中華民國第51屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組　數學科

佳作

040416

在五邊形上跳舞

學校名稱：國立板橋高級中學

作者：	指導老師：
高二 李長遠 高二 簡子翔 高二 郭紹晨	陳明仁

關鍵詞：必勝策略

摘要

由在五邊形上跳舞這個看似公平的遊戲中，找尋其不公平性，與背後的數學意義，並找出其必勝策略，再由原始遊戲推廣至$1\sim n$搶m，找出必勝法則。直覺上，只要想遍整個可能發生的進退，便可走出必勝的一步〔當其存在時〕，即是不公平的所在。就此，我們可將其適當轉換成數學之語言符號，進而以數學歸納法證明，必勝法則之存在性。但根據不同的n，或說是某些特殊的n，該法則可能退化較為簡單〔規律〕之形式。

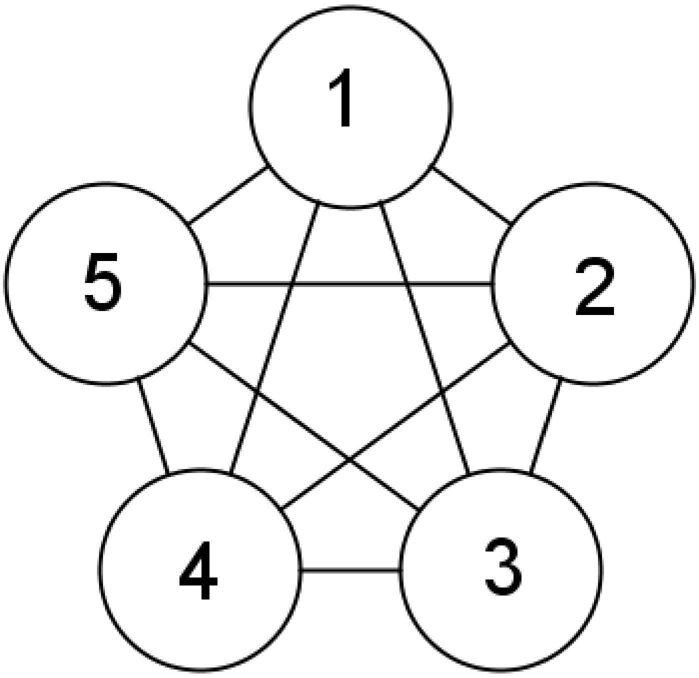
壹、 研究動機與遊戲簡介

一、 研究動機

十分幸運的，我們邀請到了大學教授來演講。在演講的過程中，教授提出了許多數學遊戲，表面看似公平，但知道其背後數學涵義後，即可能歸納出先手勝或後手勝的情形。如此有趣的內容，激起了我們想找出由教授所製遊戲的背後數學涵意(希望也可以找出類似先手必勝或是後手必勝的規則)。

二、 遊戲簡介

(一) 在五邊形中的五個頂點分別填入數字 1~5(如圖 1)。



<圖 1>

(二) 先玩的 A 將金幣放置在五個頂點中的一個。

(三) 後玩的 B 必須將金幣依著邊線或對角線，移動至其餘編號的頂點。

(四) 接著 A 同樣將金幣依著邊線或對角線，移動至其它編號的頂點，即金幣不可以不移動的意思。

(五)依此規則，輪流移動金幣，將移動到的位置數字都加起來。若有一 方 X 移動金幣得到使得數字和為 20，則 X 勝利；若 X 移動金幣得到使得數字和大於 20，則 X 失敗。

貳、 研究目的

一、 找出遊戲勝利的策略。

二、 推廣至正n邊形(各頂點依序填入$1\sim n$)搶m，找出其規律和必勝策略。

參、 研究設備及器材

紙、筆、人腦、C++。

肆、 研究過程與方法

一、 名詞定義

(一) m: 遊戲勝利要達到的數字總合。

(二) n: 遊戲中所能下的最大數字。

(三) P_i ： 進行到第i次操作後，金幣所停留的位置。

(四) S_i ： 進行到第i次操作後，金幣所移動到的位置的數字的總和。(即一方下完後的數字總合)。

(五) C_i ： $m-S_i$。我們定義C_i是為了方便我們由後往前倒推。

(六) 必勝點 ： 當我方達一個S_i值，若對手加上$1\sim n$皆無法獲勝，即為必勝點。

(七) w_i ： S_i從 0 推至m的第i個必勝點，即$w_i < w_{i+1}$，並定義$w_1 = 0$。

(八) 條件勝利點 ： 當到達一個S_i值時，若要勝利，只有一個數x可搶，也就是當$P_i = x$時，必敗，當$P_i \neq x$時，必勝。

(九) i層 ： 將w_i與w_{i+1}之間的數字，也就是集合$\{w_{i+1}, w_{i+1}+1, \ldots w_i\}$，稱為第$i$層。

(十) h_i ： w_i與w_{i+1}之差稱為h_i，後面會說明其值必為$n+1$或$n+2$。

(十一) 卡位 :搶一個數x，使對方不能再搶x，即為卡位。

二、 最初遊戲規則的探討

起初我們從$S_i = 0$開始分析兩方比賽之情形，但其情形頗為複雜，且難以簡單扼要的呈現，因此我們嘗試由後($S_i = m$)往前($S_i = 0$)回推，發現此方法易理解、不用分情況討論，且可用較簡易之表格呈現其結果，亦不失遊戲目的，因此我們採用此「逆推法」，並寫成附件的程式(a)用來操作。

以逆推方法的呈現的話，將和也以倒數之方式呈現，就是要觀察$m-S_i$，即前面所定義的C_i。

(一) 1~5 搶 20 之分析表格:

S_i值	必勝/必敗	說明
20	必勝	20 顯然是第一個必勝點
19	$P_i \neq 1$必敗 $P_i = 1$必勝	當$S_i = 19$且$P_i = 1$時，對手將無法搶 1 得勝，所以 19 是條件勝利點。
18	必敗	對手搶 1 和 2 其中之一即能得勝
17	$P_i \neq 3$必敗 $P_i = 3$必勝	17 是條件勝利點。
16	$P_i \neq 4$必敗 $P_i = 4$必勝	16 是條件勝利點。

15	$P_i \neq 5$必敗 $P_i = 5$必勝	15 是條件勝利點。
14	$P_i \neq 3$必敗 $P_i = 3$必勝	14 是條件勝利點。
13	必勝	對手無論將S_i加上 1~5，皆無法達到卡位使對方搶不到 20，13 是必勝點。
12	必敗	對手搶 1 和 4 其中之一即能得勝
11	必敗	對手搶 2 和 3 其中之一即能得勝
10	必敗	對手搶 3 和 5 其中之一即能得勝
9	$P_i \neq 4$必敗 $P_i = 4$必勝	9 是條件勝利點。
8	$P_i \neq 5$必敗 $P_i = 5$必勝	8 是條件勝利點。
7	必勝	對手無論將S_i加上 1~5，皆無法達到卡位使對方搶不到 13，7 是必勝點。
6	$P_i \neq 1$必敗 $P_i = 1$必勝	6 是條件勝利點。
5	必敗	對方搶 1、2、4 其中之一即能得勝
4	$P_i \neq 3$必敗 $P_i = 3$必勝	4 是條件勝利點。
3	必敗	對方搶 4 和 5 其中之一即能得勝
2	必敗	此時P_i必等於 2，對方搶 5 即能得勝
1	必敗	此時P_i必等於 1，對方搶 3 即能得勝

結論：1~5 搶 20，後手必勝。

(二) 將表格簡化

除表格之外，亦可以(C_i, P_i)的序列來呈現逆推，例$n=5$如下:

$0,(1,1),(3,3),(4,4),(5,5),(6,3),7,(11,4),(12,5),13$

$(14,1),(16,3),(18,5),(19,3),20,(21,1),(24,4),(25,5),26$

$(27,1),(29,3),(31,5),(32,3),35,\ldots$

其中$0,7,13,20,26,35,\ldots$為必勝點，(x,y)為條件勝利點，沒出現的即為必敗點。

其產生原理也許類似以上表格，但是值得一提的，如表中的$18,12,11,10$必是對手持有兩種以上的應法可達必勝點，即在以上序列未出現的$2,8,9,10$。而對手只有一種應法可達必勝點，就會成為條件勝利點。例如：$S_i = 14, C_i = 6$，對手只有將金幣移至$P_{i+1} = 3$之點一途。因此當$P_i = 3$，此時可封住該對策，而成為條件勝利點。

根據此想法我們寫出程式碼(b)。

三、 將原始題目一般化

一般化後，我們採用C_i而不再用S_i，因C_i在$1\sim n$搶m的討論與證明中較易表達且簡潔。

(一) 探討$1\sim n$搶m的前n項的情形:

C_i	情形
0	win
1	1
2	1 2
3	3
4	4
5	5
6	3 6
7	7
8	4 8
9	9
10	5 10
11	11
12	12
⋮	⋮
n	n (n/2)

經由以上表格，我們發現以下性質：

性質一

遊戲一般化成數字$1,2,\ldots,n$搶m，當某方 X 的數字和為$C_i = k(1 \le k \le n)$，如果k為奇數且$P_i \ne k$，則對手 Y 必勝，而僅當$P_i = k$時，X 必勝。

證明:

(1) 顯然$P_i \ne k$時，Y 搶k就能獲勝

而$P_i = k$時，假設 Y 搶l，使$C_{i+1} = k + l$ ， $P_i = l$

這時 X，如果能搶$(k-l)$，即能得勝，又因為$P_i = l$，唯一不能搶到的

數是l，而$(k-l)$與l奇偶性不合，所依 X 必能搶$(k-l)$獲勝，也就是 Y 必敗，性質一證畢。

性質二

遊戲一般化成數字$1,2,\ldots,n$搶m，當某方 X 搶到的數字和為 $C_i=k(1\le k\le n)$，此時如果k為偶數，假設使2^t能整除k的最大數為t，若t為奇數則 Y 必勝；若t為偶數，則僅當$P_i\ne k$，Y 必勝。若$P_i=k$，X 必勝。

證明:

設$k=2^t\times p$(p為奇數)

(1) 當$t=1$時，$C_i=2p$，此時 Y 搶$2p$、p其中之一，能必勝(搶p是因為性質一)，能使$C_{i+1}=m-n+p$($S_{i+1}=n-p$)，$P_{i+1}=p$，使 Y 必勝。

(2) 當$t=2$時，$C_i=2^2p$，此時 Y 搶2^2p才能必勝，因若搶 $2p$會使 X 必勝，搶其他的數l使$C_{i+1}=2^2p+l$ $(l\ne 2p\wedge 2^2p)$，$P_{i+1}=l$，又 $2^2p-l\ne l$，X 能搶2^2p-l獲勝。

(3) 假設對於$t=2a-1$、$t=2a$都成立，也就是$t=2n-1$時，Y 必勝，$t=2a$ 時僅當$P_i\ne k$必勝。

則$t=2a+1$時，$C_i=2^{2a+1}p$，此時 Y 搶$2^{2a+1}p$、$2^{2a}p$其中之一就能必勝，因為由假設$C_{i+1}=2^{2a},P_{i+1}=2^{2a}$會使 Y 必勝。

$t=2a+2$時，$C_i=2^{2a+2}p$此時 Y 搶$2^{2a+2}p$才能必勝

$\therefore t=2a+1$、$t=2a+2$亦成立

綜合以上，由數學歸納法，性質二證畢

從性質一、性質二，我們得出定理一

> 遊戲一般化成數字 1, 2, 3⋯, n 搶 m，這時輪到 X 且數字和為
>
> $C_i = k(1 \le k \le n)$ ，而使 2^t 能整除 k 的最大非負整數為 t ，若 t 為奇數則 X 必
>
> 勝；若 t 為偶數，則僅當 $P_i \ne k$ ，X 必勝。

(二) 探討 $1 \sim n$ 搶 m 的 w_2 的情形討論:

當 n 為奇數時	
C_i	情形
0	win
1	1
2	1 2
3	3
4	4
5	5
6	3 6
7	7
8	4 8
9	9
10	5 10
11	11
12	12
⋮	⋮
$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n+1}{2}$
⋮	⋮
n+1	$\frac{n+1}{2}$
n+2	win(w_2)

當 n 為偶數時	
C_i	情形
0	win
1	1
2	1 2
3	3
4	4
5	5
6	3 6
7	7
8	4 8
9	9
10	5 10
11	11
12	12
⋮	⋮
n+1	win(w_2)

藉由以上探討我們發現有較特別的 n 值 ：

當 $n = 2^{2k}t - 1$ 時，

因為 $C_i = \frac{n+1}{2}$ 可以搶 $\frac{n+1}{2}$ 或 $\frac{n+1}{4}$ ，因此會造成 $C_i = n+1$ 無法搶 $\frac{n+1}{2}$ ，

所以當 $n = 2^{2k}t - 1$ 時， $w_2 = m - n - 1$，其情形較類似於 n 為偶數的情況。

由以上表格及探討可推知:

(1)當 n 為偶數時，h_1 為 $n+1$。

(2)當 n 為 $n=2^{2k}t-1$，h_1 亦為 $n+1$。

(3)當 n 為奇數且 $n\neq 2^{2k}t-1$ 時，h_1 為 $n+2$。

(三) 探討 $1\sim n$ 搶 m 的 h_i 的情形:

由(二)之表格可得知:

當 $i=1$ 時:

若 h_1 為 $n+2$，則 $\frac{n+1}{2}$ 必存在，也就是 n 必須為奇數時，且

$C_i=\frac{n+1}{2}$ 要為條件勝利點，如此一來，當 $C_i=n+1$ 時，就可搶 $\frac{n+1}{2}$ 卡位

，而下個必勝點的位子會在 $S_i=m-n-2$。

而當 $i\geq 2$ 時:

h_i 要為 $n+2$ 的必要條件為 $\frac{n+1}{2}$ 必存在，且 $C_i=m-w_i+\frac{n+1}{2}$ ($S_i=w_i-\frac{n+1}{2}$)

要為條件勝利點。

因此推得，當 $n=2k\vee 2^{2k}t-1$ 時，其所有 h_i 皆為 $n+1$。

經由以上結果推得定理二

定理二
當 $C_i=w_r=(n+1)(r-1)$ 當 $n=2k\vee 2^{2k}t-1$ (t為奇數$,r\in N$) 時 C_i 為必勝點

說明：將命題分成兩種情形:

(1) $n=2k$ 則 $w_r=(n+1)(r-1)$

(2) $n=2^{2k}t-1$ 則 $w_r=(n+1)(r-1)$

情形：

(1) n 為偶數，只要證明即 $w_r-w_{r+1}=n+1$

現在以數學歸納證明如下：

① $r=1$ 時，因為 $C_i=1,2,\ldots,n$ 皆不是必勝點，

考慮 $C_i=n+1$，若此時搶 u 使 $C_{i+1}=u$，$P_{i+1}=u$ 即有可能敗，

但 $n+1-u=u\Leftrightarrow 2u=n+1\Leftrightarrow n$ 是奇數，矛盾。

故 u 不存在，表示對手無法找到必勝的方法。

$\therefore n+1$ 為第二個必勝點 w_2。

$C_i=w_2=n+1$ 即 $w_1-w_2=n+1$ 成立

② 假設 $r=l$ 成立，則 $r=l+1$ 時 $C_i=w_{l+1}+1,w_{l+1}+2,\ldots,w_{l+1}+n$ 皆不是必勝點

(不是必敗點就是條件必勝點)。

再考慮$C_i=n+1$，若這時搶v，使$C_{i+1}=w_l+v, P_{i+1}=v$，即有可能敗
但$w_{l+1}+n+1-v=w_{l+1}+v \Leftrightarrow 2v=n+1 \Leftrightarrow n$是奇數，矛盾
故v不存在，$C_i=w_{l+2}=w_{l+1}+(n+1)$ 即 $w_{l+1}-w_{l+2}=n+1$成立
由數學歸納法，(1)證畢。

(2) $n=2^{2k}t-1$則$w_r=(n+1)(r-1),(t$為奇數$,r\in N)$

只要證明$w_r-w_{r+1}=n+1$，對r進行數學歸納。

① $r=1$時$C_i=1,2,\ldots,n$皆不是必勝點。

考慮$C_i=n+1$，這時若搶異於$\dfrac{n+1}{2}$的數，假設是u對方只要搶

$n+1-u$必敗。若搶$\dfrac{n+1}{2}$則$C_i=\dfrac{n+1}{2}=2^{2k-1}$，由定理一知其必敗。得

$w_2=(n+1)$，$w_1-w_2=n+1$成立。

② 假設$r\le l$時都成立，則$C_i=w_r+k, P_i=k(1\le k\le n,$且$k$為奇數$)$時會必敗(也就是說$C_i=w_r+k(k$為奇數$)$為條件必勝點)，因為

(i) $r=1$由定理一知其成立。

(ii) 假設$r=q(q\le l-1)$時成立，假設$r=q+1$時不成立，也就是存在一個數，不妨設為u，會使$C_i=w_{q+1}+k$搶u之後使獲勝，此時

$C_{i+1}=w_{q+1}+k-u=w_q+(n+1)+k-u$。要讓$C_{i+1}=w_{q+1}+k-u$時獲勝則要有：當$u\le k$時$P_i=k-u$；當$u\ge k$時$P_i=(n+1)+(k-u)$。但是$P_i=u$，由奇偶性知$u\ne k-u, u\ne(n+1)+(k-u)$故$u$不存在，矛盾。所以$r=q+1$時也成立，由數學歸納法，若$r\le l$時都成立則$C_i=w_r+k, P_i=k(1\le k\le n,$且$k$為奇數$)$時會必敗。

在$r=l+1$時，考慮$C_i=w_l+(n+1)=w_l+2^{2k}t$若是必勝點，則搶到

$C_i=w_l+2^{2k-1}t$必敗。

只要證明以下更一般的性質：搶到$C_i=w_l+2^{2s-1}t$時必敗，$C_i=w_l+2^{2s}t$

且$P_i=2^{2s}t$必勝$(s\le k)$。

欲勝利有兩種操作方式：

(i) $C_i=w_l+k$時搶到v得$C_{i+1}=w_l+k-v$而$P_i=v=k-v$即搶 $v=\dfrac{k}{2}$使

$C_{i+1}=w_l+\dfrac{k}{2}$。

(ii) $C_i=w_l+k$時搶到v得$C_{i+1}=w_{l-1}+(n+1)+k-v$而

$P_i = v = n+k+1-v$ 即搶 $v=\dfrac{n+k+1}{2}$ 使 $C_{i+1}=w_{l-1}+\dfrac{n+k+1}{2}$ 。

於是可構造兩函數 $f(x)=\dfrac{x}{2}, g(x)=\dfrac{n+x+1}{2}=\dfrac{2^{2k}+x}{2}$ 。

當 $C_i = w_l + x$ 輪到的人都會搶 $f(x)$ 或 $g(x)$ ，
直到 $f(x)$ 或 $g(x)$ 的值變成奇數，
而進行操作使 $f(x)$ 或 $g(x)$ 的值變成奇數的次數是由最初的
$w_l - S_i$ 所決定的。

$C_i = w_l + 2^{2s-1}t$ 時 x 代入 $2^{2s-1}t$ 最多能夠進行 $2s-1$ 次操作使 $f(x)$ 或 $g(x)$ 的值變成奇數。

$C_i = w_l + 2^{2s}t$ 時 x 代入 $2^{2s}t$ 最多能夠進行 $2s$ 次操作使 $f(x)$ 或 $g(x)$ 的值變成奇數。

由前面假設討論得出當 $C_i = w_r + k, P_i = k(1 \le k \le n,$ 且 k 為奇數$)$ 時必敗，
即得搶到 $C_i = w_l + 2^{2s-1}t$ 時必敗， $C_i = w_l + 2^{2s}t$ 且 $P_i = 2^{2s}t$ 必勝。

$(s \le k)$ 所以 $r = l+1$ 成立。由數學歸納法，證畢。

(四) 進一步對於 r 值做推論:

$$(n+1)(r-1) \le m \qquad\qquad (n+1)(r-1) \ge m -$$

$$\Rightarrow r \le \frac{m}{n+1}+1 \qquad\qquad \Rightarrow r \ge \frac{m+1}{n+1}$$

$$\because r \in \square \qquad\qquad \because r \in \square$$

$$\Rightarrow r \le \left[\frac{m+n+1}{n+1}\right] \qquad\qquad \Rightarrow r \ge \left[\frac{m+1}{n+1}\right]$$

$$又 \left[\frac{m+n+1}{n+1}\right] \ge \left[\frac{m+1}{n+1}\right]$$

$$推得 0 \le m-(n+1)(\left[\frac{m+n+1}{n+1}\right]-1) \le n$$

因此 $C_i = w_r = (n+1)(r-1)$ 當 $n = 2k \vee 2^{2k}t-1$ $(t$ 為奇數$)$ 時的必勝策略如下:

當 $m-(n+1)(\left[\dfrac{m+n+1}{n+1}\right]-1)=0$ 時，後手必勝。

當 $m-(n+1)(\left[\dfrac{m+n+1}{n+1}\right]-1)\ne 0$ 時，先手搶 $m-(n+1)(\left[\dfrac{m+n+1}{n+1}\right]-1)$ 必勝。

(五) 當 n 為奇數之討論:

(1) 第 i 層層距要為 $n+2$ 的必要條件為 $\frac{n+1}{2}$ 必存在，且 $C_i = w_i + \frac{n+1}{2}$ 要為條件勝利點。而要判斷 $C_i = w_i + \frac{n+1}{2}$ 是否為條件勝利點，須推至 $i-1$ 層。

方法如下:

$h_{i-1}=n+1$			$h_{i-1}=n+2$		
S_i	P_i	所搶的數	S_i	P_i	所搶的數
w_{i-1}	win	*	w_{i-1}	win	*
$w_{i-1}-1$	1	*	$w_{i-1}-1$	1	*
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
w_i+3	$n-2$	$\frac{n+1}{2}+3$	w_i+3	$n-1$	$\frac{n+1}{2}+3$
w_i+2	$n-1$	$\frac{n+1}{2}+2$	w_i+2	n	$\frac{n+1}{2}+2$
w_i+1	n	$\frac{n+1}{2}+1$	w_i+1	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n+1}{2}+1$
w_i	win	$\frac{n+1}{2}$	w_i	win	$\frac{n+1}{2}$
w_i-1	1	$\frac{n+1}{2}-1$	w_i-1	1	$\frac{n+1}{2}-1$
w_i-2	1 2	$\frac{n+1}{2}-2$	w_i-2	1 2	$\frac{n+1}{2}-2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$w_i-\frac{n+1}{2}+1$	$\frac{n+1}{2}-1$	1	$w_i-\frac{n+1}{2}+1$	$\frac{n+1}{2}-1$	1
$w_i-\frac{n+1}{2}$	$\frac{n+1}{2}$		$w_i-\frac{n+1}{2}$	$\frac{n+1}{2}$	

(說明:所搶的數為 $w_i-\frac{n+1}{2}$ 到達 S_i 所要搶的數，*為無法一次到達)

藉由此表格可得知:

當 h_{i-1} 為 $n+1$ 時，在 w_i+1 之後 P_i+(所搶的數) 皆為 $\frac{n+1}{2}+n+1$， 當 h_{i-1} 為 $n+2$ 時，在 w_i+2 之後 P_i+(所搶的數) 皆為 $\frac{n+1}{2}+n+2$ ，將 P_i+(所搶的數) 除以 2，就是 P_i 和所搶的數一樣，而這個 S_i 若是條件勝利點就能卡位，進而造成 h_i 為 $n+1$，反之， h_i 為 $n+2$ 。

以上推論得知判斷 h_i 的依據為:

$S_i = w_i - \frac{n+1}{2} + \frac{\frac{n+1}{2}+h_i}{2}$是否存在，且是否為條件必勝點。

(2) 資料分析

藉由程式所跑出的結果(附錄)，我們將為 n 為奇數的情況依 h_i 遞迴狀況分類:

分類	A	B	C	D
1	$n+2$	$n+1$	$n+2$	$n+2$
2	$n+1$	$n+1$	$n+1$	$n+2$
3	$n+2$	$n+1$	$n+1$	$n+1$
4	$n+1$	$n+1$	$n+2$	$n+2$
5	$n+2$	$n+1$	$n+1$	$n+2$
6	$n+1$	$n+1$	$n+1$	$n+1$
7	$n+2$	$n+1$	$n+2$	$n+2$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

以上四種狀況為方便快速辨別，我們將其改為:

A : (21)

B : (1)

C : (211)

D : (221)

而這四種狀況是出現最多且規律較簡單，我們稱之為基本狀況，然而也有不屬於以上四種狀況的 n 值，例:

23 : (221222211)

33 : (2221221)

41 : (222121)

55 : 221(211)

65 : (2221)

⋮

(3) 必勝下法的策略:

接下來我們應當談幾個類似定理 2 的結果。

為了方便研究，我們談談『高手模式』下的對戰策略。即當對手都是高手，都知道必勝點位置，而決定應下哪一手。

以下只討論 n 為奇數的情形：

1. 當 w_k 為必勝點且可行之時，必搶取必勝點。
2. 當無可行必勝點時，將以「卡位」或是某一特定手，達到對手下一手無法抵達必勝點。

由此，我們可以分析如下， $w_k < w_{k+1}$ 為二相近必勝點。

當對手下在$(w_{k+1}+l,l)$，

①當l為偶數時，「卡位」卡w_{k+1}，即下$(w_{k+1}+\frac{l}{2},\frac{l}{2})$。

②當l為偶數且$w_{k+1}-w_k$為偶數時，可走①或卡w_k，即下

$(w_k+\frac{1}{2}+\frac{w_{k+1}-w_k}{2},\frac{1}{2}+\frac{w_{k+1}-w_k}{2})$。

③當l為奇數且$w_{k+1}-w_k$為奇數時「卡位」卡w_k，即下

$(w_k+\frac{1}{2}+\frac{w_{k+1}-w_k}{2},\frac{1}{2}+\frac{w_{k+1}-w_k}{2})$。

④當$w_{k+1}-w_k=n+2$時，下$w_k+(n+1)$。

除這三手外的其他應手，對手必可搶得必勝點w_k或w_{k+1}。

當$k=-1$之時，僅①為可行的。

對於③，我們可以分析，當$w_{k+1}-w_k=n+2$，$w_k+(n+1)$必為條件勝點，且其條件位置是$\frac{n+1}{2}$；當$l+1\neq\frac{n+1}{2}$時，$(w_k+(n+1),l+1)$為一敗點。

接下來便可應用此來證明一些結果，

先來個假設：若l為奇數和$w_{k+1}-w_k$為偶數且，$(m-s,p)_A=(w_{k-1}+l,l)$，則 B 無法下出 1 或 2，因此下次$(m-s)_A=w_{k+1}$或w_k。

以下我們嘗試推出四種基本狀況n的一般式:

以下設$p=n+1$

A(21) :

①若$p\equiv 6 \pmod 8$則

$w_1=0,w_2=p+1,w_3=2p+1,\dots,w_{2k-1}=2kp+k,w_{2k}=(2k+1)p+k+1$

證明：

當$p=w_2=7$時，甲必勝；$p=w_3=13$時，甲也必勝。

令$p=w_{2k-1}$時，甲必勝；$p=w_{2k}$時，甲必勝。

則當$p=w_{2k+1}$時，

$$甲(w_{2k+1})\rightarrow 乙(w_{2k}+\frac{p}{2},\overset{odd}{\frac{p}{2}})\rightarrow 甲(w_{2k\text{-}1}+\frac{3}{4}p+\frac{1}{2},\overbrace{\frac{3}{4}p+\frac{1}{2}}^{odd})$$

$$\rightarrow 乙\ *\ \rightarrow 甲\ w_{2k-1}或w_{2k\text{-}2}$$

甲必勝。

當$p=w_{2k+2}$時，

$$甲(w_{2k+2})\rightarrow 乙(w_{2k+1}+p,1)\rightarrow 甲(w_{2k}+\frac{p}{2},\overset{odd}{\frac{p}{2}})$$

□ 乙 * $\rightarrow$ 甲 w_{2k}或w_{2k+1}

甲必勝。

以上*表示不同於上一列的下法

由數學歸納法，得證。

②若 $p \equiv 26 \pmod{32}$ 則
$w_1=0, w_2=p+1, w_3=2p+1, \ldots, w_{2k-1}=2kp+k, w_{2k}=(2k+1)p+k+1$

證明：

當 $p=w_2=27$ 時，甲必勝； $p=w_3=53$ 時，甲也必勝。

令 $p=w_{2k-1}$ 時，甲必勝； $p=w_{2k}$ 時，甲必勝。

則當 $p=w_{2k+1}$ 時，

$$甲(w_{2k+1}) \to 乙(w_{2k}+\frac{p}{2},\overset{odd}{\frac{p}{2}}) \to 甲(w_{2k\text{-}1}+\frac{3}{4}p+\frac{1}{2},\overbrace{\frac{3}{4}p+\frac{1}{2}}^{even}) \to$$

$$□ \quad 乙(w_{2k\text{-}2}+\frac{3}{8}p+\frac{1}{4},\overbrace{\frac{3}{8}p+\frac{1}{4}}^{even}) \to 甲(w_{2k\text{-}1}+\frac{3}{16}p+\frac{1}{8},\overbrace{\frac{3}{16}p+\frac{1}{8}}^{odd})$$

$$□ \quad 乙(w_{2k\text{-}2}+\frac{7}{8}p+\frac{1}{4},\overbrace{\frac{7}{8}p+\frac{1}{4}}^{even}) \to 甲(w_{2k-1}+\frac{15}{16}p+\frac{5}{8},\overbrace{\frac{15}{16}p+\frac{5}{8}}^{odd})$$

甲必勝。

$$甲(w_{2k+2}) \to 乙(w_{2k+1}+p,1) \to 甲(w_{2k+1}+\frac{p}{2},\frac{p}{2}) \to 乙* \to 甲(w_{2k+1})\, or\, 甲(w_{2k})$$

甲必勝。

③

若 $p \equiv 2\left(\frac{5}{3}\cdot 2^{2x-1}-\frac{1}{3}\right)\left(\bmod 2^{2x+1}\right)$ 則
$w_1=0, w_2=p+1, w_3=2p+1, \ldots$
$w_{2k+1}=2kp+k, w_{2k+2}=(2k+1)p+(k+1)$

證明：

仿照前面，易證 $w_1=0, w_2=p+1, w_3=2p+1$

令 $p=w_{2k-1}$ 時，甲必勝； $p=w_{2k}$ 時，甲必勝。

則當 $p=w_{2k+1}$ 時，

$$甲(w_{2k+1}) \to 乙(w_{2k}+\frac{p}{2},\overset{odd}{\frac{p}{2}}) \to 甲(w_{2k-1}+\frac{3}{4}p+\frac{1}{2},\overbrace{\frac{3}{4}p+\frac{1}{2}}^{even}) \to$$

$$乙(w_{2k-1}+\frac{3}{8}p+4,\overbrace{\frac{3}{8}p+\frac{1}{4}}^{even}) \to 乙* \to 甲(w_{2k-1}+\frac{3}{2^{2x}}+\frac{1}{2^{2x-1}},\overbrace{\frac{3}{2^{2x}}+\frac{1}{2^{2x-1}}}^{odd})$$

$$甲(w_{2k+2})□ \quad 乙(w_{2k+1}+p,1) \to 甲(w_{2k}+\frac{p}{2},\overset{odd}{\frac{p}{2}}) \to 乙* \to 甲(w_{2k})\, or\, 甲(w_{2k-1})$$

$$□ \quad 乙* \to 甲\ w_{2k+1}或w_{2k}$$

甲必勝。

由數學歸納法，得證。

因此，我們求出 A 的通式 $n=2^{2k+1}t-\frac{2^{2k}+2}{3}-1=2^{2k+1}t-\frac{2^{2k}+5}{3}$。

④另外，

當 $32k+7, k\not\equiv 1(\bmod 4)$ 也會有
$w_1=0, w_2=p+1, w_3=2p+1,\ldots$
$w_{2k+1}=2kp+k, w_{2k+2}=(2k+1)p+(k+1)$

證明：

易證 $w_1=0, w_2=p+1, w_3=2p+1$

令 $p=w_{2k-1}$時，甲必勝； $p=w_{2k}$ 時，甲必勝。

當 $p=w_{2k+1}$時，

$$\text{甲}(w_{2k+1})\to\text{乙}(w_{2k}+\frac{p}{2},\overset{even}{\frac{p}{2}})\to\text{甲}(w_{2k+1}+\frac{p}{4},\overset{even}{\frac{p}{4}})\to$$

$$\to\text{乙}(w_{2k}+\frac{p}{8},\overset{odd}{\frac{p}{8}})\to\text{甲}(w_{2k}+\frac{9}{16}p+\frac{1}{2},\overbrace{\frac{9}{16}p+\frac{1}{2}}^{odd})$$

$$\to\text{乙}^*\to\text{甲}(w_{2k})\,or\,\text{甲}(w_{2k-1})$$

當 $p=w_{2k+2}$時，

$$\text{甲}(w_{2k+2})\to\text{乙}(w_{2k+1}+p,1)\to\text{甲}(w_{2k+1}+\frac{p}{2},\overset{even}{\frac{p}{2}})\to$$

□ $$\text{乙}(w_{2k}+\frac{3}{4}p,\overset{even}{\frac{3}{4}p})\to\text{甲}(w_{2k}+\frac{3}{8}p,\overset{odd}{\frac{3}{8}p})\to\text{乙}^*\to\text{甲}(w_{2k})\,or\,\text{甲}(w_{2k-1})$$

□ $$\text{乙}(w_{2k+1}+\frac{p}{4},\overset{even}{\frac{p}{4}})\to\text{甲}(w_{2k+1}+\frac{5}{8}p,\overset{odd}{\frac{5}{8}p})\to\text{乙}^*\to\text{甲}(w_{2k+1})\,or\,\text{甲}(w_{2k})$$

因此得出 $32k+7, k\not\equiv 1(\bmod 4)$，也會是 A 的形式。

B(1) :即(三)定理二，當且僅當 $n=2^{2k}t-1$時為 B。

C (211):

若 $p=40(\bmod 128)$
則 $w_1=0, w_2=p+1, w_3=2p+1, w_4=3p+1,\ldots$
$w_{3k+1}=3kp+k,$
$w_{3k+2}=(3k+1)p+k+1,$
$w_{3k+3}=(3k+2)p+k+1$

證明:

易證 $w_1=41, w_2=81, w_3=121$

令 $p=w_{3k-2}$，甲必勝； $p=w_{3k-1}$時，甲必勝； $p=w_{3k}$ 時，甲必勝。

$$\text{甲}(w_{3k+3}) \to \text{乙}(w_{3k+2}+\frac{p}{2},\overset{even}{\frac{p}{2}}) \to \text{甲}(w_{3k+2}+\frac{p}{4},\overset{even}{\frac{p}{4}}) \to \text{乙}(w_{3k+2}+\frac{p}{8},\overset{odd}{\frac{p}{8}}) \to$$

$$\text{甲}(w_{3k+2}+\frac{9}{16}p+\frac{1}{2},\overbrace{\frac{9}{16}p+\frac{1}{2}}^{odd}) \to \text{乙}* \to \text{甲}(w_{3k})or\text{甲}(w_{3k\text{-}1})$$

$$\text{甲}(w_{3k+2}) \to \text{乙}(w_{3k+1}+p,1) \to \text{甲}(w_{3k+2}+\frac{p}{2},\overset{even}{\frac{p}{2}}) \to$$

$$\square\ \ \text{乙}(w_{3k+2}+\frac{p}{4},\overset{even}{\frac{p}{4}}) \to \text{甲}(w_{3k}+\frac{5}{8}p,\overset{odd}{\frac{5}{8}p}) \to \text{乙}* \to \text{甲}(w_{3k})or\text{甲}(w_{3k\text{-}1})$$

$$\square\ \ \text{乙}(w_{3k}+\frac{3}{4}p,\overset{even}{\frac{3}{4}p}) \to \text{甲}(w_{3k\text{-}1}+\frac{7}{8}p,\overset{odd}{\frac{7}{8}p}) \to \text{乙}* \to \text{甲}(w_{3k\text{-}1})$$

$$\text{甲}(w_{3k+1}) \to \text{乙}(w_{3k}+\frac{p}{2},\overset{even}{\frac{p}{2}}) \to \text{甲}(w_{3k}+\frac{3}{4}p,\overset{even}{\frac{3}{4}p}) \to \text{乙}(w_{3k}+\frac{3}{8}p,\overset{odd}{\frac{3}{8}p}) \to$$

$$\text{甲}(w_{3k\text{-}1}+\frac{11}{16}p+\frac{1}{2},\overbrace{\frac{11}{16}p+\frac{1}{2}}^{odd}) \to \text{乙}* \to \text{甲}(w_{3k\text{-}1})$$

由數學歸納法，得證

$p = 120(\mathrm{mod}128)$

易證 $w_1 = 121, w_2 = 241, w_3 = 361$

令 $p = w_{3k-2}$ ，甲必勝； $p = w_{3k-1}$ 時，甲必勝； $p = w_{3k}$ 時，甲必勝。

$$\text{甲}(w_{3k+3}) \to \text{乙}(w_{3k+2}+\frac{p}{2},\overset{even}{\frac{p}{2}}) \to \text{甲}(w_{3k+2}+\frac{p}{4},\overset{even}{\frac{p}{4}}) \to$$

$$\to \text{乙}(w_{3k+2}+\frac{p}{8},\overset{odd}{\frac{p}{8}}) \to\to \text{甲}(w_{3k+1}+\frac{9}{16}p+\frac{1}{2},\overbrace{\frac{9}{16}p+\frac{1}{2}}^{even}) \to$$

$$\square\ \ \text{乙}(w_{3k+1}+\frac{9}{32}P+\frac{1}{4},\overbrace{\frac{9}{32}p+\frac{1}{4}}^{even}) \to \text{甲}(w_{3k}+\frac{41}{64}P+\frac{1}{8},\overbrace{\frac{41}{64}P+\frac{1}{8}}^{odd})$$

$$\square\ \ \text{乙}(w_{3k+1}+\frac{25}{32}P+\frac{1}{4},\overbrace{\frac{25}{32}p+\frac{1}{4}}^{even}) \to \text{甲}(w_{3k}+\frac{25}{64}P+\frac{1}{8},\overbrace{\frac{25}{64}P+\frac{1}{8}}^{odd})$$

$$\to \text{乙}* \to \text{甲}(w_{3k})or\,\text{甲}(w_{3k-1})$$

$$\text{甲}(w_{3k+2}) \to \text{乙}(w_{3k+1}+p,1) \to \text{甲}(w_{3k+2}+\overset{even}{\frac{p}{2},\frac{p}{2}}) \to$$

$$\text{□ 乙}(w_{3k+2}+\overset{even}{\frac{p}{4},\frac{p}{4}}) \to \text{甲}(w_{3k}+\overset{odd}{\frac{5}{8}p,\frac{5}{8}p}) \to \text{乙}* \to \text{甲}(w_{3k})or\text{甲}(w_{3k\text{-}1})$$

$$\text{□ 乙}(w_{3k}+\overset{even}{\frac{3}{4}p,\frac{3}{4}p}) \to \text{甲}(w_{3k\text{-}1}+\overset{odd}{\frac{7}{8}p,\frac{7}{8}p}) \to \text{乙}* \to \text{甲}(w_{3k\text{-}1})or\text{甲}(w_{3k\text{-}2})$$

$$\text{甲}(w_{3k+1}) \to \text{乙}(w_{3k}+\overset{even}{\frac{p}{2},\frac{p}{2}}) \to \text{甲}(w_{3k}+\overset{even}{\frac{3}{4}p,\frac{3}{4}p}) \to \text{乙}(w_{3k}+\overset{odd}{\frac{3}{8}p,\frac{3}{8}p}) \to$$

$$\text{甲}(w_{3k\text{-}1}+\frac{11}{16}p+\frac{1}{2},\overbrace{\frac{11}{16}p+\frac{1}{2}}^{odd}) \to \text{乙}* \to \text{甲}(w_{3k\text{-}1})or\text{甲}(w_{3k\text{-}2})$$

由數學歸納法，得證

C 除了 $n=7,128k+31,128k+39,128k+119$ 之外，尚有一些解未解出(極少數)，我們還沒有徹底了解 C 的性質。

D(221) :

若 $p \equiv 18 (\bmod 32)$

則 $w_1=0, w_2=p+1, w_3=2p+2, w_4=3p+2, \ldots$

$w_{3k+1}=3kp+2k,$

$w_{3k+2}=(3k+1)p+2k+1,$

$w_{3k+3}=(3k+2)p+2k+2$

證明：

易證 $w_1=19, w_2=38, w_3=56$

令 $p=w_{3k-2}$ ，甲必勝； $p=w_{3k-1}$ 時，甲必勝； $p=w_{3k}$ 時，甲必勝。

$$\text{甲}(w_{3k+1}) \to \text{乙}(w_{3k}+\overset{odd}{\frac{p}{2},\frac{p}{2}}) \to \text{甲}(w_{3k}+\frac{3}{4}p+\frac{1}{2},\overbrace{\frac{3}{4}p+\frac{1}{2}}^{even}) \to$$

$$\text{□ 乙}(w_{3k\text{-}1}+\frac{3}{8}p+\frac{1}{4},\overbrace{\frac{3}{8}p+\frac{1}{4}}^{odd}) \to \text{甲}(w_{3k\text{-}2}+\frac{11}{16}p+\frac{5}{8},\overbrace{\frac{11}{16}p+\frac{5}{8}}^{odd})$$

$$\text{□ 乙}(w_{3k\text{-}1}-1,\frac{3}{4}p+\frac{3}{2}) \quad \frac{3}{4}p+\frac{3}{2} \neq \frac{p}{2} \Rightarrow \text{乙敗}$$

$$\text{甲}(w_{3k+2}) \to \text{乙}(w_{3k+1}+p,1) \to \text{甲}(w_{3k+1}+\frac{p}{2},\frac{p}{2}) \to \text{乙}* \to \text{甲}(w_{3k+1})or\text{甲}(w_{3k})$$

$$甲(w_{3k+3}) \to 乙(w_{3k+2}-1,1) \to 甲(w_{3k+2}+\overbrace{\frac{p}{2},\frac{p}{2}}^{odd}) \to 乙(w_{3k+1}+\frac{3}{4}p+\frac{1}{2},\overbrace{\frac{3}{4}p+\frac{1}{2}}^{even}) \to$$

$$\to 甲(w_{3k+1}+\frac{3}{8}p+\frac{1}{4},\overbrace{\frac{3}{8}p+\frac{1}{4}}^{odd}) \to 乙^{*} \to 甲(w_{3k+1})\,or\,甲(w_{3k})$$

由數學歸納法，得證

D 除了此解，我們目前尚未解出涵蓋所有 D 之一般式

伍、 研究結果

一、原本的問題 1~5 搶 20 我們討論出後手有必勝的策略。

二、原本的問題一般化後$1\sim n$搶m我們也得到以下性質：

遊戲一般化成數字$1,2,\ldots,n$搶m，這時輪到 X 且數字和$S_i=m-k(1\le k\le n)$，而使2^t能整除k的最大非負整數為t，若t為奇數則 X必勝；若t為偶數，則僅當$P_i \ne k$，X 必勝。

三、當$S_i=w_r=m-(n+1)(r-1)$ 當$n=2k \vee 2^{2k}t-1$ (t為奇數$\wedge r\in N$)時

S_i為必勝點。

四、對於 n 為奇數時,將其必勝點之間距做分類,並解出每種情形的一般式。

陸、 結論

一、在$1\sim n$搶m的遊戲中，我們找出了玩家的策略為:若能搶到必勝點就搶必勝點;若不能搶到必勝點就盡量卡位使對手也無法到達必勝點。

二、$S_i=w_r=m-(n+1)(r-1)$ 當$n=2k \vee 2^{2k}t-1$ (t為奇數)時的先手後手必勝的判別方法如下:

(一) 當 $m-(n+1)(\left[\frac{m+n+1}{n+1}\right]-1)=0$時，後手必勝。

(二) 當 $m-(n+1)(\left[\frac{m+n+1}{n+1}\right]-1)\ne 0$時，先手搶$m-(n+1)(\left[\frac{m+n+1}{n+1}\right]-1)$必勝。

三、當n為奇數時，我們得出以下結論

A(21)：其一般式為$n=32k+7, k\not\equiv 1 \pmod 4$ & $n=2^{2k+1}t-\frac{2^{2k}+5}{3}$。

B(1)：其一般式為$n=2^{2k}t-1$ (t 為奇數)。

C(211)：其一般式為$n=7,128k+31,128k+39,128k+119$，但這不包含全部。

D(221) : 其一般式為 $n=32k+17$ ，但這只是全部的一小部分。

除了以上基本狀況，然而也有不屬於以上四種狀況的 n 值，例:

23 : (221222211)

33 : (2221221)

41 : (222121)

55 : 221(211)

65 : (2221)…

我們發現狀況多而有趣尚待我們在暑假多一點時間進一步研究探討。

四、最後我們再附上三個程式，其中程式碼(a)是以**由後往前倒推**的想法寫出的程式，程式碼(b)利用序對以驗證我們的結果

柒、 參考資料及其他

(1)龍騰第一冊第二章第三節 數學歸納

(2)http://www.math.url.tw/xoops2/modules/tadnews/index.php?nsn=17 (XOOPS 上由師大數學系教授製作，可供下載的數學遊戲)

捌、 附件

一、程式碼(a)

```
#include <iostream>

int a[10000][2047];

int main () {
    freopen ("output.txt" , "w" , stdout);
    int m, n, i, j;
    while (true) {
        puts ("先輸入 m,再輸入 n,代表 1~n 搶 m,如果要離開請輸入 0 0");
        scanf ("%d%d", &m , &n);
        if (m == 0 && n == 0) {
            break;
        }
        for (i = 0 ; i <= m ; i++) {
            for (j = 0 ; j <= n ; j++) {
                a[i][j] = 0;
            }
        }
        for (i = m - 1 ; i >= m - n && i >= 1 ; i--) {
            for (j = 1 ; j <= m - i ; j++) {
                if (a[i + j][0] == 1 && a[i + j][1] == j || (a[i + j][0] == 0)) {
                    a[i][++a[i][0]] = j;
                }
            }
        }
        for (i = m - n - 1 ; i >= 1 ; i--) {
            for (j = 1 ; j <= n ; j++) {
                if ((a[i + j][0] == 1 && a[i + j][1] == j) || (a[i + j][0] == 0)) {
                    a[i][++a[i][0]] = j;
                }
            }
        }
        for (i = m ; i >= 1 ; i--) {
            if (a[i][0] == 0) {
                printf ("%3d win\n" , i);
            }
```

```
                else {
                        printf ("%3d" , i);
                        for (j = 1 ; j <= a[i][0] ; j++) {
                                printf (" %d" , a[i][j]);
                        }
                        putchar ('\n');
                }
        }
    }
```
程式碼(b)

```
#include <iostream>
using namespace std;

int main(){
    int m,n,i,j,k,c[100000],v;
    while(cin >> m >> n){
        memset(c , 0 , sizeof(c));
        v = 0;
        cout << 0 <<endl;
        for(i=1;i<=n;i++)
            c[i] = 1;
        for(i=1;i<=m;i++){
            if(c[i] == 0){
                cout << i <<endl;
                for(j=i+1;j<=i+n;j++){
                    c[j] += 1;
                }
                v = i;
            }
            else if(c[i] == 1){
                k = i-v;
                if(k == n+1)
                    k /= 2;
                printf("(%d,%d)\n",i,k);
                c[i+k] += 1;
            }
        }
    }
}
```

程式碼(c): 尋找 h_i 的規律

```
#include <iostream>
using namespace std;

int main(){
    static int m,n,i,j,k,c[10000000],v,ans;
    while(cin >> m >> n){
        ans = 0;
        memset(c , 0 , sizeof(c));
        v = 0;
        cout << 0 <<endl;
        for(i=1;i<=n;i++)
            c[i] = 1;
        for(i=1;i<=m;i++){
            if(c[i] == 0){
                cout << i-ans-n <<endl;
                ans = i;
                for(j=i+1;j<=i+n;j++){
                    c[j] += 1;
                }
                v = i;
            }
            else if(c[i] == 1){
                k = i-v;
                if(k == n+1)
                    k /= 2;
                c[i+k] += 1;
            }
        }
    }
}
```

二、程式執行結果

1-7 100	1-9 100	1-11 100	1-13 100	1-15 100	1-17 100
100 win 99 1 98 1 2 97 3 96 4 95 5	100 win 99 1 98 1 2 97 3 96 4 95 5	100 win 99 1 98 1 2 97 3 96 4 95 5	100 win 99 1 98 1 2 97 3 96 4 95 5	100 win 99 1 98 1 2 97 3 96 4 95 5	100 win 99 1 98 1 2 97 3 96 4 95 5

94 3 6	94 3 6	94 3 6	94 3 6	94 3 6	94 3 6
93 7	93 7	93 7	93 7	93 7	93 7
92 4	92 4 8	92 4 8	92 4 8	92 4 8	92 4 8
91 win	91 9	91 9	91 9	91 9	91 9
90 1 5	90 5	90 5 10	90 5 10	90 5 10	90 5 10
89 2	89 win	89 11	89 11	89 11	89 11
88 3 4	88 1	88 win	88 12	88 12	88 12
87 2 4	87 1 2	87 1	87 13	87 13	87 13
86 5 7	86 3 7	86 1 2 7	86 7	86 7 14	86 7 14
85 6	85 4 5	85 3	85 win	85 15	85 15
84 7	84 5	84 4	84 1	84 win	84 16
83 win	83 6	83 5	83 1 2	83 1	83 17
82 1	82 7 9	82 3 6 9	82 3 9	82 1 2 9	82 9
81 1 2	81 8	81 7	81 4	81 3	81 win
80 3	80 9	80 4 8	80 5	80 4	80 1
79 4 6	79 5	79 9	79 6 7	79 5	79 1 2
78 5	78 win	78 5 10 11	78 7 11	78 3 6 11	78 3 11
77 3 6 7	77 1 6	77 11	77 4 8	77 7	77 4
76 7	76 2	76 win	76 9 12	76 4 8 12	76 5 12
75 win	75 3	75 1	75 5 10	75 9	75 6
74 1	74 2 4 5	74 1 2 7	74 11 13	74 5 10 13	74 7 13
73 1 2 5	73 5 8	73 3	73 12	73 11	73 4 8 9
72 3	72 3 6	72 4	72 13	72 12	72 9
71 4	71 7 9	71 5	71 win	71 13	71 10
70 5	70 8	70 3 6 9	70 1	70 7 14 15	70 11 15
69 3 6 7	69 9	69 7	69 1 2	69 15	69 6 12
68 7	68 win	68 4 8	68 3	68 win	68 13 16
67 4	67 1	67 9	67 4	67 1	67 14
66 win	66 1 2	66 5 10 11	66 5	66 1 2 9	66 15 17
65 1 5	65 3	65 11	65 3 6	65 3	65 16
64 2	64 4	64 win	64 7	64 4	64 17
63 3 4	63 5	63 1	63 4 8	63 5	63 9
62 2 4	62 3 6 8	62 1 2 7	62 9	62 3 6 11	62 win
61 5 7	61 7	61 3	61 5 10 12	61 7	61 1 10
60 6	60 4 8 9	60 4	60 11	60 4 8 12	60 2
59 7	59 9	59 5	59 12 13	59 9	59 3
58 win	58 5	58 3 6 9	58 13	58 5 10 13	58 2 4
57 1	57 win	57 7	57 7	57 11	57 5
56 1 2	56 1	56 4 8	56 win	56 12	56 3 6
55 3	55 1 2	55 9	55 1	55 13	55 7

54 4 6	54 3 7	54 5 10 11	54 1 2	54 7 14 15	54 8 9
53 5	53 4 5	53 11	53 3 9	53 15	53 9 14
52 3 6 7	52 5	52 win	52 4	52 win	52 5 10
51 7	51 6	51 1	51 5	51 1	51 11
50 win	50 7 9	50 1 2 7	50 6 7	50 1 2 9	50 12
49 1	49 8	49 3	49 7 11	49 3	49 13 16
48 1 2 5	48 9	48 4	48 4 8	48 4	48 7 14
47 3	47 5	47 5	47 9	47 5	47 15 17
46 4	46 win	46 3 6 9	46 5 10	46 3 6 11	46 16
45 5	45 1 6	45 7	45 11 13	45 7	45 17
44 3 6 7	44 2	44 4 8	44 12	44 4 8 12	44 win
43 7	43 3	43 9	43 13	43 9	43 1
42 4	42 2 4 5	42 5 10 11	42 win	42 5 10 13	42 1 2
41 win	41 5 8	41 11	41 1	41 11	41 3
40 1 5	40 3 6	40 win	40 1 2	40 12	40 4 11
39 2	39 7 9	39 1	39 3	39 13	39 5
38 3 4	38 8	38 1 2 7	38 4 9	38 7 14 15	38 3 6 12
37 2 4	37 9	37 3	37 5	37 15	37 7
36 5 7	36 win	36 4	36 3 6	36 win	36 8
35 6	35 1	35 5	35 7	35 1	35 9
34 7	34 1 2	34 3 6 9	34 8	34 1 2 9	34 5 10
33 win	33 3	33 7	33 9	33 3	33 11
32 1	32 4	32 4 8	32 5 10 12	32 4	32 12
31 1 2	31 5	31 9	31 11	31 5	31 13
30 3	30 3 6 8	30 5 10 11	30 12 13	30 3 6 11	30 7 14 16
29 4 6	29 7	29 11	29 13	29 7	29 15
28 5	28 4 8 9	28 win	28 7	28 4 8 12	28 8 16 17
27 3 6 7	27 9	27 1	27 win	27 9	27 17
26 7	26 5	26 1 2 7	26 1 8	26 5 10 13	26 9
25 win	25 win	25 3	25 2	25 11	25 win
24 1	24 1	24 4	24 3 9	24 12	24 1
23 1 2 5	23 1 2	23 5	23 2 4	23 13	23 1 2
22 3	22 3 7	22 3 6 9	22 5	22 7 14 15	22 3 11
21 4	21 4 5	21 7	21 6 7	21 15	21 4
20 5	20 5	20 4 8	20 7 11	20 win	20 5 12
19 3 6 7	19 6	19 9	19 8	19 1	19 6
18 7	18 7 9	18 5 10 11	18 9	18 1 2 9	18 7 13
17 4	17 8	17 11	17 5 10	17 3	17 4 8 9
16 win	16 9	16 win	16 11 13	16 4	16 9
15 1 5	15 5	15 1	15 12	15 5	15 10

14 2	14 win	14 1 2 7	14 13	14 3 6 11	14 11 15
13 3 4	13 1 6	13 3	13 win	13 7	13 6 12
12 2 4	12 2	12 4	12 1	12 4 8 12	12 13
11 5 7	11 3	11 5	11 1 2 8	11 9	11 14
10 6	10 2 4 5	10 3 6 9	10 3	10 5 10 13	10 15 17
9 7	9 5 8	9 7	9 4 9	9 11	9 16
8 win	8 3 6	8 4 8	8 5	8 12	8 17
7 1	7 7 9	7 9	7 3 6	7 13	7 9
6 1 2	6 8	6 5 10 11	6 7	6 7 14 15	6 win
5 3	5 9	5 11	5 8	5 15	5 1 10
4 4 6	4 win	4 win	4 9	4 win	4 2
3 5	3 1	3 1	3 5 10 12	3 1	3 3
2 3 6 7	2 1 2	2 1 2 7	2 11	2 1 2 9	2 2 4
1 7	1 3	1 3	1 12 13	1 3	1 5

三、必勝點間隔特性

n 遞迴情形			
03 B	79 B	153 A	227 B
05 A	81 D	155 B	229 A
07 C	83 B	157 A	231 (21211)...
09 D	85 A	159 C	233 A
11 B	87 D	161 D	235 B
13 A	89 A	163 B	237 A
15 B	91 B	165 A	239 B
17 D	93 A	167 C	241 D
19 B	95 2211(221)...	169 *(22212121)	243 B
21 A	97 (2212221)....	171 B	245 A
23 (221222211)...	99 B	173 A	247 C
25 A	101 A	175 B	249 A
27 B	103 A	177 D	251 B
29 A	105 A	179 B	253 A
31 C	107 B	181 A	255 A
33 (22221221)...	109 A	183 D	257 (22221)...
35 B	111 B	185 A	259 B
37 A	113 D	187 B	261 A
39 C	115 B	189 A	263 A
41 (222121)...	117 A	191 B	265 (22221)...
43 B	119 C	193 *(2221)	267 B

45 A 47 B 49 D 51 B 53 A 55 221(211)... 57 A 59 B 61 A 63 B 65 (2221)... 67 B 69 A 71 A 73 (22121)... 75 B	121 A 123 B 125 A 127 (2111)... 129 B 131 B 133 A 135 A 137 221(22221)... 139 B 141 A 143 B 145 D 147 B 149 A 151 *(22211)	195 B 197 A 199 A 201 (22121)... 203 B 205 A 207 B 209 D 211 B 213 A 215 D 217 A 219 B 221 A 223 (2111)... 225 D	269 A 271 B 273 B 275 B 277 A 279 D 281 A 283 B 285 A 287 C 289 (22221) 291 B 293 A 295 C 297 (2212121) 299 B

301 A 303 B 305 D 307 B 309 A 311 (2112211)... 313 A 315 B 317 A 319 B 321 (2221)... 323 B 325 A 327 A 329 (22121)... 331 B 333 A 335 B 337 D 339 B 341 A 343 D	375 C 377 A 379 B 381 A 383 (2211)... 385 (2221)... 387 B 389 A 391 A 393 (2221)... 395 B 397 A 399 B 401 D 403 B 405 A 407 (22221)... 409 A 411 B 413 A 415 C 417 (22221221)...	447 B 449 (2221)... 451 B 453 A 455 A 457 (22121)... 459 B 461 D 463 B 465 D 467 B 469 A 471 D 473 A 475 B 477 A 479 D 481 22122(221)... 483 B 485 A 487 C 489 A

345 A 347 B 349 A 351 (22221)... 353 (2212)... 355 B 357 A 359 B 361 A 363 B 365 A 367 B 369 D 371 B 373 A	419 B 421 A 423 C 425 A 427 B 429 A 431 B 433 D 435 B 437 A 439 D 441 A 443 B 445 A	491 B 493 A 495 B 497 D 499 B 501 A

【評語】040416

本篇論文由一個五邊形兩人遊戲出發，推廣到 m 邊形搶 n 的遊戲，分析遊戲的必勝及必敗點。對某些情況，必勝點已經完全決定，對某些情況則還沒有完全算出來，應該設法將它算完全。更一般來說，可以考慮不是完全圖的情況，這個圖甚至可以是有向圖或是有 loop（迴圈），這相當於每一個數字 i 對應到一個集合 A_i ，當現在停留在 i 的位置時，下個人可以任選 A_i 中的一個數為其停留的點。