中華民國第51屆中小學科學展覽會

作品說明書

高中組　數學科

040417

同心圓、環紋、直線系重疊成的圖形

學校名稱：國立嘉義高級中學

作者：	指導老師：
高一　鄭黃昱翔	吳博仁
高一　朱柏翰	李文堂

關鍵詞：極座標、圓錐曲線、蚶線

同心圓、環紋、直線系重疊成的圖形

摘要

圖形的重疊會因爲線條重疊處產生亮紋，我們分別去討論同心圓系，平行直線系，佛瑞奈環紋互相重疊產生的干涉現象，並嘗試以極座標表示產生的圖形，及其出現位置關係，以數學方式解釋物理的干涉。

壹、 研究動機

在物理課上到光學的干涉時，利用課本附錄的投影片重疊出很多不同的圖形，因而引起我們的注意，想了解其亮紋暗紋產生的原因，及不同的投影片重疊產生的圖形。

貳、 研究目的

一、兩等大小佛瑞奈環紋（Fresnel zone plat）重疊形成之圖形與極方程式。
二、兩不等大小佛瑞奈環紋重疊形成之圖形與極方程式。
三、佛瑞奈環紋與同心圓系重疊形成之圖形與極方程式。
四、文獻探討與研究。

參、研究設備及器材

紙、筆、投影片、電腦、GSP 幾何繪板、GeoGebra 程式、AutoCAD 程式、MathType Evaluation 程式。

肆、研究過程或方法

一、研究方法：

先利用投影片及繪圖軟體觀察重疊形成之圖形，推測其可能圖形種類，並用極座標方程式推導圖形距離與圖形變化的關係，並證明之。

二、研究過程：

(一) 各種圖形之極座標方程式：

1、圓：

（1） 圓心在極點上，半徑爲a：$r=a$。

（2） 圓心在$(d,0)$，半徑爲a：$r^2+d^2-2rd\cos\theta=a^2$。

（3） 圓心在(r_1,θ_1)，半徑爲a：$r^2+r_1^2-2r\cdot r_1\cos(\theta-\theta_1)=a^2$。

2、鉛直線，交極軸於$(d,0)$：$d=r\cdot\cos\theta$。

3、圓錐曲線，以焦點爲極點：

$r=\dfrac{e\rho}{1\pm e\cdot\cos\theta}$（$e$爲離心率$\dfrac{c}{a}$，$\rho$爲焦點到準線的距離）

（1） 橢圓：$0<|e|<1$。

（2） 拋物線：$|e|=1$。

（3） 雙曲線：$|e|>1$。

４、 蚶線，以$r_1=2a\cos\theta$為基圓，極點為基點，ｋ為常數：

$r=2a\cos\theta+k$ ，$0\le\theta\le\pi$ 。

心臟線： $r=2a\cos\theta+k$ ，$0\le\theta\le\pi$ ，當$k=2a$時。

(二) 佛瑞奈環紋是以$\sqrt{1},\sqrt{2},\sqrt{3},\cdots\sqrt{2n-2},\sqrt{2n-1}\,(n\in N)$為半徑作同心圓系，在半徑$\sqrt{2n-2}$至$\sqrt{2n-1}\,(n\in N)$中間塗色之圖形(圖１)，以$r_n$表示半徑為$\sqrt{n}$的圓。

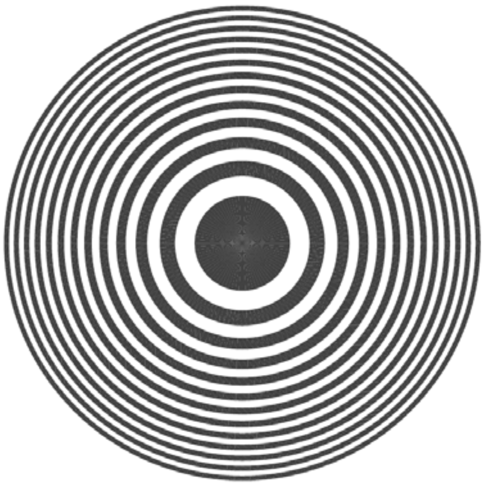


圖１：佛瑞奈環紋

(三) 圖形重疊後亮紋及暗紋形成的原因及位置：

１、 黑線重合處遮光面積減少，出現加強性干涉的亮紋；反之，產生破壞性干涉，呈現暗紋（圖２）。但若條紋交角過大，則亮紋距離太近，暗紋便不明顯（圖３）。

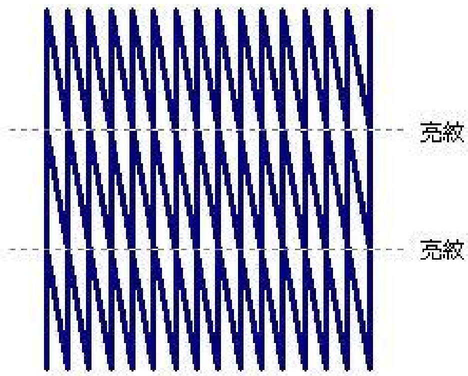


圖２：平行直線重疊，夾角較小

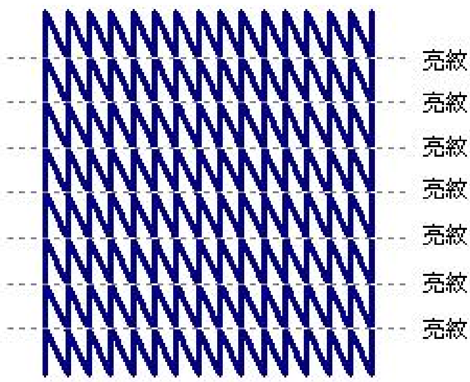


圖３：平行直線重疊，夾角較大

２、 佛瑞奈環紋暗色部分為一帶狀色塊，經觀察討論得：以兩佛瑞奈環

圓心 O_1 、 O_2 爲直徑作圓 O，在圓 O 內部，亮紋形成的條件爲：

$r_1=\sqrt{2n}$ 、 $r_2=\sqrt{2m-1}$ 或 $r_1=\sqrt{2n-1}$ 、 $r_2=\sqrt{2m}$ 所形成交點集合；

在圓 O 外部，亮紋形成的條件爲： $r_1=\sqrt{2n}$ 、 $r_2=\sqrt{2m}$ 或

$r_1=\sqrt{2n-1}$ 、 $r_2=\sqrt{2m-1}$ 所形成交點集合（圖４）

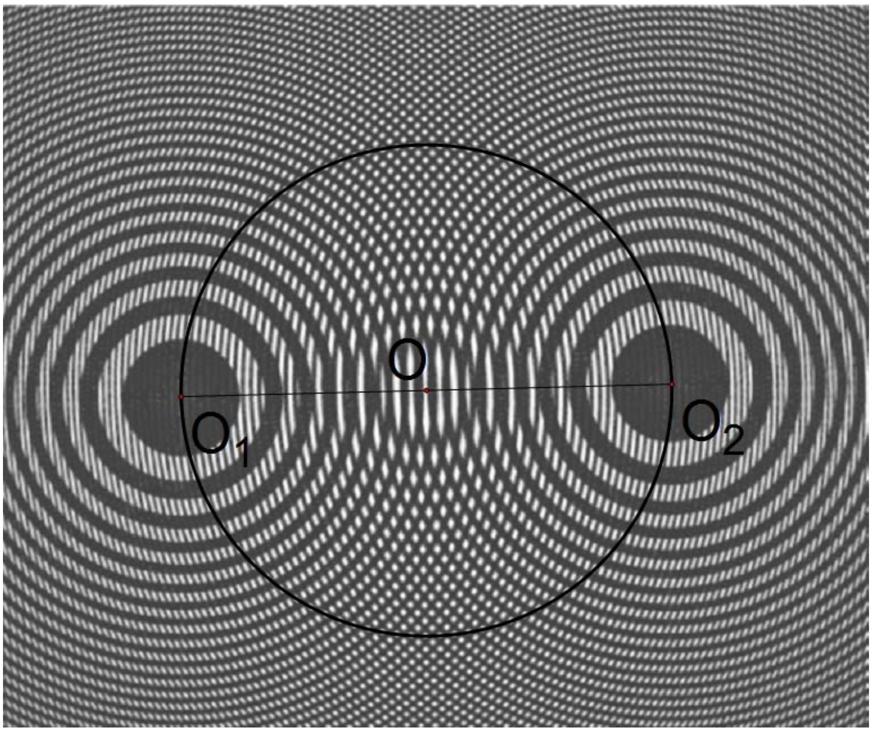


圖４：兩佛瑞奈環紋重疊亮紋形成之圖形

(四) 兩等大小佛瑞奈環紋重疊形成之圖形與方程式：

１、以兩圓心 O_1O_2 中點 O 爲極點，$\overrightarrow{OO_2}$ 爲極軸建立極座標系，設以

$O_1(\frac{d}{2},0)$ 爲圓心的同心圓系半徑 $r_{1\,\mathrm{m}}=\sqrt{\mathrm{m}}\lambda$ ，極方程式

$O_{1\,\mathrm{m}}: m\lambda^2=r^2+\frac{d^2}{4}-2r(\frac{d}{2})\cos\theta$ ，以 $O_2(\frac{d}{2},\pi)$ 爲圓心的同心圓系半徑

$r_{2\,\mathrm{n}}=\sqrt{\mathrm{n}}\lambda$ ，極方程式 $O_{2\,n}: n\lambda^2=r^2+\frac{d^2}{4}-2r(\frac{d}{2})\cos(\pi-\theta)$ ，$O_{1\,\mathrm{m}}O_{2\,n}$ 交點 P 極座標爲 (r,θ)（圖５）。

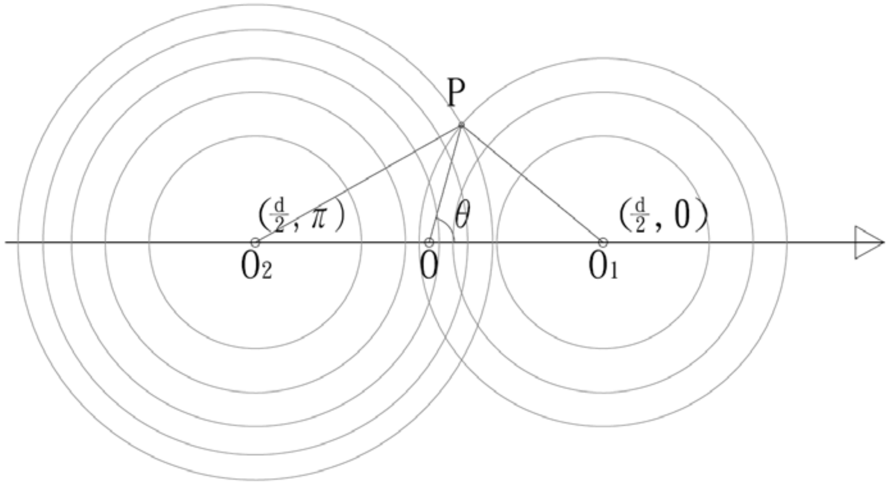


圖５：兩等大小佛瑞奈環紋重疊極座標假設之示意圖

$$\begin{cases} m\lambda^2 = r^2+\dfrac{d^2}{4}-2r(\dfrac{d}{2})\cos\theta \\ n\lambda^2 = r^2+\dfrac{d^2}{4}-2r(\dfrac{d}{2})\cos(\pi-\theta) \end{cases}$$

整理得$\begin{cases} m\lambda^2 = r^2+\dfrac{d^2}{4}-rd\cos\theta \\ n\lambda^2 = r^2+\dfrac{d^2}{4}+rd\cos\theta \end{cases}$

相加相減得$\begin{cases} r^2+\dfrac{d^2}{4}=\dfrac{m+n}{2}\lambda^2\cdots(1) \\ rd\cos\theta=\dfrac{n-m}{2}\lambda^2\cdots(2) \end{cases}$

（１）當$n-m=t_1\in N$時，根據(2)得$r\cos\theta=\dfrac{\lambda^2}{2d}t_1$，P 點所形成的集合爲間隔$\dfrac{\lambda^2}{2d}$的平行直線系（圖６）。

（２）當$n+m=t_2\in N$時，根據(1)得$r^2+\dfrac{d^2}{4}=t_2\lambda^2$，P 點所形成的集合爲以極點爲圓心，半徑爲$\sqrt{t_2\lambda^2-\dfrac{d}{4}}$的佛瑞奈環紋（圖７）。

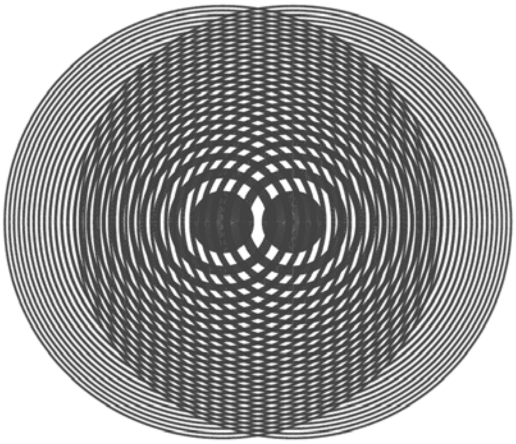


圖６：兩等大小佛瑞奈環紋
重疊之圖形

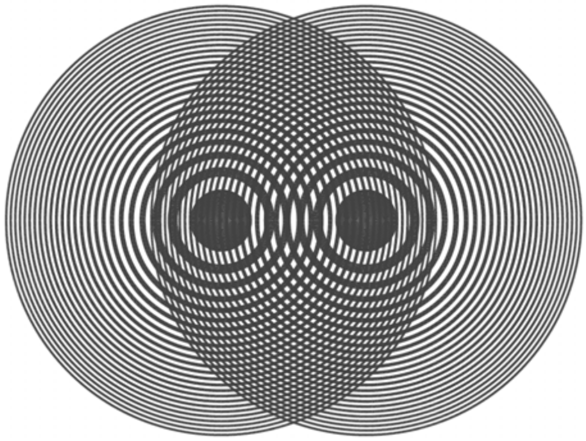


圖７：兩等大小佛瑞奈環紋
重疊之圖形

（３）當$2m-n=t_3\in N$時，$\begin{cases} r^2+\dfrac{d^2}{4}=\dfrac{3m-t_3}{2}\lambda^2\cdots(3) \\ rd\cos\theta=\dfrac{m-t_3}{2}\lambda^2\cdots(4) \end{cases}$

(3)-3×(4)　$r^2+\dfrac{d^2}{4}-3rd\cos\theta=t_3\lambda^2$

整理得　$r^2+\dfrac{9}{4}d^2-2r(\dfrac{3}{2}d)\cos\theta=t_3\lambda^2+2d^2$

P 點所成集合為以$(\dfrac{3}{2}d,0)$為圓心，半徑$\sqrt{t_3\lambda^2+2d^2}$的佛瑞奈環紋（圖８）。

２、可以一般性假設令所成佛瑞奈環紋圓心在$(\rho,0)$，又令$k=\dfrac{\rho}{d}$，

根據餘弦定理$R^2=r^2+\rho^2-2r\rho\cdot\cos\theta$

$k=\dfrac{\rho}{d}$代入得　$R^2=r^2+k^2d^2-2r(kd)\cdot\cos\theta$

把(1)(2)代入　$R^2=\dfrac{m+n}{2}\lambda^2+(k^2-\dfrac{1}{4})d^2-k(m-n)\lambda^2$

整理得　$R^2=\left[(\dfrac{1}{2}-k)m+(\dfrac{1}{2}+k)n\right]\lambda^2+(k^2-\dfrac{1}{4})d^2$

令$\dfrac{p}{s}=\dfrac{1}{2}-k$，$\dfrac{q}{s}=\dfrac{1}{2}+k$，其中$p,q,s\in Z$，$(p,q)=1$

則$R^2=\dfrac{pm+qn}{s}\lambda^2+(k^2-\dfrac{1}{4})d^2$，令$pm+qn=t$，

交點 P 所成集合為以$(\rho,0)$為圓心，$R=\sqrt{\dfrac{\lambda^2}{s}t+(k^2-\dfrac{1}{4})d^2}$的同心圓

系，又 $R_{k+1}^2 - R_k^2 = [\frac{\lambda^2}{s}(t+1) + (k^2 - \frac{1}{4})d^2] - [\frac{\lambda^2}{s}t + (k^2 - \frac{1}{4})d^2] = \frac{\lambda^2}{s}$

爲定值，所以所形成的圖形爲佛瑞奈環紋（圖１６）。

３、 $px + qy = 1$， $p, q \in Z$ ，存在一組整數解$\left(m_0, n_0\right)$，則可以用

$\left(x, y\right) = (m_0 + qk, n_0 - pk)$ ， $k \in Z$ 表示所有$\left(x, y\right)$的整數解。所以

$px + qy = t$ ，$t \in N$ ，所有整數解爲$\left(x, y\right) = \left(\left(m_0 + qk\right)t, \left(n_0 - pk\right)t\right)$，

因此存在多個數對$\left(x, y\right)$使 $px + qy$ 爲任意正整數，即可形成佛瑞奈

環紋。但t越大，$\left(x, y\right)$整數解在一定區間內數目會較少，因此產

生的環紋較不明顯，即較不易在投影片或電腦上看到圖形產生。

由上述可知：在極軸上且與原點距離有理數倍個ｄ的點皆可爲佛瑞

奈環紋的圓心（圖８）。

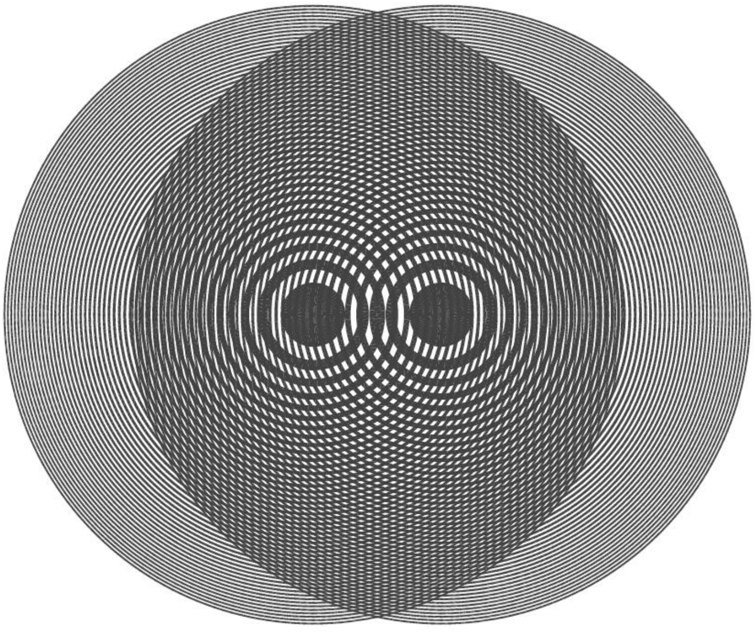


圖８：兩等大小佛瑞奈環紋重疊之圖形

(五) 兩不等大小佛瑞奈環紋重疊形成之圖形與方程式：

以兩圓心 O_1O_2 中點Ｏ爲圓心，$\overrightarrow{OO_2}$ 爲極軸建立極座標系，設以 $O_1(\frac{d}{2}, 0)$

爲圓心的同心圓系半徑 $r_{1\,m} = \sqrt{\mathrm{m}}\lambda_1$，極方程式，

$O_{1\,\mathrm{m}}: m\lambda_1^2 = r^2 + \frac{d^2}{4} - 2r(\frac{d}{2})\cos\theta$，以 $O_2(\frac{d}{2},\pi)$ 爲圓心的同心圓系半徑 $r_{2\,\mathrm{n}} = \sqrt{\mathrm{n}}\lambda_2$，極方程式 $O_{2\,n}: n\lambda_2^2 = r^2 + \frac{d^2}{4} - 2r(\frac{d}{2})\cos(\pi-\theta)$，$O_{1\,\mathrm{m}}O_{2\,n}$ 交點Ｐ極座標爲 (r,θ)（圖９）。

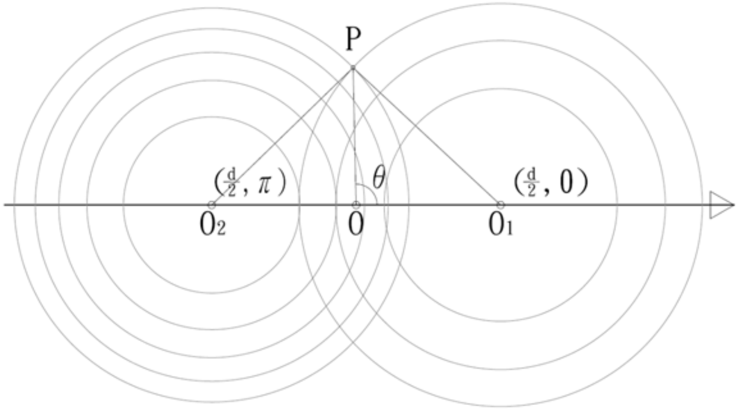


圖９：兩不等大小佛瑞奈環紋重疊極座標假設之示意圖

$$\begin{cases} m\lambda_1^2 = r^2 + \frac{d^2}{4} - 2r(\frac{d}{2})\cos\theta \\ n\lambda_2^2 = r^2 + \frac{d^2}{4} - 2r(\frac{d}{2})\cos(\pi-\theta) \end{cases}$$

整理得 $\begin{cases} m\lambda_1^2 = r^2 + \frac{d^2}{4} - rd\cos\theta \\ n\lambda_2^2 = r^2 + \frac{d^2}{4} + rd\cos\theta \end{cases}$

相加相減得 $\begin{cases} r^2 + \frac{d^2}{4} = \frac{m}{2}\lambda_1^2 + \frac{n}{2}\lambda_2^2 \cdots (1) \\ rd\cos\theta = \frac{m}{2}\lambda_1^2 - \frac{n}{2}\lambda_2^2 \cdots (2) \end{cases}$

可以一般性假設令所成佛瑞奈環紋圓心在 $(\rho,0)$，又令 $k = \frac{\rho}{d}$，

根據餘弦定理 $R^2 = r^2 + \rho^2 - 2r\rho\cdot\cos\theta$

$k = \frac{\rho}{d}$ 代入得　$R^2 = r^2 + k^2d^2 - 2r(kd)\cdot\cos\theta$

把(1)(2)代入得 $R^2 = \frac{m\lambda_1^2 + n\lambda_2^2}{2} + (k^2 - \frac{1}{4})d^2 + k\frac{m\lambda_1^2 - n\lambda_2^2}{2}\lambda^2$

整理得$R^2=\frac{1+2k}{2}\lambda_1^2 m+\frac{1-2k}{2}\lambda_2^2 n+(k^2-\frac{1}{4})d^2$

若λ_1,λ_2爲有理數可令$\frac{p}{s}=\frac{1+2k}{2}\lambda_1^2$，$\frac{q}{s}=\frac{1-2k}{2}\lambda_2^2$，其中$p,q,s\in Z$，

$(p,q)=1$，則$R^2=\frac{pm+qn}{s}+(k^2-\frac{1}{4})d^2$，又可令$pm+qn=t$

所以交點 P 形成集合爲以$(\rho,0)$爲圓心，半徑$R=\sqrt{\frac{t}{s}+(k^2-\frac{1}{4})d^2}$的同

心圓系，又$R_{k+1}^2-R_k^2=[\frac{t+1}{s}+(k^2-\frac{1}{4})d^2]-[\frac{t}{s}+(k^2-\frac{1}{4})d^2]=\frac{1}{s}$爲定值，

所以所形成的圖形爲佛瑞奈環紋。

由上述可知：在極軸上且與原點距離有理數倍個ｄ的點皆可爲佛瑞奈環紋的圓心（圖１０）。

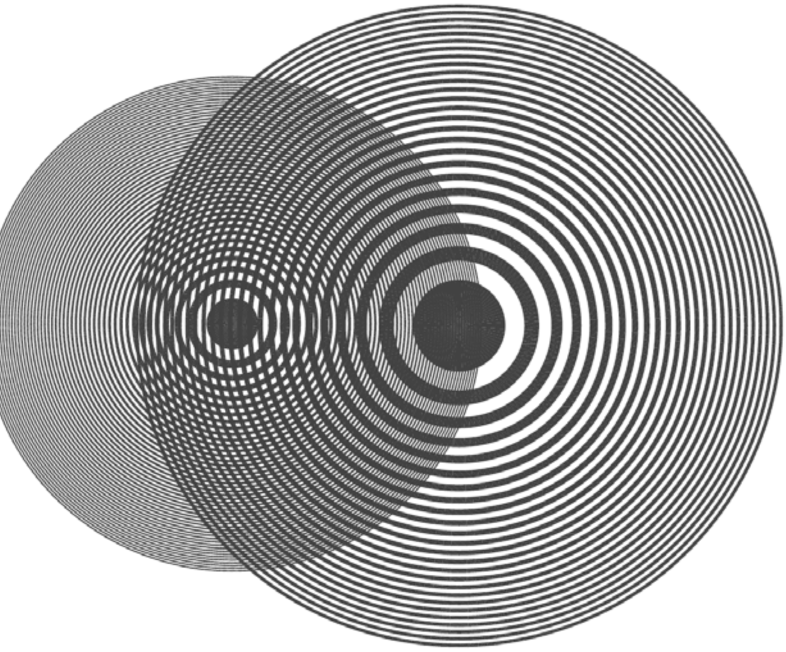


圖１０：兩不等大小佛瑞奈環紋重疊之圖

(六)佛瑞奈環紋與同心圓系重疊形成之圖形與方程式：

1. 以同心圓圓心 O 爲極點建立極座標系，設佛瑞奈環紋圓心 S 極座標爲 (d,0)，其中 O 同心圓系極座標爲$O_m: r=m\cdot\lambda_1$，S 同心圓系極座標爲 $S_n: r^2+d^2-2rd\cdot\cos\theta=n\lambda_2^2$（圖１１）。

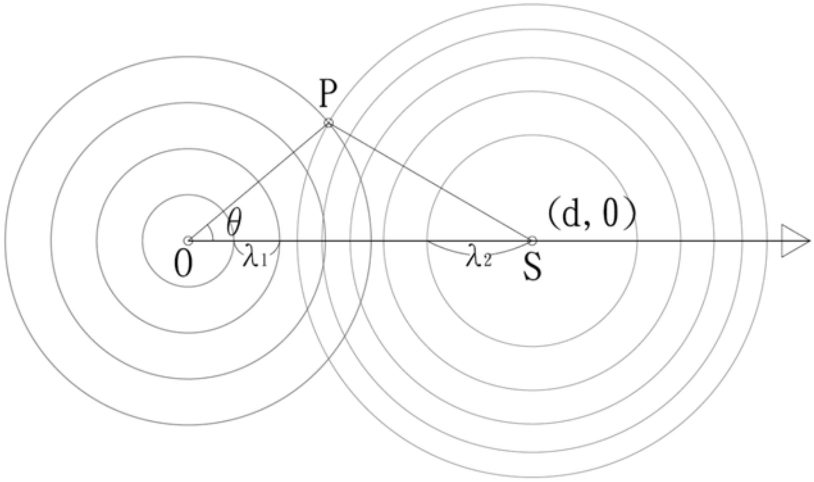


圖１１：佛瑞奈環紋與同心圓系重疊極座標假設之示意圖

$$\begin{cases} O_m : r = m \cdot \lambda_1 \cdots (1) \\ S_n : r^2 + d^2 - 2rd \cdot \cos\theta = n\lambda_2^2 \cdots (2) \end{cases}$$

整理得 $r = 2d\cos\theta + \dfrac{n\lambda_2^2 - d^2}{r} \cdots (3)$

將(1)代入(3)得 $r = 2d\cos\theta + \dfrac{n\lambda_2^2 - d^2}{m\lambda_1}$

令 $k = \dfrac{n\lambda_2^2 - d^2}{m\lambda_1}$，則可得 $r = 2d\cos\theta + k$ 爲蚶線極方程式。

當 $k > 2d$ 時，可表爲不通過極點（即同心圓圓心）的蚶線（圖１２）；
當 $k = 2d$ 時，可表爲通過極點之心臟線（圖１２）；
當 $k < 2d$ 時，可表爲通過極點及基圓內部的蚶線（圖１２）。

2. $\begin{cases} r = m \cdot \lambda_1 \cdots (1) \\ r^2 + d^2 - 2rd\cos\theta = 2n\lambda_2^2 \cdots (2) \end{cases}$

令 $m - n = t$ 代入(2)整理得

$$r^2 + d^2 - 2rd\cos\theta = 2(m-t)\lambda_2^2 \cdots (3)$$

將(1)代入(3)得 $r^2 + d^2 - 2rd\cos\theta = 2\dfrac{\lambda_2^2}{\lambda_1}r - 2\lambda_2^2 t$

$$r^2 - 2\left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1} + d\cos\theta\right)r + \left(d^2 + 2\lambda_2^2 t\right) = 0$$

此極方程式即代表在圓心 S 兩側，所成圖形各點分別如平行直線系與佛瑞奈環紋重疊所行成之佛瑞奈環紋，且如同研究過程(七)之結論形成無數個並排（圖１３）。

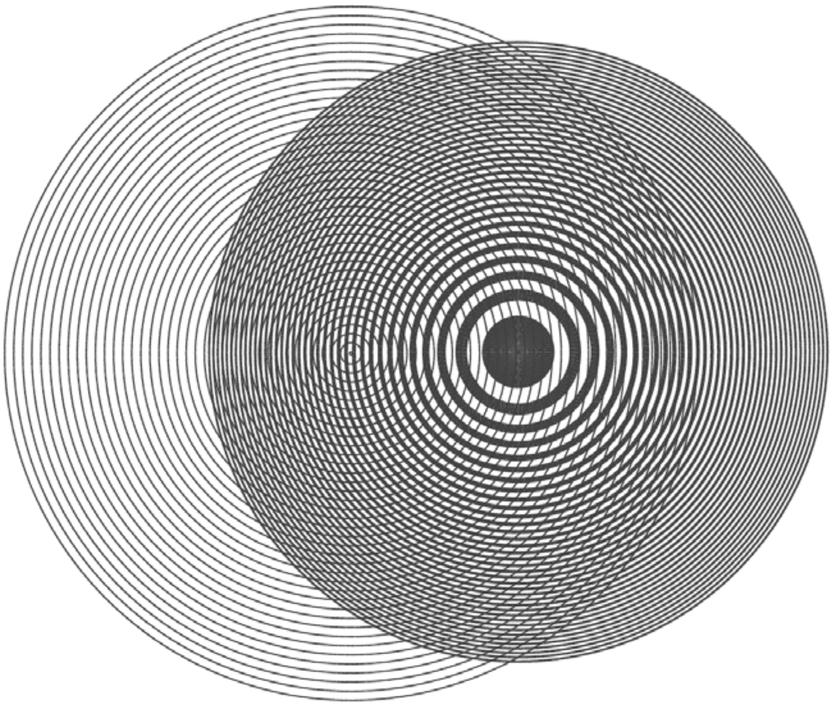


圖１２：佛瑞奈環紋與同心圓系重疊之圖形

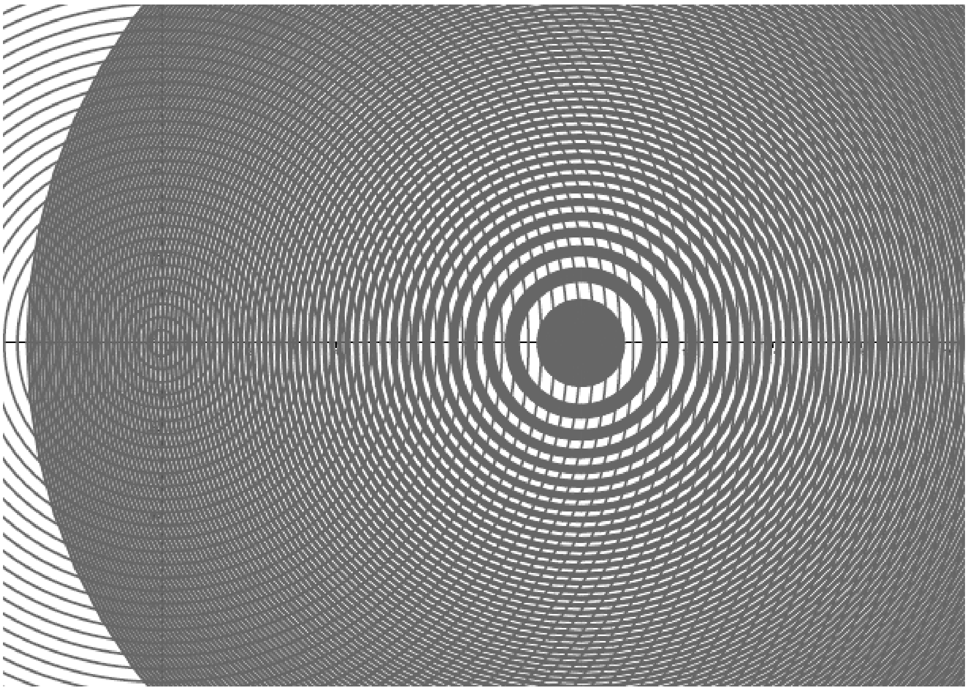


圖１３：佛瑞奈環紋與同心圓系重疊之圖形（局部圖）

(七) 文獻探討與研究：

1. 兩等間隔同心圓系重疊形成之圖形與方程式：

（1） 以一同心圓圓心 O 爲極點建立極座標系，設另一同心圓圓心 S 極座標爲 (d,0)，其中 O 同心圓系極座標爲 $O_m : r = m \cdot \lambda$ ，S 同心圓系極座標爲 $S_n : r^2 + d^2 - 2rd \cdot \cos\theta = (n\lambda)^2$ ，設交點爲 P（圖１４）。

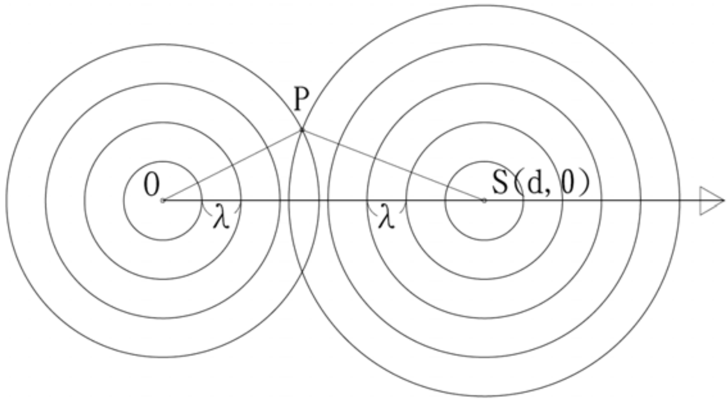


圖１４：兩等間隔同心圓系重疊極座標假設之示意圖

$$\begin{cases} r = m\lambda \cdots (1) \\ r^2 + d^2 - 2rd\cdot\cos\theta = (n\lambda)^2 \cdots (2) \end{cases}$$

將(1)帶入(2)　$d^2 - 2rd\cdot\cos\theta = (n\lambda)^2 - (m\lambda)^2 \cdots (3)$

整理(3)　$d^2 - 2rd\cdot\cos\theta = (n-m)^2\lambda^2 + 2(m\lambda)(n-m)\lambda$

再將(1)帶回整理 $r[2d\cdot\cos\theta + 2(n-m)\lambda] = d^2 - (n-m)^2\lambda^2$

$$r = \frac{d^2 - (n-m)^2\lambda^2}{2(n-m)\lambda + 2d\cdot\cos\theta}$$

同除以 $2(n-m)\lambda$ 得 $r = \dfrac{\dfrac{d^2 - (n-m)^2\lambda^2}{2(n-m)\lambda}}{1 + \dfrac{d}{(n-m)\lambda}\cdot\cos\theta}$

把分子提出 $\dfrac{d}{(n-m)\lambda}$ 得 $r = \dfrac{\dfrac{d}{(n-m)\lambda}\cdot\dfrac{d^2 - (n-m)^2\lambda^2}{2d}}{1 + \dfrac{d}{(n-m)\lambda}\cdot\cos\theta}$

可令 $e_1 = \dfrac{d}{(n-m)\lambda}$ ，$\rho_1 = \dfrac{d^2 - (n-m)^2\lambda^2}{2\mathrm{d}}$ 則得 $r = \dfrac{e_1\rho_1}{1 + e_1\cdot\cos\theta}$

為圓錐曲線的極座標方程式，其中 e_1 為離心率，ρ_1 為焦點到

準線的距離，又 $|m\lambda - n\lambda| < d$（$\Delta SOP$ 中兩邊之差必小於第三邊），

所以 $|e_1| > 1$，即為雙曲線之極座標方程式（圖１５）。

（２)亦可以對(3)用不同的方式整理：

$$d^2 - 2rd\cos\theta = (n+m)^2\lambda^2 - 2(m\lambda)(n+m)\lambda$$

再將(1)帶回整理　$r[2(n+m)\lambda-2d\cdot\cos\theta]=(n+m)^2\lambda^2-d^2$

$$r=\frac{(n+m)^2\lambda^2-d^2}{2(n+m)\lambda-2d\cdot\cos\theta}$$

同除以$2(n+m)\lambda$得$r=\dfrac{\dfrac{(n+m)^2\lambda^2-d^2}{2(n+m)\lambda}}{1-\dfrac{d}{(n+m)\lambda}\cdot\cos\theta}$

對分子提出$\dfrac{d}{(n+m)\lambda}$得$r=\dfrac{\dfrac{d}{(n+m)\lambda}\cdot\dfrac{(n+m)^2\lambda^2-d^2}{2d}}{1-\dfrac{d}{(n+m)\lambda}\cdot\cos\theta}$

可令$e_2=\dfrac{d}{(n+m)\lambda}$ ，$\rho_2=\dfrac{(n+m)^2\lambda^2-d^2}{2d}$

則$r=\dfrac{e_2\rho_2}{1-e_2\cdot\cos\theta}$爲圓錐曲線的極座標方程式，其中$e_2$爲離心率$\rho_2$爲焦點到準線的距離，又$m\lambda+n\lambda>d$ （ΔSOP中兩邊之合必大於第三邊)，所以$0<e_2<1$，即爲橢圓之極座標方程式（圖１５）。

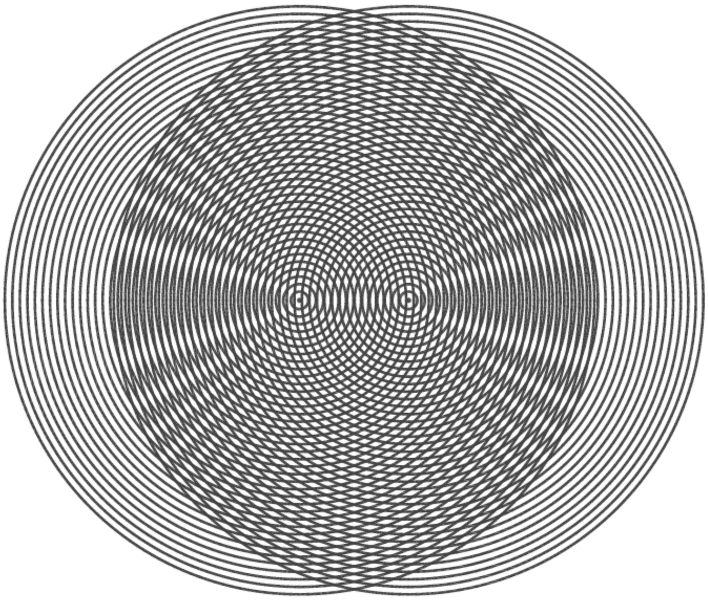


圖１５：兩等間隔同心圓系重疊之圖形

2. 同心圓系與平行直線重疊形成之圖形與方程式：

以同心圓的圓心 O 爲極點建立極座標系，其中同心圓系極方程式爲$r=m\cdot\lambda_1\left(m\in N\right)$；平行直線系以$r\cdot\cos\theta=d-n\lambda_2$表示$L_n\left(n\in N\right)$之極方程式(即同心圓系之圓形波列之波長爲$\lambda_1$，直線波列之波長爲$\lambda_2$)，設交點極座標爲$P(r,\theta)$(圖１６)。

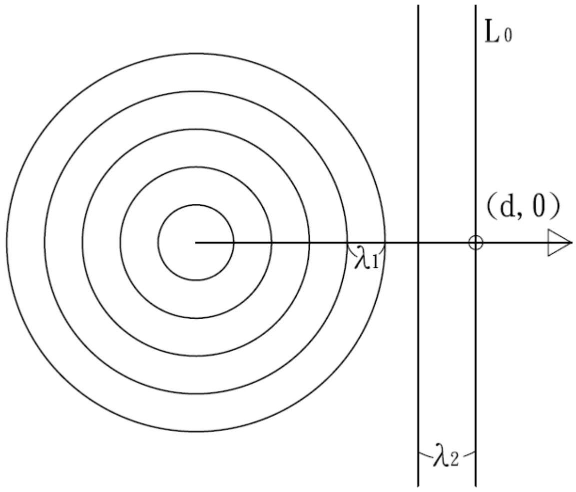


圖１６：同心圓系與平行直線重疊極座標假設之示意圖

$$\begin{cases} r = m \cdot \lambda_1 \cdots (1) \\ r \cdot \cos\theta = d - n \cdot \lambda_2 \cdots (2) \end{cases}$$

令 $t = pn - qm$ ， $p, q \in Z$ ，又 $r = m \cdot \lambda_1$ 則 $n = \frac{t}{p} + \frac{qr}{p\lambda_1} \cdots (3)$

(3)代入(2)得 $r \cdot \cos\theta = d - (\frac{t}{p} + \frac{qr}{p\lambda_1})\lambda_2 \cdots (4)$

整理得 $r \cdot \frac{q\lambda_2}{p\lambda_1}\left(1 + \frac{p\lambda_1}{q\lambda_2}\cos\theta\right) = d - \frac{t\lambda_2}{p}$

得極方程式 $r = \dfrac{\frac{p\lambda_1}{q\lambda_2}\left(d - \frac{t\lambda_2}{p}\right)}{1 + \frac{p\lambda_1}{q\lambda_2}\cos\theta}$

可令 $e = \frac{p\lambda_1}{q\lambda_2}$ ， $\rho = d - \frac{t\lambda_2}{p}$

則 $r = \dfrac{e\rho}{1 + e \cdot \cos\theta}$ 爲圓錐曲線的極座標方程式，其中離心率爲

$e = \frac{p\lambda_1}{q\lambda_2}$ ，又 λ_1 ， λ_2 爲定值，

當 λ_1 ， λ_2 成倍數關係時，則 $e = 1$ 時 p ， q 比例較簡單，形成的圖形較明顯，所以形成Ｐ的集合爲拋物線系（圖１７）；

當 $\lambda_2 > \lambda_1$ 時 $0 < e < 1$ ，所成Ｐ的集合爲橢圓系（圖１８）；

當 $\lambda_2 < \lambda_1$ 時 $e > 1$ ，所成Ｐ的集合爲雙曲線系（圖１９）。

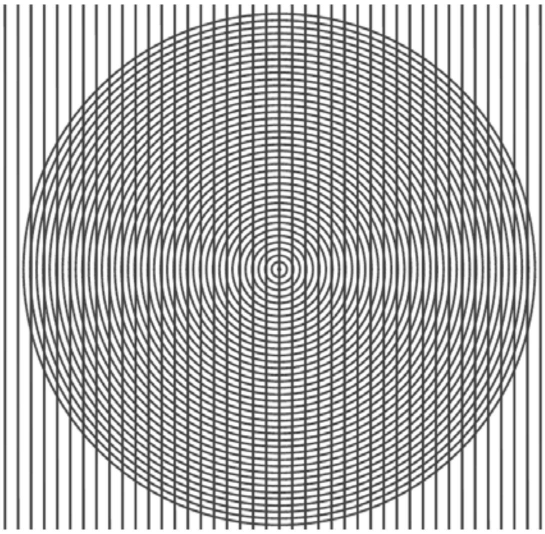


圖１７：同心圓系與平行直線重疊之圖形—拋物線系

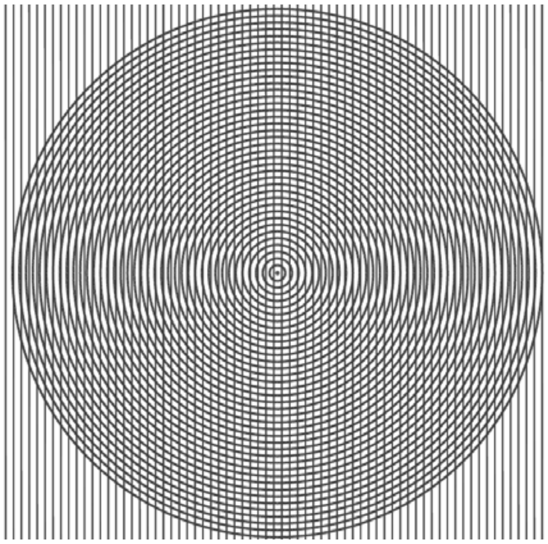


圖１８：同心圓系與平行直線重疊之圖形—橢圓系

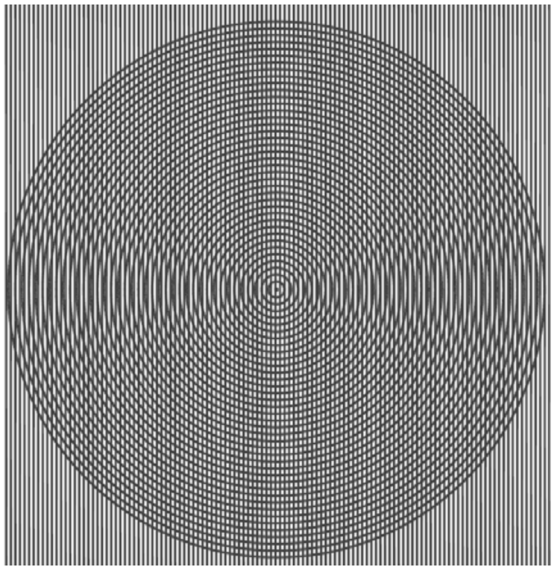


圖１９：同心圓系與平行直線重疊之圖形—雙曲線系

3. 佛瑞奈環紋與平行直線重疊形成之圖形與方程式：

以佛瑞奈環紋的圓心 O 爲極點建立極座標系，其中佛瑞奈環紋極方程式爲 $r = \sqrt{m} \cdot \lambda_1 \left(m \in N \right)$；平行直線系以 $r \cdot \cos\theta = d + n\lambda_2$ 表示 $L_n \left(n \in N \right)$ 之極方程式（圖２０）(即佛瑞奈環紋之最內圈半徑爲 λ_1，直線波列之波長爲 λ_2）。

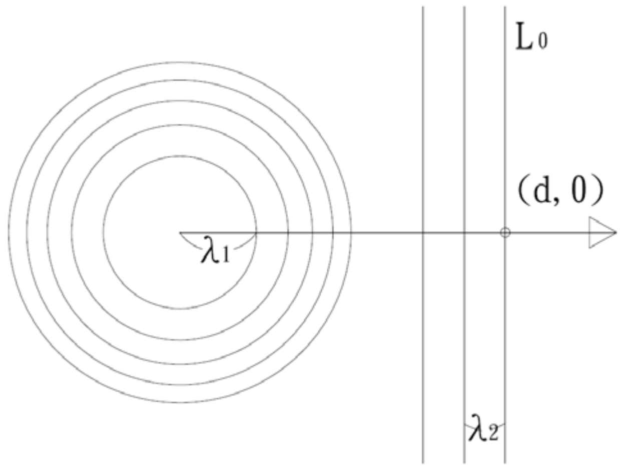


圖２０：佛瑞奈環紋與平行直線重疊極座標假設之示意圖

（1）當 $m=2t$ ，$n=k\pm t\left(t\in N\right)\left(k\in R\right)$ ，即 $2n\pm m$ 為常數時，

交點極座標為 P $\left(r,\theta\right)$。

$$\begin{cases} r=\sqrt{2t}\cdot\lambda_1\cdots(1) \\ r\cdot\cos\theta=d+\left(k\pm t\right)\lambda_2\cdots(2) \end{cases}$$

由(2)推得 $t=\pm\dfrac{r\cdot\cos\theta-d-\lambda_2 k}{\lambda_2}\cdots(3)$

(1)平方得 $r^2=2t\cdot\lambda_1{}^2\cdots(4)$

(3)代入(4)得 $r^2=\pm\dfrac{r\cdot\cos\theta-d-\lambda_2 k}{\lambda_2}\cdot 2\lambda_1{}^2$

整理得 $r^2\pm 2\cdot\dfrac{\lambda_1{}^2}{\lambda_2}\cdot r\cos\theta=\pm\dfrac{2\lambda_1{}^2\left(-d-\lambda_2 k\right)}{\lambda_2}$ 並補上 $\left(\pm\dfrac{\lambda_1{}^2}{\lambda_2}\right)^2$

得 $r^2+\left(\pm\dfrac{\lambda_1{}^2}{\lambda_2}\right)^2-2\cdot r\cdot\left(\pm\dfrac{\lambda_1{}^2}{\lambda_2}\right)\cos\theta=\dfrac{\lambda_1{}^2\left(\lambda_1{}^2\pm\left(-2\lambda_2 d-2\lambda_2{}^2 k\right)\right)}{\lambda_2{}^2}$

即為以 $\left(\dfrac{\lambda_1{}^2}{\lambda_2},0\right)$ 為圓心，$\sqrt{\dfrac{\lambda_1{}^2\left(\lambda_1{}^2-2\lambda_2 d-2\lambda_2{}^2 k\right)}{\lambda_2{}^2}}$ 為半徑之同心圓

及以 $\left(-\dfrac{\lambda_1{}^2}{\lambda_2},0\right)$ 為圓心，$\sqrt{\dfrac{\lambda_1{}^2\left(\lambda_1{}^2+2\lambda_2 d+2\lambda_2{}^2 k\right)}{\lambda_2{}^2}}$ 為半徑之同心圓

之極座標方程式，且 $r_{n+1}{}^2-r_n{}^2=\dfrac{\lambda_1{}^2}{\lambda_2{}^2}$ 為一定值，

故所得為分別以$\left(\frac{\lambda_1^{2}}{\lambda_2},0\right)$及$\left(-\frac{\lambda_1^{2}}{\lambda_2},0\right)$為圓心之佛瑞奈環紋

（圖２１）。

（２）當$m=2pt$，$n=k\pm t\left(p\in N\right)$，即$2pn\pm m$為常數時，

交點座標Ｐ為(r,θ)，同理可推得在$\left(\pm\frac{p\lambda_1^{2}}{\lambda_2},0\right)$皆會形成以其為

圓心之佛瑞奈環紋（圖２１）。

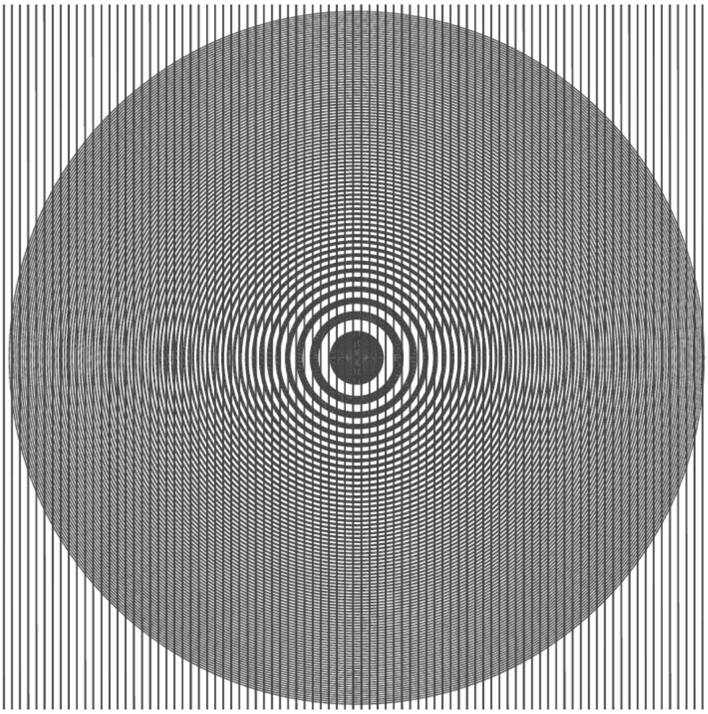


圖２１：佛瑞奈環紋與平行直線重疊之圖形

伍、結論

一、兩等間距的同心圓系相疊時，會以兩圓心為焦點同時形成雙曲線及橢圓。

二、同心圓系與平行直線系相疊，會形成圓錐曲線，即橢圓、拋物線、雙曲線。

三、兩等大小佛瑞奈環紋相疊，會形成平行直線系，也會在極軸上形成一連串的佛瑞奈環紋。

四、兩不等大小佛瑞奈環紋相疊，也會在極軸上形成一連串的佛瑞奈環紋。

五、佛瑞奈環紋與平行直線系相疊，會形成佛瑞奈環紋。

六、佛瑞奈環紋與同心圓系相疊，會形成蛐線及類似佛瑞奈環的圖形。

陸、參考資料及其他

一、黃書健，李志宏：同心圓、平行線重疊成曲線的研究。中華民國第二十九屆中小學科學展覽優勝作品專輯(高中組)p.155~p.158(民國 78 年)。

二、李文堂：同心圓平行線波列干涉的研究。科學教育月刊第 137 期 p.41~p.51(民國 80 年)。

三、陳威任：一些 Moire pattern 的數學性質研究。2003 年國際科學展覽會得獎專輯。(國立台灣科學教育館網站 www.ntsec.gov.tw)

四、江宗翰：兩同心圓系重疊形成取線的研究。中華民國第四十八屆中小學科學展覽。

五、趙文敏。蚶線。http://episte.math.ntu.edu.tw/articles/sm/sm_21_07_1/index.html。

六、萬玕先。微分學自修書 附平面解析幾何學(下)。台北市：徐氏基金會出版。

附錄

一、 圓錐曲線之極座標方程式證明：

以 0 為極點，X 軸正向為極軸建立座標系。圓錐曲線 C 為動點 P 以 O 為焦點，$L: r\cdot\cos\theta=\rho$ 為準線，離心率為 $e=\dfrac{d(P,O)}{d(P,L)}$ 的軌跡。

設 P 極座標 (r,θ)，則 $r=\overline{OP}=d(P,O)$，$d(P,L)=\dfrac{r}{e}$，做 P 在極軸及其延長線上的投影 $P'(\rho-\dfrac{r}{e},0)$，又 $\cos\theta=\dfrac{\rho-\dfrac{r}{e}}{r}$，整理得 $re\cos\theta=e\rho-r$，

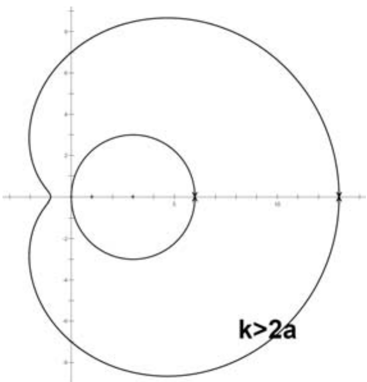
$r(1+e\cos\theta)=e\rho$，$r=\dfrac{e\rho}{1+e\cos\theta}$。又 $r=\dfrac{e\rho}{1+e\cos(\pi-\theta)}$ 與 $r=\dfrac{e\rho}{1+e\cos\theta}$ 對稱於極點，得 $r=\dfrac{e\rho}{1-e\cos\theta}$ 亦為圓錐曲線的極座標。因此圓錐曲線的極座標以 $r=\dfrac{e\rho}{1\pm e\cos\theta}$ 表示。

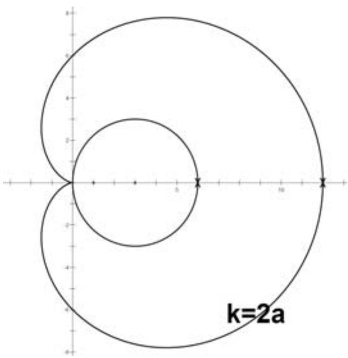
二、蚶線極方程式 $r=2a\cos\theta+k$ 中，k 與 $2a$ 的大小關係會影響其圖形與基圓的位置：

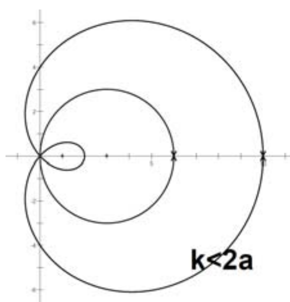
當 $k>2a$ 時，為不通過極點的蚶線。

當 $k=2a$ 時，為通過極點之心臟線。

當 $k<2a$ 時，為通過極點及基圓內部的蚶線。







【評語】040417

本篇論文主要在討論同心圓系、平行直線系、佛瑞奈環紋之間相疊時，視覺上所產生的各種圖形，這些圖形包含雙曲線、橢圓、拋物線、蚶線等，其推導都是以極座標為之。這樣的研究，在以前的人也研究過，主要是同心圓及平行線的相疊，唯佛瑞奈環紋是本文新提出來的。為佛瑞奈環紋與同心圓之相似度甚高，所以新意就比較少。作者的努力仍然相當值得肯定。