中華民國第51屆中小學科學展覽會

作品說明書

高中組　數學科

040419

連續整數的n階完美平分

學校名稱：花蓮縣私立海星高級中學

作者：	指導老師：
高一 周子齊 高一 賴芷威 高一 蕭予帆	王寶能

關鍵詞：連續整數、整數、平分

連續整數的 n 階完美平分

摘要

本研究屬於整數分組的問題，我們所找到的相關文獻有「第 49 屆全國科展國中組－誰最數配」以及「第 44 屆全國科展高中組－談整數分組問題」，研究內容都是以次方來分別討論 $1^k, 2^k, 3^k, \ldots$ ，N^k 的分組方式。而我們的研究則是把重心放在如何能找出同時滿足 k =1,2,…,n 的平分兩組的方式，我們稱為 n 階完美平分。

所謂連續整數的 n 階完美平分是指『將連續整數分成 2 組，並且滿足①2 組數量相等②2 組數字的 k 次方的總和相等，其中 $k = 1,2,\ldots,n$』。

研究過程中，我們透過矩陣來紀錄分組的歷程後完成了底下的結果

1. 找出了連續 N 個整數的 1 階完美平分的方法與相關的限制。
2. 找出了連續 N 個整數的 2 階完美平分的方法與相關的限制。
3. 找出了連續 N 個整數的 3 階完美平分的方法與相關的限制。
4. 找出了連續$(2^n \times k)$個整數的 n 階完美平分；其中 $n \geqq 4$; $k \geqq 2$。

壹、研究動機

高雄師範大學數學系 左太政教授 在『談如何從事科學展覽』裡提到一個問題：『已知有 m 個數分別為$1^2, 2^2, 3^2, \ldots$ ，m^2 ，今將這些數分為 n 組，其中 n 為 m 之因數，使每組皆有 $\frac{m}{n}$ 個數且每組的數之和都相等，試問應如何分法？』這個問題引發我們思考『如何將連續整數做到最佳的平分』，於是我們展開了這一場完美平分的研究。

貳、研究目的

一、找出連續整數 1~N 的 1 階完美平分的方法與限制。

二、找出連續整數 1~N 的 2 階完美平分的方法與限制。

三、找出連續整數 1~N 的 3 階完美平分的方法與限制。

四、找出連續$(2^n \times k)$個整數的 n 階完美平分的方法；其中 $n \geqq 4$; $k \geqq 2$。

參、研究設備與器材

紙、筆、電腦、計算機、Excel、VBA

肆、研究過程與方法

一、名詞與符號定義

定義 1： 所謂的 n 階的完美平分指的是，我們將一組數分成 2 組並且滿足以下的條件。
(1) 2 組數量相等　(2) 2 組數字的 k 次方的總和相等，其中 $k=1,2,\ldots,n$。

定義 2: **交換矩陣 E_{12}：**代表將 2 階單位矩陣第 1 列和第 2 列對調的運算，即 $E_{12}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}_{2\times2}$

定義 3： **$1_{2\times n}$ 矩陣**：代表每個元素都等於 1 的 $2\times n$ 矩陣，即 $1_{2\times n}=\begin{bmatrix}1 & \cdots & 1\\ 1 & \cdots & 1\end{bmatrix}_{2\times n}$

定義 4： ***n* 階完美平分矩陣集合** $\mathrm{PB}_{2\times p}^{a,(n)}$ (the matrix set of Perfect Bisect with order n)

；其中 $a\in Z$；$n,p\in N$

$\mathrm{PB}_{2\times p}^{a,(n)}$ 是一個由 a 開始的連續 $2\times p$ 個整數所組成的 2 列 p 行之矩陣所成的集合，

而矩陣的同一列代表同一組，並且滿足 n 階的完美平分。

也就是說，若 $\mathrm{U}_{2\times p}^{a,(n)}=(u_{ij})_{2\times p}\in \mathrm{PB}_{2\times p}^{a,(n)}$ 則 $\sum_{j=1}^{p}u_{1,j}{}^{k}=\sum_{j=1}^{p}u_{2,j}{}^{k}$ 其中 $k=1,2,\ldots,n$

而且，當 a=1 我們省略不寫，也就是將 $\mathrm{PB}_{2\times p}^{1,(n)}$ 簡寫成 $\mathrm{PB}_{2\times p}^{(n)}$ 。

此外，不難理解 $\mathrm{PB}_{2\times p}^{a,(n+1)}\subset \mathrm{PB}_{2\times p}^{a,(n)}$ 。

二、找出連續整數 1~N 的 1 階完美平分的方法與限制

要均分成 2 組，N 一定要是 2 的倍數，即 N＝2p。此外，要將連續整數 1~2p 要平分成兩組時，每一組的總和為 $\dfrac{2p\times(1+2p)}{2\times2}=\dfrac{p\times(1+2p)}{2}$ 須為整數，所以，p 必須為偶數。
故，**要做到連續整數 1~N 的 1 階完美平分，則 N 必須為 4 的倍數，否則無解。**

接著，我們令 N＝4k，此時 1~N 就會變成 1~4k；其中 k≧1
而我們知道將 1~4 頭尾兩兩分一組就可以做到 1 階的完美平分。
在本文裡，為了方便起見，我們使用矩陣的來記錄分組的情形，同一列代表同一組。
然後發現了這種排法在矩陣裡形成一個 U 字的筆順，我們稱這種分組法為 U 形平分法，同時有了以下的定義。

定義 5： **U 形平分法**

將數列 a_1,a_2,a_3,a_4 按照 U 的筆序寫入 2×2 的矩陣，稱之為 U 形平分法。

也就是 a_1,a_2,a_3,a_4 的 U 形平分為 $\begin{bmatrix} a_1 & a_4 \\ a_2 & a_3 \end{bmatrix}$

明顯的，U 形平分法可以將連續 4 個整數，做到 1 階的完美平分。

因此，我們知道 $\begin{bmatrix} a+1 & a+4 \\ a+2 & a+3 \end{bmatrix} \in \mathrm{PB}_{2\times 2}^{a+1,(1)}$；$a \in Z$ 。

所以我們若將連續 $4k$ 個整數從頭開始，每 4 個一小組，做 k 次的 U 形平分就可辦到 1 階的完美平分。接著，我們使用增廣矩陣的符號來記錄 1~$4k$ 的分組情況

$$\left[\begin{array}{cc|cc|c|cc} 1 & 4 & 5 & 8 & \multirow{2}{*}{\cdots\cdots} & 4k-3 & 4k \\ 2 & 3 & 6 & 7 & & 4k-2 & 4k-1 \end{array}\right] \in \mathrm{PB}_{2\times 2k}^{(1)}$$ ，並簡寫成

$\left[\mathrm{U}_{2\times 2}^{(1)} \,\middle|\, \mathrm{U}_{2\times 2}^{5,(1)} \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, \mathrm{U}_{2\times 2}^{4k-3,(1)}\right] \in \mathrm{PB}_{2\times 2k}^{(1)}$， 其中 $\mathrm{U}_{2\times 2}^{a+1,(1)} = \begin{bmatrix} a+1 & a+4 \\ a+2 & a+3 \end{bmatrix} \in \mathrm{PB}_{2\times 2}^{a+1,(1)}$；$a \in Z$ 。

同時，我們不難理解，兩列對調完全不會影響完美平分的特性。

所以，若 $\mathrm{U}_{2\times 2}^{a,(1)} \in \mathrm{PB}_{2\times 2}^{a,(1)}$ 則 $E_{12} \cdot \mathrm{U}_{2\times 2}^{a,(1)} \in \mathrm{PB}_{2\times 2}^{a,(1)}$；其中 $E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 2}$ 。

也因此我們在建構完美平分矩陣的時候，可藉由對調順序的方式找到更多不同的解答。

最後，我們觀察 $\mathrm{PB}_{2\times 2}^{a,(1)} = \left\{ \begin{bmatrix} a & a+3 \\ a+1 & a+2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a+1 & a+2 \\ a & a+3 \end{bmatrix} \right\}$ 與 $\mathrm{PB}_{2\times 2}^{(1)} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \right\}$ 的這兩個集合，發現了 $\mathrm{U}_{2\times 2}^{(1)} + (a-1)\cdot \mathbf{1}_{2\times 2} \in \mathrm{PB}_{2\times 2}^{a,(1)}$；其中 $\mathrm{U}_{2\times 2}^{(1)} \in \mathrm{PB}_{2\times 2}^{(1)}$，並將結果整裡在【定理一】。

【定理一】：已知 $a \in Z, p \in N$ ，若 $\mathrm{U}_{2\times p}^{(1)} \in \mathrm{PB}_{2\times p}^{(1)}$ ，則 $\mathrm{U}_{2\times p}^{(1)} + (a-1)\cdot \mathbf{1}_{2\times p} \in \mathrm{PB}_{2\times p}^{a,(1)}$ 。

【證明】：令 $\mathrm{U}_{2\times p}^{(1)} = (u_{ij})_{2\times p}$， 則有 $\sum_{j=1}^{p} u_{1j} = \sum_{j=1}^{p} u_{2j} \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{p}\left(u_{1j} - u_{2j}\right) = 0$ 。

令 $\mathrm{U}_{2\times p}^{(1)} + (a-1)\cdot \mathbf{1}_{2\times p} = (u'_{ij})_{2\times p}$ ，則 $u'_{ij} = u_{ij} + a - 1$

因此，
$$\sum_{j=1}^{p} u'_{1j} - \sum_{j=1}^{p} u'_{2j} = \sum_{j=1}^{p}\left(u'_{1j} - u'_{2j}\right) = \sum_{j=1}^{p}\left((u_{1j}+a-1)-(u_{2j}+a-1)\right)$$
$$= \sum_{j=1}^{p}\left(u_{1j} - u_{2j}\right) = 0$$

故得證。

結論 1：

1. 要做到連續整數 1~N 的 1 階完美平分，則 N 必須為 4 的倍數，否則無解。
2. U 形平分可以將連續 4 個整數，做到 1 階的完美平分。
   因此 1~4k 可使用 k 次的 U 形平分法做到 1 階完美平分；其中 $k \in N$ 。
   $\mathrm{U}_{2\times 2k}^{(1)} = \left[\mathrm{U}_{2\times 2}^{(1)} \left| \mathrm{U}_{2\times 2}^{5,(1)} \right| \cdots \left| \mathrm{U}_{2\times 2}^{4k-3,(1)} \right. \right] \in \mathrm{PB}_{2\times 2k}^{(1)}$ ；其中 $\mathrm{U}_{2\times 2}^{a+1,(1)} = \begin{bmatrix} a+1 & a+4 \\ a+2 & a+3 \end{bmatrix} \in \mathrm{PB}_{2\times 2}^{a+1,(1)}$; $a \in Z$
3. 由【定理一】我們知道，可以將連續整數 1~N 的 1 階完美平分法直接套用到連續 N 個整數上，同時可知 $\mathrm{PB}_{2\times p}^{a,(1)} \neq \phi \Leftrightarrow \mathrm{PB}_{2\times p}^{(1)} \neq \phi \Leftrightarrow p$ 是偶數。

討論 1：

1. 我們對連續 4 個整數使用 U 形平分法做到 1 階的完美平分，優點是：『簡單、方便、快速』。缺點是：『4k＋1 與 4k＋2 還有 4k＋3 與 4k＋4 永遠不會在同一組』。因此我們有必要研究 U 形平分的原理再加以改良。
2. U 形平分的原理是：『將 2 個公差相等的等差數列 a，a＋d 以及 b，b＋d，串成一個 4 項的數列，再將其頭尾連接達成總和相等的目標。』
   因此，除了使用的 4 個連續整數進行 U 形平分可以做到 1 階完美平分之外，我們也可以將連續整數分割成互斥的 k 組，每一組都是一個由 a_k，a_k+d_k 以及 b_k，b_k+d_k 所串成的 4 項的數列，再對每一組使用一次 U 形平分法即可完成一階完美平分。
   因此，若我們可以將連續整數分割成互斥的等差子數列，而且這些等差子數列的項數均為 4 的倍數，則我們便能使用 U 形平分將每個等差子數列做到 1 階完美平分，從而完成連續整數的 1 階完美平分。這樣便能解決『4k＋1 與 4k＋2 還有 4k＋3 與 4k＋4 永遠不會在同一組』的缺失。

【舉例說明】：利用 3 個互斥的子數列來完成 1~12 的 1 階完美平分。

首先，我們將數列分成 3 個等差子數列 1,4,7,10 ; 2,5,8,11 ; 3,6,9,12；然後對於每個數列都使用 U 形平分

$$\left[\begin{array}{cc|cc|cc} 1 & 10 & 2 & 11 & 3 & 12 \\ 4 & 7 & 5 & 8 & 6 & 9 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{列排序}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 10 & 11 & 12 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \in \mathrm{PB}_{2\times 6}^{(1)}$$

然後，我們也可以用這種方式 a_k，a_k+d_k，b_k，b_k+d_k 來分割數列 1,2,10,11 ; 3,5,6,8 ; 4,7,9,12 ；然後對於每個數列都使用 U 形平分

$$\left[\begin{array}{cc|cc|cc} 1 & 11 & 3 & 8 & 4 & 12 \\ 2 & 10 & 5 & 6 & 7 & 9 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{列排序}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 8 & 12 & 11 \\ 2 & 7 & 5 & 6 & 10 & 9 \end{bmatrix} \in \mathrm{PB}_{2\times 6}^{(1)}$$

當然還有其他很多種分法，我們不一一列舉。

三、找出連續整數 1~N 的 2 階完美平分的方法與限制

因為 $\mathrm{PB}_{2\times p}^{a,(2)} \subset \mathrm{PB}_{2\times p}^{a,(1)}$，所以我們須以 1 階完美平分為基礎，來找出 2 階完美平分的方法。

我們的想法是這樣的，U 形平分法雖然可以保證各組總和相等，但卻做不到平方和相等，這是因為數字在平方後會加大彼此間的差距；然而我們卻必須在總合相等之下尋找平方和相等的分組方式，於是我們嘗試使用兩個數量相同的 1 階完美平分矩陣，再配和順序的顛倒來回補平方所造成的差異。

當然，要均分成 2 組，N 一定要是 2 的倍數，即 N＝$2p$，而在結論 1 裡我們知道

$\mathrm{PB}_{2\times p}^{(1)} \neq \phi \Leftrightarrow p$ 是偶數。因此，我們由 $p=2m$ 來討論起 1~N 的 2 階完美平分，此時 N＝$4m$。

<u>(一) $m=1$：即 1~4 的 2 階的完美平分</u>：一一試驗後無解。

<u>(二) $m=2k$；$k\geqq 1$：即 $1\sim 8k$ 的 2 階的完美平分</u>：

首先我們著手於 1~8 的 2 階完美平分上，我們使用了 2 次連續整數的 U 形平分並將第 2 次的 U 形平分改變順序以來補足平方造成的差異。驗算後符合，如下所示

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 5 & 8 \end{bmatrix} \in \mathrm{PB}_{2\times 4}^{(2)}$$

我們將其寫成 $\left[\mathrm{U}_{2\times 2}^{(1)} \mid E_{12} \cdot \mathrm{U}_{2\times 2}^{(1)} + 4 \times \mathbf{1}_{2\times 2} \right] \in \mathrm{PB}_{2\times 4}^{(2)}$；其中 $\mathrm{U}_{2\times 2}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \in \mathrm{PB}_{2\times 2}^{(1)}$

接著，我們延續【定理一】的思考，將連續整數 1~8 的 2 階平分的方法直接套用到連續整數 2~9 以及 3~10 進行分組，

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 6 & 9 \end{bmatrix} \in \mathrm{PB}_{2\times 4}^{2,(2)} \quad ; \quad \begin{bmatrix} 3 & 6 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 7 & 10 \end{bmatrix} \in \mathrm{PB}_{2\times 4}^{3,(2)}$$

計算後發現都符合 2 階完美平分，因此我們有了【定理二】。

【定理二】: $a \in Z$ ，連續 8 個整數 $a+1, a+2, ..., a+8$ 的 2 階完美平分為

$$\mathrm{U}_{2\times 4}^{a+1,(2)} = \begin{bmatrix} a+1 & a+4 & a+6 & a+7 \\ a+2 & a+3 & a+5 & a+8 \end{bmatrix} = \left[\mathrm{U}_{2\times 2}^{a+1,(1)} \mid E_{12} \cdot \mathrm{U}_{2\times 2}^{a+1,(1)} + 4 \cdot \mathbf{1}_{2\times 2} \right] \in \mathrm{PB}_{2\times 4}^{a+1,(2)} \;;$$

其中 $\mathrm{U}_{2\times 2}^{a+1,(1)} = \begin{bmatrix} a+1 & a+4 \\ a+2 & a+3 \end{bmatrix} \in \mathrm{PB}_{2\times 2}^{a+1,(1)}$

第一組： $a+1, a+4, a+6, a+7$ ， 第二組： $a+2, a+3, a+5, a+8$

【證明】: (1) 兩組的總和均為 $4a+18$ (2) 兩組的平方總和均為 $4a^2+36a+102$

由(1)(2)，得證。

所以，我們可以將連續 8*k* 個整數，從頭開始，每 8 個一小組，每一小組做 1 次【定理二】的分組法就可以做到 2 階的完美平分。

底下我們利用矩陣的方式來表達出 1~8*k* 的 2 階完美平分。

$\left[\mathrm{U}^{1,(2)}_{2\times 4} \mid \mathrm{U}^{9,(2)}_{2\times 4} \mid \cdots \mid \mathrm{U}^{8k-7,(2)}_{2\times 4}\right] \in \mathrm{PB}^{(2)}_{2\times 4k}$；其中 $\mathrm{U}^{a+1,(2)}_{2\times 4} = \begin{bmatrix} a+1 & a+4 & a+6 & a+7 \\ a+2 & a+3 & a+5 & a+8 \end{bmatrix}$；$a \in Z$

<u>(三) *m*＝2*k*＋1 ; *k*≧1：即 1~(8*k*＋4)的 2 階的完美平分</u>：

首先我們著手於 *k*＝1 的情況，也就是 1~12 的 2 階完美平分上，經過試驗後，我們發現無法透過連續 4 個整數的 U 形平分解出 1~12 的 2 階完美平分。因此我們以拆解 1~12 的方式來尋求解答，我們發現這樣分割數列 1,2,10,11 ; 3,5,6,8 ; 7,4,12,9；然後對每個子數列使用 U 形平分可以辦到 2 階完美平分，呈現如下

$$\begin{bmatrix} 1 & 11 & 3 & 8 & 7 & 9 \\ 2 & 10 & 5 & 6 & 4 & 12 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{列排序}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 & 8 & 9 & 11 \\ 2 & 4 & 5 & 6 & 10 & 12 \end{bmatrix} \in \mathrm{PB}^{(2)}_{2\times 6}$$

有了【定理二】的經驗後，我們直覺的認為這樣的分組方式可以適用於連續的 12 個整數，因此有了【定理三】

【定理三】：已知 $a \in Z$，連續 12 個整數 $a+1, a+2, \ldots, a+11, a+12$ 的 2 階完美平分為

$$\mathrm{U}^{a+1,(2)}_{2\times 6} = \begin{bmatrix} a+1 & a+3 & a+7 & a+8 & a+9 & a+11 \\ a+2 & a+4 & a+5 & a+6 & a+10 & a+12 \end{bmatrix} \in \mathrm{PB}^{a+1,(2)}_{2\times 6}$$

第一組：$a+1, a+3, a+7, a+8, a+9, a+11$　第二組：$a+2, a+4, a+5, a+6, a+10, a+12$

【證明】：(1) 兩組的總和均為 $6a+39a$

(2) 兩組的平方總和均為 $6a^2+78a+325$。

由(1)(2)，得證。

有【定理三】的加入，我們便可以完成連續 4*k* 個整數的 2 階的完美平分，其中 *k*≧2。因為，當 *k* 是偶數的時候，我們令 *k*＝2*h*，其中 *h*≧1，則 4*k* 就會變成 8*h*，此時我們只需要將這連續 8*h* 個整數區分為 *h* 個小組，每一組使用一次【定理二】的分組方法，就可以辦到 2 階完美平分。而當 *k* 是奇數的時候，我們令 *k*＝2*h*+1，其中 *h*≧1，則 4*k* 就會變成 8*h*＋4，此時，我們只須將 8*h*＋4 區分成 *h* 個小組，其中，有一組為連續 12 個整數，使用【定理三】的分組法，剩下的 *h*－1 組，每一組均有 8 個連續的整數，均使用【定理二】的分組法，便可以完成 2 階的完美平分。

當然，各小組的兩列互換仍然可以保有 2 階完美平分的特性；而且，每連續 24 個整數，我們可以使用 3 次的【定理二】分組法，或者使用 2 次【定理三】的分組法，進而變化出更多不同的 2 階完美平分。

結論 2：

1. 要做到連續整數 1~N 的 2 階完美平分，則 N＝4k；其中 k≧2，否則無解。
2. 經由以下的方法可以做到 1~4k 的 2 階完美平分；其中 k≧2

(1) $k=2h \rightarrow \left[\mathrm{U}_{2\times4}^{(2)} \,|\, \mathrm{U}_{2\times4}^{9,(2)} \,|\, ... \,|\, \mathrm{U}_{2\times4}^{8h-7,(2)} \right] \in \mathrm{PB}_{2\times4h}^{(2)}$

(2) $k=2h+1 \rightarrow [\mathrm{U}_{2\times6}^{(2)} \,|\, \mathrm{U}_{2\times4}^{13,(2)} \,|\, \mathrm{U}_{2\times4}^{21,(2)} \,|\, ... \,|\, \mathrm{U}_{2\times4}^{8h-3,(2)}] \in \mathrm{PB}_{2\times(4h+2)}^{(2)}$

其中； $\mathrm{U}_{2\times4}^{a+1,(2)} = \begin{bmatrix} a+1 & a+4 & a+6 & a+7 \\ a+2 & a+3 & a+5 & a+8 \end{bmatrix} \in \mathrm{PB}_{2\times4}^{a+1,(2)}$；$a \in Z$

$\mathrm{U}_{2\times6}^{a+1,(2)} = \begin{bmatrix} a+1 & a+3 & a+7 & a+8 & a+9 & a+11 \\ a+2 & a+4 & a+5 & a+6 & a+10 & a+12 \end{bmatrix} \in \mathrm{PB}_{2\times6}^{a+1,(2)}$；$a \in Z$

3. 可以將連續整數 1~N 的 2 階完美平分法直接套用到連續 N 個整數上，

同時可知 $\mathrm{PB}_{2\times p}^{a,(2)} \neq \phi \Leftrightarrow \mathrm{PB}_{2\times p}^{(2)} \neq \phi \Leftrightarrow p=2k$；其中 k≧2

討論 2：

1. 我們發現，U 形平分對連續整數的影響是固定的，因此我們可以利用對調順序來回補平方後的差異。然而，每一次的 U 形平分需要四個數字，所以，在 N＝8h＋4 的情況裡，若我們 4 個數字分一組，會造成有一組落單，無法由另外一組來回補，因此，1~(8h＋4)的 2 階的完美平分無法使用連續整數的 U 形平分來解。
2. 接著我們以互斥子數列來尋求 1~(8h＋4)的 2 階的完美平分的解答，因而有了【定理三】。然而我們的困擾是，沒有發現固定的方式來拆解數列。因此，對於這種必須以互斥子數列才能解出的情況，或許利用程式語言來計算所有的可能性是比較可行的方法。
3. 在【定理二】裡，我們發現『若 $\mathrm{U}_{2\times2}^{a,(1)} \in \mathrm{PB}_{2\times2}^{a,(1)}$ 則 $\left[\mathrm{U}_{2\times2}^{a,(1)} \,|\, E_{12} \cdot \mathrm{U}_{2\times2}^{a,(1)} + 4 \cdot \mathbf{1}_{2\times2} \right] \in \mathrm{PB}_{2\times4}^{a,(2)}$ 』。

   這代表我們或許可以利用 2 個數量相同的 1 階完美平分矩陣來製造 2 階的完美平分矩陣，因此我們了【定理四】的猜想。

【定理四】:

已知 $a \in Z, p \in N$ ，若 $\mathrm{U}_{2\times p}^{a,(1)} \in \mathrm{PB}_{2\times p}^{a,(1)} \neq \phi$ ，則 $\left[\mathrm{U}_{2\times p}^{a,(1)} \,|\, E_{12} \cdot \mathrm{U}_{2\times p}^{a,(1)} + 2p \cdot \mathbf{1}_{2\times p} \right] \in \mathrm{PB}_{2\times 2p}^{a,(2)}$

【證明】：令 $\mathrm{U}_{2\times p}^{a,(1)}=(u_{i,j})_{2\times p}\in \mathrm{PB}_{2\times p}^{a,(1)}$，則 $\sum_{j=1}^{p}u_{1,j}=\sum_{j=1}^{p}u_{2,j}$

而 $E_{12}\cdot \mathrm{U}_{2\times p}^{a,(1)}+2p\cdot \mathbf{1}_{2\times p}=\begin{bmatrix} u_{2,1}+2p & u_{2,2}+2p & \ldots & u_{2,p}+2p \\ u_{1,1}+2p & u_{1,2}+2p & \ldots & u_{1,p}+2p \end{bmatrix}=(u'_{i,j})_{2\times p}$

其中 $u'_{1,j}=u_{2,j}+2p$ ； $u'_{2,j}=u_{1,j}+2p$

令 $\left[\mathrm{U}_{2\times p}^{a,(1)}\,|\,E_{12}\cdot \mathrm{U}_{2\times p}^{a,(1)}+2p\cdot \mathbf{1}_{2\times p}\right]=(\mu_{i,j})_{2\times 2p}$，則我們要證明 $\sum_{j=1}^{2p}{\mu_{2,j}}^{m}=\sum_{j=1}^{2p}{\mu_{1,j}}^{m}$，$m=1,2$

① <u>首先證明 m＝1 的情況</u>

$$\sum_{j=1}^{2p}\mu_{2,j}=\sum_{j=1}^{p}u_{2,j}+\sum_{j=1}^{p}u'_{2,j}=\sum_{j=1}^{p}(u_{2,j}+u'_{2,j})=\sum_{j=1}^{p}(u_{2,j}+u_{1,j}+2p)$$

同理 $\sum_{j=1}^{2p}\mu_{1,j}=\sum_{j=1}^{p}u_{1,j}+\sum_{j=1}^{p}u'_{1,j}=\sum_{j=1}^{p}(u_{1,j}+u'_{1,j})=\sum_{j=1}^{p}(u_{1,j}+u_{2,j}+2p)$

故，$\sum_{j=1}^{2p}\mu_{2,j}=\sum_{j=1}^{2p}\mu_{1,j}$

② <u>接著證明 m＝2 的情況</u>

$$\because \sum_{j=1}^{2p}{\mu_{2,j}}^{2}=\sum_{j=1}^{p}{u_{2,j}}^{2}+\sum_{j=1}^{p}{u'_{2,j}}^{2}=\sum_{j=1}^{p}({u_{2,j}}^{2}+{u'_{2,j}}^{2})=\sum_{j=1}^{p}({u_{2,j}}^{2}+{u_{1,j}}^{2}+4pu_{1,j}+4p^{2})$$

$$\text{而 } \sum_{j=1}^{2p}{\mu_{1,j}}^{2}=\sum_{j=1}^{p}{u_{1,j}}^{2}+\sum_{j=1}^{p}{u'_{1,j}}^{2}=\sum_{j=1}^{p}({u_{1,j}}^{2}+{u'_{1,j}}^{2})=\sum_{j=1}^{p}({u_{1,j}}^{2}+{u_{2,j}}^{2}+4pu_{2,j}+4p^{2})$$

$$\therefore \sum_{j=1}^{2p}{\mu_{2,j}}^{2}-\sum_{j=1}^{2p}{\mu_{1,j}}^{2}=\sum_{j=1}^{p}\left[({u_{2,j}}^{2}+{u_{1,j}}^{2}+4pu_{1,j}+4p^{2})-({u_{1,j}}^{2}+{u_{2,j}}^{2}+4pu_{2,j}+4p^{2})\right]$$

$$=\sum_{j=1}^{p}\left[4pu_{1,j}-4pu_{2,j}\right]=4p\cdot\sum_{j=1}^{p}\left[u_{1,j}-u_{2,j}\right]=0$$

故，$\sum_{j=1}^{2p}{\mu_{2,j}}^{2}=\sum_{j=1}^{2p}{\mu_{1,j}}^{2}$

由①,②得證。

四、找出連續整數 1~N 的 3 階完美平分的方法與限制

在【定理四】裡，我們利用 2 個數量相同的 1 階完美平分矩陣配合順序的交換，成功填補了數字在平方後所加大的差異而達成 2 階的完美平分。延續這種想法，我們使用 2 個數量相同的 2 階的完美平分矩陣，再配合順序的調動，來尋求 3 階完美平分的解答。

而我們知道 1~8 與 1~12 的 2 階完美平分矩陣存在。因此猜測

(1) $\left[\mathrm{U}_{2\times 4}^{(2)}\,|\,E_{12}\cdot \mathrm{U}_{2\times 4}^{(2)}+8\cdot \mathbf{1}_{2\times 4}\right]=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 & 7 & 10 & 11 & 13 & 16 \\ 2 & 3 & 5 & 8 & 9 & 12 & 14 & 15 \end{bmatrix}\in \mathrm{PB}_{2\times 8}^{(3)}$

(2) $\left[\mathrm{U}_{2\times 6}^{(2)} \mid E_{12}\cdot \mathrm{U}_{2\times 6}^{(2)}+12\cdot \mathbb{1}_{2\times 12}\right]=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 & 8 & 9 & 11 & 14 & 16 & 17 & 18 & 22 & 24 \\ 2 & 4 & 5 & 6 & 10 & 12 & 13 & 15 & 19 & 20 & 21 & 23 \end{bmatrix}\in \mathrm{PB}_{2\times 12}^{(3)}$

其中 $\mathrm{U}_{2\times 4}^{(2)}=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 8 \\ 2 & 3 & 6 & 7 \end{bmatrix}\in \mathrm{PB}_{2\times 4}^{(2)}$；$\mathrm{U}_{2\times 6}^{(2)}=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 & 8 & 9 & 11 \\ 2 & 4 & 5 & 6 & 10 & 12 \end{bmatrix}\in \mathrm{PB}_{2\times 6}^{(2)}$

驗算後發現階符合 3 階完美平分。因此有了【定理五】

【定理五】:

1. 連續 16 個整數 $a+1,a+2,...,a+15,a+16$ 的 3 階完美平分為

$$\mathrm{U}_{2\times 8}^{a+1,(3)}=\begin{bmatrix} a+1 & a+4 & a+6 & a+7 & a+10 & a+11 & a+13 & a+16 \\ a+2 & a+3 & a+5 & a+8 & a+9 & a+12 & a+14 & a+15 \end{bmatrix}$$

$=\left[\mathrm{U}_{2\times 4}^{a+1,(2)} \mid E_{12}\cdot \mathrm{U}_{2\times 4}^{a+1,(2)}+8\cdot \mathbb{1}_{2\times 4}\right]\in \mathrm{PB}_{2\times 8}^{a+1,(3)}$；其中 $\mathrm{U}_{2\times 4}^{a+1,(2)}\in \mathrm{PB}_{2\times 4}^{a+1,(2)}$

第一組：$a+1,a+4,a+6,a+7,a+10,a+11,a+13,a+16$

第二組：$a+2,a+3,a+5,a+8,a+9,a+12,a+14,a+15$

2. 連續 24 個整數 $a+1,a+2,...,a+23,a+24$ 的 3 階完美平分為

$$\mathrm{U}_{2\times 12}^{a+1,(3)}=\begin{bmatrix} a+1 & a+3 & a+7 & a+8 & a+9 & a+11 & a+14 & a+16 & a+17 & a+18 & a+22 & a+24 \\ a+2 & a+4 & a+5 & a+6 & a+10 & a+12 & a+13 & a+15 & a+19 & a+20 & a+21 & a+23 \end{bmatrix}$$

$=\left[\mathrm{U}_{2\times 6}^{a+1,(2)} \mid E_{12}\cdot \mathrm{U}_{2\times 6}^{a+1,(2)}+12\cdot \mathbb{1}_{2\times 6}\right]\in \mathrm{PB}_{2\times 12}^{a+1,(3)}$；其中 $\mathrm{U}_{2\times 6}^{a+1,(2)}\in \mathrm{PB}_{2\times 6}^{a+1,(2)}$

第一組：$a+1,a+3,a+7,a+8,a+9,a+11,a+14,a+16,a+17,a+18,a+22,a+24$

第二組：$a+2,a+4,a+4,a+6,a+10,a+12,a+13,a+15,a+19,a+20,a+21,a+23$

【證明】: (1) 兩組的總和均為 $8a+68$；兩組的平方總和均為 $8a^2+136a+748$；

兩組的立方總和均為 $8a^3+204a^2+2244a+9248$。

(2) 兩組的總和均為 $12a+150$；兩組的平方總和均為 $12a^2+300a+2450$；

兩組的立方總和均為 $a^3+900a^2+7350a+45000$。

由(1)(2)得證。

有了【定理五】的加入，對於連續整數 1~N 的 3 階完美平分我們便有了方向。

接著，因為 $\mathrm{PB}_{2\times p}^{a,(3)}\subset \mathrm{PB}_{2\times p}^{a,(2)}$，在結論 2 裡我們知道 $\mathrm{PB}_{2\times p}^{a,(2)}\neq\phi \Leftrightarrow \mathrm{PB}_{2\times p}^{(2)}\neq\phi \Leftrightarrow p=2k$；其中 k≧2。

因此對於連續整數 1~N 的 3 階完美平分我們由 p＝2m 來討論起，此時 N＝4m；其中 m≧2。

(一) $m=2k$；$k\geqq 1$：即 1~8k 的 3 階的完美平分：

1. 當 $k=1$ 時：一一試驗後無解。
2. 當 $k\geqq 2$ 時：

(1) $k=2h+1$，其中 $h\geqq 1$：

此時 $8k$ 可改寫成 $16(h-1)+24$，因此我們可以將 1~8k 區分為 h 組，其中 1 組有 24 個連續整數，另外 $h-1$ 組每一組均有 16 個連續整數，再利用【定理五】，便可分別完成每一組的 3 階完美平分，從而完成 1~8k 個整數的 3 階完美平分。

(2) $k=2h$，其中 $h\geqq 1$：

此時 $8k$ 可改寫成 $16h$，因此我們可以將 1~8k 個區分為 h 組，每一組均有 16 個連續整數，再利用【定理五】，便可分別完成每一組的 3 階完美平分，從而完成 1~8k 個整數的 3 階完美平分。

由(1)(2)我們完成了 1~8k 的 3 階完美平分；其中 $k\geqq 2$。此外，不難理解我們可以利用同樣的手法找出連續 $8k$ 個整數的 3 階完美平分；其中 $k\geqq 2$。

(二) $m=2k+1$；$k\geqq 1$：即 1~($8k+4$)的 3 階的完美平分：

首先，我們以 VBA 程式，一一檢驗後，發現 $k=1,2,3,4$ 均無解。而當 $h=5$ 的時候，由於執行程式造成電腦當機，無法再繼續往後找到解答。程式碼我們放在【附錄一】。

接著，我們不禁懷疑，1~($8k+4$)的 3 階的完美平分其實是無解的。所以對於 1~($8k+4$)的 3 階完美平分，我們轉往無解這麼方向著手。

【引理一】：若 $\sum_{j=1}^{p} a_j$ 為奇數則 $\sum_{j=1}^{p} a_j^{\,n}$ 亦為奇數，其中 $n\geqq 1$。

【證明】:

因為數字在次方後不會改變奇偶性，也就是說：若 a 是奇數則 a^n 也是奇數，同理，若 a 是偶數則 a^n 也是偶數；其中 $n\geqq 1$。由此可知，若 $\sum_{j=1}^{p} a_j$ 為奇數則 $\sum_{j=1}^{p} a_j^{\,n}$ 亦為奇數，其中 $n\geqq 1$。

現在我們來證明 1~($8k+4$)的 3 階完美平分無解：

若 $\mathrm{PB}_{2\times(4k+2)}^{(3)}\neq\phi$，令 $\mathrm{U}_{2\times(4k+2)}^{(3)}=(u_{i,j})_{2\times(4k+2)}\in\mathrm{PB}_{2\times(4k+2)}^{(3)}$

則 $\sum_{j=1}^{4k+2} u_{1,j}=\frac{1}{2}\times\frac{(8k+4)(8k+5)}{2}=(2k+1)(8k+5)$ 是一個奇數

但 $\sum_{j=1}^{4k+2} u_{1,j}^{\;3}=\frac{1}{2}\times\left(\frac{(8k+4)(8k+5)}{2}\right)^2=2\times(2k+1)^2(8k+5)^2$ 卻是一個偶數，明顯不合。

所以 $\mathrm{PB}_{2\times(4k+2)}^{(3)}=\phi$，也就是說 1~($8k+4$)的 3 階完美平分無解

結論 3：

1. 要做到連續整數 1~N 的 3 階完美平分，則 N＝8k；其中 k≧2，否則無解。
2. 經由以下的方法可以做到 1~8k 的 2 階完美平分；其中 k≧2

令 $a \in Z$ ，而且 $\mathrm{U}_{2\times 8}^{a+1,(3)} = \begin{bmatrix} a+1 & a+4 & a+6 & a+7 & a+10 & a+11 & a+13 & a+16 \\ a+2 & a+3 & a+5 & a+8 & a+9 & a+12 & a+14 & a+15 \end{bmatrix}$

$$\mathrm{U}_{2\times 12}^{a+1,(3)} = \begin{bmatrix} a+1 & a+3 & a+7 & a+8 & a+9 & a+11 & a+14 & a+16 & a+17 & a+18 & a+22 & a+24 \\ a+2 & a+4 & a+5 & a+6 & a+10 & a+12 & a+13 & a+15 & a+19 & a+20 & a+21 & a+23 \end{bmatrix}$$

則 (1) k＝2t； $t \in N \to \left[\mathrm{U}_{2\times 8}^{(3)} \mid \mathrm{U}_{2\times 8}^{17,(3)} \mid .... \mid \mathrm{U}_{2\times 8}^{16t-15,(3)}\right] \in \mathrm{PB}_{2\times 8t}^{(3)}$

(2) k＝2t＋1； $t \in N \to \left[\mathrm{U}_{2\times 12}^{(3)} \mid \mathrm{U}_{2\times 8}^{25,(3)} \mid \mathrm{U}_{2\times 8}^{41,(3)} \mid .... \mid \mathrm{U}_{2\times 8}^{16t-7,(3)}\right] \in \mathrm{PB}_{2\times(8t+4)}^{(3)}$

3. 可以將連續整數 1~N 的 2 階完美平分法直接套用到連續 N 個整數上，

同時可知 $\mathrm{PB}_{2\times p}^{a,(3)} \neq \phi \Leftrightarrow \mathrm{PB}_{2\times p}^{(3)} \neq \phi \Leftrightarrow p = 4k$ ；其中 k≧2

討論 3：

1. 我們藉由觀察【定理四】裡『從 1 階到 2 階完美平分矩陣之間的變化關係』，猜想這樣的規則也可以適用於 2 階到 3 階，於是，在這個小節裡我們很快的找出了連續整數 8k 個整數的 3 階的完美平分，其中 k ≧ 2。再經由【定理五】證明了我們的猜想是正確的，因此我們認為，這樣的規則可以適用於任何階數，於下一章節分析。

五、找出連續($2^n \times k$)個整數的 n 階完美平分的方法；其中 $n \geqq 4$, $k \geqq 2$

討論到這裡我們大致可以確定兩個關係。整理如下：

1. 由 1~N 的完美平分矩陣轉化成 a ~ (a＋N－1)的完美平分矩陣：

$$(1)\ \mathrm{U}_{2\times2}^{(1)}=\begin{bmatrix}1&4\\2&3\end{bmatrix}\in \mathrm{PB}_{2\times2}^{(1)} \quad\rightarrow\quad \mathrm{U}_{2\times2}^{a,(1)}=\mathrm{U}_{2\times2}^{(1)}+(a-1)\cdot\mathbf{1}_{2\times2}\in \mathrm{PB}_{2\times2}^{a,(1)}$$

$$(2)\ \mathrm{U}_{2\times4}^{(2)}=\begin{bmatrix}1&4&6&7\\2&3&5&8\end{bmatrix}\in \mathrm{PB}_{2\times4}^{(2)} \rightarrow \mathrm{U}_{2\times4}^{a,(2)}=\mathrm{U}_{2\times4}^{(2)}+(a-1)\cdot\mathbf{1}_{2\times4}\in \mathrm{PB}_{2\times4}^{a,(2)}$$

$$(3)\ \mathrm{U}_{2\times6}^{(2)}=\begin{bmatrix}1&3&7&8&9&11\\2&4&5&6&10&12\end{bmatrix}\in \mathrm{PB}_{2\times6}^{(2)} \rightarrow \mathrm{U}_{2\times6}^{a,(2)}=\mathrm{U}_{2\times6}^{(2)}+(a-1)\cdot\mathbf{1}_{2\times6}\in \mathrm{PB}_{2\times6}^{a,(2)}$$

$$(4)\ \mathrm{U}_{2\times8}^{(3)}=\begin{bmatrix}1&4&6&7&10&11&13&16\\2&3&5&8&9&12&14&15\end{bmatrix}\in \mathrm{PB}_{2\times8}^{(3)} \rightarrow \mathrm{U}_{2\times8}^{a,(3)}=\mathrm{U}_{2\times8}^{(3)}+(a-1)\cdot\mathbf{1}_{2\times8}\in \mathrm{PB}_{2\times8}^{a,(3)}$$

因此，由(1),(2),(3),(4) 歸納出：

若 $\mathrm{U}_{2\times p}^{(n)}\in \mathrm{PB}_{2\times p}^{(n)}$ 則 $\mathrm{U}_{2\times p}^{a,(n)}=\mathrm{U}_{2\times p}^{(n)}+(a-1)\cdot\mathbf{1}_{2\times p}\in \mathrm{PB}_{2\times p}^{a,(n)}$ ，我們稱之為『平移關係』。

2. 由 n 階的完美平分矩陣轉化到 n＋1 階的完美平分矩陣：

$$\mathrm{U}_{2\times2}^{(1)}=\begin{bmatrix}1&4\\2&3\end{bmatrix}\in \mathrm{PB}_{2\times2}^{(1)} \rightarrow \mathrm{U}_{2\times4}^{(2)}=\left[\mathrm{U}_{2\times2}^{(1)}\mid E_{12}\cdot\mathrm{U}_{2\times2}^{(1)}+4\cdot\mathbf{1}_{2\times2}\right]\in \mathrm{PB}_{2\times4}^{(2)}$$

$$\rightarrow \mathrm{U}_{2\times8}^{(3)}=\left[\mathrm{U}_{2\times4}^{(2)}\mid E_{12}\cdot\mathrm{U}_{2\times4}^{(2)}+8\cdot\mathbf{1}_{2\times4}\right]\in \mathrm{PB}_{2\times8}^{(3)}$$

$$\mathrm{U}_{2\times6}^{(2)}=\begin{bmatrix}1&3&7&8&9&11\\2&4&5&6&10&12\end{bmatrix}\in \mathrm{PB}_{2\times6}^{(2)} \rightarrow \mathrm{U}_{2\times12}^{(3)}=\left[\mathrm{U}_{2\times6}^{(2)}\mid E_{12}\cdot\mathrm{U}_{2\times6}^{(2)}+12\cdot\mathbf{1}_{2\times6}\right]\in \mathrm{PB}_{2\times12}^{(3)}$$

因此歸納出：

若 $\mathrm{U}_{2\times p}^{(n)}\in \mathrm{PB}_{2\times p}^{(n)}$ 則 $\mathrm{U}_{2\times2p}^{(n+1)}=\left[\mathrm{U}_{2\times p}^{(n)}\mid E_{12}\cdot\mathrm{U}_{2\times p}^{(n)}+2p\cdot\mathbf{1}_{2\times p}\right]\in \mathrm{PB}_{2\times2p}^{(n+1)}$ ，我們稱之為『生成關係』。

然後，我們在【定理六】給出完整的敘述與證明。

【定理六】

已知 $a\in Z$；$n,p\in N$，$E_{12}=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}_{2\times 2}$，$\mathbf{1}_{2\times n}=\begin{bmatrix}1&\cdots&1\\1&\cdots&1\end{bmatrix}_{2\times n}$，

若 $\mathrm{U}_{2\times p}^{(n)}\in \mathrm{PB}_{2\times p}^{(n)}\neq\phi$，為 1 ~2$p$ 的 n 階完美平分矩陣，則

1. 平移關係：$\mathrm{U}_{2\times p}^{(n)}+(a-1)\cdot\mathbf{1}_{2\times p}$ 為 a ~ (a＋2p－1) 的 n 階完美平分矩陣，

即 $\mathrm{U}_{2\times p}^{a,(n)}=\mathrm{U}_{2\times p}^{(n)}+(a-1)\cdot\mathbf{1}_{2\times p}\in \mathrm{PB}_{2\times p}^{a,(n)}$

2. 生成關係：$\left[\mathrm{U}_{2\times p}^{(n)}\,|\,E_{12}\cdot\mathrm{U}_{2\times p}^{(n)}+(2p)\cdot\mathbf{1}_{2\times p}\right]$ 為 1 ~ 4p 的 n＋1 階完美平分矩陣，

即 $\mathrm{U}_{2\times 2p}^{(n+1)}=\left[\mathrm{U}_{2\times p}^{(n)}\,|\,E_{12}\cdot\mathrm{U}_{2\times p}^{(n)}+(2p)\cdot\mathbf{1}_{2\times p}\right]\in \mathrm{PB}_{2\times 2p}^{(n+1)}$

【證明】:

令 $\mathrm{U}_{2\times p}^{(n)}=(u_{i,j})_{2\times p}$，$\because$ $\mathrm{U}_{2\times p}^{(n)}\in\mathrm{PB}_{2\times p}^{(n)}$ $\quad\therefore\ \sum_{j=1}^{p}u_{1,j}{}^{k}=\sum_{j=1}^{p}u_{2,j}{}^{k}$ ；$k=1,2,\ldots,n$

然而 $\sum_{j=1}^{p}u_{1,j}{}^{0}=p=\sum_{j=1}^{p}u_{2,j}{}^{0}$ 　因此 $\sum_{j=1}^{p}(u_{1,j}{}^{k}-u_{2,j}{}^{k})=\sum_{j=1}^{p}u_{1,j}{}^{k}-\sum_{j=1}^{p}u_{2,j}{}^{k}=0$ ；$k=0,1,2,\ldots,n$

(1) $\mathrm{U}_{2\times p}^{(n)}+(a-1)\cdot\mathbf{1}_{2\times p}=\left(u_{i,j}+a-1\right)_{2\times p}$，

(a) 因為 $\mathrm{U}_{2\times p}^{(n)}=(u_{i,j})_{2\times p}$ 是由連續整數 1~2p 所組成的矩陣，

所以 $u_{1,1},u_{1,2},\ldots,u_{1,p},u_{2,1},u_{2,2},\ldots,u_{2,p}$ 是連續整數的 1~2p 的一種排列。

因此 $(u_{1,1}+a-1)$，$(u_{1,2}+a-1)$,..., $(u_{1,p}+a-1)$，$(u_{2,1}+a-1)$，$(u_{2,2}+a-1)$,..., $(u_{2,p}+a-1)$

是連續整數的 a ~ (a＋2p－1)的一種排列。

所以，$\mathrm{U}_{2\times p}^{(n)}+(a-1)\cdot\mathbf{1}_{2\times p}=\left(u_{i,j}+a-1\right)_{2\times p}$ 是由連續整數 a ~ (a＋2p－1)所組成的矩陣。

(b) 對於 $t\in N, 1\le t\le n$

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{p}(u_{1,j}+(a-1))^{t}-\sum_{j=1}^{p}(u_{2,j}+(a-1))^{t}&=\sum_{j=1}^{p}\left((u_{1,j}+(a-1))^{t}-(u_{2,j}+(a-1))^{t}\right)\\&=\sum_{j=1}^{p}\left(\sum_{k=0}^{t}C_k^t u_{1,j}{}^{k}\ (a-1)^{t-k}-\sum_{k=0}^{t}C_k^t u_{2,j}{}^{k}\ (a-1)^{t-k}\right)\\&=\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=0}^{t}\left(C_k^t u_{1,j}{}^{k}(a-1)^{t-k}-C_k^t u_{2,j}{}^{k}(a-1)^{t-k}\right)\end{aligned}$$

$$=\sum_{k=0}^{t}\sum_{j=1}^{p}\left(C_k^t u_{1,j}{}^k(a-1)^{t-k}-C_k^t u_{2,j}{}^k(a-1)^{t-k}\right)$$

$$=\sum_{k=0}^{t}C_k^t(a-1)^{t-k}\left(\sum_{j=1}^{p}\left(u_{1,j}{}^k-u_{2,j}{}^k\right)\right)$$

$$=\sum_{k=0}^{t}C_k^t(a-1)^{t-k}\cdot 0$$

$$=0$$

由(a)(b)得證 $\mathrm{U}_{2\times p}^{(n)}+(a-1)\cdot\mathbf{1}_{2\times p}$為 a ~ (a＋2p－1) 的 n 階完美平分矩陣，

(2) 令$\left[\mathrm{U}_{2\times p}^{(n)}\,|\,E_{12}\cdot\mathrm{U}_{2\times p}^{(n)}+(2p)\cdot\mathbf{1}_{2\times p}\right]=(\mu_{i,j})_{2\times 2p}$ ，

而 $E_{12}\cdot\mathrm{U}_{2\times p}^{(n)}+(2p)\cdot\mathbf{1}_{2\times p}=\begin{bmatrix}u_{2,1}+2p & u_{2,2}+2p & \ldots & u_{2,p}+2p\\ u_{1,1}+2p & u_{1,2}+2p & \ldots & u_{1,p}+2p\end{bmatrix}=(u'_{i,j})_{2\times p}$

因此，$(\mu_{i,j})_{2\times 2p}=\begin{bmatrix}u_{1,1} & \ldots & u_{1,p} & u'_{1,1} & \ldots & u'_{1,p}\\ u_{2,1} & \ldots & u_{2,p} & u'_{2,1} & \ldots & u'_{1,p}\end{bmatrix}$

其中$u'_{1,j}=u_{2,j}+2p$ 且$u'_{2,j}=u_{1,j}+2p \quad j=1,2,\ldots,p$

(a) 因為$(u'_{i,j})_{2\times p}=E_{12}\cdot\mathrm{U}_{2\times p}^{(n)}+(2p)\cdot\mathbf{1}_{2\times p}=E_{12}\cdot\left(\mathrm{U}_{2\times p}^{(n)}+(2p)\cdot\mathbf{1}_{2\times p}\right)$ ，

所以由(1)可知$E_{12}\cdot\mathrm{U}_{2\times p}^{(n)}+(2p)\cdot\mathbf{1}_{2\times p}$是由連續整數(2$p$＋1) ~ 4$p$ 所組成的矩陣，

從而 $\left[\mathrm{U}_{2\times p}^{(n)}\,|\,E_{12}\cdot\mathrm{U}_{2\times p}^{(n)}+(2p)\cdot\mathbf{1}_{2\times p}\right]=(\mu_{i,j})_{2\times 2p}$ 是由連續整數 1 ~ 4p 所組成的矩陣。

(b) 接著，我們必須證明出$\sum_{j=1}^{2p}\mu_{1,j}{}^k=\sum_{j=1}^{2p}\mu_{2,j}{}^k$; $k=1,2,\ldots,n+1$

①<u>首先我們證明 k＝1,2,…,n 會成立</u>，

因為$\mathrm{U}_{2\times p}^{(n)}=(u_{i,j})_{2\times p}$為 n 階完美平分矩陣；所以，$\sum_{j=1}^{p}u_{1,j}{}^k=\sum_{j=1}^{p}u_{2,j}{}^k$; $k=1,2,\ldots,n$

而交換順序並不影響完美平分的特性，所以$E_{12}\cdot\mathrm{U}_{2\times p}^{(n)}$亦為 1~ 2$p$ 的 n 階完美平分矩陣，所以，由(1)可知$E_{12}\cdot\mathrm{U}_{2\times p}^{(n)}+(2p)\cdot\mathbf{1}_{2\times p}=(u'_{i,j})_{2\times p}$ 為 2p＋1~ 4p 的 n 階完美平分矩陣，於是$\sum_{j=1}^{p}u'_{1,j}{}^k=\sum_{j=1}^{p}u'_{2,j}{}^k$; $k=1,2,\ldots,n$

故， $\sum_{j=1}^{2p}\mu_{1,j}{}^k=\sum_{j=1}^{p}u_{1,j}{}^k+\sum_{j=1}^{p}u'_{1,j}{}^k=\sum_{j=1}^{p}u_{2,j}{}^k+\sum_{j=1}^{p}u'_{2,j}{}^k=\sum_{j=1}^{2p}\mu_{2,j}{}^k$; $k=1,2,\ldots,n$

②<u>然後我們證明 $k=n+1$ 也會成立</u>

$$\sum_{j=1}^{2p}\mu_{1,j}{}^{n+1}-\sum_{j=1}^{2p}\mu_{2,j}{}^{n+1}$$

$$=\left(\sum_{j=1}^{p}u_{1,j}{}^{n+1}+\sum_{j=1}^{p}u'_{1,j}{}^{n+1}\right)-\left(\sum_{j=1}^{p}u_{2,j}{}^{n+1}+\sum_{j=1}^{p}u'_{2,j}{}^{n+1}\right)$$

$$=\left(\sum_{j=1}^{p}u_{1,j}{}^{n+1}+\sum_{j=1}^{p}(u_{2,j}+2p)^{n+1}\right)-\left(\sum_{j=1}^{p}u_{2,j}{}^{n+1}+\sum_{j=1}^{p}(u_{1,j}+2p)^{n+1}\right)$$

$$=\sum_{j=1}^{p}\left(u_{1,j}{}^{n+1}-u_{2,j}{}^{n+1}\right)+\sum_{j=1}^{p}\left((u_{2,j}+2p)^{n+1}-(u_{1,j}+2p)^{n+1}\right)$$

$$=\sum_{j=1}^{p}\left(u_{1,j}{}^{n+1}-u_{2,j}{}^{n+1}\right)+\sum_{j=1}^{p}\left(\sum_{k=0}^{n+1}C_k^{n+1}u_{2,j}{}^{k}(2p)^{n+1-k}-\sum_{k=0}^{n+1}C_k^{n+1}u_{1,j}{}^{k}(2p)^{n+1-k}\right)$$

$$=\sum_{j=1}^{p}\left(u_{1,j}{}^{n+1}-u_{2,j}{}^{n+1}\right)+\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=0}^{n+1}C_k^{n+1}(2p)^{n+1-k}\left(u_{2,j}{}^{k}-u_{1,j}{}^{k}\right)$$

$$=\sum_{j=1}^{p}\left(u_{1,j}{}^{n+1}-u_{2,j}{}^{n+1}\right)+\sum_{k=0}^{n+1}C_k^{n+1}(2p)^{n+1-k}\sum_{j=1}^{p}\left(u_{2,j}{}^{k}-u_{1,j}{}^{k}\right)$$

$$=\sum_{j=1}^{p}\left(u_{1,j}{}^{n+1}-u_{2,j}{}^{n+1}\right)+\sum_{k=0}^{n}C_k^{n+1}(2p)^{n+1-k}\sum_{j=1}^{p}\left(u_{2,j}{}^{k}-u_{1,j}{}^{k}\right)+C_{n+1}^{n+1}(2p)^{n+1-(n+1)}\sum_{j=1}^{p}\left(u_{2,j}{}^{n+1}-u_{1,j}{}^{n+1}\right)$$

$$=\sum_{j=1}^{p}\left(u_{1,j}{}^{n+1}-u_{2,j}{}^{n+1}\right)+\sum_{k=0}^{n}C_k^{n+1}(2p)^{n+1-k}\cdot 0+\sum_{j=1}^{p}\left(u_{2,j}{}^{n+1}-u_{1,j}{}^{n+1}\right)$$

$$=\sum_{j=1}^{p}\left(u_{1,j}{}^{n+1}-u_{2,j}{}^{n+1}\right)+\sum_{j=1}^{p}\left(u_{2,j}{}^{n+1}-u_{1,j}{}^{n+1}\right)$$

$$=0$$

因此，$\sum_{j=1}^{2p}\mu_{1,j}{}^{n+1}=\sum_{j=1}^{2p}\mu_{2,j}{}^{n+1}$ ；

由(a)、(b)得證 $\left[\mathrm{U}_{2\times p}^{(n)}\,|\,E_{12}\cdot\mathrm{U}_{2\times p}^{(n)}+(2p)\cdot\mathbf{1}_{2\times p}\right]$ 為 $1\sim 4p$ 的 $n+1$ 階完美平分矩陣

最後，根據(1)(2)，我們證明出【定理六】。

有了【定理六】，我們便能夠以 1~4 的 1 階完美平分矩陣為基礎，透過『生成關係』，而得到 1~8 的 2 階完美平分矩陣；再透過『生成關係』，便能得到 1~16 的 3 階完美平分矩陣，.....，依此類推下去，我們便可得到 $1\sim2^n\times2$ 的 n 階完美平分矩陣。接著再利用『平移關係』，辦到 $a\sim(a+2^n\times2-1)$的 n 階完美平分矩陣，從而完成了連續 $2^n\times2$ 個整數的 n 階完美平分。

同理，我們也可以由 1~12 的 2 階完美平分矩陣，透過生成關係與平移關係，來完成連續 $2^n\times3$ 個整數的 n 階完美平分。最後，結合連續 $2^n\times2$ 個整數的 n 階完美平分與連續 $2^n\times3$ 個整數的 n 階完美平分。便能完成連續 $2^n\times k$ 個整數的 n 階完美平分，其中 $k\geqq 2$，$n\geqq 4$。

【舉例說明】：找出 7~38 的 4 階完美平分。

分析：7~38 有 32 個數字，而 $32=2^5=2^4\times 2$，因此我們可以做到 4 階的完美平分。

做法：先使用生成關係建構 1~32 的 4 階完美平分，再透過平移關係來完成所求。

由 1~4 的 1 階完美平分矩陣 $\mathrm{U}_{2\times 2}^{(1)}=\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\in \mathrm{PB}_{2\times 2}^{(1)}$

透過生成關係得出 1~8 的 2 階完美平分矩陣為

$$\mathrm{U}_{2\times 4}^{(2)}=\left[\mathrm{U}_{2\times 2}^{(1)} \mid E_{12}\cdot \mathrm{U}_{2\times 2}^{(1)}+4\cdot \mathbf{1}_{2\times 2}\right]=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 5 & 8 \end{bmatrix}\in \mathrm{PB}_{2\times 4}^{(2)}$$

再透過生成關係得出 1~16 的 3 階完美平分為

$$\mathrm{U}_{2\times 8}^{(3)}=\left[\mathrm{U}_{2\times 4}^{(2)} \mid E_{12}\cdot \mathrm{U}_{2\times 4}^{(2)}+8\cdot \mathbf{1}_{2\times 4}\right]=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 & 7 & 10 & 11 & 13 & 16 \\ 2 & 3 & 5 & 8 & 9 & 12 & 14 & 15 \end{bmatrix}\in \mathrm{PB}_{2\times 8}^{(3)}$$

再透過生成關係得出 1~32 的 4 階完美平分為 $\mathrm{U}_{2\times 16}^{(4)}=\left[\mathrm{U}_{2\times 8}^{(3)} \mid E_{12}\cdot \mathrm{U}_{2\times 8}^{(3)}+16\cdot \mathbf{1}_{2\times 8}\right]$

$$\mathrm{U}_{2\times 16}^{(4)}=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 & 7 & 10 & 11 & 13 & 16 & 18 & 19 & 21 & 24 & 25 & 28 & 30 & 31 \\ 2 & 3 & 5 & 8 & 9 & 12 & 14 & 15 & 17 & 20 & 22 & 23 & 26 & 27 & 29 & 32 \end{bmatrix}\in \mathrm{PB}_{2\times 16}^{(4)}$$

最後，透過平移關係可得 $\mathrm{U}_{2\times 16}^{7,(4)}=\mathrm{U}_{2\times 16}^{(4)}+6\cdot \mathbf{1}_{2\times 16}$

$$=\begin{bmatrix} 7 & 10 & 12 & 13 & 16 & 17 & 19 & 22 & 24 & 25 & 27 & 30 & 31 & 34 & 36 & 37 \\ 8 & 9 & 11 & 14 & 15 & 18 & 20 & 21 & 23 & 26 & 28 & 29 & 32 & 33 & 35 & 38 \end{bmatrix}\in \mathrm{PB}_{2\times 16}^{7,(4)}$$

接著我們驗算一下這樣的分組方式是否滿足 4 階完美平分

(1) 兩組的和=360 ； (2)兩組的平方和=9464 ；

(3) 兩組的立方和=274320 ； (4)兩組的 4 次方和=8452808 ；

由(1)(2)(3)(4)可知，$\mathrm{U}_{2\times 16}^{7,(4)}$ 為 7~38 的 4 階完美平分矩陣。

伍、研究結果

我們將全文主要的結果做了底下的整理：

已知 $a,m,n,p,h,k,t\in N$ ，$E_{12}=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}_{2\times 2}$ ，$\mathbf{1}_{2\times n}=\begin{bmatrix}1&\cdots&1\\1&\cdots&1\end{bmatrix}_{2\times n}$ ，

令 $\mathrm{U}_{2\times 2}^{(1)}=\begin{bmatrix}1&4\\2&3\end{bmatrix}\in \mathrm{PB}_{2\times 2}^{(1)}$ ，$\mathrm{U}_{2\times 6}^{(2)}=\begin{bmatrix}1&3&7&8&9&11\\2&4&5&6&10&12\end{bmatrix}\in \mathrm{PB}_{2\times 6}^{(2)}$ ，

一、兩個主要的關係：

(一). **生成關係：** $\mathrm{U}_{2\times 2p}^{(n+1)}=\left[\mathrm{U}_{2\times p}^{(n)}\mid E_{12}\cdot \mathrm{U}_{2\times p}^{(n)}+(2p)\cdot\mathbf{1}_{2\times p}\right]\in \mathrm{PB}_{2\times 2p}^{(n+1)}$

(二). **平移關係：** $\mathrm{U}_{2\times p}^{a,(n)}=\mathrm{U}_{2\times p}^{(n)}+(a-1)\cdot\mathbf{1}_{2\times p}\in \mathrm{PB}_{2\times p}^{a,(n)}$

1. 由 $\mathrm{U}_{2\times 2}^{(1)}\in \mathrm{PB}_{2\times 2}^{(1)}$ 透過生成關係可得

$$\mathrm{U}_{2\times 2^n}^{(n)}=\left[\mathrm{U}_{2\times 2^{n-1}}^{(n-1)}\mid E_{12}\cdot \mathrm{U}_{2\times 2^{n-1}}^{(n-1)}+(2^n)\cdot\mathbf{1}_{2\times 2^{n-1}}\right]\in \mathrm{PB}_{2\times 2^n}^{(n)}\ ;n\ge 2$$

再將 $\mathrm{U}_{2\times 2^n}^{(n)}$ 透過平移關係可得 $\mathrm{U}_{2\times 2^n}^{a,(n)}=\mathrm{U}_{2\times 2^n}^{(n)}+(a-1)\cdot\mathbf{1}_{2\times 2^n}\in \mathrm{PB}_{2\times 2^n}^{a,(n)}\ ;n\ge 1$

2. 由 $\mathrm{U}_{2\times 6}^{(2)}\in \mathrm{PB}_{2\times 6}^{(2)}$ 透過生成關係

$$\mathrm{U}_{2\times(3\cdot 2^{n-1})}^{(n)}=\left[\mathrm{U}_{2\times(3\cdot 2^{n-2})}^{(n-1)}\mid E_{12}\cdot \mathrm{U}_{2\times(3\cdot 2^{n-2})}^{(n-1)}+(3\cdot 2^{n-1})\cdot\mathbf{1}_{2\times(3\cdot 2^{n-2})}\right]\in \mathrm{PB}_{2\times(3\cdot 2^{n-1})}^{(n)}\ ;n\ge 3$$

再將 $\mathrm{U}_{2\times(3\cdot 2^{n-1})}^{(n)}$ 透過平移關係可得 $\mathrm{U}_{2\times(3\cdot 2^{n-1})}^{a,(n)}=\mathrm{U}_{2\times(3\cdot 2^{n-1})}^{(n)}+(a-1)\cdot\mathbf{1}_{2\times(3\cdot 2^{n-1})}\in \mathrm{PB}_{2\times(3\cdot 2^{n-1})}^{a,(n)}$ ，$n\ge 2$

二、連續 N 個整數的 1 階完美平分

(一) N＝4k，否則無解

(二) 從 a 開始的連續 4k 個整數的 1 階完美平分為 $\left[\mathrm{U}_{2\times 2}^{a,(1)}\ \middle|\mathrm{U}_{2\times 2}^{a+4,(1)}\middle|\ \ldots\ \middle|\mathrm{U}_{2\times 2}^{a+4k-4(1)}\right]\in \mathrm{PB}_{2\times 2k}^{(1)}$

三、連續 N 個整數的 2 階完美平分

(一) N＝4k；其中 k≧2，否則無解。

(二) 已知 k≧2，從 a 開始的連續 4k 個整數的 2 階完美平分為

1. 當 k＝2h 時 → $\left[\mathrm{U}_{2\times 4}^{a,(2)}\mid \mathrm{U}_{2\times 4}^{a+8,(2)}\mid\ldots\mid \mathrm{U}_{2\times 4}^{a+8h-8,(2)}\right]\in \mathrm{PB}_{2\times 4h}^{(2)}$

2. 當 k＝2h＋1 時 →$[\mathrm{U}_{2\times 6}^{a,(2)}\mid \mathrm{U}_{2\times 4}^{a+12,(2)}\mid \mathrm{U}_{2\times 4}^{a+20,(2)}\mid\ldots\mid \mathrm{U}_{2\times 4}^{a+8h-4,(2)}]\in \mathrm{PB}_{2\times(4h+2)}^{(2)}$

四、連續 N 個整數的 3 階完美平分

(一) N＝8k；其中 k≧2，否則無解。

(二) 已知 $k \geqq 2$，從 a 開始的連續 $8k$ 個整數的 3 階完美平分為

1. 當 $k=2h$ 時 $\rightarrow$ $\left[U_{2\times 8}^{a,(3)} \mid U_{2\times 8}^{a+16,(3)} \mid .... \mid U_{2\times 8}^{a+16h-16,(3)} \right] \in PB_{2\times 8h}^{(3)}$

2. 當 $k=2h+1$ 時 $\rightarrow$ $\left[U_{2\times 12}^{a,(3)} \mid U_{2\times 8}^{a+24,(3)} \mid U_{2\times 8}^{a+40,(3)} \mid .... \mid U_{2\times 8}^{a+16h-8,(3)} \right] \in PB_{2\times(8h+4)}^{(3)}$

五、連續($2^n \times k$)個整數的 n 階完美平分；其中 $n \geqq 4$, $k \geqq 2$

(一) 當 k 為偶數，令 $k=2h$，連續 $2^n \times 2h$ 個整數的 n 階完美平分做法：
將連續 $2^n \times 2h$ 個整數從頭開始區分為 h 組，每一組均含有連續 2^{n+1} 個整數，
可利用 $U_{2\times 2^n}^{a,(n)}$ 來完成每一組的 n 階完美平分。

(二) 當 k 為奇數，令 $k=2h+1$，連續 $2^n \times (2h+1)$個整數的 n 階完美平分做法：
將連續 $2^n \times (2h+1)$個整數從頭開始區分為 h 組，其中有一組含有連續 3×2^n 個整數，
可利用 $U_{2\times(3\cdot 2^{n-1})}^{a,(n)}$ 來完成 n 階完美平分；剩下的($h-1$)組，每一組均含有連續 2^{n+1} 個整數，可利用 $U_{2\times 2^n}^{a,(n)}$ 來完成 n 階完美平分。

陸、未來展望

一、我們利用程式一一嘗試後發現，當 $n=1,2,3,4$ 的時候，連續 2^{n+1} 個整數的 n 階完美平分是唯一的，但這方面我們尚無法證明，期盼能研究出來。

二、對於 4 階以上的完美平分，我們只有找出連續($2^n \times k$)個整數可以做到的 n 階完美平分，但是否有其他情況我們尚無定論，期盼未來能更進一步研究出來。

三、找出 1~N 的 n 階完美 m 分的限制與方法。

柒、參考文獻與資料

一、左太政。如何從事科學展覽。
http://home.lsjh.tp.edu.tw/chiny/cgi-bin/PJBlog/attachments/month_0706/k200763203123.doc

二、邱弘毅、徐庭禎、林彥廷、李育丞(2009)。誰最數配。第四十九屆全國科展國中組數學作品說明書。

三、李雨濃、江天勤(2004)。談整數分組問題。第四十四屆全國科展高中組數學作品說明書。

四、余文卿等人(民 99)，普通高級中學數學第一、二冊，翰林出版社。

五、許志農等人(民 98)，普通高級中學選修數學 I，龍騰出版社。

捌、附錄

一、我們放上 1~24 的 3 階完美平分程式的程式碼與輸出結果，來驗證我們的程式碼是可行的

(1)程式碼

```
Sub PB()
Const m = 24
Const p = 3
Dim s(p), t, u, v, k As Integer
Dim n1, n2, n3, n4, n5, n6, n7, n8, n9, n10, n11, n12, x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7, x8, x9, x10, x11, x12    As Integer
Open "D:\24 的 3 階完美平分.txt" For Output As #1

For t = 1 To p
   For k = 1 To m
         s(t) = k ^ t + s(t)
   Next k
Next t

u = 1
v = 1

For n1 = 1 To m / 2
      x1 = n1
For n2 = n1 + 1 To m
      x2 = n2
For n3 = n2 + 1 To m
      x3 = n3
For n4 = n3 + 1 To m
      x4 = n4
For n5 = n4 + 1 To m
      x5 = n5
For n6 = n5 + 1 To m
      x6 = n6
For n7 = n6 + 1 To m
      x7 = n7
For n8 = n7 + 1 To m
      x8 = n8
For n9 = n8 + 1 To m
      x9 = n9
For n10 = n9 + 1 To m
      x10 = n10
For n11 = n10 + 1 To m
     x11 = n11
For n12 = n11 + 1 To m
      x12 = n12

      If x1 + x2 + x3 + x4 + x5 + x6 + x7 + x8 + x9 + x10 + x11 + x12 = s(1) / 2 Then
      If x1 ^ 2 + x2 ^ 2 + x3 ^ 2 + x4 ^ 2 + x5 ^ 2 + x6 ^ 2 + x7 ^ 2 + x8 ^ 2 + x9 ^ 2 + x10 ^ 2 + x11 ^ 2 + x12 ^ 2 = s(2) / 2 Then
      If x1 ^ 3 + x2 ^ 3 + x3 ^ 3 + x4 ^ 3 + x5 ^ 3 + x6 ^ 3 + x7 ^ 3 + x8 ^ 3 + x9 ^ 3 + x10 ^ 3 + x11 ^ 3 + x12 ^ 3 = s(3) / 2 Then
      If x1 = 1 Then
      Print #1, "第一組_("; u; ")"; " "; x1; " "; x2; " "; x3; " "; x4; " "; x5; " "; x6; " "; x7; " "; x8; " "; x9; " "; x10; " "; x11; " "; x12; " ";
"</n>"
      u = u + 1
      Else
      Print #1, "第二組_("; u - v; ")"; " "; x1; " "; x2; " "; x3; " "; x4; " "; x5; " "; x6; " "; x7; " "; x8; " "; x9; " "; x10; " "; x11; " "; x12; " ";
"</n>"
      v = v + 1
      End If
      End If
      End If
      End If

Next n12
Next n11
Next n10
Next n9
Next n8
Next n7
Next n6
Next n5
Next n4
Next n3
Next n2
Next n1

Close #1
End Sub
```

(2)輸出結果

```
第一組_( 1 )  1  2  7  9  11  12  13  14  16  18  23  24  </n>
第一組_( 2 )  1  3  5  10  11  12  13  14  15  20  22  24  </n>
第一組_( 3 )  1  3  6  8  11  12  13  14  17  19  22  24  </n>
第一組_( 4 )  1  3  7  8  9  11  14  16  17  18  22  24  </n>
第一組_( 5 )  1  4  5  8  10  12  13  15  17  20  21  24  </n>
第一組_( 6 )  1  4  5  9  10  11  12  15  18  20  22  23  </n>
第一組_( 7 )  1  4  6  8  9  11  12  17  18  19  22  23  </n>
第一組_( 8 )  1  5  6  7  8  10  15  17  18  19  20  24  </n>
第二組_( 8 )  2  3  4  9  11  12  13  14  16  21  22  23  </n>
第二組_( 7 )  2  3  5  7  10  13  14  15  16  20  21  24  </n>
第二組_( 6 )  2  3  6  7  8  13  14  16  17  19  21  24  </n>
第二組_( 5 )  2  3  6  7  9  11  14  16  18  19  22  23  </n>
第二組_( 4 )  2  4  5  6  10  12  13  15  19  20  21  23  </n>
第二組_( 3 )  2  4  5  7  9  10  15  16  18  20  21  23  </n>
第二組_( 2 )  2  4  6  7  8  9  16  17  18  19  21  23  </n>
第二組_( 1 )  3  4  5  6  8  10  15  17  19  20  21  22  </n>
```

【評語】040419

本作品探討能否將連續整數等分為兩組，使得其 k 次方和相等。作者雖已充分展現其處理相關問題之能力，這實值得讚許，然而所得到僅一些局部結果，因此未來宜再強化結果之完整性。