中華民國第51屆中小學科學展覽會

作品說明書

高中組　數學科

佳作

040418

圖形思考推導階差數列級數和的通用公式

學校名稱：國立臺中第一高級中學

作者：	指導老師：
高一　李耘笙	黃加欣 蔡政樺

關鍵詞：三角形排列法、階差排列、級數和

摘 要

計算二階階差數列級數和的問題，是數學愛好者在接觸數列時常會遇到的入門類型。本研究者在偶然的機會看到這樣的題目後，乃有興趣再更深入認識階差數列，因而開展本研究的目的,即在於探討各階階差數列特性及發展計算各階階差數列級數和的通用方法。經由對階差數列的觀察，本研究運用創新的圖形來思考階差數列的特性，發現〈三角形排列思考法〉是推導計算階差數列級數和的便利工具，進而從〈三角形排列思考法〉歸納出階差數列級數和計算式的數理性質與原理，並且已發展出計算任意階階差數列級數和的通式。

壹、研究動機

我國二的時候，有一天我在報紙的休閒版上看到一個有趣的數學題目：
1+3+6+10+15+21+28+ ……+5050 = ? 這是我接觸階差數列的開始。我對這個數列深感興趣，我當時認為：除了要算出這題目的答案外，我想要知道是否有快速的方法，或甚至有一個通解（公式）能快速的解答所有類似的級數和之問題。所以，我國二那年參加了一次科展，研究階差數列。

依我當時的認知，我知道「一個數列的差如果形成等差」的時候就是階差數列(但我以為階差數列的定義就是這樣，我後來得知：事實上，符合這種條件列只是階差數列中的一小部分)，所以我當時的作品只停留在二階的階段中，於是我想繼續研究三階、四階、五階…甚至到一般型的 k 階，求得階差數列計算級數總和的方法。所以，我一步步思考怎樣找出適用於計算階差數列總和的通用公式，展開了這次的數列探索。

貳、研究目的

一、更深入認識階差數列的特性
二、探討各階階差數列之間的關聯性
三、發展能計算階差數列級數和及推導階差數列公式的通用方法
四、在幾種特殊型態的階差數列中，找出各型態求和的通用公式
五、最後，我想要發展出一個能簡便計算各階所有階差數列級數和的＜通用公式＞

參、研究設備及器材

紙、筆、計算機

肆、研究過程與方法

研究架構

1.研究重點：利用三角形排列思考法來推導計算階差數列級數總和的通用公式。

2.原則：〈三角形排列思考法〉本身為計算級數和的方法，可用於計算階差數列的級數和；而根據其中的原理，進而推導出代數化的公式。

3.步驟：照實際研究之順序來呈現。

第一步：定義所使用的符號、圖表和各類名詞。

第二步：研究二階及三階階差數列(能用直觀將其圖像化的部份)。

第三步：解決級數總和計算時的圖形思考限制究竟該如何處理之問題。

第四步：研究四階及五階階差數列(無法用直觀將其圖像化的部份)。

第五步：將各特殊類型階差數列統整出通解。

第六步：推導出任意階差數列計算級數總和皆可使用的公式。

一、符號定義與解釋

(一)符號定義

S_n^k =標準階差數列(巴斯卡三角形中) 第 k 階 第 1 項至第 n 項之和

Z_n^k =階差表中 k 階的第 n 個數

C_k^n =組合數符號即$\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

這些符號將於運算複雜時引入， C、Z 符號會使用於通式中

(二) 圖表說明

1. 三角形排列思考法

三角形排列思考法是我推導公式中的核心，它的方法是將階差數列**放入前一階的標準型的圓圈數目**，利用圖形視覺的好處，能推導出所有公式。

2. 階差表

一個數列，將後項減前項的差寫在”>”右方，可得此表；

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
f_1 & & & & & & & & & & \\
 & > & e_1 & & & & & & & & \\
f_2 & & & > & d_1 & & & & & & \\
 & > & e_2 & & & > & c_1 & & & & \\
f_3 & & & > & d_2 & & & > & b_1 & & \\
 & > & e_3 & & & > & c_2 & & & > & a_1 \\
f_4 & & & > & d_3 & & & > & b_2 & & \\
 & > & e_4 & & & > & c_3 & & & > & a_2 \\
f_5 & & & > & d_4 & & & > & b_3 & & \\
 & > & e_5 & & & > & c_4 & & & & \\
f_6 & & & > & d_5 & & & & & & \\
 & > & e_6 & & & & & & & & \\
f_7 & & & & & & & & & &
\end{array}
$$

而英文字母代號及數字有其意義：

第 0 階：a_1、a_2 $\quad a_k=b_{k+1}-b_k$

第 1 階：b_1、b_2、b_3 $\quad b_k=c_{k+1}-c_k$

第 2 階：c_1、c_2、c_3、c_4 $\quad c_k=d_{k+1}-d_k$

第 3 階：d_1、d_2、d_3、d_4、d_5 $\quad d_k=e_{k+1}-e_k$

第 4 階：e_1、e_2、e_3、e_4、e_5、e_6 $\quad e_k=f_{k+1}-f_k$

第 5 階：f_1、f_2、f_3、f_4、f_5、f_6、f_7

…以此類推

定義 a,b,c…每直行都能構成一組數列。

其中 a 這一行必須每個數相等(不得為 0)，即 $a_1=a_2=a_3=\ldots\ldots=a_n\neq 0$

b 這行的數列為等差數列(一階)，c 是二階等差數列，d 是三階，e 四階…以此類推。

定義某數列為 k 階階差數列(k 為正整數)的情形為：k 階的數列為它各項的差，所形成的數列為 k-1 階時，稱該數列為 k 階階差數列。

3. 巴斯卡三角形

巴斯卡三角形中，每一斜列組成的數列為各階的標準階差數列。

它也是在圖形思考裡極為重要的工具。

第 0 階

第 1 階

第 2 階

第 3 階

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccc}
 & & & & & & & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & & \\
 & 1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 & \\
1 & & 8 & & 28 & & 56 & & 70 & & 56 & & 28 & & 8 & & 1
\end{array}
$$

(三)名詞解釋

1.標準型：巴斯卡三角形每一斜列所構成的階差數列(對於每階而言是固定的)

2.次方型：所構成的級數可表示即為：$1^k+2^k+3^k+4^k+5^k+\ldots\ldots+n^k$

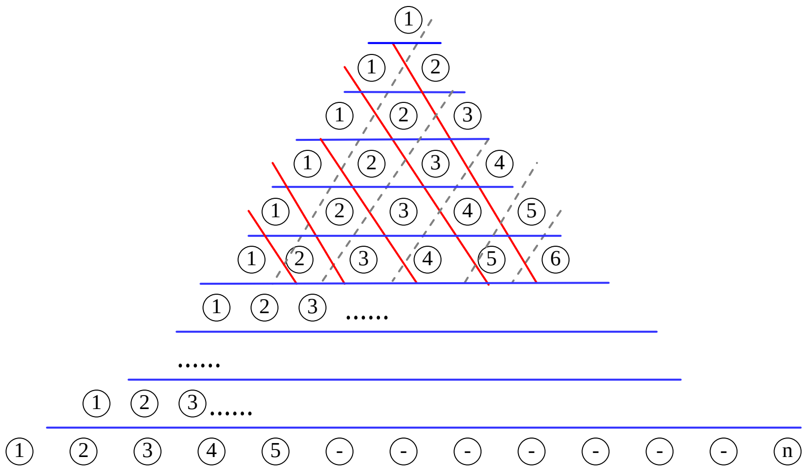
3.通式：對於某階而言所推導出那一階任意一組數列，皆可使用的公式

二、二階階差

一開始的研究起於計算 **1+3+6+10+15+21+……+5050=?** 這個題目。經歷了一些失敗以後，我決定用「畫」的！畫出來看看，能不能看出數列中有什麼規律！我結合幾個想法，畫出了一個類似像保齡球排法的三角形，並且意外的發現了，保齡球三角形當中呈現了神奇的數列關係，我暫時把這樣的數列思考方法稱為＜三角形排列＞的思考法——也就是說：我們可以用三角形排列，來表達出本研究的那一個數列 1,3,6,10,15,21…。

(一) 數列三角形的思考

1.思考方式：用三角形來表達數列 1,3,6,10,15,21 如下圖所示。



從三角形來看，會很容易利用三角形的三個邊來聯想，有三種算法：

第一種方法：所有＜自上方頂點往左下方斜＞各列總和，即(A)式；

第二種方法：所有＜自上方頂點往右下方斜＞各列總和，即(B)式；

第三種方法：將各＜水平線＞各列的總和，即(C)式。

2.計算方法，將此數列求和的算式列出如下：

(A)式為　$1\times n + 2\times(n-1) + 3\times(n-2)\ldots\ldots + n\times 1$

(B)式為　$(1+n)n\div 2 + [1+(n-1)]\times(n-1) \div 2 + \ldots\ldots + [1+(n-(n-1))]\times[n-(n-1)] \div 2$

(C)式為　$[1+(n-(n-1))]\times[n-(n-1)] \div 2 + \ldots\ldots + [1+(n-1)]\times(n-1) \div 2 + (1+n)n\div 2$

我發現：三式合併時，可使三式相同的代數被合併或簡化，所以我把三式合併再除以 3

(B)式+(C)式　$(n+1)n + n(n-1) + (n-1)(n-2) + \cdots\cdots + [1+(n-(n-1))][(n-(n-1))]$

(A)式+**(B)**式+**(C)**式　$(n+2)n + (n+2)(n-1) + (n+2)(n-2)\cdots\cdots + (n+2)(n-(n-1))$

$=(n+2)[n+(n-1)+(n-2)\cdots\cdots+1]$

$=(n+2)[1+2+3+\cdots+n]$

$=(n+2)[(1+n)\times n\div 2]$

⇨$(n+2)[(1+n)\times n\div 2]\div 3$

所以，二階階差數列標準型的公式為：$(n+2)[(1+n)\times n\div 2] \div 3$

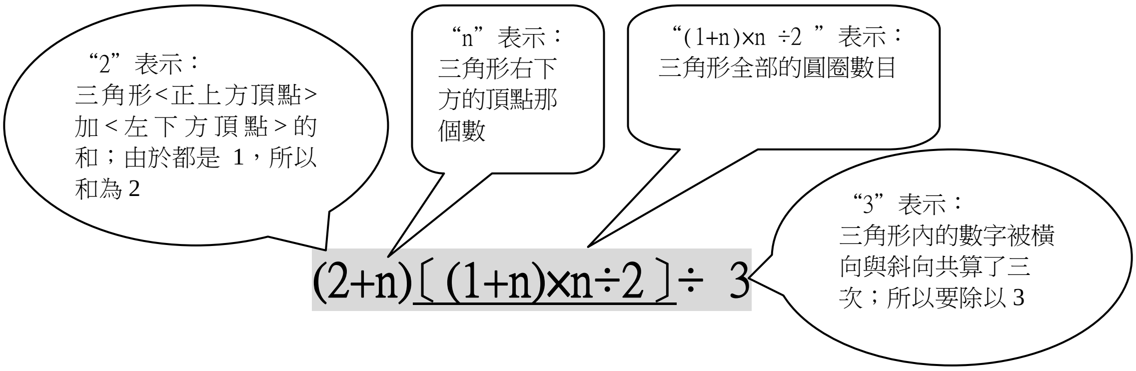
而本研究最初所探討的數列 $1+3+6+10+15+21+28+\ldots\ldots+5050=?$

它的計算式依據二階標準型公式得 $(100+2)\times(1+2+3+4\cdots+100)\div3$

$=102\times5050\div3$

$=171700$

3.公式 — 用三角形排列法解釋二階階差數列標準型的公式：



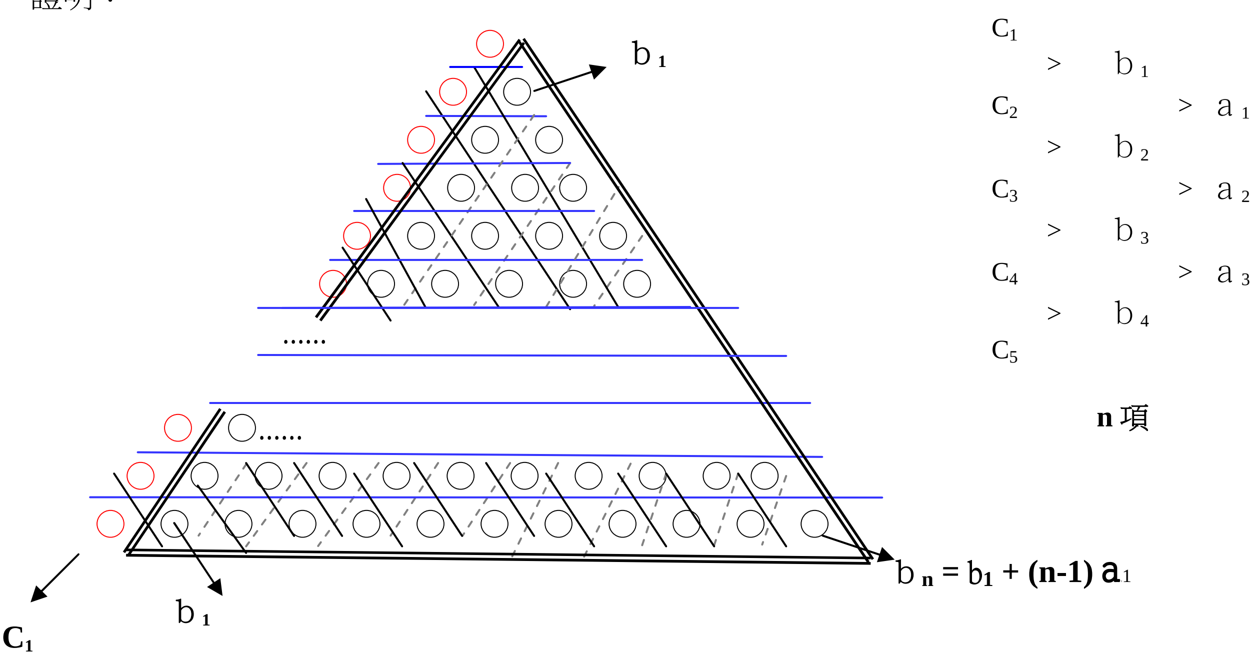
(二)推導公式

現在我要依據前述公式的代數意義，將前述公式修改為以下的二階通式：
(根據我的研究發現：二階數列會多一排數字，在此將它與內三角形分開計算)

定理一：設 b_1、b_n 分別為等差數列首項、末項，c_1 為階差數列首項， n 為等差數列項數，

則任意二階階差數列級數和的公式為：$\mathbf{(2b_1+b_n)\times〔(1+n)n\div2〕\div3+〔n+1〕c_1}$

證明：



"$2b_1$"表示：
是三角形<正上方頂點>(數列首項)加<左下方頂點>的和

"$b_n=b_1+(n-1)a_1$"表示：
三角形右下方的頂點那個數
(也就是等差數列的最後一項)

其中 a_1 是等差數列的公差

n=項數-1

$$(2b_1+\underline{b_n})\times〔\underline{(1+n)n\div 2}〕\div 3+\underline{〔n+1〕c_1}$$

"$(1+n)n\div 2$"表示：
是內三角形的圓圈個數；
n 也就是階差數列內隱藏的等差數列的項數

"$(n+1)C_1$"表示：
內三角形以外，紅色那排數字之級數和

(三)特殊例子

次方型

我之前的研究雖有提到平方數列，但當時並不曉得有平方級數和公式這樣的東西可用，是後來在某書上看到巴斯卡在十四歲時使用自己的方法推導出此公式。而我發現，我也可以用自己的方法推導出平方數列級數和公式：

$1^2+2^2+3^2+\ldots\ldots+n^2=1+4+9+16+25\ldots\ldots+n^2$

1	1^2
1 3	2^2
1 3 5	3^2
1 3 5 7	4^2
1 3 5 7 9	5^2
: -	
: f(n)	n^2

對照

1 和	1
3	2
5	3
7	4
9	5
f(n)	n

f(n)= 2n - 1

由二階基本公式可得

$$\left[(2n-1)+2\right]\times\frac{(1+n)n}{2}\div 3$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

至此，我發現我的方法也可以得到平方數列的公式，這是後來會繼續研究＜次方型＞這個型態的緣由。

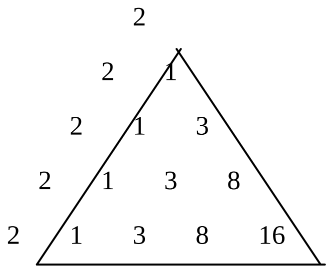
三、三階階差數列

(一) 觀察三角形思考法是否能沿用

我的想法是：我要計算三階階差數列，我首先要確認我的三角形排列思考法是否可以沿用，如果不能，則必須改良或找其它的思考方法。

於是我將任意的一組三階階差數列，放入先前所研究的三角形內：

2
> 1
3 > 2
> 3 > 3
6 > 5
> 8 > 3
14 > 8
> 16
30

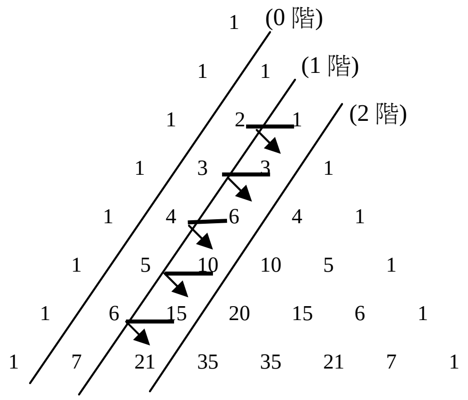


但這裡問題出現了：小三角形內並不是二階數列，無法直接代入先前我所研究得到的公式。

(二) 改良三角形排列思考法：

1.當時的思維是－如果二階可以算平方數列，則可暫時把它想做是二維度的架構；而二階所使用的三角形排列思考之三角形是平面三角形；那麼，我們可以推想：三階階差數列會不會是建立在立體的三角形架構中(三維度)，於是，我朝這個方向開始著手。

後來，我在看與數列有關的數學書籍時，無意間觀察到巴斯卡三角形，有以下的特徵：



我發現了第 0-2 階的標準型都在巴斯卡三角形上，而且有著一定的關係(如箭頭所示)

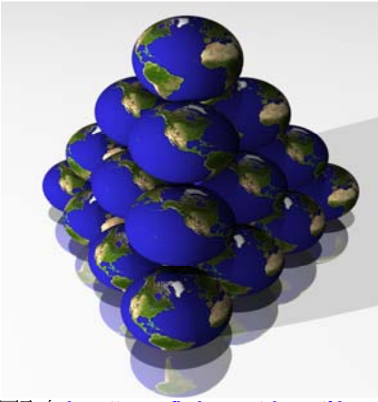
我觀察到：巴斯卡三角形中，若將每一斜排視為數列，則每一斜排數列，都是某階數列的標準型。

因為任意階的數列，都是由前一階而來。

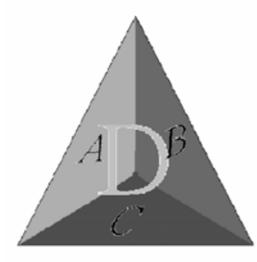
2.知道三階數列的標準型之後，把它置入到我原先假設的立體三角形如下：

①	① ① ②	① ① ② ① ② ③	① ① ② ① ② ③ ① ② ③ ④	① ① ② ① ② ③ ① ② ③ ④ ① ② ③ ④ ⑤
1	4	10	20	35

其堆疊方式如下圖所示



要計算數列 1,4,10,20,35 的總和，即是要將所有圓圈內的數字加總。首先，令正三角錐的四個面為 A、B、C、D(其示意圖如下)，則至少有 4 種算法：



(左圖取自 http://www.flickr.com/photos/fdecomite/2626205228/in/photostream/，為 CC 線上授權使用)

(A)：以 A 面為底將每一層個別算出再加總

$$\frac{(1+5)5}{2}\times 1+\ \frac{(1+4)4}{2}\times 2+\ \frac{(1+3)3}{2}\times 3+\ \frac{(1+2)2}{2}\times 4+\ \frac{(1+1)1}{2}\times 5$$

(B)：以 B 面為底將每一層視為一個二階數列再加總

$$(5+2)\frac{(1+5)5}{2}\div 3+(4+2)\frac{(1+4)4}{2}\div 3+(3+2)\frac{(1+3)3}{2}\div 3+(2+2)\frac{(1+2)2}{2}\div 3+(1+2)\frac{(1+1)1}{2}\div 3$$

(C)：以 C 面為底將每一層視為一個二階數列再加總，算法同(B)

(D)：將數列中的每一項視作一個二階數列再加總，算法同(B)

按照二階時的作法，我們可以把一樣的幾種算法合併，用來簡化計算；將四種計算式合併後再除以四，即仍可得到數列 1,4,10,20,35 的總和：

(A) +(B)+(C)+(D)可得出

$$8\times\frac{(1+5)5}{2}+8\times\frac{(1+4)4}{2}+8\times\frac{(1+3)3}{2}+8\times\frac{(1+2)2}{2}+8\times\frac{(1+1)1}{2}$$

$$= 8\times (15+10+6+3+1)$$

依據上述計算，數列 1,4,10,20,35 的總和為

$$\mathbf{8}\times (1+3+6+10+15)\div 4$$

現在根據上述的算法，將其代數化：

①　①　①　①　①
①　②　①　②　①　②　①　②
①　②　③　①　②　③　①　②　③
①　②　③　④　①　②　③　④
①　②　③　④　⑤
⋮
①　②　③　……　(n-1)
(n-1)　ⓝ

(A)+(B)+(C)+(D)

$$= (n+3)\frac{(1+n)n}{2} + (n+3)\frac{(1+(n-1))(n-1)}{2} + (n+3)\frac{(1+(n-2))(n-2)}{2}$$

$$+\cdots+(n+3)\frac{(1+2)2}{2} + (n+3)\frac{(1+1)1}{2}$$

$$= (n+3)\left(\frac{(1+1)1}{2}+\frac{(1+2)2}{2}+\ldots\ldots+\frac{(1+(n-2))(n-2)}{2}+\frac{(1+(n-1))(n-1)}{2}+\frac{(1+n)n}{2}\right)$$

$$= (n+3)\left(1+3+6+10+\ldots\ \frac{n(1+n)}{2}\right)$$

$$= (n+3)\left((n+2)\frac{(1+n)n}{2}\div 3\right)$$

(A)+(B)+(C)+(D)再除以四，以得到級數和；最後可得到三階標準型數列的公式如下：

$$(n+3)\left((n+2)\frac{(1+n)n}{2}\div 3\right)\div 4$$

現在，讓我先用三角形排列法解釋三階階差數列標準型的公式：

“n”表示：
三角形右下方的頂點那個數

“3”表示：
三角形(三角錐)除了右下方的頂點外，另外 3 個頂點；由於都是 1，所以和為 3

$$\mathbf{(n+3)\ (\ (n+2)}\frac{(1+n)n}{2}\div 3\ \mathbf{)}\ \div 4$$

“4”表示：
三角形內的數字被算了四次；所以要除以 4

“(n+2)(n+1)n ÷2÷3 ”表示：
三角形全部的圓圈數目

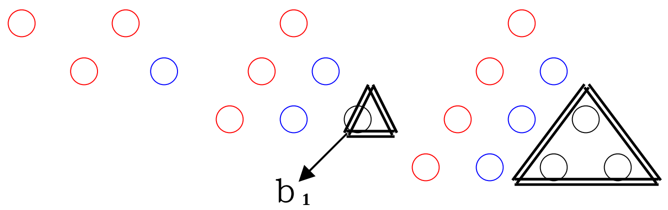
(三) 推導公式

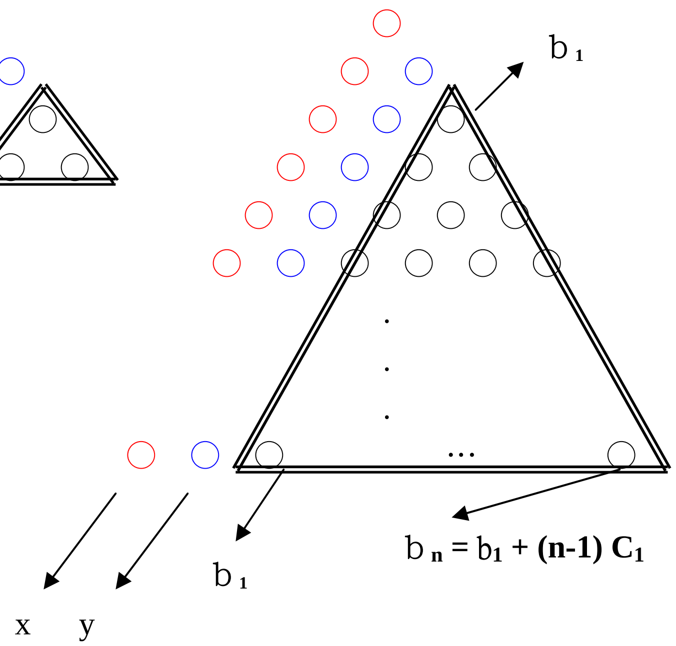
我要依據前述公式的代數意義，將前述公式修改為以下的三階通式(三階階差數列有兩排不符合規律的數，仍將它與內三角形分開計算)：

定理二：設 b_1、b_n 分別為等差數列首項、末項，c_1 為二階階差數列首項，d_1 為三階階差數列首項， n 為等差數列項數，則任意三階階差數列級數和的公式為：

$$(3b_1+b_n)\times〔(n+2)\frac{(1+n)n}{2}\div 3〕\div 4+(n+2)\times d_1+\frac{(n+1)(n+2)}{2}\times c_1$$

證明：





d_1
　> C_1
d_2　　> b_1
　> C_2　　> a_1
d_3　　> b_2
　> C_3　　> a_2
d_4　　> b_3
　> C_4　　> a_3
d_5　　> b_4
　> C_5
d_6

n 項

“**3 b1**”表示：是末項三角形<正上方頂點>加<左下方頂點>加<數列首項頂點>之和

“$b_n=b_1+(n-1)\ a_1$”表示：是三角形右下方的頂點那個數(也就是等差數列的最後一項)

其中 a_1 是等差數列差的公

n=項數-2

$$(3b_1+b_n)\times〔(n+2)\frac{(1+n)n}{2}\div 3〕\div 4+\frac{(n+2)(n+3)}{2}\times x+\frac{(n+1)(n+2)}{2}\times y$$

“(n+2)(n+1)n ÷2 ÷3 ”表示內三角形的圓圈數目；

n 也就是階差數列內隱藏的等差數列的項數

“$\frac{(n+2)(n+3)}{2}\times x$”表示：所有紅色圓圈數字之級數和

“$\frac{(n+1)(n+2)}{2}\times y$”表示：所有藍色圓圈數字之級數和

由於 x ,y 必須畫圖才能看出來，我現在要將它化成不用圖也能表示之符號。
將三角形排列思考法的圖形對照階差表：

$x = d_1$
$y = d_2 - 2d_1$
$= c_1 - d_1$　　把它代入上式，得

$$\{3b_1 + [\underline{b_1 + (n-1)a_1}]\} \times [(n+2)\frac{(1+n)n}{2} \div 3] \div 4 + \frac{(n+2)(n+3)}{2} \times d_1 + \frac{(n+1)(n+2)}{2} \times (c_1 - d_1)$$

化簡後得

$$(3b_1 + b_n) \times [(n+2)\frac{(1+n)n}{2} \div 3] \div 4 + (n+2) \times d_1 + \frac{(n+1)(n+2)}{2} \times c_1$$

(四)特殊例子

次方型

①	① ① ⑥	① ① ⑥ ① ⑥ ⑫	① ① ⑥ ① ⑥ ⑫ ① ⑥ ⑫ ⑱	① ① ⑥ ① ⑥ ⑫ ① ⑥ ⑫ ⑱ ① ⑥ ⑫ ⑱ ㉔
1	8	27	64	125

```
1
   >  7
8         >  12
   >  19         >  6
27        >  18
   >  37         >  6
64        >  24
   >  61
125
```

以代數式計算(取 n=項數-1)：

$$4\text{ 頂點之和} \times ((n+2)\frac{(1+n)n}{2} \div 3) \div 4 + \frac{(n+1)(n+2)}{2} \times 1$$

$$=(6n+18) \times \frac{n(n+1)(n+2)}{6} \div 4 + \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4} + \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4} + \frac{2(n+1)(n+2)}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

前述推導時，n=項數-1，所以當 n 為項數時，現在的 n 應該換成 n -1

代換得 $\frac{n^2(n+1)^2}{4} = (\frac{n(n+1)}{2})^2$

四、重要發現

在推導出三階公式之後，我遇到最大的困難是：四階數列若將其視為四維度空間，則並不是一般圖像所能輕易繪出的。直到有一天，從巴斯卡三角形中發現到一些重要的概念，可以解釋圖形思考的依據，讓我不但突破了圖形思考的困境，更讓我的圖形思考法得到修正與改良：現在的圖形思考法可以運用到 k 階！

(一) 圖形與標準階差數列的關係

觀察數列 1,4,10,20,35 ，數列各項的圓圈個數為：1, 3, 6, 10, 15

① ① ① ① ①

①② ①② ①② ①②

①②③ ①②③ ①②③

①②③④ ①②③④

①②③④⑤

進一步觀察 1,3,6,10,15 數列，它的數列各項的圓圈個數為：1, 2, 3, 4, 5

①，①②，①②③， ①②③④，①②③④⑤

這個規律的解釋，可以表達如下：每一階的階差數列中，每一項如果用圖形來表示，則**各項的圓圈個數，其實就是由前一階的標準階差數列所組成。**

(二) 巴斯卡三角形中所透露的原則

我發現了巴斯卡三角形中一個簡單的原則，可以用來說明或解決級數和計算時的圖形思考限制究竟該如何處理。

由巴斯卡定理我們有 $C_k^k + C_k^{k+1} + C_k^{k+2} + \cdots + C_k^n = C_{k+1}^{n+1}$ ，由此可推得：巴斯卡三角形每一階 1~n 個數相加等於下一階的第 n 個數。

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

以左圖為例：1+3+6+10=20，將它以圖形表示時 1,3,6,10（代表二階的數）這些數字的總和構成了平面三角形，而它等於 20 (三階的數)，所以 20 一項就要表示成平面三角形；也就是說：**第 k 階級數總和的圖形，必為第 k+1 階單一項的圖形。**

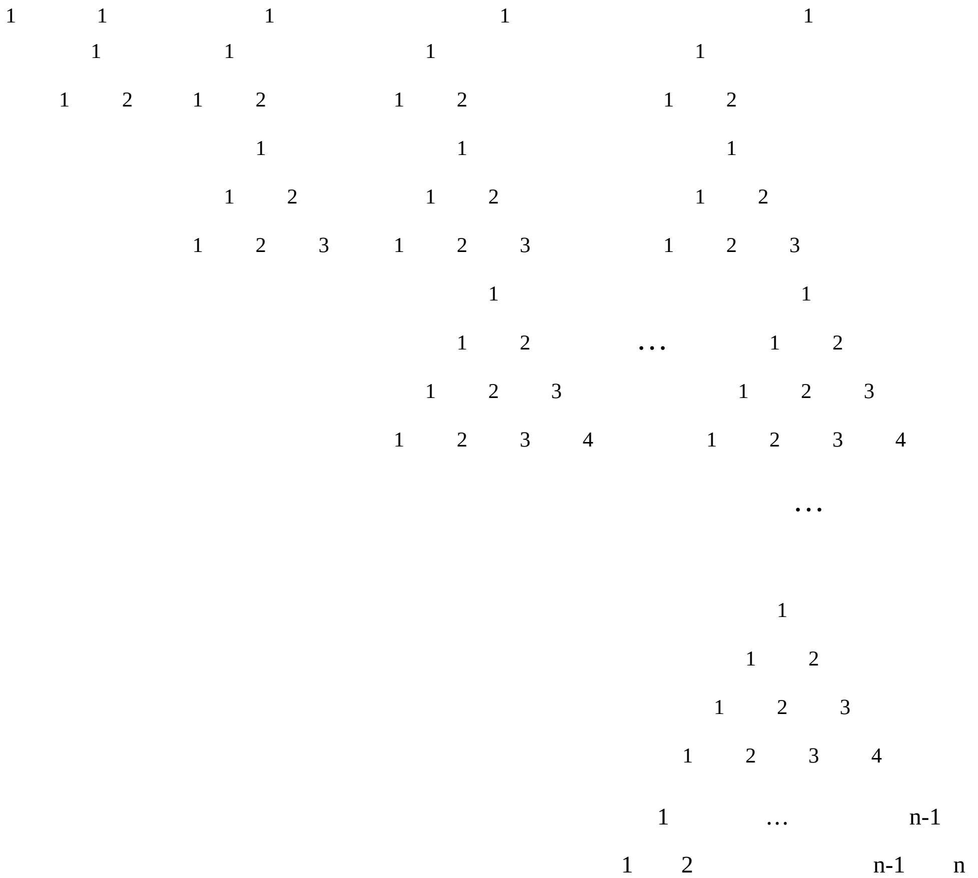
(三) 任意階圖形的表達方式

現在，綜合前述（一）及（二）可以解決四維以上的所有數列以圖形表達的問題：

任意階差數列圖形數目，**第 k+1 階數列的第 n 項，就是第 k 階的 1~n 項的圖形加起來**這樣即使圖形超越立體三角形，一樣能被表示出來。

五、四階階差數列

解決了維度的問題，所以我可以只要按照前述的作法，輕鬆列出四階標準型並做演算。
(一) 四階標準型，這是四階標準型數列 1,5,15,35,70… 可畫成以下圖形



(A)式：

$$\frac{(n+2)(\frac{(1+n)n}{2})}{3}\times 1+\frac{((n-1)+2)(\frac{(1+(n-1))(n-1)}{2})}{3}\times 2+\dots+\frac{(2+2)(\frac{(1+2)2}{2})}{3}\times (n-1)+\frac{(1+2)(\frac{(1+1)1}{2})}{3}\times n$$

(B)式：

$$(n+3)\left((n+2)\frac{(1+n)n}{2}\div 3\right)\div 4+((n-1)+3)\left(((n-1)+2)\frac{(1+(n-1))(n-1)}{2}\div 3\right)\div 4+\dots+$$
$$(2+3)\left((2+2)\frac{(1+2)2}{2}\div 3\right)\div 4+(1+3)\left((1+2)\frac{(1+1)1}{2}\div 3\right)\div 4$$

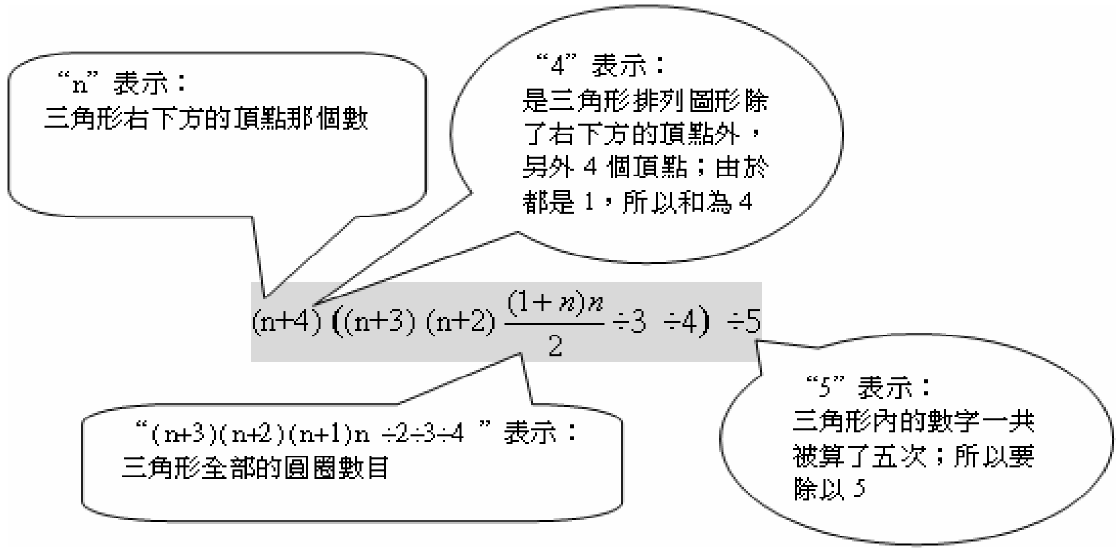
無論有無(C) (D) (E)式與(B)式相同，我只要把(B)式×4，就能消掉所有的÷4，便能與(A)式合併
(A)+(B)式×4：

(n+4) (1+4+10+20+…… $(n+2)\frac{(1+n)n}{2}\div 3$) = (n+4) $\left((n+3)\,(n+2)\frac{(1+n)n}{2}\div 3\ \div 4\right)$

(A)+(B)×4 要再除以五，可以得到級數和；最後可得到四階標準型數列的公式如下：

$$(n+4)\left((n+3)\,(n+2)\frac{(1+n)n}{2}\div 3\ \div 4\right)\div 5$$

現在，讓我先用三角形排列法解釋四階階差數列標準型的公式：



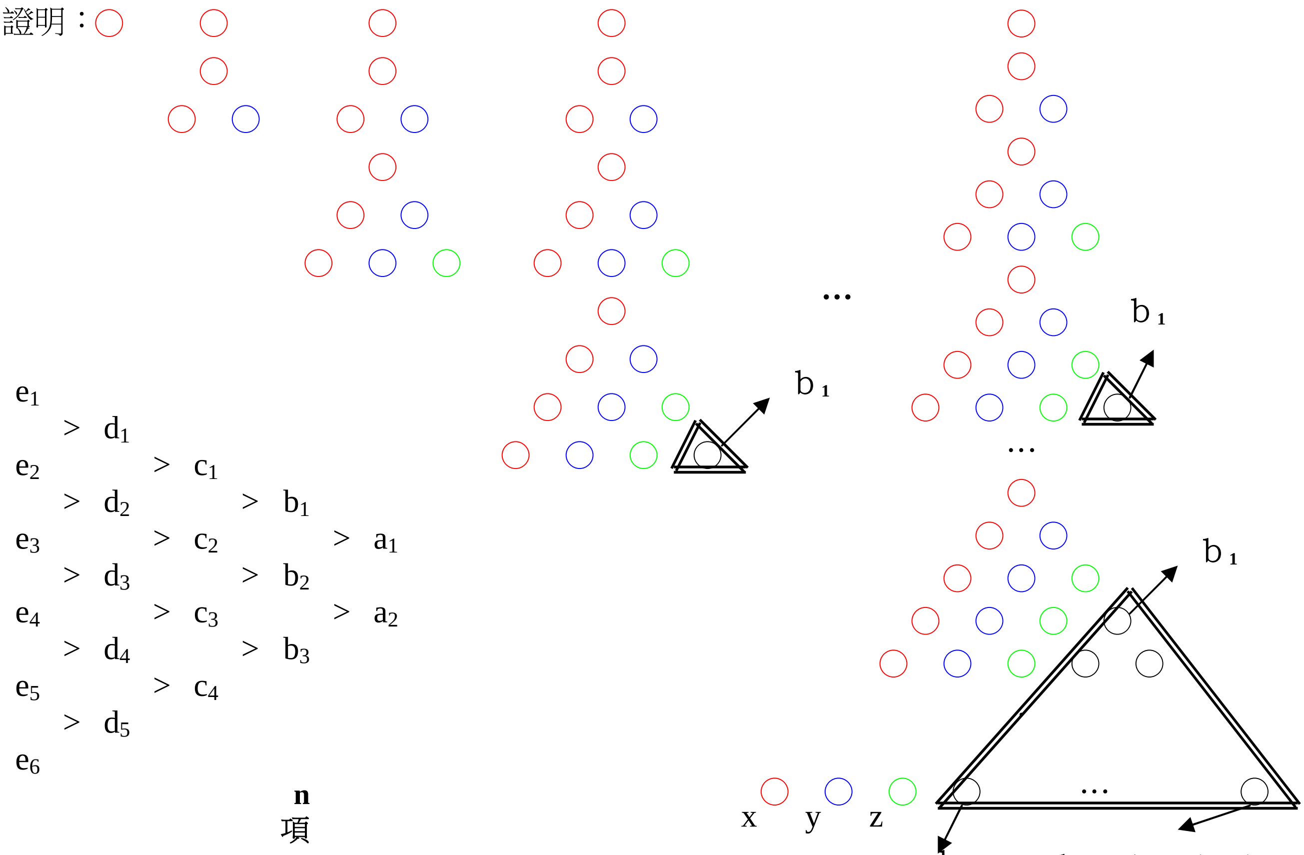
(二) 推導公式

我要依據前述公式的代數意義，將前述公式修改為以下的四階通式(四階階差數列有三排不符合規律的數，仍將它與內三角形分開計算)：

定理三： 設 b_1、b_n 分別為等差數列首項、末項，c_1 為二階階差數列首項，d_1 為三階階差數列首項，e_1 為四階階差數列首項， n 為等差數列項數，則任意四階階差數列級數和的公式為：

$$\mathbf{(4\,b_1+b_n)}\times\left[(n+3)(n+2)\frac{(1+n)n}{2}\div 3\div 4\right]\div 5+(n+3)e_1+\frac{(n+2)(n+3)}{2}d_1+\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}c_1$$

證明：



"$4b_1$"表示：
如圖所標示的四個頂點之和

"$b_n = b_1 + (n-1)a_1$" 表示：
是三角形右下方的頂點那個數
(也就是等差數列的最後一項)

其中 a_1 是等差數列差的公差

"$(n+3)(n+2)(n+1)n \div 2 \div 3 \div 4$"表示內三角形的圓圈數目；

n 也就是階差數列內隱藏的等差數列的項數

$$(4b_1 + b_n) \times \left[(n+3)(n+2)\frac{(1+n)n}{2} \div 3 \div 4 \right] \div 5 +$$

$$+\frac{(n+5)(n+4)(n+3)}{6} \times x + \frac{(n+4)(n+3)(n+2)}{6} \times y + \frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{6} \times z$$

"$\frac{(n+5)(n+4)(n+3)}{6} \times x$"
表示：
所有紅色圓圈數字之級數和

"$\frac{(n+4)(n+3)(n+2)}{6} \times y$"
表示：
所有藍色圓圈數字之級數和

"$\frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{6} \times z$"
表示：
所有綠色圓圈數字之級數和

n=項數-3

由於 x ,y, z 必須畫圖才能看出來，我現在要將它改成不用圖也能表示之符號
將三角形排列思考法的圖對照階差表

觀察此表

x	x	x
	x	x
	x y	x y
		x
		x y
		x y z
e_1	e_2	e_3

$x = e_1$

$y = e_2 - 3e_1$

$= (e_2 - e_1) - 2e_1$

$= d_1 - 2e_1$

$$\begin{aligned}
z &= e_3 - 6x - 3y \\
&= e_3 - 3(2x + y) \\
&= e_3 - 3(2e_1 + d_1 - 2e_1) \\
&= e_3 - 3d_1 \\
&= (e_1 + d_1 + d_2) - 3d_1 \\
&= e_1 - 2d_1 + d_2 \\
&= e_1 - d_1 + (d_2 - d_1) \\
&= e_1 - d_1 + c_1
\end{aligned}$$

把後面帶有 x, y, z 的式子抽出來看

$$\frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{6} \times z + \frac{(n+4)(n+3)(n+2)}{6} \times y + \frac{(n+5)(n+4)(n+3)}{6} \times x$$

把 x, y, z 換成以階差表上的符號表示之代數
(由於 c, d, e 旁邊的數均為 1，即數列首項，運算時暫時不寫)

$$\frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{6}\times(e-d+c)+\frac{(n+4)(n+3)(n+2)}{6}\times(d-2e)+\frac{(n+5)(n+4)(n+3)}{6}\times e$$

$$=\frac{n+3}{6}[6e+3d(n+2)+c(n+1)(n+2)]$$

$$=(n+3)e_1+\frac{(n+2)(n+3)}{2}d_1+\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}c_1$$

得四階通式為

$$(4b_1+b_n)\times〔(n+3)(n+2)\frac{(1+n)n}{2}\div3\ \div4〕\div5+$$

$$(n+3)e_1+\frac{(n+2)(n+3)}{2}d_1+\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}c_1$$

(三)特殊例子

次方型

<u>1</u> **<u>16</u>** **<u>81</u>** **<u>256</u>** **<u>625</u>** **<u>1296</u>**

1 1 1 1 1 1
1 1 1 1 1
1 13 1 13 1 13 1 13 1 13
1 1 1 1
1 13 1 13 1 13 1 13
1 13 36 1 13 36 1 13 36 1 13 36
1 1 1
1 13 1 13 1 13
1 13 36 1 13 36 1 13 36
1 13 36 60 1 13 36 60 1 13 36 60
1 1
1 13 1 13
1 13 36 1 13 36
1 13 36 60 1 13 36 60
1 13 36 60 84 1 13 36 60 84
1
1 13
1 13 36
1 13 36 60
1 13 36 60 84
1 13 36 60 84 108

1						
	>	15				
16			>	50		
	>	65			>	60
81			>	110		> 24
	>	175			>	84
256			>	194		> 24
	>	369			>	108
625			>	302		
	>	671				
1296						

分成基本三角形區(B)區和在外面兩排(A)區
現在把它代數化 得

$$(12(2n+1)+144)\times((n+3)(n+2)\frac{(1+n)n}{2}\div3\div4)\div5+(n+1+2)\frac{(n+2)(n+1)}{2}\div3\times13+$$

$$(n+2+2)\frac{(n+3)(n+2)}{2}\div3\times1$$

$$12(2n+13)\times\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{2\times3\times4\times5}+\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{2\times3}\times13+\frac{(n+2)(n+3)(n+4)}{2\times3}$$

要把 n 換成 n-2 就是公式

$$\frac{n(n+1)(2n+1)(3(n-1)(n+2)+5)}{30}$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$$

六、標準型通解

觀察各階巴斯卡標準階差數列公式之關係

0 階 $S_n^0 = n \quad = C_1^n$

1 階 $S_n^1 = \dfrac{n(n+1)}{2} \quad = C_2^{n+1}$

2 階 $S_n^2 = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{6} \quad = C_3^{n+2}$

3 階 $S_n^3 = \dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{24} \quad = C_4^{n+3}$

4 階 $S_n^4 = \dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{120} = C_5^{n+4}$

從 C 符號以及 S 符號，可推出標準階差數列通解：

k 階 $S_n^k = \dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)..........(n+k)}{(k+1)!} \quad = C_{k+1}^{n+k}$

以上，得標準階差數列通解。

七、次方型通解

各階次方型所推導出的公式，它的規律並非直接可以觀察出來的；經過大量的演算後，我雖然有觀察到一些規律，但是這幾種遞迴關係的表達過於複雜，式子也極冗長。所以，我決定回到最根本來思考問題，得到幾個想法：

(1)所謂通解(公式)應該要是簡便的，否則，便不優於將數列各項逐一加總

(2)階差數列最重要的內涵，應該是數列遞迴關係之架構

於是，我朝此方向研究，得到重要的結果如下：

令第 k 階次方型級數和公式為 $f(n)$ ；第 k+1 階次方型級數和公式為 $g(n)$

利用 $f(n)$ 製造一個數列為 $f(1), f(2), f(3)...f(n)$ ，令 $h(n)=f(1)+f(2)+f(3)+...+f(n)$

我研究出了次方型之遞迴關係為為：

$$g(n)=(n+1)\ f(n)-h(n)$$

實際推導過程，因過於冗長未置於報告內，將呈現於研究日誌中。

證明：

$(n+1)f(n)-h(n)=g(n)$

$f(n)=$ 第 k 階 1 ~ n 項級數和

$h(n)=\ f(1)+f(2)+f(3)+\dots\dots+f(n)$

$g(n)=$ 第 k+1 階 1~n 項級數和

$$f(n)=1^k+2^k+3^k+4^k+......+n^k$$

$$h(n)=1^k+(1^k+2^k)+(1^k+2^k+3^k)+(1^k+2^k+3^k+4^k)+...+(1^k+2^k+3^k+4^k+5^k+...+n^k)$$

$$f(n)\times(n+1)-h(n)$$

$$(1^k+2^k+3^k+4^k+......+n^k)\times(n+1)-(1^k+(1^k+2^k)+(1^k+2^k+3^k)+...+(1^k+2^k+3^k+4^k+...+n^k))$$

$$=(1^k n+2^k n+3^k n+...+n^k n)+(1^k+2^k+3^k+...+n^k)-(1^k+(1^k+2^k)+(1^k+2^k+3^k)+...$$
$$+(1^k+2^k+3^k+4^k+...+n^k))$$

$$=(1^k n+2^k n+3^k n+...(n-1)^k n+n^k n)-((n-1)\times1^k+(n-2)\times2^k+(n-3)\times3^k+...$$
$$+(n-(n-1))-(n-1)^k)$$

$$=(n-(n-1))\times1^k+(n-(n-2))\times2^k+(n-(n-3))\times3^k+...(n-1)\times(n-1)^k+n^{k+1}$$

$$=1^{k+1}+2^{k+1}+3^{k+1}+...(n-1)^{k+1}+n^{k+1}$$

$$=g(n)$$

八、總通式

要發展階差數列總通式，首先觀察各階階差數列通式之間的關係：

2 階通式：$(2b_1+b_n)\times(\frac{n(n+1)}{2})\div 3+(n+1)c_1$

3 階通式：$(3b_1+b_n)\times(\frac{n(n+1)(n+2)}{6})\div 4+(n+2)d_1+\frac{(n+1)(n+2)}{2}c_1$

4 階通式：$(4b_1+b_n)\times(\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{24})\div 5+(n+3)e_1+\frac{(n+2)(n+3)}{2}d_1$

$+\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}c_1$

n=項數-(階數-1)

接著我把原階差表代換成以 Z 符號表示，其中，k 表示階數，n 表示項數。

Z_n^k：階差表 k 階的第 n 項

$$\begin{array}{llllll}
f_1 \\
 & > e_1 \\
f_2 & & > d_1 \\
 & > e_2 & & > c_1 \\
f_3 & & > d_2 & & > b_1 \\
 & > e_3 & & > c_2 & & > a_1 \\
f_4 & & > d_3 & & > b_2 \\
 & > e_4 & & > c_3 & & > a_2 \\
f_5 & & > d_4 & & > b_3 \\
 & > e_5 & & > c_4 \\
f_6 & & > d_5 \\
 & > e_6 \\
f_7
\end{array}
\qquad
\begin{array}{llllll}
Z_1^5 \\
 & > Z_1^4 \\
Z_2^5 & & > Z_1^3 \\
 & > Z_2^4 & & > Z_1^2 \\
Z_3^5 & & > Z_2^3 & & > Z_1^1 \\
 & > Z_3^4 & & > Z_2^2 & & > Z_1^0 \\
Z_4^5 & & > Z_3^3 & & > Z_2^1 \\
 & > Z_4^4 & & > Z_3^2 & & > Z_2^0 \\
Z_5^5 & & > Z_4^3 & & > Z_3^1 \\
 & > Z_5^4 & & > Z_4^2 \\
Z_6^5 & & > Z_5^3 \\
 & > Z_6^4 \\
Z_7^5
\end{array}$$

這樣可以解決英文字母會不夠用的情形，以及 k 階(任意階)會與第 11 個英文字母重複，所造成之誤會。

然後將 n 全部換成項數，以及使用 C 符號

上面的公式則可轉換成以下式子：

2 階：$(2\times Z_1^1 + Z_n^1)\times C_2^n \div 3 + C_1^n \times Z_1^2$

3 階：$(3\times Z_1^1 + Z_n^1)\times C_3^n \div 4 + C_1^n \times Z_1^3 + C_2^n \times Z_1^2$

4 階：$(4\times Z_1^1 + Z_n^1)\times C_4^n \div 5 + C_1^n \times Z_1^4 + C_2^n \times Z_1^3 + C_3^n \times Z_1^2$

統合上列式子可以得出：

k 階：$(k\times Z_1^1 + Z_n^1)\times C_k^n \div (k+1) + C_1^n \times Z_1^k + C_2^n \times Z_1^{k-1} + \ldots + C_{k-1}^n \times Z_1^2$

把前面沒有規律的化簡一下，其中 $Z_n^1 = Z_1^1 + [(n-(k-1))-1]\times Z_1^0$

$$\left(\frac{k\cdot Z_1^1 + Z_1^1 + \big((n-(k-1))-1\big)\cdot Z_1^0}{(k+1)}\right)\times C_k^n$$

$$=\left(\frac{(k+1)\cdot Z_1^1}{(k+1)} + \frac{(n-k)Z_1^0}{(k+1)}\right)\times C_k^n$$

$$=C_k^n \times Z_1^1 + C_{k+1}^n \times Z_1^0$$

整理全式 得

定理五：令 $Z_1^r =$ 階差表中 r 階的第 1 項($r\in N$，$0\le r\le k$)；C_t^n 為組合數符號即 $\frac{n!}{t!(n-t)!}$，則任意階階差數列前 **n** 項之和的公式為：

$$\mathbf{C_1^n \times Z_1^k + C_2^n \times Z_1^{k-1} + C_3^n \times Z_1^{k-2} + \ldots + C_{k-1}^n \times Z_1^2 + C_k^n \times Z_1^1 + C_{k+1}^n \times Z_1^0}$$ (其中 n>k)

目的證明：此式為階差數列前 n 項的總和

$$Z_1^k+Z_2^k+Z_3^k+\ldots\ldots+Z_{n-1}^k+Z_n^k=C_1^n\times Z_1^k+C_2^n\times Z_1^{k-1}+\ldots+C_k^n\times Z_1^1+C_{k+1}^n\times Z_1^0$$

證明：

(1)當 n=1 時

左式 $=Z_1^k=C_1^1\times Z_1^k+C_2^1\times Z_1^{k-1}+\ldots\ldots+C_k^1\times Z_1^1+C_{k+1}^n\times Z_1^0$

$=1\times Z_1^k+0+0+\ldots+0+0=Z_1^k=$ 右式

故原式成立

(2)設當 n=p ($p\in N$)時原式成立

當 n=p+1 時左式 $=Z_1^k+Z_2^k+Z_3^k+\ldots\ldots+Z_{p-1}^k+Z_p^k+Z_{p+1}^k$

$=C_1^p\times Z_1^k+C_2^p\times Z_1^{k-1}+\ldots+C_k^p\times Z_1^1+C_{k+1}^p\times Z_1^0+Z_{p+1}^k$ ---------(1)

又 $Z_{p+1}^k=C_0^p\times Z_1^k+C_1^p\times Z_1^{k-1}+\ldots+C_{k-1}^p\times Z_1^1+C_k^p\times Z_1^0$ -------- (2)(由 P. 19 之右表得知)

將(2)代入(1) 可得

$C_1^p\times Z_1^k+C_2^p\times Z_1^{k-1}+\ldots+C_k^p\times Z_1^1+C_{k+1}^p\times Z_1^0+$

$(C_0^p\times Z_1^k+C_1^p\times Z_1^{k-1}+\ldots+C_{k-1}^p\times Z_1^1+C_k^p\times Z_1^0)$

$=(C_1^p+C_0^p)\times Z_1^k+(C_2^p+C_1^p)\times Z_1^{k-1}\ldots+(C_k^p+C_{k-1}^p)\times Z_1^1+(C_{k+1}^p+C_k^p)\times Z_1^0$

$=C_1^{p+1}\times Z_1^k+C_2^{p+1}\times Z_1^{k-1}+\ldots+C_k^{p+1}\times Z_1^1+C_{k+1}^{p+1}\times Z_1^0=$ 右式

故推得 n=p+1 時原式仍成立

(3)由數學歸納法知，原式對每一正整數 n 均成立.

目的證明：此式為任意 k 階階差數列級數總和的公式

$$Z_1^k+Z_2^k+Z_3^k+\ldots\ldots+Z_n^k = C_1^n\times Z_1^k + C_2^n\times Z_1^{k-1}+\ldots + C_{k-1}^n\times Z_1^2+C_k^n\times Z_1^1 + C_{k+1}^n\times Z_1^0$$

證明：

(1)當 k=1 時

左式$= Z_1^1+Z_2^1+Z_3^1+\ldots\ldots+Z_{n-1}^1 + Z_n^1$ (即等差數列) $=\dfrac{(Z_1^1+Z_n^1)n}{2}$

右式$= C_1^n\times Z_1^1 + C_2^n\times Z_1^0 = n\times Z_1^1 + \dfrac{n(n-1)}{2}\times Z_1^0 = \dfrac{2Z_1^1\times n+n(n-1)\cdot Z_1^0}{2}$

$=\dfrac{\left[Z_1^1+Z_1^1+(n-1)Z_1^0\right]n}{2} = \dfrac{(Z_1^1+Z_n^1)n}{2}$ (即等差數列公式)

故原式成立

(2)設 k=p ($p\in N$)時原式成立

$$Z_1^p+Z_2^p+Z_3^p+\ldots\ldots+Z_n^p = C_1^n\times Z_1^p + C_2^n\times Z_1^{p-1}+\ldots. + C_{p-1}^n\times Z_1^2+C_p^n\times Z_1^1+C_{p+1}^n\times Z_1^0$$

當 k=p+1 時

$Z_1^{p+1}+Z_2^{p+1}+Z_3^{p+1}+\ldots\ldots+Z_n^{p+1}$

$= Z_1^{p+1}+(Z_1^{p+1}+Z_1^p)+(Z_1^{p+1}+Z_1^p+Z_2^p)+(Z_1^{p+1}+Z_1^p+Z_2^p+Z_3^p)+\ldots\ldots..$

$+[\,Z_1^{p+1} + (Z_1^p+Z_2^p+Z_3^p+\ldots.+Z_{n-1}^p)\,]$ (改成由首項和前一階組成)

$= n\times Z_1^{p+1}+(C_1^1\times Z_1^p)+(C_1^2\times Z_1^p+C_2^2\times Z_1^{p-1})+(C_1^3\times Z_1^p+C_2^3\times Z_1^{p-1}+C_3^3\times Z_1^{p-2})+\ldots.+$

$(C_1^{n-1}\times Z_1^p+C_2^{n-1}\times Z_1^{p-1}+\ldots.+C_p^{n-1}\times Z_1^1+C_{p+1}^{n-1}\times Z_1^0)$ (代換成階差表第一斜行數字)

$= n\times Z_1^{p+1}+(C_1^1+C_1^2+C_1^3+C_1^{n-1})Z_1^p+(C_2^2+C_2^3+\ldots.+C_2^{n-1})Z_1^{p-1}+(C_3^3+\ldots+C_3^{n-1})Z_1^{p-2}$

$+\ldots.+(C_p^p+\ldots+C_p^{n-1})Z_1^1+(C_{p+1}^{p+1}+\ldots+C_{p+1}^{n-1})Z_1^0$ (同類項合併)

$= C_1^n\times Z_1^{p+1} + C_2^n\times Z_1^p+C_3^n\times Z_1^{p-1}+\ldots. + C_{p+1}^n\times Z_1^1 + C_{p+1}^n\times Z_1^0$ (根據 k=p 時原式成立)

故推得 k=p+1 時原式仍成立

(3)由數學歸納法知，原式對每一正整數 k 均成立.

九、階差表與係數

我們可利用所推導的公式求階差數列的冪次方之級數和，實際必須使用 C_1^n 至 C_{k+1}^n 這

k+1 個組合數，若求 $\sum_{m=1}^{n} q(m) = p_{k+1}n^{k+1} + p_k n^k + p_{k-1}n^{k-1} ... + p_2 n^2 + p_1 n + p_0$ 之係數

$p_{k+1}, p_k, \ldots, p_1, p_0$ (其中 $q(m)$ 為 m 之 k 次多項式) ，不一定很容易。一般求

$\sum_{m=1}^{n} m^k = p_{k+1}n^{k+1} + p_k n^k + p_{k-1}n^{k-1} ... + p_2 n^2 + p_1 n + p_0$ 之係數 $p_{k+1}, p_k, \ldots, p_1, p_0$ 是以

Bernoulli 數的遞迴式求出。因此我期待利用階差表，直接計算出係數的值。

任意一個階差表之第一斜行的數字，可決定整個階差表的數字，又每一階差表之第一斜行(整個階差表)所對應的階差數列是唯一的。因為這個發現我以階差表的首斜行為中心開始研究，最後我發展出了一個新方法 — 我暫時把它命名為**階差除法**。

(一) 以階差除法求數列一般項

本研究發展出的類似於長除法的運算方式，是先從數列一般項 a_n 的問題。再推展至 S_n (取 $\sum$) 的問題。

演算法如下：

1. 二階階差數列 $\langle a_n \rangle = a_1, a_2, a_3 \ldots a_n$ ，求 $a_n = ?$

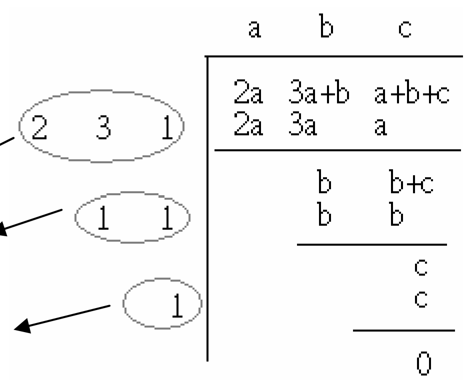
令 $a_n = an^2 + bn + c$

a_1 = a+b+c
> 3a+b
a_2 = 4a+2b+c
> 2a
> 5a+b
a_3 = 9a+3b+c
> 2a
> 7a+b
a_4 = 16a+4b+c
> 2a
> 9a+b
a_5 = 25a+5b+c

右表第一斜行中 a 的係數

右表第一斜行中 b 的係數

右表第一斜行中 c 的係數



說明：

(1)階差表中第一斜行原本為 a+b+c, 3a+b, 2a 反向寫下為 2a, 3a+b, a+b+c，寫在除法內，相當於被除數

(2)相當於做長除法(分離係數法)，但每次除以不同的數字，分別為(2,3,1) (1,1) (1)

(3)所得的商 a、b、c 分別為 n^2 、 n^1 、 n^0 之係數

2. 三階階差數列$\langle a_n \rangle = a_1, a_2, a_3 \ldots a_n$，求$a_n = ?$

令$a_n = an^3 + bn^2 + cn + d$

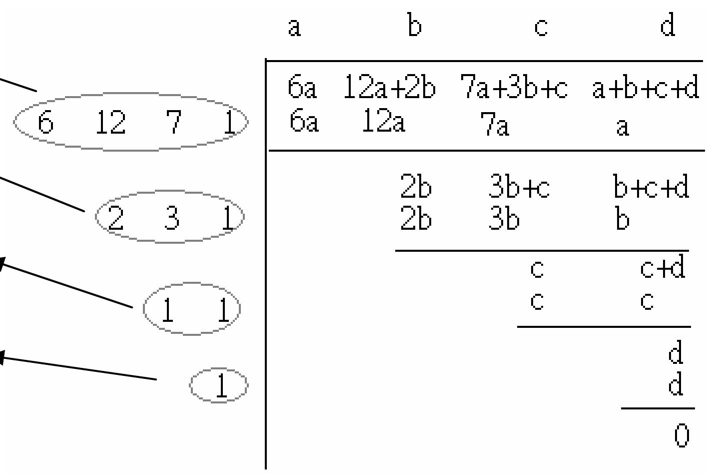
$$
\begin{array}{lllllll}
a_1 & = & a+b+c+d & & & & \\
 & & & > & 7a+3b+c & & \\
a_2 & = & 8a+4b+2c+d & & & > & 12a+2b \\
 & & & > & 19a+5b+c & & & > & 6a \\
a_3 & = & 27a+9b+3c+d & & & > & 18a+2b \\
 & & & > & 37a+7b+c & & & > & 6a \\
a_4 & = & 64a+16b+4c+d & & & > & 24a+2b \\
 & & & > & 61a+9b+c & & \\
a_5 & = & 125a+25b+5c+d & & & &
\end{array}
$$

上表第一斜行中 a 的係數

上表第一斜行中 b 的係數

上表第一斜行中 c 的係數

上表第一斜行中 d 的係數



說明：

1. 階差表中第一斜行原本為 a+b+c+d, 7a+3b+c, 12a+2b, 6a 反向寫下為 6a, 12a+2b, 7a+3b+c, a+b+c+d，寫在除法內，相當於被除數
2. 相當於做長除法(分離係數法)，但每次除以不同的數字，分別為(6,12,7,1) (2,3,1) (1,1) (1)
3. 所得的商 a、b、c、d 分別為n^3、n^2、n^1、n^0之係數

註：

1.被除數的位置(1) (1,1) (2,3,1) (6,12,7,1)…括號內的數分別為 n^0 、 n^1 、 n^2 、 n^3 ⋯其數列階差表之第一斜行的數字

n^0

1	
1	
1	
1	
1	

n^1

1		
	>	1
2		
	>	1
3		
	>	1
4		
	>	1
5		

n^2

1				
	>	3		
4			>	2
	>	5		
9			>	2
	>	7		
16			>	2
	>	9		
25				

n^3

1						
	>	7				
8			>	12		
	>	19			>	6
27			>	18		
	>	37			>	6
64			>	24		
	>	61				
125						

⋯

2.將這些數字如下圖排列，上方由右至左向下的斜行，第 k 斜行附上 k 的下標，則相鄰兩數個字乘以其下標後相加，便為這二數下方的數。

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 2 & & \\
 & 1 & & 7 & & 12 & & 6 & \\
1 & & 15 & & 50 & & 60 & & 24 \\
 & & & & \vdots & & & &
\end{array}
$$

$$
\boxed{
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1_1 & & & & \\
 & & & 1_1 & & 1_2 & & & \\
 & & 1_1 & & 3_2 & & 2_3 & & \\
 & 1_1 & & 7_2 & & 12_3 & & 6_4 & \\
1_1 & & 15_2 & & 50_3 & & 60_4 & & 24_5
\end{array}
}
$$

將此代數化，其中 $a_{i,j} = i$ 次方數字中的第 j 個

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & a_{0,1} & & & \\
 & & a_{1,1} & & a_{1,2} & & \\
 & a_{2,1} & & a_{2,2} & & a_{2,3} & \\
a_{3,1} & & a_{3,2} & & a_{3,3} & & a_{3,4} \\
 & & & \vdots & & &
\end{array}
$$

以上的數表即 $\forall i \in N \cup \{0\}$ $a_{i,1} = 1$ ； $\forall i, j \in N$ $a_{i+1,j+1} = j a_{i,j} + (j+1) a_{i,j+1}$

(二) 以階差除法求數列總和

求一數列< a_n >的總和，我的方法利用此數列之 $S_1, S_2, S_3 \ldots S_n$ 造出另一數列，以< S_n >列一階差表，再以前述用階差表之第一斜行數字做似長除法的運算，求出< S_n >之一般項，此一般項即 $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ 。

將黑線內新的階差表之第一斜行，以前一節所述的階差除法，求出一般項即為 S_n

又因 $S_1 = a_1$ ，以及階差除法只需使用階差表的一斜行，所以我們可簡記為(右邊)：

$$
\begin{array}{lllll}
 & a_1 & & & \\
S_1 & & > a_2 - a_1 & & \\
 & > a_2 & & > a_3 - 2a_2 + a_1 & \\
S_2 & & > a_3 - a_2 & & \\
 & > a_3 & & > a_4 - 2a_3 + a_2 & \\
S_3 & & > a_4 - a_3 & & \\
 & > a_4 & & > a_5 - 2a_4 + a_3 & \\
S_4 & & > a_5 - a_4 & & \\
 & > a_5 & & & \\
S_5 & & \cdot & & \\
\cdot & & \cdot & & \\
\cdot & & \cdot & & \\
\cdot & & & &
\end{array}
\quad \cdots \quad
\begin{array}{llll}
 & a_1 & & \\
a_1 & & > a_2 - a_1 & \\
a_2 & & & > a_3 - 2a_2 + a_1 \\
 & & > a_3 - a_2 & \\
a_3 & & & > a_4 - 2a_3 + a_2 \\
 & & > a_4 - a_3 & \\
a_4 & & & > a_5 - 2a_4 + a_3 \\
 & & > a_5 - a_4 & \\
a_5 & & & \\
 & & \cdot & \\
 & & \cdot & \\
 & & \cdot &
\end{array}
\quad \cdots
$$

例如：計算 $\sum_{k=1}^{n}(2k^3 + k^2 - 4k + 2)$ 我發現的方法是：

$$a_k = 2k^3 + k^2 - 4k + 2$$

$$
\begin{array}{llllllll}
 & 1 & & & & & & \\
1 & & > & 13 & & & & \\
 & 14 & & & > & 26 & & \\
 & & > & 39 & & & > & 12 \\
 & 53 & & & > & 38 & & \\
 & & > & 77 & & & > & 12 \\
 & 130 & & & > & 50 & & \\
 & & > & 127 & & & & \\
 & 257 & & & & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|lllll}
 & \frac{1}{2} & \frac{4}{3} & -1 & \frac{1}{6} & \\
\hline
 & 12 & 38 & 39 & 14 & 1 \\
24\ 60\ 50\ 15\ 1 & 12 & 30 & 25 & \frac{15}{2} & \frac{1}{2} \\
\hline
 & & 8 & 14 & \frac{13}{2} & \frac{1}{2} \\
6\ 12\ 7\ 1 & & 8 & 16 & \frac{28}{3} & \frac{4}{3} \\
\hline
 & & & -2 & -\frac{17}{6} & -\frac{5}{6} \\
2\ 3\ 1 & & & -2 & -3 & -1 \\
\hline
 & & & & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\
1\ 1 & & & & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\
\hline
 & & & & & 0
\end{array}
$$

此題計算 $\sum_{k=1}^{n}(2k^3 + k^2 - 4k + 2)$ 的答案即為： $\frac{1}{2}n^4 + \frac{4}{3}n^3 - n^2 + \frac{1}{6}n$

伍、研究結果

綜合本研究的結果，可以得出五個定理為：

定理一.　二階階差數列級數和公式：

$(2b_1+b_n)\times C_2^{n+1}\div 3+C_1^{n+1}c_1$ (n=項數-1)

定理二.　三階階差數列級數和公式：

$(3b_1+b_n)\times C_3^{n+2}\div 4+C_2^{n+2}c_1+C_1^{n+2}d_1$ (n=項數-2)

定理三.　四階階差數列級數和公式：

$(4b_1+b_n)\times C_4^{n+3}\div 5+C_3^{n+3}c_1+C_2^{n+3}d_1+C_1^{n+3}e_1$ (n=項數-3)

定理四.　五階階差數列級數和公式：

$(5b_1+b_n)\times C_5^{n+4}\div 6+C_4^{n+4}c_1+C_3^{n+4}d_1+C_2^{n+4}e_1+C_1^{n+4}f_1$ (n=項數-4)

定理五.　任意階階差數列級數和公式：

$\mathbf{C}_1^n\times\mathbf{Z}_1^k+\mathbf{C}_2^n\times\mathbf{Z}_1^{k-1}+\mathbf{C}_3^n\times\mathbf{Z}_1^{k-2}+\ldots+\mathbf{C}_{k-1}^n\times\mathbf{Z}_1^2+\mathbf{C}_k^n\times\mathbf{Z}_1^1+\mathbf{C}_{k+1}^n\times\mathbf{Z}_1^0$ (n=項數)

陸、討論

一、巴斯卡三角形中每一斜列為階差數列的標準型態，從巴斯卡三角形中可延伸到三角形排列思考法中求級數和的圖形核心，因此能解決四維以上的所有數列問題，即使超越立體三角形一樣能做計算。

二、我用簡單而創新的思考方式，發現了三角形排列思考法是推導階差數列級數和公式的一種有效的方法。在三角形排列思考法中，每階數列表示成圖形時，就是將每項數字分別填入前一階的標準階差數列之堆垛數目的方格中。由於圖形都是以一至多個三角形排列來表示各項數列，因此我將它命名為〈三角形排列思考法〉。

三、將一數列列出階差表，可以看出 k 階階差數列內包含了 0 至 k-1 階的數列，其中等差數列(一階)就是表示在三角形排列思考法中，符合規律的那幾項。從此階差表中得知：一個 k 階的階差數列，至少要有 k+1 項，才能確定它為 k 階。

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
f_1 & & & & & & & & & & \\
 & > & e_1 & & & & & & & & \\
f_2 & & & > & d_1 & & & & & & \\
 & > & e_2 & & & > & c_1 & & & & \\
f_3 & & & > & d_2 & & & > & b_1 & & \\
 & > & e_3 & & & > & c_2 & & & > & a_1 \\
f_4 & & & > & d_3 & & & > & b_1 & & \\
 & > & e_4 & & & > & c_3 & & & & \\
f_5 & & & > & d_4 & & & & & & \\
 & > & e_5 & & & & & & & & \\
f_6 & & & & & & & & & &
\end{array}
$$

四、在我所發展出的階差除法中，另外發現無論是計算a_n或$\sum$ 的問題，被除數(第一斜行或第二斜行)可以除以不同的除數，該除數必為某多項式之第一斜行的數字，而所得的商，依次配上該除數所對應的多項式即為答案。

五、在研究過程中所提及，本研究者所得出之複雜次方型通解為：

總通式 ― $\mathbf{C}_1^n \times \mathbf{Z}_1^k + \mathbf{C}_2^n \times \mathbf{Z}_1^{k-1} + \mathbf{C}_3^n \times \mathbf{Z}_1^{k-2} + \dots + \mathbf{C}_{k-1}^n \times \mathbf{Z}_1^2 + \mathbf{C}_k^n \times \mathbf{Z}_1^1 + \mathbf{C}_{k+1}^n \times \mathbf{Z}_1^0$

針對總通式中的 $\mathbf{Z}_1^0$、$\mathbf{Z}_1^1$、$\mathbf{Z}_1^2$、$\mathbf{Z}_1^3$、$\mathbf{Z}_1^4$ …在次方型中，有特殊規律如下：

$\mathbf{Z}_1^0 = n!$

$\mathbf{Z}_1^1 = 1\mathrm{C}_2^{n+1}(n-1)!$

$= \mathrm{C}_2^{n+1}(n-1)!$

$\mathbf{Z}_1^2 = \mathbf{(}3\times 1\mathrm{C}_4^{n+2} - 2\times 1\mathrm{C}_3^{n+1}\mathbf{)}(n-2)!$

$= \mathbf{(}3\mathrm{C}_4^{n+2} - 2\mathrm{C}_3^{n+1}\mathbf{)}(n-2)!$

$\mathbf{Z}_1^3 = \mathbf{(}5\times 3\mathrm{C}_6^{n+3} - 4\times(3+2)\mathrm{C}_5^{n+2} + 3\times 2\mathrm{C}_4^{n+1}\mathbf{)}(n-3)!$

$= \mathbf{(}15\mathrm{C}_6^{n+3} - 20\mathrm{C}_5^{n+2} + 6\mathrm{C}_4^{n+1}\mathbf{)}(n-3)!$

$\mathbf{Z}_1^4 = \mathbf{(}7\times 15\mathrm{C}_8^{n+4} - 6\times(15+20)\mathrm{C}_7^{n+3} + 5\times(20+6)\mathrm{C}_6^{n+2} - 4\times 6\mathrm{C}_5^{n+1}\mathbf{)}(n-4)!$

$= \mathbf{(}105\mathrm{C}_8^{n+4} - 210\mathrm{C}_7^{n+3} + 130\mathrm{C}_6^{n+2} - 24\mathrm{C}_5^{n+1}\mathbf{)}(n-4)!$

…以此類推

此規律除了括號內最前的數字為$1\times 3\times 5\cdots\times(2k-1)$，最後的數字為$k!$，其餘的未能以簡便方式呈現，不過仍是我日後研究的方向之一。

六、今年四月的地方科展後，我盼能將階差數列的總通式以更簡潔的概念表示，而生成函數是研究組合的重要工具，所以試著將定理五的總通式賦予它的生成函數。

這段期間，我研究出簡單的結果如下：

總通式 ― $\mathbf{C}_1^n \times \mathbf{Z}_1^k + \mathbf{C}_2^n \times \mathbf{Z}_1^{k-1} + \dots + \mathbf{C}_{k-1}^n \times \mathbf{Z}_1^2 + \mathbf{C}_k^n \times \mathbf{Z}_1^1 + \mathbf{C}_{k+1}^n \times \mathbf{Z}_1^0$

為了符合生成函數的運算，在最前加上 $\mathrm{C}_0^{\mathrm{n}} \times \mathrm{Z}_1^{k+1}$(因沒有 Z_1^{k+1} 在此項，故為 0)

⇨ $\mathbf{C}_0^{\mathrm{n}} \times \mathbf{Z}_1^{k+1} + \mathbf{C}_1^n \times \mathbf{Z}_1^k + \mathbf{C}_2^n \times \mathbf{Z}_1^{k-1} + \dots + \mathbf{C}_{k-1}^n \times \mathbf{Z}_1^2 + \mathbf{C}_k^n \times \mathbf{Z}_1^1 + \mathbf{C}_{k+1}^n \times \mathbf{Z}_1^0$

我研究出的生成函數為：$(\sum_{i=0}^{k+1} \mathbf{C}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{n}} x^i)(\sum_{i=0}^{k+1} \mathbf{Z}_1^{\mathrm{i}} x^i)$

此生成函數展開後的式子中，$\forall\, m \in N \quad x^{m+1}$ 項係數為m階階差數列的級數和公式 。

柒、結論與應用

一、結論

(一)三角形排列思考法為計算階差數列級數總和及推導階差數列求和公式的創新方法

(二)標準型階差數列(巴斯卡三角形中)第 k 階 1～n 項的和，即通式為：

$$S_n^k = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)..........(n+k)}{(k+1)!}$$

(三)次方型階差數列其關係式為：

$$g(n) = (n+1)f(n) - h(n)$$

其中， $f(n) =$ 第 k 階 1 ~ n 項級數和； $h(n) = f(1) + f(2) + f(3) + \ldots\ldots + f(n)$

$g(n) =$ 第 k+1 階 1~n 項級數和

(四)本研究推導出計算任意一個 k 階(任意階)階差數列第 1 項至第 n 項之和，其公式為：

$$\mathbf{C}_1^n \times \mathbf{Z}_1^k + \mathbf{C}_2^n \times \mathbf{Z}_1^{k-1} + \mathbf{C}_3^n \times \mathbf{Z}_1^{k-2} + \ldots + \mathbf{C}_{k-1}^n \times \mathbf{Z}_1^2 + \mathbf{C}_k^n \times \mathbf{Z}_1^1 + \mathbf{C}_{k+1}^n \times \mathbf{Z}_1^0$$

其生成函數為： $(\sum_{i=0}^{k+1} \mathbf{C}_i^n x^i)(\sum_{i=0}^{k+1} \mathbf{Z}_1^i x^i)$ 的 x^{k+1} 項之係數

(五)本研究利用階差表之間的關係，發展出一個**類似長除法的階差除法**，可簡便求出 $\sum_{m=1}^{n} q(m) = p_{k+1}n^{k+1} + p_k n^k + p_{k-1}n^{k-1} ... + p_2 n^2 + p_1 n + p_0$ 之係數 $p_{k+1}, p_k, \ldots, p_1, p_0$ (其中 $q(m)$ 為 m 之 k 次多項式)。

(六)將 n^0 、 n^1 、 n^2 、 n^3 ⋯其數列階差表之第一斜行的數字，列成一個數表時，

$$\begin{array}{cccc} & & a_{0,1} & & \\ & a_{1,1} & & a_{1,2} & \\ a_{2,1} & & a_{2,2} & & a_{2,3} \\ a_{3,1} \; & a_{3,2} & & a_{3,3} & \; a_{3,4} \\ & & \vdots & & \end{array}$$

我們有 $a_{0,1} = 1$

$$a_{i+1,j+1} = j a_{i,j} + (j+1) a_{i,j+1}$$

$(0 \le i \le n \;；1 \le j \le n)$

其中 $a_{i,j} = i$ 次方數字中的第 j 個。

二、應用

(一)若一數列< a_n >為 p 階階差數列，則數列 $a_1^r + a_2^r + a_3^r + a_4^r + \cdots + a_n^r$ 為 $p \times r$ 階的階差數列。

例如：1,3,6,10,15,21…為 2 階階差數列，將每一項皆取 3 次方，即 $1^3, 3^3, 6^3, 10^3, 15^3, 21^3$... 所得的數列 1,27,216,1000,3375,9261,21952,46656…，由右表可之其為 6 階階差數列。

1	26	163	432	564	360	90
27	189	595	996	924	450	90
216	784	1591	1920	1374	540	
1000	2375	3511	3294	1914		
3375	5886	6805	5208			
9261	12691	12013				
21952	24704					
46656						

(二)若一數列< a_n >為 p 階階差數列，另一數列< b_n >為 q 階階差數列，則數列 a_1b_1、a_2b_2、a_3b_3、a_4b_4、… a_nb_n 為一個 $p+q$ 階的階差數列。

例如：2,3,7,16,32,57,93…為 3 階階差數列，1,3,6,10,15,21,28…為 2 階階差數列，此時將第一項與第一項相乘，第二項與第二項相乘…所得的數列 2,9,42,160,480,1197,2604…，由右表可之其為 5 階階差數列。

2	7	26	59	58	20
9	33	85	117	78	20
42	118	202	195	98	
160	320	397	293		
480	717	690			
1197	1407				
2604					

(三)根據次方型通解所研究出的遞迴關係，我們有： $(n+1)\sum_{i=1}^{n} i^{k-1} - \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i} j^{k-1}\right) = \sum_{i=1}^{n} i^k$ ，這樣的關係式。

(四)本研究之過程與結果，是透過三角形排列法的平面型態，推廣延伸至立體型態，甚至抽象化到 n 維空間的排列型態，並結合巴斯卡三角形的組合數之級數和，求高階階差數列的冪次方和。因此，本研究可以運用於伯努利數、伯努利數之同餘式等領域方面的問題探討。

捌、參考資料

一、第 49 屆中小學科學展覽會《神秘數列破解～階差數列的計算與推演的創意思考》。

二、孫文先(1989)。《組合數學》。台北：九章。

三、華羅庚(1995)。《與中學生談中國數學史上的幾大成就》。台北：九章。

四、紀素雲 等人(2005)。《數學公式的由來》。台北：倚天。

五、里翁・賴爾 等人(2006)。《最ㄅㄧㄤˋ的數學公式》。台北：天下。

【評語】040418

本篇論文主要在推導出計算任意一個 k 階階差數列的第 1 項到第 n 項之和，其研究過程與結果，是透過三角形的排列法的平面型態，推廣延伸至立體型態，並抽象化到 n 維空間的排列型態。階差的反向量和，反覆操作自然與二項式係數相結合，所以這樣的公式並不驚奇，唯作者的努力是可以肯定的。