambda=1$ 的討論：

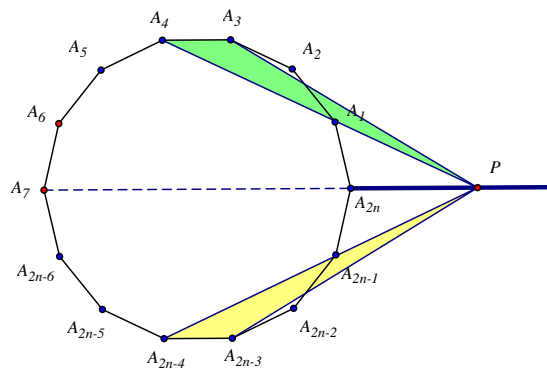
推廣到正 $2n$ 邊形後，我們十分好奇若將 P 點移至正 $2n$ 邊形之外部時會有什麼情形？因為此時面積和不一定會相等，所以定義兩面積比 $\lambda = \frac{\square A_2A_3P + \square A_4A_5P + \dots + \square A_{2n}A_1P}{\square A_1A_2P + \square A_3A_4P + \dots + \square A_{2n-1}A_{2n}P}$ ，面積和相等也就是 $\lambda=1$ 。以下為討論 $\lambda=1$ 的情形。

(一)對稱性的觀察：

依圖形之對稱性（相似的兩個三角形恰會上下對稱，參考圖(3)(4)），若 P 點位於正 $2n$ 邊形對角線的延長線上，則 $\lambda=1$ 。此為使得 $\lambda=1$ 之明顯解。



圖(3)



圖(4)

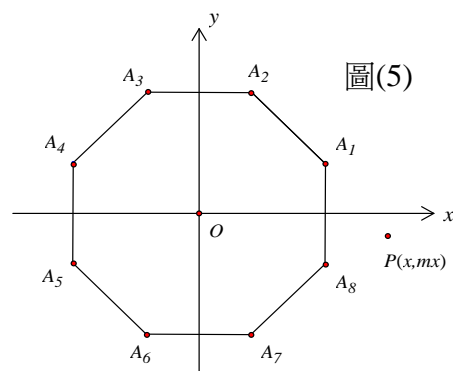
(二)解析法探討 P 點其他位置：

我們用 GSP 軟體繪圖後發現，當 $n > 3$ 時，似乎存在其他使得 $\lambda=1$ 的點。我們先用解析法找出 P 點的確切位置(以正八邊形為例)。令正八邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ 邊長為 1。並假設使 $\lambda=1$ 的點 P 位於直線 $y=mx$ 上，即 $P(x, mx)$ ，其中 $1-\sqrt{2} < m < -1+\sqrt{2}$ (因為正八邊形之對稱性，所以只需討論 P 點在 $\overline{OA_1}$ 與 $\overline{OA_8}$ 之間)

藉由代入各點座標計算各個三角形面積，化簡可得

$$\square A_1A_2P + \square A_3A_4P + \square A_5A_6P + \square A_7A_8P = \sqrt{2}x$$

$$\square A_2A_3P + \square A_4A_5P + \square A_6A_7P + \square A_8A_1P = x + \frac{1+\sqrt{2}}{2}$$



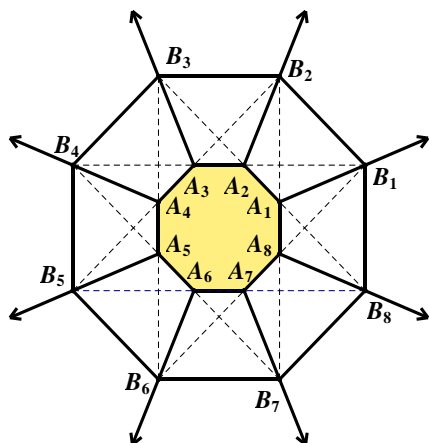
圖(5)

解方程式 $x + \frac{1+\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}x$ ，得 $x = \frac{3+2\sqrt{2}}{2}$ (與 m 值無關)。

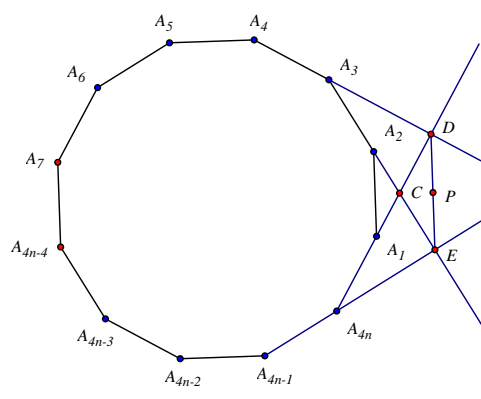
(三)由(一)(二)所得之結論及相關推測：

由(二)之結果知，在 $1-\sqrt{2} < m < -1+\sqrt{2}$ 之條件下， P 之 x 值與 m 無關 (即其符合 $\lambda=1$ 之軌跡為一線段)。又由(一)對稱性，易知在對角線的延長線上的所有點均符合 $\lambda=1$ 。由於有八個邊，所以所有滿足 $\lambda=1$ 的點，應為一正八邊形及一放射狀圖形。(如圖(6)中黑色粗線部分)

又由觀察發現，該線段範圍恰是 $\overline{A_7A_8}$ 與 $\overline{A_2A_3}$ 交點，及 $\overline{A_2A_1}$ 與 $\overline{A_6A_7}$ 交點之間。又利用 GSP 試了正十、十二、十四邊形……等，亦有相同的結果。所以推測：當 $n > 3$ 時，使 $\lambda=1$ 的點，可用圖(六)虛線延長方式找出其軌跡 (以圖(6)為例，延長 $\overline{A_1A_2}$ 、 $\overline{A_2A_3}$ 、 $\overline{A_7A_8}$ 、 $\overline{A_6A_7}$ 得到交點 B_1 、 B_8 ， $\overline{B_1B_8}$ 即為滿足 $\lambda=1$ 之 P 點軌跡)



圖(6)



圖(7)

(四)證明由(三)所得之推測：

得到(三)的推論，至於如何證明此推論？若繼續沿用 p.5(二)的解析法，會造成計算上的繁雜性，因此決定用歐式幾何解法來證明。以下就是第一種證法，只適用於邊長為 4 的倍數之情況：

1. 正 $4n$ 邊形的情形：

對正 $4n$ 邊形 ($n \geq 2$) 而言，對頂點編號為 $A_1, A_2 \dots A_{4n}$ ，延長 $\overline{A_{4n}A_1}$ 、 $\overline{A_4A_3}$ 交於 D ，延長 $\overline{A_{4n-1}A_{4n}}$ 、 $\overline{A_3A_2}$ 交於 E ，當動點 P 在 \overline{DE} 上任意移動 (如圖(7))，就可得到

$\square A_1A_2P + \square A_3A_4P + \dots + \square A_{4n-1}A_{4n}P = \square A_2A_3P + \square A_4A_5P + \dots + \square A_{4n}A_1P$ ，亦即 $\lambda = 1$ 。

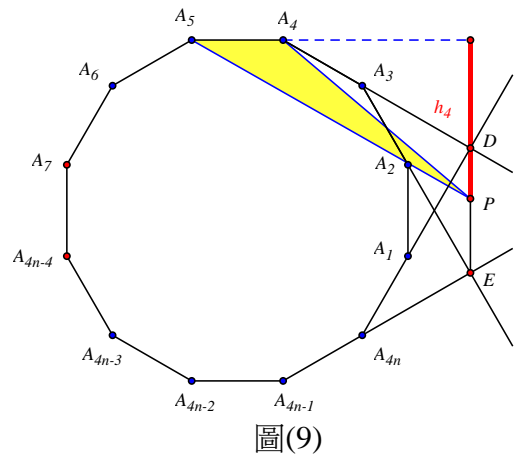
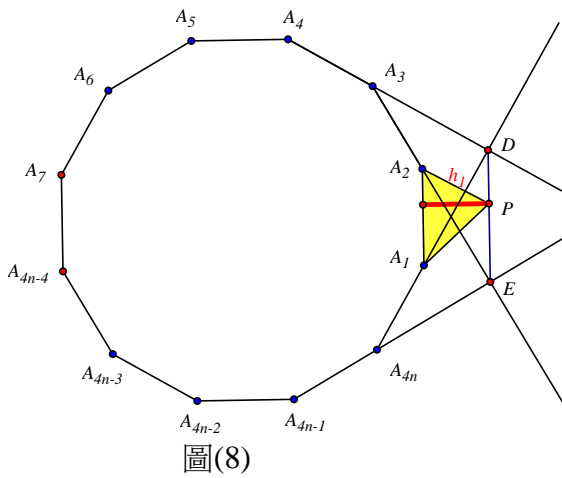
〈證明〉

①設正 $4n$ 邊形邊長 a ，其外角為 θ ， A_{2n} 與 A_{4n} 的距離為 k 。 $\square A_1A_2P$ 中 $\overline{A_1A_2}$ 邊上的高 h_1 ，

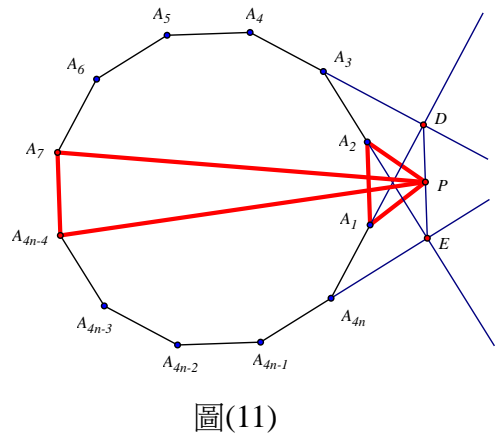
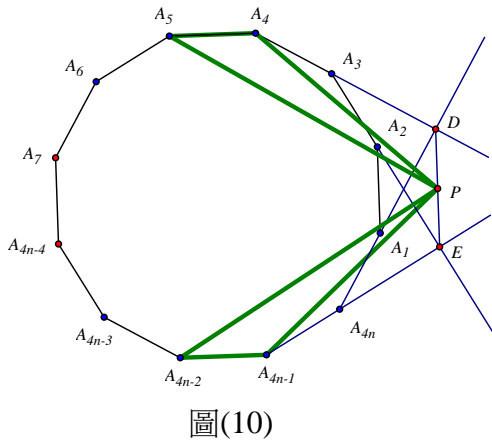
$\square A_2A_3P$ 中 $\overline{A_2A_3}$ 邊上的高 $h_2 \dots$ ， $\square A_{4n}A_1P$ 中 $\overline{A_{4n}A_1}$ 邊上的高 h_{4n} 。(參考圖(8)(9))

$$\square A_1A_2P + \square A_3A_4P + \dots + \square A_{4n-1}A_{4n}P = \frac{a}{2}(h_1 + h_3 + \dots + h_{4n-1})$$

$$\square A_2A_3P + \square A_4A_5P + \dots + \square A_{4n}A_1P = \frac{a}{2}(h_2 + h_4 + \dots + h_{4n})$$



②由圖形可以得到 $h_3 + h_{2n+3} = h_4 + h_{2n+4} = \dots = h_{2n-1} + h_{4n-1} = k$ (如圖(10)兩個綠色三角形的高相加為 k)，且 $h_{2n} - h_{4n} = h_{2n+1} - h_1 = h_{2n+2} - h_2 = k$ (如圖(11)兩個紅色三角形的高相減為 k)。



③根據正 $2n$ 邊形的對稱性，可得到 \overline{DE} 平行 $\overline{A_1A_2}$ ，且 $\overline{A_3A_2}$ 與 $\overline{A_{4n}A_1}$ 交於 C 。

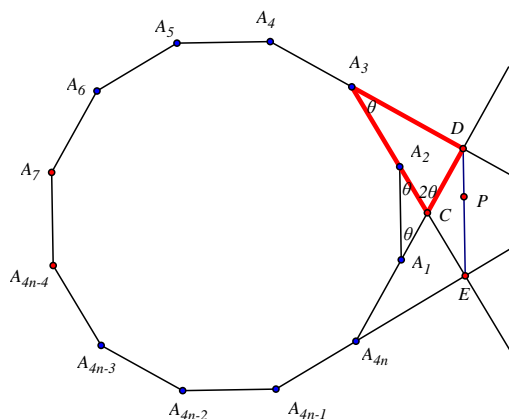
設 $\overline{CD} = \overline{CE} = x$ (如圖(12))

在 $\square A_3DC$ 中，由正弦定理可知： $\frac{\overline{A_3C}}{\sin(\pi - 3\theta)} = \frac{\overline{CD}}{\sin \theta}$ (如圖(12)中紅色三角形)

$$\text{即 } \frac{a + \frac{a}{2} \sec \theta}{\sin(\pi - 3\theta)} = \frac{x}{\sin \theta} \Rightarrow x = \frac{a}{2 \cos \theta (2 \cos \theta - 1)}$$

又由三角形面積可推出 $h_2 + h_{4n} = \overline{DE} \sin \theta = 2x \cos \theta \sin \theta = \frac{a \sin \theta}{2 \cos \theta - 1}$

且 $h_1 = x \sin \theta + \frac{a}{2} \tan \theta = \frac{a \sin \theta}{2 \cos \theta - 1}$ ，故 $h_1 = h_2 + h_{4n}$



圖(12)

④由①②可推出

$$\square A_1A_2P + \square A_3A_4P + \dots + \square A_{4n-1}A_{4n}P = \frac{a}{2}(2h_1 + nk)$$

$$\square A_2A_3P + \square A_4A_5P + \dots + \square A_{4n}A_1P = \frac{a}{2}[2(h_2 + h_{4n}) + nk]$$

將③帶入得 $\square A_1A_2P + \square A_3A_4P + \dots + \square A_{4n-1}A_{4n}P = \square A_2A_3P + \square A_4A_5P + \dots + \square A_{4n}A_1P$ ，得證。

但此方法使用在正 $4n+2$ 邊形之情況時，卻會發生配對上的問題。以下為我們整理後所面臨之問題：

同上，我們同樣可對高作配對，所得之式子如下：

$$h_{2n-1} - h_{4n} = h_{2n+2} - h_1 = h_{2n+3} - h_2 = k \text{ 且 } h_3 + h_{2n+4} = h_4 + h_{2n+5} = \dots = h_{2n-2} + h_{4n-1} = k$$

而我們欲證明 $h_1 + h_3 + h_5 + \dots + h_{4n+1} = h_2 + h_4 + h_6 + \dots + h_{4n+2}$

由於配對時，編號為奇數之高均和編號為偶數之高配為一組，造成無法使用此關係式

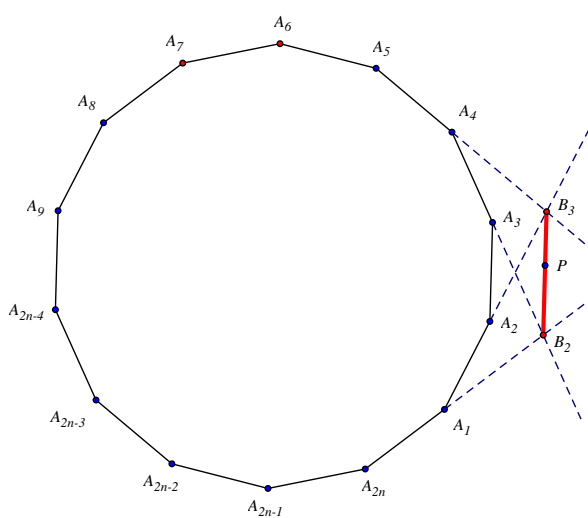
化簡 $h_1 + h_3 + h_5 + \dots + h_{4n+1}$ 或 $h_2 + h_4 + h_6 + \dots + h_{4n+2}$ ，以致無法得到證明。為了解決此配對失敗之問題，我們嘗試思考另一種作法證明所有正 $2n$ 邊形時均成立。作法如下：

2. 正 $2n$ 邊形的情形：

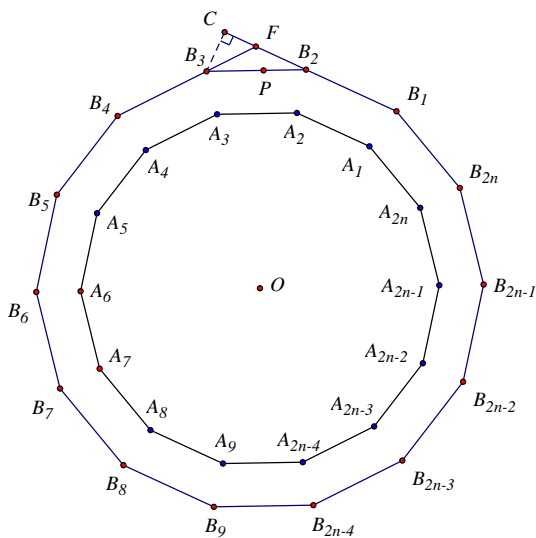
對正 $2n$ 邊形 ($n \geq 4$) 而言，對頂點編號為 $A_1, A_2 \dots A_{2n}$ ，延長 $\overline{A_{2n}A_1}$ 、 $\overline{A_4A_3}$ 交於 B_2 ，

延長 $\overline{A_1A_2}$ 、 $\overline{A_5A_4}$ 交於 B_3 ，當動點 P 在 $\overline{B_2B_3}$ 上任意移動（如圖(13)），可以得到

$\square A_1A_2P + \square A_3A_4P + \dots + \square A_{2n-1}A_{2n}P = \square A_2A_3P + \square A_4A_5P + \dots + \square A_{2n}A_1P$ ，亦即 $\lambda = 1$ 之情況。



圖(13)



圖(14)

〈證明〉

①過 $\overline{B_2B_3}$ ，作與 $A_1 A_2 \dots A_{2n}$ 共中心，每邊均平行於原正 $2n$ 邊形對應邊的正 $2n$ 邊形，

$B_1B_2 \dots B_{2n}$ ，如圖(14)。延長 $\overline{B_1B_2}$ 、 $\overline{B_3B_4}$ 交一點 F ，過 B_3 作 $\overline{B_3C} \perp \overline{B_1B_2}$ 於 C 點。

②令 P 點到 $\overline{A_2A_3}$ 的距離為 k ， $A_1 A_2 \dots A_{2n}$ 外角為 θ 。

③令 $\square PB_1B_2$ 以 $\overline{B_1B_2}$ 為底的高為 H_1 、 $\square PB_2B_3$ 以 $\overline{B_2B_3}$ 為底的高為 H_2 、 $\square PB_3B_4$ 以 $\overline{B_3B_4}$

為底的高為 $H_3 \dots \square PB_{2n-1}B_{2n}$ 以 $\overline{B_{2n-1}B_{2n}}$ 為底的高為 H_{2n-1} 、 $\square PB_{2n}B_1$ 以 $\overline{B_{2n}B_1}$ 為底的高

為 H_{2n} （參考圖(17)、(18)舉例）。令 $\square PA_1A_2$ 以 $\overline{A_1A_2}$ 為底的高為 h_1 、 $\square PA_2A_3$ 以 $\overline{A_2A_3}$ 為

底的高為 h_2 、 $\square PA_3A_4$ 以 $\overline{A_3A_4}$ 為底的高為 $h_3 \dots \square PA_{2n-1}A_{2n}$ 以 $\overline{A_{2n-1}A_{2n}}$ 為底的高為 h_{2n-1} 、

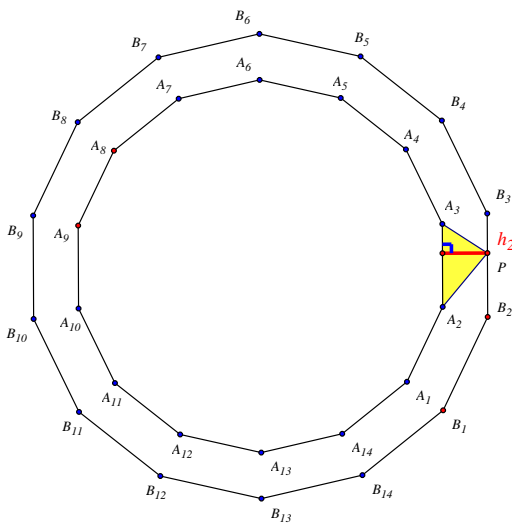
□ $PA_{2n}A_1$ 以 $\overline{A_{2n}A_1}$ 為底的高為 h_{2n} (參考圖(15)、(16)舉例)。

對 $B_1B_2\dots B_{2n}$ 而言， P 在邊上，亦屬於多邊形內部。依 p.4 一、(二)的證明，可得：

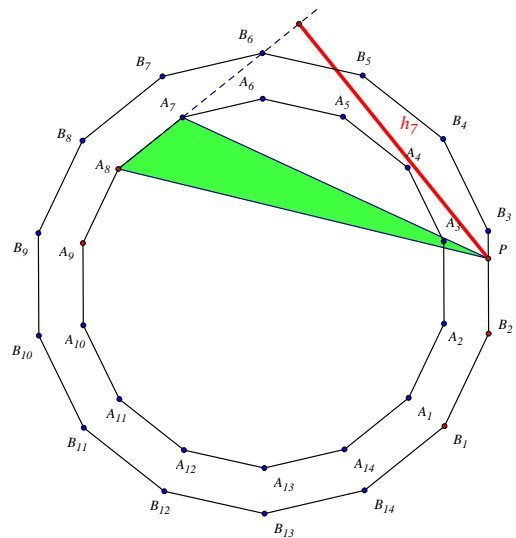
$$\square B_1B_2P + \square B_3B_4P + \dots + \square B_{n-2}B_{n-1}B_2P = \square B_2B_3P + \square B_4B_5P + \dots + \square B_{n-1}B_nP$$

故可令 $H_1 + H_3 + H_5 + \dots + H_{2n-1} = H_2 + H_4 + H_6 + \dots + H_{2n} = p$

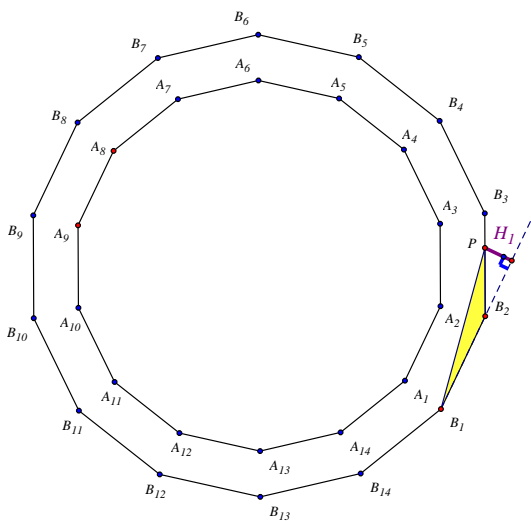
又易知 $H_2 = 0 \Rightarrow H_1 + H_3 + H_5 + \dots + H_{2n-1} = H_4 + H_6 + \dots + H_{2n} = p$



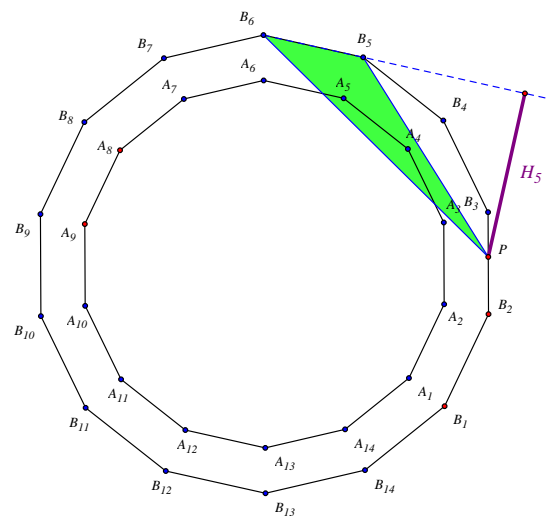
圖(15)



圖(16)



圖(17)



圖(18)

④ $\because \square B_2 B_3 F$ 為等腰三角形，又 $\square B_2 B_3 F =$

$$\frac{1}{2}(\overline{B_2 F} \times H_1 + \overline{B_3 F} \times H_3) = \frac{1}{2}(\overline{B_2 F} \times \overline{CB})$$

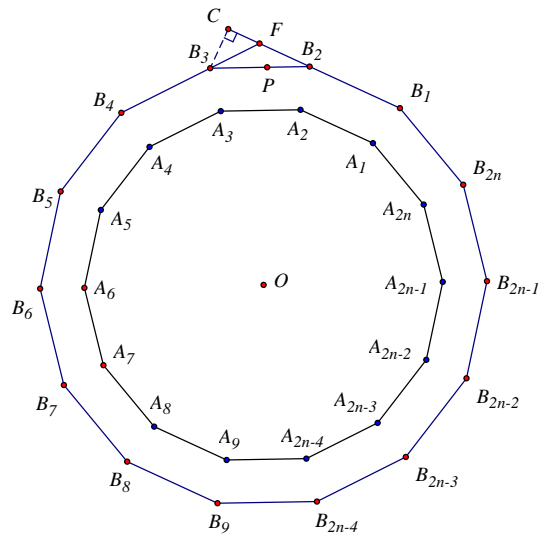
$$\therefore H_1 + H_3 = \overline{CB_3}$$

$$\text{又} \because \angle B_3 C B_2 = 90^\circ$$

$$\therefore H_1 + H_3 = \overline{CB_3} = \overline{B_2 B_3} \sin \theta$$

$$\text{同 p.7③ 之作法可得 } \frac{k}{\overline{B_2 B_3}} = \sin \theta$$

$$\Rightarrow k = \overline{B_2 B_3} \sin \theta, \text{ 故 } H_1 + H_3 = k$$

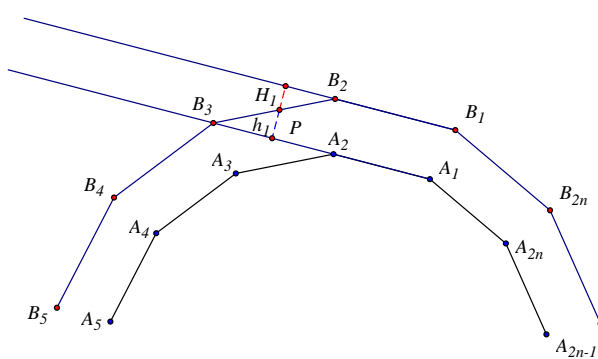


圖(19)

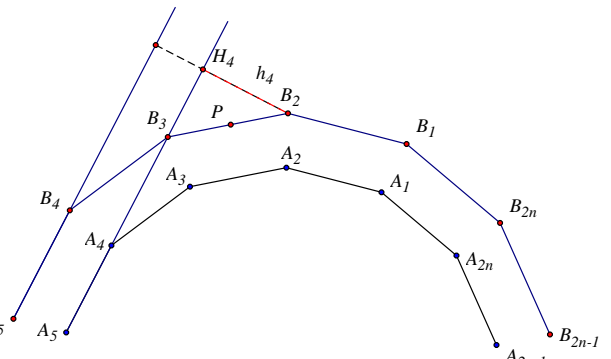
⑤ 由圖(19)易知， $h_2 = k$ 。又由圖形可得，得 $H_1 + h_1 = k$ ， $H_3 + h_3 = k$ (參考圖(20))

$$H_4 - h_4 = k, H_5 - h_5 = k \cdots H_{2n} - h_{2n} = k \text{ (參考圖(21))}$$

$$\therefore h_1 = k - H_1, h_3 = k - H_3, \text{ 而 } m > 3 \text{ 時, } h_m = H_m - k, \circ$$



圖(20)



圖(21)

⑥ 綜合③④⑤的結果，可得奇數的高和

$$h_1 + h_3 + \dots + h_{2n-1} = k(-H_1) + k(-H_3) + \dots + k(-H_{2n-1}) = -k(H_1 + H_3 + \dots + H_{2n-1})$$

$$= -H_1 - H_3 + H_5 + \dots + H_{2n-1} - (n-4)k$$

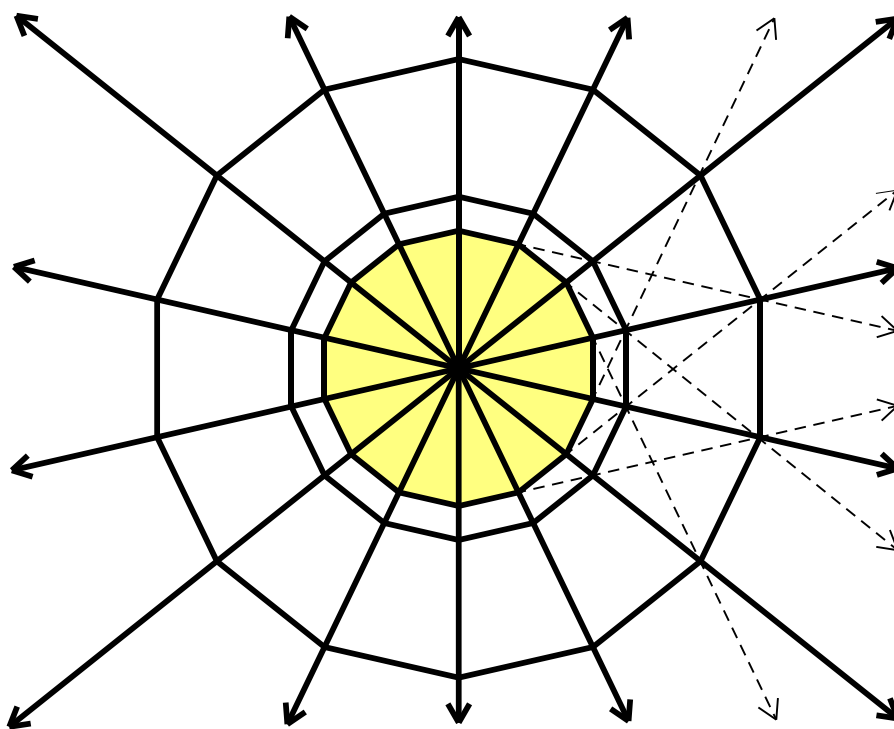
$$= -2(H_1 + H_3) + (H_1 + H_3 + \dots + H_{2n-1}) - (n-4)k$$

$$= -2(H_1 + H_3) + p - (n-4)k = -2k + p - (n-4)k = p - (n-2)k$$

$$\begin{aligned}
& \text{偶數的高和 } h_2 + h_4 + \dots h_{2n} = k + (H_4 - k) + (H_6 - k) \dots (H_{2n} - k) \\
& = (H_4 + H_6 + \dots H_{2n}) - (n-2)k = p - (n-2)k \\
& \Rightarrow h_1 + h_3 + \dots h_{2n-1} = h_2 + h_4 + \dots h_{2n} \\
& \Rightarrow \square A_1 A_2 P + \square P A_3 A_4 + \dots + \square A_{2n-1} A_{2n} P = \frac{1}{2} a (h_1 + h_3 + \dots h_{2n-1}) \\
& = \frac{1}{2} a (h_2 + h_4 + \dots h_{2n}) = \square A_2 A_3 P + \square A_4 A_5 P + \dots + \square A_{2n} A_1 P, \text{ 故得證。}
\end{aligned}$$

(五) 修正 p.6(三) 的推測：

在 GSP 的輔助下，我們發現只要邊數增加，所得到符合 $\lambda = 1$ 的大 $2n$ 邊形可能不只一個。所以原先的結果須修正為：一正 $2n$ 邊形之外部點 P ，使之符合 $\lambda = 1$ 之點 P 軌跡應該為數個正 $2n$ 邊形及放射狀圖形。



圖(22)

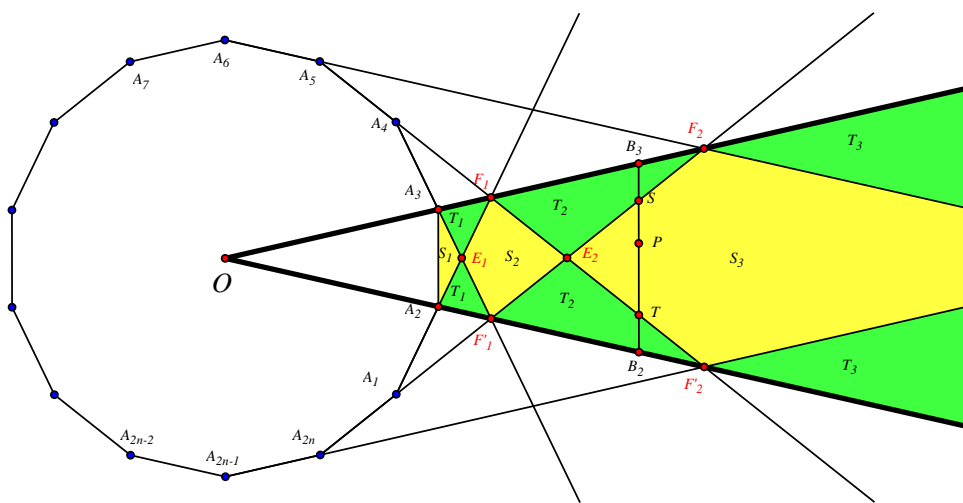
◎說明

圖(22)中的黃色區域為正 $2n$ 邊形的內部，也就是先前證明之 $\lambda = 1$ 的部分。而黑色粗線則是指正 $2n$ 邊形的外部 $\lambda = 1$ 的部分(藉由如虛線之延長方式，即可得到這些正 $2n$ 邊形)，證明方法類似第 9 頁 2. 的討論，在此不詳加說明。

三、當 P 點在正 $2n$ 邊形外部時， $\lambda \neq 1$ 之討論：

(一)未知數的定義

1. 該正多邊形 $A_1A_2\dots A_{2n}$ 為正 $2n$ 邊形，邊長為 a 。
2. 過 P 點作與 $A_1A_2\dots A_{2n}$ 共中心，每邊均平行於原正 $2n$ 邊形對應邊的正 $2n$ 邊形 $B_1B_2\dots B_{2n}$ 邊長為 at ， $t > 1$ ， t 即放大倍率。
3. 定義 H_x 、 h_x ，完整定義如 p.9 中所述。
4. $p = H_1 + H_3 + \dots + H_{2n-1} = H_2 + H_4 + \dots + H_{2n}$
5. k 為大正 $2n$ 邊形到小正 $2n$ 邊形的距離，即圖(23)中 $\overline{A_2A_3}$ 、 $\overline{B_2B_3}$ 的距離。
6. 如圖(23)，中間部分的交點為 E_1 、 E_2 、 $E_3 \dots$ 。兩側部分上方交點為 F_1 、 F_2 、 $F_3 \dots$ ，下方交點為 F'_1 、 F'_2 、 $F'_3 \dots$ 。
7. 如圖(23)，位於中間（黃色）的部分定義為 S 區域，而兩側（綠色）的部分定義為 T 區域，並依其位置編號 S_1 、 S_2 、 $S_3 \dots$ 以及 T_1 、 T_2 、 $T_3 \dots$ 。以後將針對 P 點位於 S_i 區域或 T_j 區域進行討論。（其餘詳見以下說明）



圖(23)

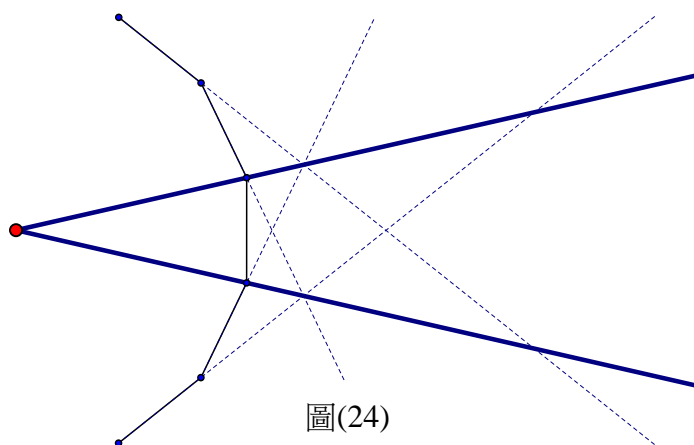
◎說明

考慮 P 點的位置， P 點可能在 S_1 區域、 S_2 區域、 S_3 區域...（黃色）或 T_1 區域、 T_2 區域、 T_3 區域...（綠色）。如圖(23)中， P 點在 S_3 區域內。若 P 點在線段 $\overline{B_3S}$ 或 $\overline{TB_2}$ ，則稱 P 點是在 T_2 區域。

(二) H_x 、 h_x 轉換式的討論：

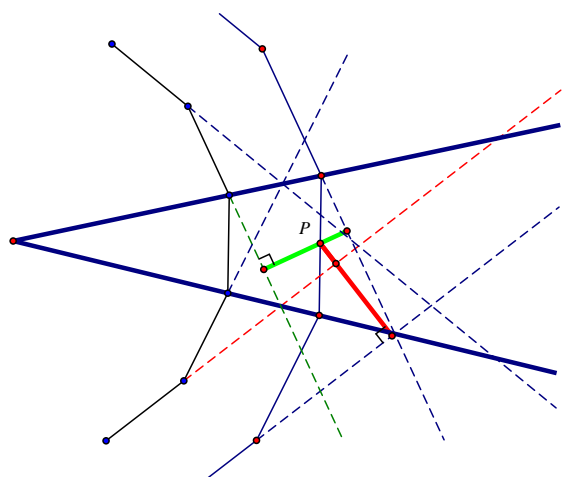
一開始，我們採用類似於 p.7 的證明方式進行推廣，然而，在 P 點沒有限制之情況下，狀況會變得複雜許多。於是，我們嘗試用 p.9 的證明方式。在 p.9 的證明中，可以看出 H_x 、 h_x 的轉換關係式在此方法中是極為重要的一環。因此，其 H_x 、 h_x 的轉換關係式就會隨著 P 點之移動而有些微的改變，以下討論便要找出何種狀況會造成 H_x 、 h_x 轉換關係式的改變。

經過觀察及推導，發現會造成 H_x 、 h_x 轉換關係式改變的最主要關鍵為 P 點是否通過延長線（即圖(24)之虛線部分）。若 P 點跨過了該延長線，則將會使其轉換關係式由 $H_x - h_x = k$ 變為 $H_x + h_x = k$ 。因此，即可從其延長線分割的情況定義出 S_i 、 T_j 兩部分。經過整理，可得其一般式。由於後面的篇幅會將更為完整的式子列出，故在此就不詳細說明。

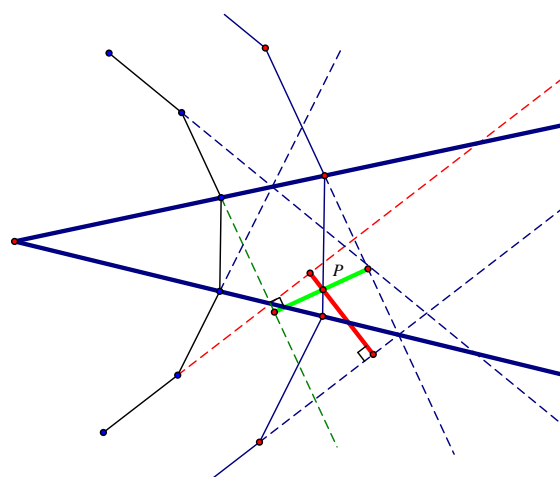


圖(24)

◎實例說明：



圖(25,a)



圖(25,b)

圖(25,a)中，對紅色的高而言， P 點尚未通過其對應之延長線（紅色），故紅色的高相減等於 k 。但當 P 點移過紅色延長線時（如圖(25,b)），紅色的高變為相加等於 k 。而對綠色高而言， P 點均已移過其對應的延長線（綠色），故不論是圖(25,a)或是圖(25,b)之情形，均為相加等於 k 。

(三)所需數值之計算與討論：

1. p 的值：

$$\begin{aligned} \text{正 } 2n \text{ 邊形 } B_1B_2 \cdots B_{2n} \text{ 面積} &= \square B_1B_2P + \square B_2B_3P + \square B_3B_4P + \cdots + \square B_{2n}B_1P \\ &= \frac{1}{2} \overline{B_1B_2} \times H_1 + \frac{1}{2} \overline{B_2B_3} \times H_2 + \cdots + \frac{1}{2} \overline{B_{2n}B_1} \times H_{2n} \\ &= \frac{1}{2} \left(at \times \frac{1}{2} at \cot \frac{\pi}{2n} \right) 2n = \frac{1}{2} [at \times (H_1 + H_2 + \cdots + H_{2n})] \Rightarrow H_1 + H_2 + \cdots + H_{2n} = 2p = atn \cot \frac{\pi}{2n} \\ \Rightarrow p &= \frac{1}{2} atn \cot \frac{\pi}{2n} \end{aligned}$$

2. k 的值：

$$\begin{aligned} \text{設 } M_1、M_2 \text{ 分別為 } \overline{B_2B_3}、\overline{A_2A_3} \text{ 之中點，} k &= \overline{OM_1} - \overline{OM_2} = \frac{1}{2} at \cot \frac{\pi}{2n} - \frac{1}{2} a \cot \frac{\pi}{2n} \\ \Rightarrow k &= \frac{1}{2} a(t-1) \cot \frac{\pi}{2n} \circ \end{aligned}$$

3. 每一組高的和：

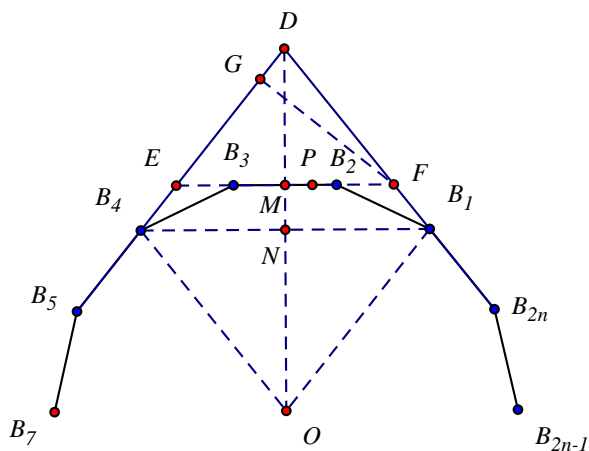
以下將要計算 $\square B_iB_{i+1}P$ 以 $\overline{B_iB_{i+1}}$ 為底的高，其中 $i=1,2,3,\dots,2n$ 。以 $\overline{B_2B_3}$ 為中心，往兩邊算起， $\square B_1B_2P$ 與 $\square B_3B_4P$ 的高合稱為第 1 組高， $\square B_{2n}B_1P$ 與 $\square B_4B_5P$ 的高合稱為第 2 組高， $\square B_{2n-1}B_{2n}P$ 與 $\square B_5B_6P$ 的高合稱為第 3 組高，依此類推。將每一組高之和都求出的作法如下

(圖(26)、圖(27)、圖(28)、圖(29)為示意圖，假設 $\square B_1B_{2n}P$ 、 $\square B_4B_5P$ 的兩高為第 y 組高)：

令所求為第 y 組高，且第 y 組高和為 $x \Rightarrow$ 延長第 y 組之兩高， $\overline{B_1B_{2n}}$ 、 $\overline{B_4B_5}$ 交於一點 D ，延長 $\overline{B_2B_3}$ ，分別交 $\overline{B_4D}$ 與 $\overline{B_1D}$ 於 $E、F$ 兩點，連接 $\overline{OB_1}$ 、 $\overline{OB_4}$ 、 $\overline{B_1B_4}$ 、 \overline{OD} ， \overline{OD} 分別交 $\overline{B_2B_3}$ 、 $\overline{B_1B_4}$ 於 $M、N$ 兩點，過 F 點，作 $\overline{FG} \perp \overline{B_5D}$ 於一點 D 。

① 依對稱性，易知 $\square B_1B_4D$ 為一等腰三角形，又

$$\square B_1B_4D = \frac{x}{2} \overline{DE} = \frac{1}{2} \overline{DE} \cdot \overline{GF} \quad \therefore x = \overline{GF}$$

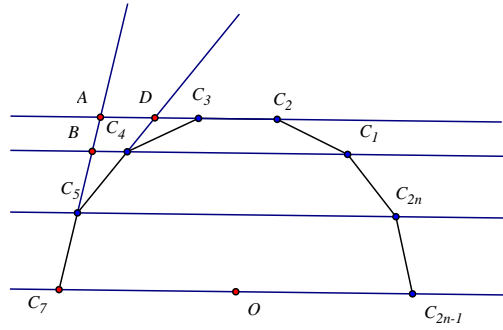


圖(26)

②如圖(27)， $\angle AC_3C_4 = \frac{2\pi}{2n} = \frac{\pi}{n}$ ， $\angle DC_4C_3 = \frac{\pi}{n} \Rightarrow \angle ADC_4 = \frac{2\pi}{n}$

又 $\overline{C_2C_3}$ 平行於 $\overline{C_1C_4}$ $\therefore \angle ADC_4 = \angle DC_4C_1 = \frac{2\pi}{n}$ ，同理 $\Rightarrow \angle AC_5C_{2n} = \frac{3\pi}{n}$

\therefore 第 y 組延長後所得等腰三角形之底角為 $\frac{y\pi}{n}$ ，故知 $\angle DB_1B_4 = \angle DB_4B_1 = \frac{y\pi}{n}$



圖(27)

③ \therefore 一個邊對應之圓弧為 $\frac{\pi}{n}$ ，又第 y 組對應之邊數恰為 $2y-1$ 組(如圖(28))

$$\therefore \angle B_1OB_4 = (2y-1)\frac{\pi}{n} \Rightarrow \angle B_1MO = \angle B_4MO = \frac{y\pi}{n} - \frac{\pi}{2n}$$

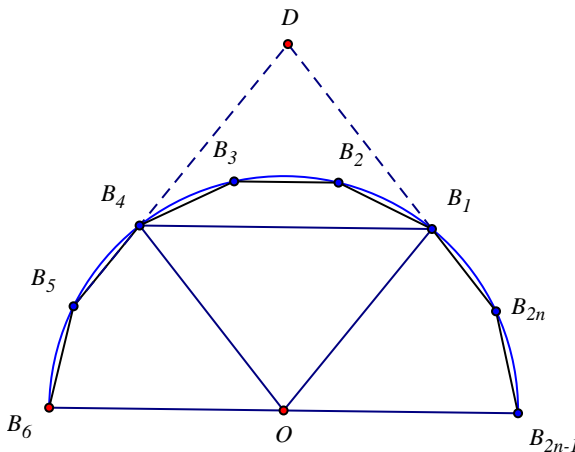
④令 $\overline{OB_1} = r$ ，由圖(29)知 $r = \frac{1}{2}a \csc \frac{\pi}{2n}$ ，又由圖(28)知， $\overline{B_1B_4} = 2r \sin(\frac{y\pi}{n} - \frac{\pi}{2n})$

$$\overline{MN} = \overline{MO} - \overline{ON} = \frac{1}{2}at \cot \frac{\pi}{2n} - r \cos(\frac{y\pi}{n} - \frac{\pi}{2n})$$

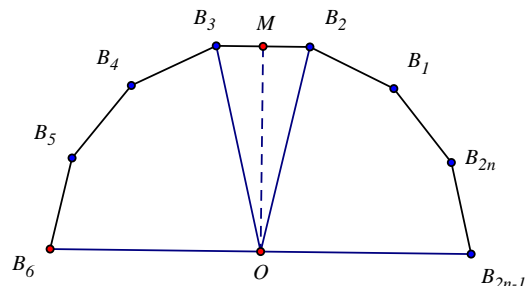
$$\overline{DN} = \overline{B_4N} \tan \frac{y\pi}{n} = r \sin(\frac{y\pi}{n} - \frac{\pi}{2n}) \tan \frac{y\pi}{n}$$

$$\therefore \overline{DM} = \overline{DN} - \overline{MN} = r \sin(\frac{y\pi}{n} - \frac{\pi}{2n}) \tan \frac{y\pi}{n} - \frac{1}{2}at \cot \frac{\pi}{2n} + r \cos(\frac{y\pi}{n} - \frac{\pi}{2n})$$

$$= \frac{1}{2}at(\sec \frac{y\pi}{n} - 1) \cot \frac{\pi}{2n}$$



圖(28)



圖(29)

$$\textcircled{5} \quad \overline{EF} = 2\overline{DM} \cot \frac{y\pi}{n} = at(\sec \frac{y\pi}{n} - 1) \cot \frac{\pi}{2n} \cot \frac{y\pi}{n} = at(\csc \frac{y\pi}{n} - \cot \frac{y\pi}{n}) \cot \frac{\pi}{2n}$$

$$\textcircled{6} \text{ 所求第 } y \text{ 組高的和 } x = \overline{FG} = \overline{EF} \sin \frac{y\pi}{n} = at(\csc \frac{y\pi}{n} - \cot \frac{y\pi}{n}) \cot \frac{\pi}{2n} \sin \frac{\pi}{2n}$$

$$= at(1 - \cos \frac{y\pi}{n}) \cot \frac{\pi}{2n}, \quad \text{又 } p = \frac{1}{2} atn \cot \frac{\pi}{2n}$$

$$\Rightarrow x = at(1 - \cos \frac{y\pi}{n}) \cot \frac{\pi}{2n} = \frac{1}{2} at \cot \frac{\pi}{2n} (2 - 2 \cos \frac{y\pi}{n}) = \frac{p}{n} (2 - 2 \cos \frac{y\pi}{n})$$

結論(1)：第 1 組高 $\Rightarrow H_1, H_3$ ，第 y 組高 ($y \geq 2$) $\Rightarrow H_{2n+2-y}, H_{y+2}$

$$\text{第 } y \text{ 組高的和 } \Rightarrow at(1 - \cos \frac{y\pi}{n}) \cot \frac{\pi}{2n} = \frac{1}{2} at \cot \frac{\pi}{2n} (2 - 2 \cos \frac{y\pi}{n}) = \frac{p}{n} (2 - 2 \cos \frac{y\pi}{n})$$

(四) P 點在 S_i 區域時 λ 值之討論：

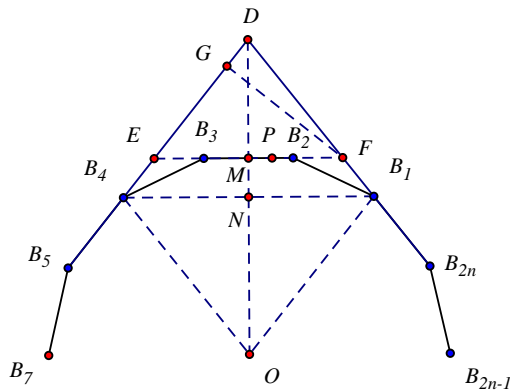
1. t (放大倍率) 與 i 間的比例關係：

如圖(31)，所求的是 $\frac{\overline{B_2B_3}}{A_2A_3}$ 的值。 $\because \square B_2B_3O \cong \square A_2A_3O$ ， $\therefore \frac{\overline{B_2B_3}}{A_2A_3} = \frac{\overline{OE_i}}{\overline{OM'}}$

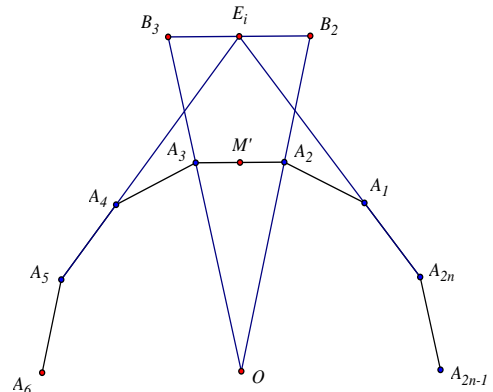
$$\frac{\overline{B_2B_3}}{A_2A_3} = \frac{\overline{OE_i}}{\overline{OM'}} = \frac{\overline{OD}}{\overline{OM}} = \frac{\overline{MD} + \overline{MO}}{\overline{OM}} = 1 + \frac{\overline{MD}}{\overline{OM}} \quad (\text{圖(30)})， \text{由前之推導 } \overline{MD} = \frac{1}{2} at(\sec \frac{y\pi}{n} - 1) \cot \frac{\pi}{2n}$$

$$\overline{MO} = \frac{1}{2} at \cot \frac{\pi}{2n} \quad \therefore \frac{\overline{B_2B_3}}{A_2A_3} = 1 + \frac{\overline{MD}}{\overline{OM}} = 1 + \frac{\frac{1}{2} at(\sec \frac{y\pi}{n} - 1) \cot \frac{\pi}{2n}}{\frac{1}{2} at \cot \frac{\pi}{2n}} = \sec \frac{y\pi}{n}$$

$$\Rightarrow \sec \frac{(b-1)\pi}{n} < t \leq \sec \frac{b\pi}{n} \quad (b \in N, b < \frac{n}{2}) \text{ 時， } i = b \cdots \text{結論(2)}$$



圖(30)



圖(31)

2.λ 值之討論：

由先前之討論，可得 H_x 、 h_x 轉換之通式，分別帶入後，結果如下：

$$\begin{array}{l}
 \boxed{S_1} \begin{cases} h_1 + h_3 + \dots + h_{2n-1} = p - nk \\ h_2 + h_4 + \dots + h_{2n} = p - (n-2)k \end{cases} \\
 \boxed{S_2} \begin{cases} h_1 + h_3 + \dots + h_{2n-1} = p - 2(H_1 + H_3) - (n-4)k \\ h_2 + h_4 + \dots + h_{2n} = p - (n-2)k \end{cases} \\
 \boxed{S_3} \begin{cases} h_1 + h_3 + \dots + h_{2n-1} = p - 2(H_1 + H_3) - (n-4)k \\ h_2 + h_4 + \dots + h_{2n} = p - 2(H_4 + H_{2n}) - (n-6)k \end{cases} \\
 \boxed{S_4} \begin{cases} h_1 + h_3 + \dots + h_{2n-1} = p - 2(H_1 + H_3 + H_5 + H_{2n-1}) - (n-8)k \\ h_2 + h_4 + \dots + h_{2n} = p - 2(H_4 + H_{2n}) - (n-6)k \end{cases} \\
 \vdots \\
 \text{以此類推}
 \end{array}$$

由結論(2)，令 $\sec \frac{(i-1)\pi}{n} < t \leq \sec \frac{i\pi}{n}$ ，點 P 位於 S_i 區域，從上知，

$$h_1 + h_3 + \dots + h_{2n-1} = p - 2\left(\left[\frac{i}{2}\right]\text{組高}\right) - \left(n - 4\left[\frac{i}{2}\right]\right)k$$

$$h_2 + h_4 + \dots + h_{2n} = p - 2\left(\left[\frac{i-1}{2}\right]\text{組高}\right) - \left(n - (2 + 4\left[\frac{i-1}{2}\right])\right)k$$

◎ $\left[\frac{i}{2}\right]$ 組高及 $\left[\frac{i-1}{2}\right]$ 組高之說明

1. 考慮 $h_1 + h_3 + \dots + h_{2n-1} = p - 2\left(\left[\frac{i}{2}\right]\text{組高}\right) - \left(n - 4\left[\frac{i}{2}\right]\right)k$ 時

$$\left[\frac{i}{2}\right] = 1, \text{ 則代表第 1 組高}$$

$$\left[\frac{i}{2}\right] = 2, \text{ 則代表第 1 組高及第 3 組高}$$

亦即當 $\left[\frac{i}{2}\right] = r$ 時，則代表第 1 組高、第 3 組高……第 $(2r-1)$ 組高

2. 考慮 $h_2 + h_4 + \dots + h_{2n} = p - 2\left(\left[\frac{i-1}{2}\right]\text{組高}\right) - \left(n - (2 + 4\left[\frac{i-1}{2}\right])\right)k$ 時

$$\left[\frac{i-1}{2}\right] = 1, \text{ 則代表第 2 組高}$$

$$\left[\frac{i-1}{2}\right] = 2, \text{ 則代表第 2 組高及第 4 組高}$$

亦即當 $\left\lfloor \frac{i-1}{2} \right\rfloor = r$ 時，則代表第 2 組高、第 4 組高……第 $2r$ 組高

$$\begin{aligned} \therefore \lambda &= \frac{\square A_1 A_2 P + \square A_3 A_4 P + \dots + \square A_{2n-1} A_{2n} P}{\square A_2 A_3 P + \square A_4 A_5 P + \dots + \square A_{2n} A_1 P} = \frac{p-2\left(\left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor \text{組高}\right) - \left(n-4\left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor\right)k}{p-2\left(\left\lfloor \frac{i-1}{2} \right\rfloor \text{組高}\right) - \left(n-(2+4\left\lfloor \frac{i-1}{2} \right\rfloor)\right)k} \\ &= \frac{p\left(1-\frac{4\left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor}{n}\right) + 4p \sum_{k=1}^{\left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor} \cos \frac{(2k-1)\pi}{n} - (n-4\left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor)k}{p\left(1-\frac{4\left\lfloor \frac{i-1}{2} \right\rfloor}{n}\right) + 4p \sum_{k=1}^{\left\lfloor \frac{i-1}{2} \right\rfloor} \cos \frac{2k\pi}{n} - [n-(2+4\left\lfloor \frac{i-1}{2} \right\rfloor)]k} = \frac{n-4\left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor + 4t \sum_{k=1}^{\left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor} \cos \frac{(2k-1)\pi}{n}}{2t+n-(2+4\left\lfloor \frac{i-1}{2} \right\rfloor) + 4t \sum_{k=1}^{\left\lfloor \frac{i-1}{2} \right\rfloor} \cos \frac{2k\pi}{n}} \\ \text{又依積化和差} &\Rightarrow \sum_{k=1}^{\left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor} \cos \frac{(2k-1)\pi}{n} = \cos \frac{\pi}{n} + \cos \frac{3\pi}{n} + \dots + \cos \frac{2\left(\left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor-1\right)\pi}{n} = \frac{\sin \frac{2\left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor \pi}{n}}{2 \sin \frac{\pi}{n}} \end{aligned}$$

$$\text{同理，} \sum_{k=1}^{\left\lfloor \frac{i-1}{2} \right\rfloor} \cos \frac{2k\pi}{n} = \cos \frac{2\pi}{n} + \cos \frac{4\pi}{n} + \dots + \cos \frac{2\left\lfloor \frac{i-1}{2} \right\rfloor \pi}{n} = \frac{\sin \frac{(2\left\lfloor \frac{i-1}{2} \right\rfloor+1)\pi}{n}}{2 \sin \frac{\pi}{n}} - \frac{1}{2}$$

分別將其代入，得

$$\lambda = \frac{n-4\left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor + 4t \sum_{k=1}^{\left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor} \cos \frac{(2k-1)\pi}{n}}{2t+n-(2+4\left\lfloor \frac{i-1}{2} \right\rfloor) + 4t \sum_{k=1}^{\left\lfloor \frac{i-1}{2} \right\rfloor} \cos \frac{2k\pi}{n}} = \frac{(n-4\left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor) \sin \frac{\pi}{n} + 2t \sin \frac{2\left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor \pi}{n}}{[n-(2+4\left\lfloor \frac{i-1}{2} \right\rfloor)] \sin \frac{\pi}{n} + 2t \sin \frac{(2\left\lfloor \frac{i-1}{2} \right\rfloor+1)\pi}{n}}$$

在 S_i 區域，如果 t 固定， λ 值是一個定值。

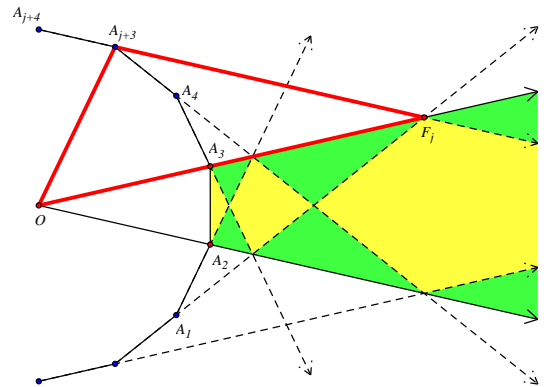
(五) P 點在 T_j 區域時 λ 之討論：

1. t 與 j 間的比例關係：

如圖(32)，分別延長 $\overline{A_{j+3}A_{j+4}}$ 、 $\overline{OA_3}$ ，兩射線交於點 F_j 。

①經由推導，得 $\angle A_{j+3}OF_j = \frac{j\pi}{n}$ ，

$$\angle OA_{j+3}F_j = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2n} \Rightarrow \angle OF_jA_{j+3} = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2n} + \frac{j\pi}{n}\right)$$



圖(32)

②在 $\square OA_{j+3}F_j$ 中，依正弦定理可得 $\frac{\overline{OF_j}}{\sin(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2n})} = \frac{\overline{OA_3}}{\sin(\frac{\pi}{2} - (\frac{\pi}{2n} + \frac{j\pi}{n}))}$

$$\therefore \overline{OF_j} = \frac{a \cot \frac{\pi}{2n}}{2 \cos(\frac{\pi}{2n} + \frac{j\pi}{n})}$$

③把①②結果代入，可得 $t = \frac{\overline{OF_j}}{\overline{OA_3}} = \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\sin \frac{\pi}{n} \cos \frac{j\pi}{n} + 2 \cos \frac{\pi}{n} \sin \frac{j\pi}{n} - 2 \sin \frac{j\pi}{n}}$

由於此式較為複雜，所以令 $f(x) = \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\sin \frac{\pi}{n} \cos \frac{x\pi}{n} + 2 \cos \frac{\pi}{n} \sin \frac{x\pi}{n} - 2 \sin \frac{x\pi}{n}}$

若 $f(j-1) < t \leq f(j)$ ，則 P 點位於 T_j 區域。……結論(3)

2. λ 值之討論：

所有未知數與 S_i 區域的討論相同。又因上下對稱，所以只討論該點出現在上側的情形。沿用 p.14 的結論，可列出下列通式：

$$\boxed{T_1} \begin{cases} h_1 + h_3 + \dots + h_{2n-1} = p - 2H_3 - (n-2)k \\ h_2 + h_4 + \dots + h_{2n} = p - (n-2)k \end{cases}$$

$$\boxed{T_2} \begin{cases} h_1 + h_3 + \dots + h_{2n-1} = p - 2(H_1 + H_3) - (n-4)k \\ h_2 + h_4 + \dots + h_{2n} = p - 2H_4 - (n-4)k \end{cases}$$

$$\boxed{T_3} \begin{cases} h_1 + h_3 + \dots + h_{2n-1} = p - 2(H_1 + H_3 + H_5) - (n-6)k \\ h_2 + h_4 + \dots + h_{2n} = p - 2(H_4 + H_{2n}) - (n-6)k \end{cases}$$

$$\boxed{T_4} \begin{cases} h_1 + h_3 + \dots + h_{2n-1} = p - 2(H_1 + H_3 + H_5 + H_{2n-1}) - (n-8)k \\ h_2 + h_4 + \dots + h_{2n} = p - 2(H_4 + H_{2n} + H_6) - (n-8)k \end{cases}$$

⋮

以此類推

上面的規則與 P 在 S_i 區域之情形十分相似，就只差在多一個高與兩個 k ，又從前之推論，易知每一組之高 (H) 的和為一定值。從上可知， $h_1 + h_3 + \dots + h_{2n-1}$ 與 $h_2 + h_4 + \dots + h_{2n}$ 中所含

之 H 個數必有一為奇數，所以必不能配成定值，亦即該比例與其中一組高的大小有關，而異於之前， P 在 S_i 區域時， λ 為定值。以下，便是 P 在 T_j 區域時 λ 的計算。

1. 當 j 為奇數時：

$$\lambda = \frac{\square A_1 A_2 P + \square A_3 A_4 P + \dots + \square A_{2n-1} A_{2n} P}{\square A_2 A_3 P + \square A_4 A_5 P + \dots + \square A_{2n} A_1 P} = \frac{h_1 + h_3 + \dots + h_{2n-1}}{h_2 + h_4 + \dots + h_{2n}}$$

$$= \frac{p - 2H_{j+2} - 2\left(\left(\frac{j-1}{2}\right)\text{組高}\right) - (n-2j)k}{p - 2\left(\left(\frac{j}{2}\right)\text{組高}\right) - (n-2j)k} = \frac{a(2t+n-2j)\sin\frac{\pi}{n} + 2at\sin\frac{(j-1)\pi}{n} - 4(1-\cos\frac{\pi}{n})H_{j+2}}{a(n-2j)\sin\frac{\pi}{n} + 2at\sin\frac{j\pi}{n}}$$

2. 當 j 為偶數時：

$$\lambda = \frac{\square A_1 A_2 P + \square A_3 A_4 P + \dots + \square A_{2n-1} A_{2n} P}{\square A_2 A_3 P + \square A_4 A_5 P + \dots + \square A_{2n} A_1 P} = \frac{h_1 + h_3 + \dots + h_{2n-1}}{h_2 + h_4 + \dots + h_{2n}}$$

$$= \frac{p - 2\left(\left(\frac{j}{2}\right)\text{組高}\right) - (n-2j)k}{p - 2\left(\left(\frac{j}{2}-1\right)\text{組高}\right) - 2H_{j+2} - (n-2j)k} = \frac{a(n-2j)\sin\frac{\pi}{n} + 2at\sin\frac{j\pi}{n}}{a(2t+n-2j)\sin\frac{\pi}{n} + 2at\sin\frac{(j-1)\pi}{n} - 4(1-\cos\frac{\pi}{n})H_{j+2}}$$

綜合 1.2. 所得的結果，當 j 分別為奇數及偶數時，所求得的 λ 值恰互為倒數關係，所以

可以將奇偶數的結果合併，即 λ 為
$$\left[\frac{a(n-2j)\sin\frac{\pi}{n} + 2at\sin\frac{j\pi}{n}}{a(2t+n-2j)\sin\frac{\pi}{n} + 2at\sin\frac{(j-1)\pi}{n} - 4(1-\cos\frac{\pi}{n})H_{j+2}} \right]^{(-1)^j}$$

(六) λ 函數圖形討論

1. 圖形的討論及圖(22)為使 $\lambda=1$ 之唯一解的證明：

將 λ 值之公式推導出來後，可對其圖形進行討論並且證明 $\lambda=1$ 的點必定只會落在圖(22)所標示的線段上：

(1) P 點位於 S_i 區域時的討論

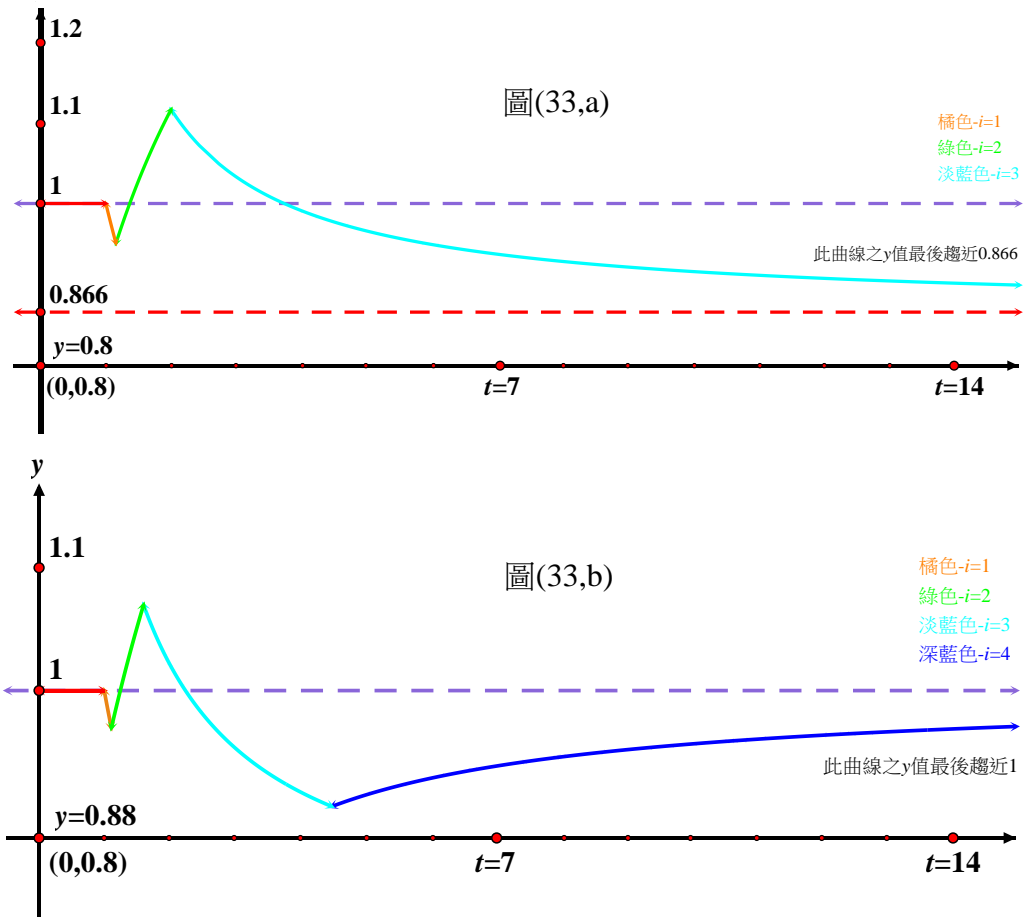
將 λ 、 t 交叉相乘後，可得 $a(\lambda-b)(t-c)=d$, ($a, b, c, d \in R$)，故每一個 i 所得之圖形，皆為一以鉛直線與水平線為漸近線 ($L_1: \lambda=b, L_2: t=b$) 之雙曲線。我們即依不同之 i 取其中之一小段，並將圖拼起來。由於已經求出外部任一點的 λ ，故可將用微分的方式，確認 λ 的圖形為遞增或遞減。

$$S_i \text{ 區域 } \lambda = \frac{(n-4\lfloor\frac{i}{2}\rfloor)\sin\frac{\pi}{n} + 2t\sin\frac{2\lfloor\frac{i}{2}\rfloor\pi}{n}}{[n-(2+4\lfloor\frac{i-1}{2}\rfloor)]\sin\frac{\pi}{n} + 2t\sin\frac{(2\lfloor\frac{i-1}{2}\rfloor+1)\pi}{n}}$$

λ 對 t 微分後可得：

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{2 \sin \frac{2[\frac{i}{2}]\pi}{n} [n - (2 + 4[\frac{i-1}{2}]) \sin \frac{\pi}{n}] - 2(n - 4[\frac{i}{2}]) \sin \frac{\pi}{n} \sin \frac{(2[\frac{i-1}{2}] + 1)\pi}{n}}{\left\{ [n - (2 + 4[\frac{i-1}{2}]) \sin \frac{\pi}{n}] + 2t \sin \frac{(2[\frac{i-1}{2}] + 1)\pi}{n} \right\}^2}$$

將中央部份的 λ 對 t 微分後，因其分母為完全平方式，又分子為兩正弦函數值之差值，故易證在同一 i 值時，其 $\frac{d\lambda}{dt}$ 之值不是大於 0，便是小於 0，表示在同一 i 值時，其 λ 值必為遞增或遞減。又易證 i 為奇數時，位於該區間之 t 值最小時，有最大之 λ 值，且 $\frac{d\lambda}{dt}$ 必大於 0。而 i 為偶數時，於該區間之 t 值最小時，有最小之 λ 值，且 $\frac{d\lambda}{dt}$ 必小於 0。故可得每一區均只有一使 $\lambda=1$ 之 t 值。（如圖(33,a)為 $n=6$ 之圖形，圖(33,b)為 $n=7$ 之圖形）



(2) P 點位於 T_j 區域時的討論：

由公式可得，若我們定 t 、 n ，則 λ 僅受 H_{j+2} 影響，又隨著點由上往下移動， H_{j+2} 將越來越大。而 λ 值之公式中， H_{j+2} 可能出現於分子或分母（由 j 之奇偶性決定），故 λ 值也會

隨之越來越大或越來越小。又已知邊界之兩側之 λ 恆為 1。故位於 T 區域之所有點之 λ 皆不為 1。

綜合(1)、(2)之結果，便能說明使 λ 為 1 的點，必定落在圖(22)所標示的線上，且不會有其他的點符合 $\lambda=1$ 的條件。

2. P 點位於 S_i 區域時 λ 極值的討論：

(1) 令 $n = 2k$ ($k \in N$)，當 $t \rightarrow \infty$ 時其 $i=k$

① 假設 $k = 2q$ ($q \in N$)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda = \frac{\sin \frac{2q\pi}{4q}}{\sin \frac{(2q-1)\pi}{4q}} = \csc \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n} \right) = \frac{\pi}{\pi - \frac{\pi}{n}}$$

② 假設 $k = 2q-1$ ($q \in N$)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda = \frac{\sin \frac{2q-2}{4q-2} \pi}{\sin \frac{2q-1}{4q-2} \pi} = \frac{\sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4q-2} \right)}{\sin \frac{\pi}{2}} = \cos \frac{\pi}{n}$$

(2) 令 $n = 2k-1$ ($k \in N$)，當 $t \rightarrow \infty$ 時其 $i=k$

① 假設 $k = 2q$ ($q \in N$)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda = \frac{\sin \frac{2q\pi}{4q-1}}{\sin \frac{(2q-1)\pi}{4q-1}} = \frac{\sin \frac{2q}{4q-1} \pi}{\sin \left(\pi - \frac{2q\pi}{4q-1} \right)} = 1$$

② 假設 $k = 2q+1$ ($q \in N$)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda = \frac{\sin \frac{2q\pi}{4q+1}}{\sin \frac{2q+1}{4q+1} \pi} = \frac{\sin \frac{2q\pi}{4q+1}}{\sin \left(\pi - \frac{2q\pi}{4q+1} \right)} = 1$$

由(1)(2)所得之結果可整理為：

① n 為奇數時， $\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda = 1$

② n 為偶數時，若 n 為 $4m$ ($m \in N$)， $\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda = \sec \frac{\pi}{n}$ ； n 為 $4m+2$ ($m \in N$)， $\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda = \cos \frac{\pi}{n}$

伍、研究結果

一、我們推廣出：一個正 $2n$ 邊形 $A_1A_2\dots A_{2n-1}A_{2n}$ ，若 P 點為此 $2n$ 邊形邊上或內部任意一點，

$$\text{則 } \square A_1A_2P + \square A_3A_4P + \dots + \square A_{2n-1}A_{2n}P = \square A_2A_3P + \square A_4A_5P + \dots + \square A_{2n}A_1P$$

二、若將此 P 點移到正 $2n$ 邊形外部的話，則亦可找到符合

$$\square A_1A_2P + \square A_3A_4P + \dots + \square A_{2n-1}A_{2n}P = \square A_2A_3P + \square A_4A_5P + \dots + \square A_{2n}A_1P$$

亦證明：符合條件之 P 點軌跡為一放射狀圖形及 $[\frac{n}{2}] - 1$ 個較原正 $2n$ 邊形大的正 $2n$ 邊形(圖(22))，且此為使 λ 值為 1 之唯一解。

三、我們推導出 $\lambda = \frac{\square A_1A_2P + \square A_3A_4P + \dots + \square A_{2n-1}A_{2n}P}{\square A_2A_3P + \square A_4A_5P + \dots + \square A_{2n}A_1P}$ ，公式如下：

(一)若 P 點在正 $2n$ 邊形內或上，則面積比必為 1。

(二)若 P 點在正 $2n$ 邊形外又分成兩種情況：

①若 P 點位於 S 區域，沿該點作的正 $2n$ 邊形之邊長為原正 $2n$ 邊形的 t 倍且 t 滿

$\sec \frac{(i-1)\pi}{n} < t \leq \sec \frac{i\pi}{n}$ ，則稱 P 點位於 S_i 區域，且其 λ 是一個定值， λ 為

$$\frac{(n - 4[\frac{i}{2}]) \sin \frac{\pi}{n} + 2t \sin \frac{2[\frac{i}{2}]\pi}{n}}{[n - (2 + 4[\frac{i-1}{2}])] \sin \frac{\pi}{n} + 2t \sin \frac{(2[\frac{i-1}{2}] + 1)\pi}{n}} ;$$

②若 P 點位於 T 區域，沿該點作的正 $2n$ 邊形之邊長為原正 $2n$ 邊形的 t 倍且 t 滿足

$f(j-1) < t \leq f(j)$ ($f(x)$ 之公式請參考 p.20)，則稱 P 點位於 T_j 區域，且 λ 為

$$\left[\frac{a(n-2j) \sin \frac{\pi}{n} + 2at \sin \frac{j\pi}{n}}{a(2t+n-2j) \sin \frac{\pi}{n} + 2at \sin \frac{(j-1)\pi}{n} - 4(1 - \cos \frac{\pi}{n}) H_{j+2}} \right]^{(-1)^j} ;$$

四、我們討論當 P 位於 S_i 區域的 λ 函數圖形，發現 t 趨近無限大時 λ 會趨近某個值。經過討論：當 n 為奇數時， $\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda = 1$ ，而 n 又可分成 $4q+1$ 、 $4q+3$ ($q \in N$)。當 $n=4q+1$ 且 t

極大時， λ 恆大於 1；而若 $n=4q+3$ 且 t 極大時， λ 恆小於 1。若當 n 為偶數時，又可

分 n 成 $4q$ 、 $4q+2$ ($q \in N$)。當 $n=4q$ 時， $\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda = \sec \frac{\pi}{n}$ ；而若 $n=4q+2$ 時， $\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda = \frac{\pi}{n}$ 。

(如圖(33,a)，圖中顯示之 0.866 即為 $\cos \frac{\pi}{6}$)

陸、討論

一、面臨的問題與解決方法：

在本作品中，我們為了解決此一問題，使用了許多方法。而我們所得之方法不斷改進，一步一步解決所面臨之問題，最後終於完整解決此相關問題。

在本作品一開始，我們很快得到當 P 在內部時， λ 是恆等於 1 的。接下來，我們將 P 移至外部，也經由解析法頗快得到一些推測。而在接下來的證明中，我們雖曾嘗試用解析作證明，但式子真的頗為複雜，也因此我們決定採用歐氏幾何證之。

一開始，我們想到了第 7 頁之方法，它採用了配對之方式，為我們省去了不少繁複的計算。也讓我們順利的證明出在正 $4n$ 邊形時，我們的推論是正確的。此一方法中雖沒辦反完全解決我們的問題，但其所用到的配對方法，為此問題簡化了不少計算，實為本作品中之一大突破！

然而此一方法之使用限制，就在 $4n+2$ 時，雖然亦可用如上之配對方法，但其配對就不如在 $4n$ 時一般，得到 $h_{2s+1} \pm h_{2t+1} = k$ 以及 $h_{2s} \pm h_{2t} = k$ 。反而得到 $h_{2s} \pm h_{2t+1} = k$ 或 $h_{2s+1} \pm h_{2t} = k$ ，如此一來，便造成式子化簡時，配對之失敗。若仍使用這些式子做整理，最後會留有 h 、 k 。若要證明這些等式成立，則需要更多的關係式才能作出來。我們仍嘗試作證明，但由於所需之關係式極多變化，十分複雜，所以我們決定變換一種更方便也更具推廣性的方式來證明使所有正 $2n$ 邊形均成立。

於是我們便想到另一種作法，就如第 9 頁所示，可以證明所有正 $2n$ 邊形均成立。這個方法不僅使用到了一開始「若一點 P 位於一正 $2n$ 邊形內部時，則 λ 恆為 1」的結論，亦改進了原方法之配對問題，使配對不再受奇偶性之影響。此方法更為本作品中，極為重大也極為精采的突破！

而最後，我們要討論的，便是 $\lambda \neq 1$ 之情況了。然而，一開始，我們仍然考慮許多方法，但其結果都極為複雜而難以討論，正因為 P 已是毫無限制之動點，而造成其情況變化性極高，而根本無法進行討論。

最後，我們發現我們用來證明所有正 $2n$ 邊形均成立之方法，為我們解決了 P 毫無限制的問題。我們過 P 點所作的大正 $2n$ 邊形，把 P 點從毫無限制而固定在一正 $2n$ 邊形上了，此實在縮小了 P 點之範圍，使得 H 好算許多。而後來，我們只要做 H 、 h 之轉換即可順利求出我們所需之結果了。此一方法，用歐氏幾何之方式，漂亮的避免掉許多其他方法所面臨之難處，並順利的解決此一複雜之問題。此一方法正是本作品中最具特色也最為精采的一部份！

以上即為本次作品中，我們所面臨的困難及最後解決的方法，其中有許多出乎意料的創新及結果，可以提供相關題材研究的參考。

二、本作品和參考資料之對照：

能力競賽解答只限於證明正六邊形內部的情況，有關正 $2n$ 邊形以及外部的推廣，皆屬於本次研究的創新。此外，在推廣之前，我們曾經翻閱維維安尼定理，參考其討論高的定值問題之方法，但最後發現其延伸方向和我們所要的極為不同，故我們只採用了其基本概念。至於龍騰數亦優的部分，其使用複數的方法證明原題。但其僅限於六邊形，且其後推廣方向也與我們的作品有極大差異，因此它僅提供我們另一種證明原題的方法！

柒、結論

本次作品中我們所用來探討正 $2n$ 邊形外部一點的作法，十分創新，也可以藉此避免許多複雜之問題，實可以做為正 $2n$ 邊形外部其他面積相關問題探討時的參考。

捌、參考資料與其他

1. 九十八年花蓮區能力競賽複賽試題
2. 賴勇仁、吳孝仁，複數與三角形面積，龍騰數亦優第 11 期，p.17—p.23
3. 黃家禮（95），幾何明珠，九章出版社，維維安尼定理，p.157—p.166

【評語】 040420

本文探討數學競賽中“正六邊形內部一點所決定之兩組三角形面積和相等”的問題，並拓展到“正 n 邊形”以及“外部一點”的狀況。作者在不斷嘗試新的作法，檢討所面臨之困難並逐步修正方向後，終於突破證明的瓶頸，完整解決問題，其研究精神非常值得肯定。