

中華民國第 51 屆中小學科學展覽會 作品說明書

高中組 數學科

040414

函數圖形與過定點之弦所圍最小面積

學校名稱：國立花蓮高級中學

作者： 高二 彭璟翔 高二 王親嶸	指導老師： 林哲宇 林政逸
-------------------------	---------------------

關鍵詞：圓錐曲線、中點弦、最小面積

壹、摘要

我們的研究在探討各式函數圖形，什麼時候會與弦圍出最小面積，首先我們探討了圓錐曲線，這是分別利用代數、空間幾何、及平面幾何的方法來證明。在證明完圓錐曲線後，我們開始推廣探討各式函數是否皆適用，過程中也利用平面幾何的方法來嘗試證明，但其中會遇到反曲點、開口方向不同等等情況，於是我們再利用一些特殊方法解決了這些問題，也證明了在任意多項式函數圖形中，中點弦會與函數圖形圍出最小面積。

貳、研究動機

去年，在數學老師的推薦之下我去聽了一個校內的數學研習，在演講中有一部分提到，如果利用積分加微分的方法，我們可以算出中點弦會與拋物線圍出最小的面積。雖然當時的我聽不太懂什麼是積分什麼是微分，但是中點弦和拋物線都是相當常見且簡單的問題，因此我開始思考，到底可不可以運用簡單的方法就解決中點弦和拋物線的問題呢！或者還有其它的函數圖形擁有這種性質呢！因此我找齊了組員，並且開始了我們一路的探討過程。

參、研究目的

- 一、探討圓錐曲線與中點弦所圍出的面積關係。
- 二、探討其他函數與中點弦所圍出的面積關係。
- 三、歸類各種函數圖形是否有相關性質。

肆、 研究問題

- 一、圓內一定點，設該點的中點弦與圓所圍面積為 E ，則 E 為過該點之弦與圓所圍面積中的最小面積。
- 二、橢圓內一定點，設該點的中點弦與橢圓所圍面積為 E ，則 E 為過該點之弦與橢圓所圍面積中的最小面積。
- 三、拋物線內一定點，設該點的中點弦與拋物線所圍面積為 E ，則 E 為過該點之弦與拋物線所圍面積中的最小面積。
- 四、雙曲線內一定點，設該點的中點弦與雙曲線所圍面積為 E ，則 E 為過該點之弦與雙曲線所圍面積中的最小面積。
- 五、指數函數內一定點，設該點的中點弦與指數函數所圍面積為 E ，則 E 為過該點之弦與指數函數所圍面積中的最小面積。
- 六、 $y = |x|$ 函數內一定點，設該點的中點弦與 $y = |x|$ 函數所圍面積為 E ，則 E 為過該點之弦與 $y = |x|$ 函數所圍面積中的最小面積。
- 七、 $y = \sin(x)$ 內一定點，設該點的中點弦與三角函數($y = \sin(x)$)所圍面積為 E ，則 E 為過該點之弦與三角函數($y = \sin(x)$)所圍面積中的最小面積。
- 八、三次多項式函數內一定點，設該點的中點弦與三次多項式函數所圍面積為 E ，則 E 為過該點之弦與三次多項式函數所圍面積中的最小面積。
- 九、四次多項式函數內一定點，設該點的中點弦與四次多項式函數所圍面積為 E ，則 E 為過該點之弦與四次多項式函數所圍面積中的最小面積。
- 十、歸類各式函數圖形，找出到底哪種函數圖形的中點弦會與該函數圖形圍出最小的面積。

伍、 名詞解釋

以下所討論的模型，皆是給予某個函數圖形 T 及任意一個固定點 O ，若直線 L 過點 O ，且只與 T 交於 A 、 B 兩點，則稱 \overline{AB} 為 T 的其中一弦，若 O 為 \overline{AB} 的中點，則稱 \overline{AB} 為 T 的中點弦。

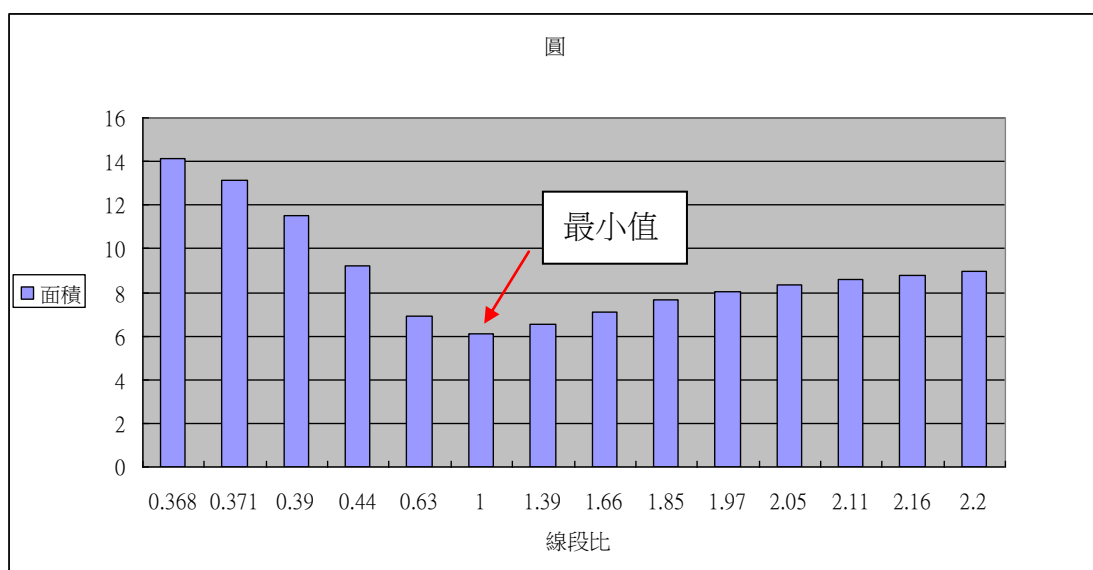
陸、 研究工具

- 一、紙筆
- 二、筆記型電腦
- 三、電腦軟體：GeoGebra、Cabri

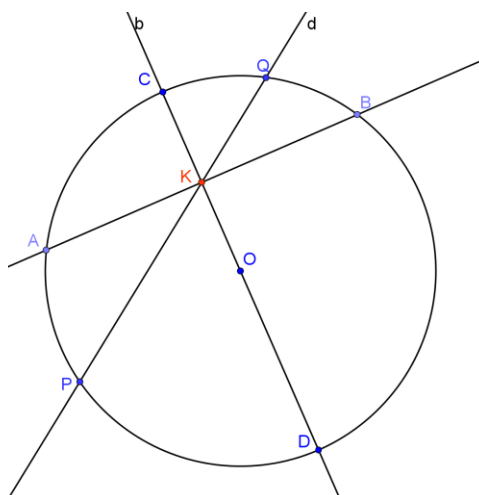
柒、 研究過程與方法

一、 圓內一定點，設該點的中點弦與圓所圍面積為 E ，則 E 為過該點之弦與圓所圍面積中的最小面積。

利用數學軟體算出圓與過該點弦所圍面積，改變弦的斜率，使線段比產生變化，發現越接近中點弦時(線段比值=1)，有較小的面積。(表格說明，藍色面積為弦與函數圖形圍出面積。假設固定點 O ，弦與函數兩相交於 A 、 B 兩點，且線段比等於 $\overline{AO}:\overline{BO}$ 。)



證明：



如上圖

令 K 為弦 AB 之中點，弦 CD 為過 K 點的直徑，弦 PQ 為過 K 點的任意弦。
 已知當弦越短，會有較小的弧度，
 故弦越短與圓所圍的弓形面積會越小。

Claim：弦 AB 為過 K 點最短的弦。

Pf Claim：

如圖，過 K 點做弦 PQ

$$\text{令 } \overline{PK} = x \quad \overline{KQ} = y$$

$$\overline{CK} = a \quad \overline{KD} = 2r - a \quad (r \text{ 為圓的半徑})$$

由圓幂定理得 $xy = a(2r - a)$ 為定值

$$\text{又 } \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} = \sqrt{a(2r-a)} \text{ 為定值}$$

故當 $x = y$ 時， $x + y$ 為最小值

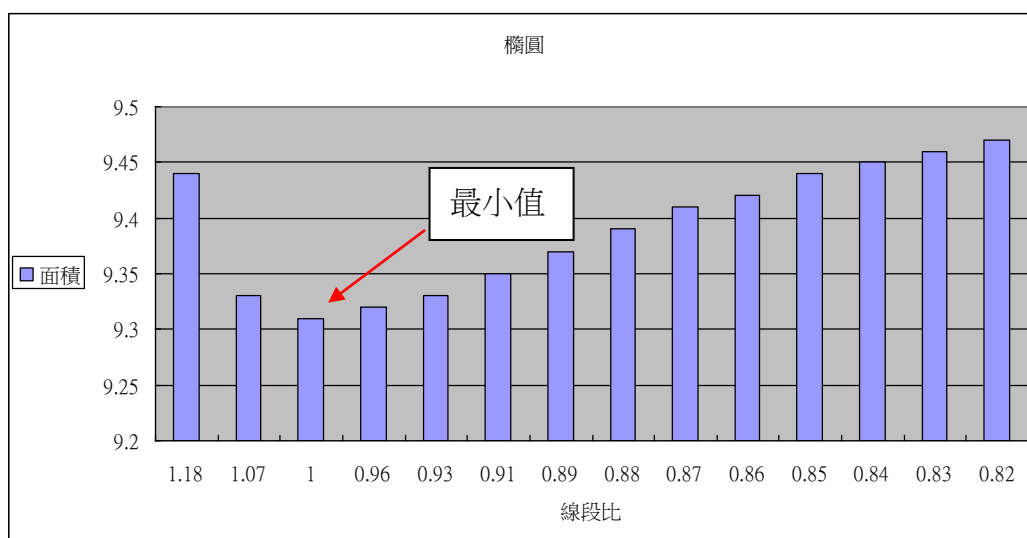
⇒ 以 K 為弦中點之弦為最短的弦

⇒ 故弦 AB 為最短的弦

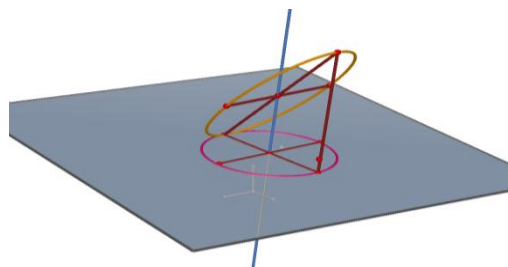
故由上述證明可知圓內一定點，該點的中點弦與圓所圍面積 E，則 E 為過該點之弦與圓所圍面積中的最小面積。

二、橢圓內一定點，設該點的中點弦與橢圓所圍面積為 E，則 E 為過該點之弦與橢圓所圍面積中的最小面積。

利用數學軟體算出橢圓與過該點弦所圍面積，改變弦的斜率，使線段比產生變化，發現越接近中點弦時(線段比值=1)，有較小的面積。(表格說明，藍色面積為弦與函數圖形圍出面積。假設固定點 O，弦與函數兩相交於 A、B 兩點，且線段比等於 $\overline{AO} : \overline{BO}$ 。)



說明：

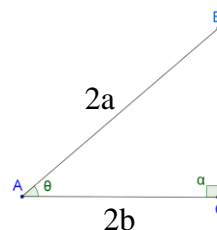


如右圖：

做一直線 L 過長軸頂點 K 且平行於短軸。以 L 為旋轉軸，將橢圓所在平面旋轉至平面 H ，使得長軸對平面 H 之投影長度等於短軸，則橢圓對平面 H 之投影形成一個圓。

證明：

Claim1： 對任意在橢圓平面上的面積 E 投影至圓所在平面形成面積 E' ，則有 $E' = E \cos \theta$ (θ 為銳角)



Pf Claim1：

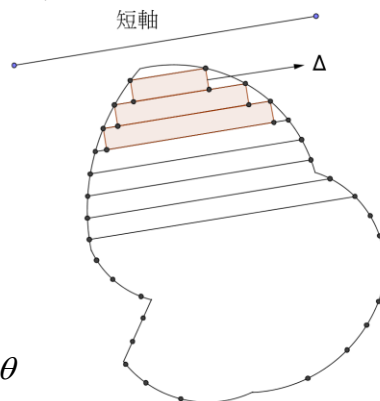
令 $E = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n |A_i|$ (其中 A_i 為平行短軸的長方形，且垂直短軸方向的邊長為定值 Δ ， $|A_i|$ 代表長方形面積)

Δ ， $|A_i|$ 代表長方形面積)

將 A_i 投影至圓所在平面形成 A_i' ，

則有 $|A_i'| = |A_i| \cos \theta$ ($\because \Delta$ 投影成 $\Delta \times \cos \theta$)

$\therefore E' = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n |A_i'| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n |A_i| \cos \theta = E \cos \theta$



Claim2： 橢圓內定點 P ， P 的中點弦 \overline{AB} 與橢圓所圍面積 E ，則 E 為過 P 點之弦與橢圓所圍面積中的最小面積。

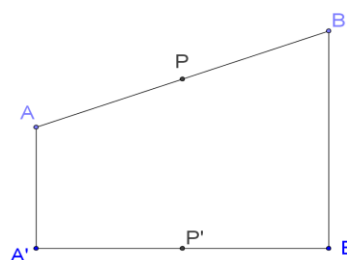
Pf claim2：

設 \exists 過 P 點的弦 $\overline{CD} \neq \overline{AB}$ ，且 \overline{CD} 與橢圓所為面積 $E_1 < E$

令 $\overline{C'D'}$ 為 \overline{CD} 至圓平面上的投影

$\overline{A'B'}$ 為 \overline{AB} 至圓平面上的投影

P' 為 P 至圓平面上的投影



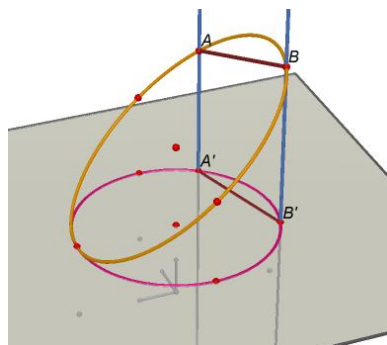
則 P' 為 $\overline{A'B'}$ 中點，令 $\overline{A'B'}$ 與圓所為面積為 E'

P' 不為 $\overline{C'D'}$ 中點，令 $\overline{C'D'}$ 與圓所為面積為 E_1'

By(Claim)，可知 $E' < E_1'$

By claim1 可知 $E_1 = E_1' \sec \theta$ ； $E = E' \sec \theta$

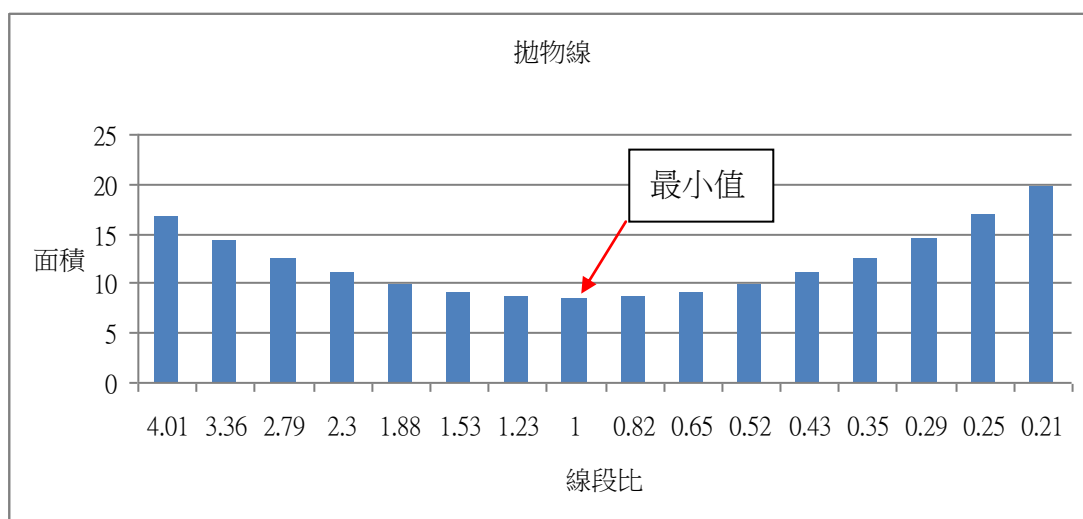
$\Rightarrow E < E_1 \rightarrow \leftarrow$



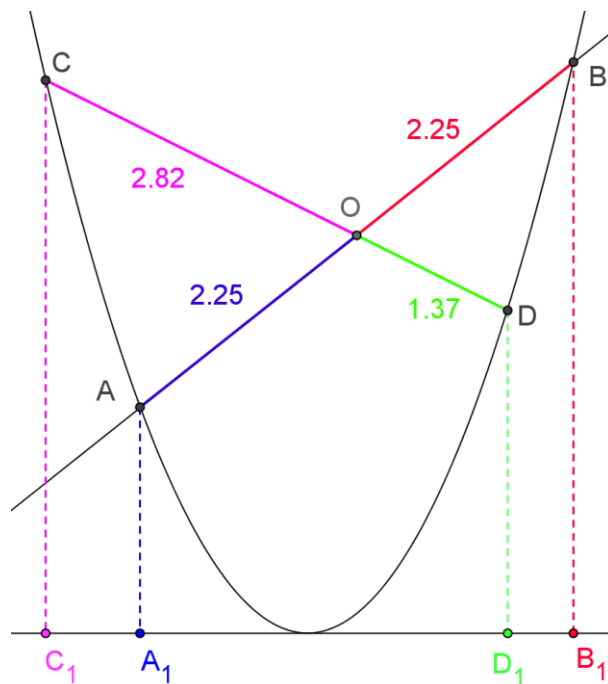
由上述證明可知橢圓內一定點，該點的中點弦與橢圓所圍面積為 E ，則 E 為過該點之弦與橢圓所圍面積中的最小面積。

三、拋物線內一定點，設該點的中點弦與拋物線所圍面積為 E ，則 E 為過該點之弦與拋物線所圍面積中的最小面積。

利用數學軟體算出拋物線與過該點弦所圍面積，改變弦的斜率，使線段比產生變化，發現越接近中點弦時(線段比值=1)，有較小的面積。(表格說明，藍色面積為弦與函數圖形圍出面積。假設固定點 O ，弦與函數兩相交於 A 、 B 兩點，且線段比等於 $\overline{AO}:\overline{BO}$ 。)



證明：



$$\text{令 } O(x_0, y_0) \quad A(\alpha, \alpha^2) \quad B(\beta, \beta^2)$$

$$C(\alpha_1, \alpha_1^2) \quad D(\beta_1, \beta_1^2)$$

$\because O$ 為 \overline{AB} 中點

$$\therefore x_0 = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$y_0 = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2}$$

拋物線與直線圍成面積 = 梯形 A_1ABB_1 - 拋物線與 X 軸圍成面積

$$= \frac{(\beta - \alpha)(\alpha^2 + \beta^2)}{2} - \int_{\alpha}^{\beta} x^2 dx$$

$$= \frac{(\beta - \alpha)(\alpha^2 + \beta^2)}{2} - \left(\frac{\beta^3}{3} - \frac{\alpha^3}{3} \right)$$

$$= \frac{-\alpha^3 - \alpha\beta^2 + \alpha^2\beta + \beta^3}{2} - \frac{\beta^3 - \alpha^3}{3}$$

$$= \frac{-\alpha^3 - 3\alpha\beta^2 + 3\alpha^2\beta + \beta^3}{6}$$

$$= \frac{(\beta - \alpha)^3}{6}$$

已知拋物線與直線圍成面積 = $\frac{(\beta - \alpha)^3}{6}$ 。

$$\text{Claim3 : } \frac{(\beta-\alpha)^3}{6} < \frac{(\beta_1-\alpha_1)^3}{6}$$

Pf :

$$\because m_{\overline{OD}} = m_{\overline{CD}}$$

$$\therefore \frac{\beta_1 - y_0}{\beta_1 - x_0} = \frac{\beta_1 - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2}}{\beta_1 - \frac{\alpha + \beta}{2}} = \frac{2\beta_1^2 - \alpha^2 - \beta^2}{2\beta_1 - \alpha - \beta} = \frac{\alpha_1^2 - \beta_1^2}{\alpha_1 - \beta_1} = \alpha_1 + \beta_1$$

$$\Rightarrow 2\beta_1^2 - \alpha^2 - \beta^2 = 2\alpha_1\beta_1 - \alpha\alpha_1 - \alpha_1\beta + 2\beta_1^2 - \alpha\beta_1 - \beta\beta_1$$

$$\Rightarrow 2\alpha_1\beta_1 - \alpha\alpha_1 - \alpha_1\beta - \alpha\beta_1 - \beta\beta_1 + \alpha^2 + \beta^2 = 0$$

$$\Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha_1\beta_1 = \alpha\alpha_1 + \alpha_1\beta + \alpha\beta_1 + \beta\beta_1$$

$$\Rightarrow (\beta - \alpha)^2 + 2\alpha_1\beta_1 + 2\alpha\beta = \alpha\alpha_1 + \alpha_1\beta + \alpha\beta_1 + \beta\beta_1$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (\beta - \alpha)^2 &= \alpha\alpha_1 + \alpha_1\beta + \alpha\beta_1 + \beta\beta_1 - 2\alpha\beta - 2\alpha_1\beta_1 \\ &= \alpha_1(\alpha - \beta_1) + \beta_1(\alpha - \alpha_1) + \beta(\alpha_1 - \alpha) + \beta(\beta_1 - \alpha) \\ &= (\alpha_1 - \beta)(\alpha - \beta_1) + (\alpha - \alpha_1)(\beta_1 - \beta) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (\beta - \alpha)^2 < (\alpha_1 - \beta)(\alpha - \beta_1) \quad \square\square\square\textcircled{1}$$

$$\because \alpha > \alpha_1 \text{ 且 } \beta_1 < \beta$$

$$\therefore \alpha(\beta_1 - \beta) < \alpha_1(\beta_1 - \beta)$$

$$\Rightarrow \alpha\beta_1 - \alpha\beta < \alpha_1\beta_1 - \alpha_1\beta$$

$$\Rightarrow -\alpha\beta - \alpha_1\beta_1 < -\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta$$

$$\Rightarrow -\alpha\beta - \alpha_1\beta_1 + \beta\beta_1 + \alpha\alpha_1 < -\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta + \beta\beta_1 + \alpha\alpha_1$$

$$\Rightarrow (\beta_1 - \alpha)(\beta - \alpha_1) < (\beta - \alpha)(\beta_1 - \alpha_1) \quad \square\square\square\textcircled{2}$$

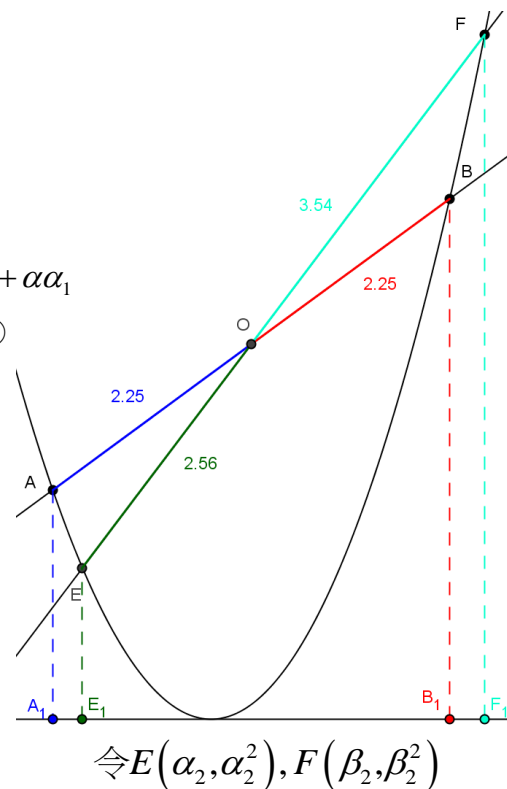
$$\begin{aligned} \text{by } \textcircled{1} \cdot \textcircled{2} \text{ 知 } & (\beta - \alpha)^2 < (\beta - \alpha)(\beta_1 - \alpha_1) \\ & (\beta - \alpha) < (\beta_1 - \alpha_1) \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{(\beta - \alpha)^3}{6} < \frac{(\beta_1 - \alpha_1)^3}{6}$$

當斜率增加時同理可證

故可知拋物線內一定點，該點的中點弦與

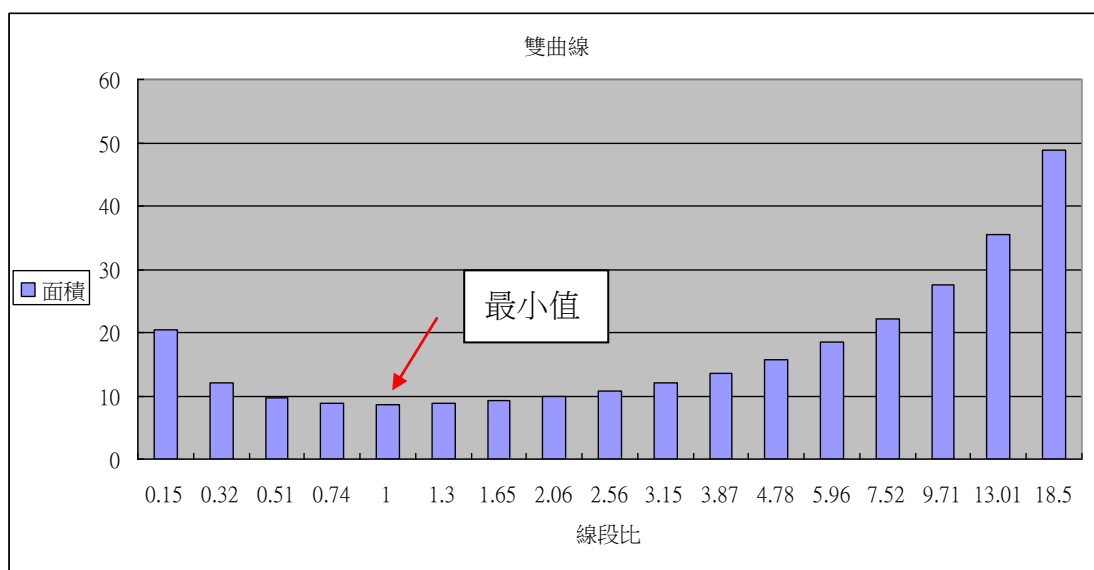
拋物線所圍面積 E ，則 E 為過該點之弦與拋物線所圍面積中的最小面積。



四、雙曲線內一定點，設該點的中點弦與雙曲線所圍面積為 E ，則 E 為過該點之弦與雙曲線所圍面積中的最小面積。

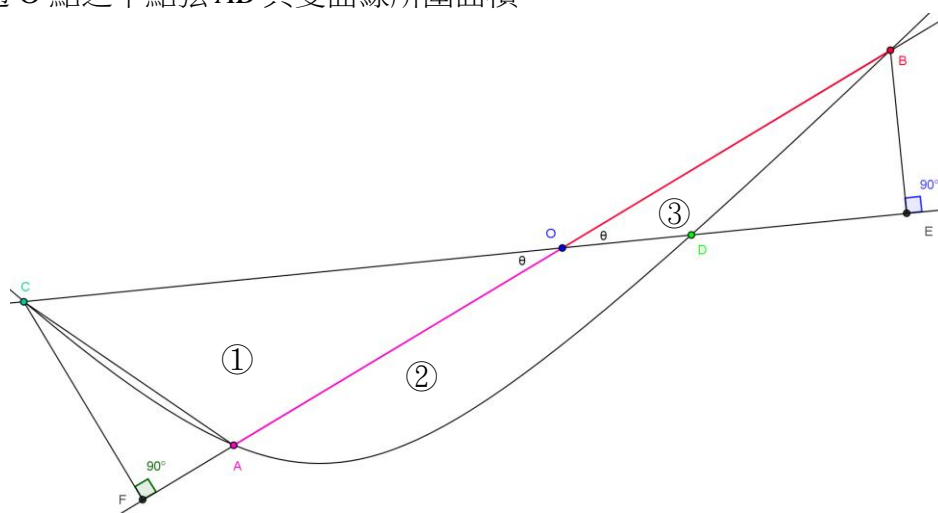
說明：雙曲線的共軛軸將其分成兩個對稱的曲線，我們取其中一個來討論即可。

利用數學軟體算出雙曲線與過該點弦所圍面積，改變弦的斜率，使線段比產生變化，發現越接近中點弦時(線段比值=1)，有較小的面積。(表格說明，藍色面積為弦與函數圖形圍出面積。假設固定點 O ，弦與函數兩相交於 A 、 B 兩點，且線段比等於 $\overline{AO}:\overline{BO}$ 。)



Case1：證明任意過 O 點，滿足 $\angle ODB$ 及 $\angle OAC$ 為鈍角之弦，與雙曲線所圍面積大於過 O 點之中點弦 \overline{AB} 與雙曲線所圍面積。

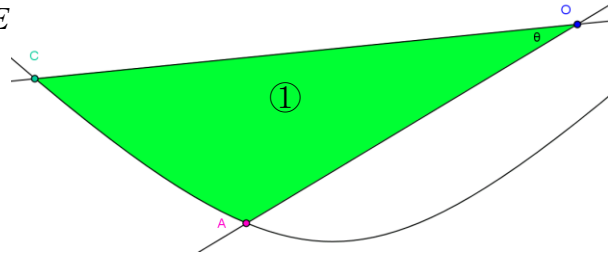
Pf :



令中點弦 \overline{AB} 與雙曲線圍出之面積為 E

且 \overline{CD} 與雙曲線圍出之面積為 E_1

則 $E = \textcircled{2} + \textcircled{3}$, $E_1 = \textcircled{1} + \textcircled{2}$



連接 \overline{AC} 得到 $\square OAC < \textcircled{1}$

做一直線過 B 垂直 \overline{CD} 於 E

使 $\textcircled{3} < \square OBE$

$$\square OAC = \frac{1}{2} \overline{OC} \times \overline{OA} \sin \theta$$

$$\square OBE = \frac{1}{2} \overline{OE} \times \overline{OB} \sin \theta$$

$$\because \angle CAO > \angle ACO \Rightarrow \overline{OC} > \overline{OA}$$

$$\text{且 } \angle OEB > \angle EBO \Rightarrow \overline{OB} > \overline{OE}$$

$$\text{又 } \overline{OA} = \overline{OB} \Rightarrow \overline{OC} > \overline{OE}$$

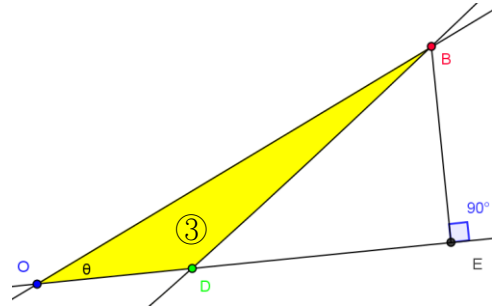
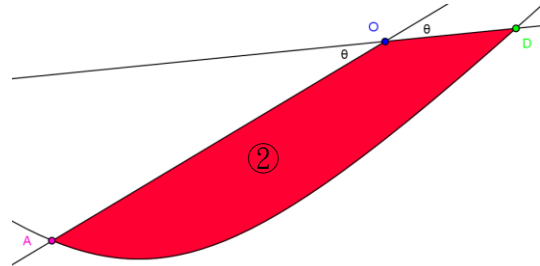
$$\Rightarrow \frac{1}{2} \overline{OC} \times \overline{OA} \sin \theta > \frac{1}{2} \overline{OE} \times \overline{OB} \sin \theta$$

$$\Rightarrow \square OAC > \square OEB$$

$$\Rightarrow \textcircled{1} > \square OAC > \square OEB > \textcircled{3}$$

$$\therefore \textcircled{1} > \textcircled{3}$$

$$\therefore E_1 > E$$



故斜率小於 \overline{AB} 之弦圍出之面積皆大於 E

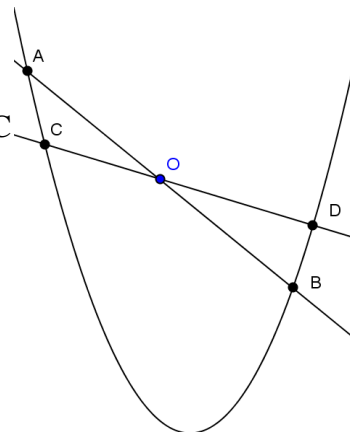
斜率大於 \overline{AB} 之弦同理可證

則當角 ODB 或角 OAC 為鈍角時，中點弦所圍出之面積 E 為最小值
(設此結論為(a))

Case2：過 O 點之弦，當三角形 ODB 或三角形 OAC 不為鈍角三角形時與雙曲線圍出之面積為最小值。

By(a)已知

當 $\angle OCA$ 、 $\angle OBD$ 皆為鈍角時
弧形 OBD 面積 $>$ 弧形 OAC 面積



∴ 上述內容

∴ 證明當 $\angle OCA$ 或 $\angle OBD$ 不為鈍角時

弧形 OBD 面積 $>$ 弧形 OAC 面積

Pf: 如圖(一), 做 $n+1$ 條弦過 O 分別為 $L_0, L_1, L_2 \dots L_n$

且相鄰兩弦夾角為 $\frac{\theta}{n+2}$

L_0 交函數於 C, D

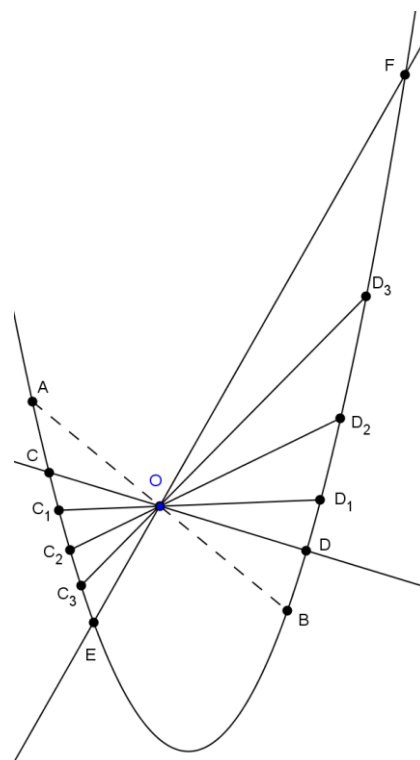
L_1 交函數於 C_1, D_1

□

□

□

L_n 交函數於 C_n, D_n



圖(一)

如圖(二), 在 $\overline{C_1D_1}$ 上取一點 P

使得 $\overline{CP} \parallel \overline{D_1D}$

故 $\square COP$ 面積 $>$ 弧形 COC_1 面積

$\square ODD_1$ 面積 $<$ 弧形 OD_1D 面積

∴ $\angle OPC = \angle OD_1D$, $\angle COP = \angle DOD_1$

∴ $\square OPC \square \square OD_1D$

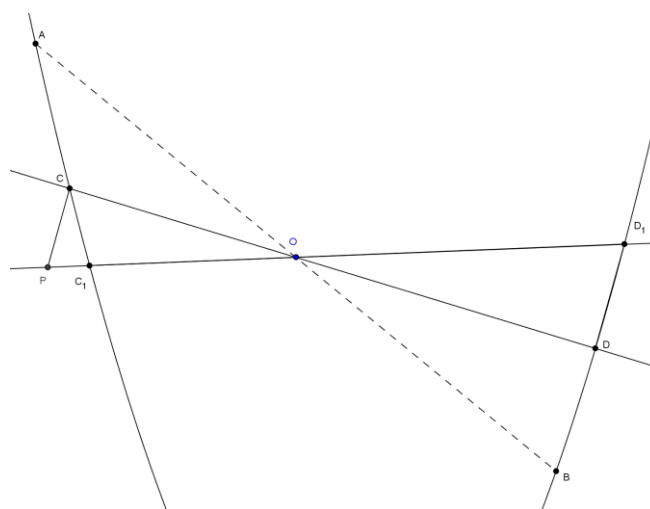
根據(㉑)知 $\overline{OC} < \overline{OD}$

則 $\square OPC$ 面積 $<$ $\square OD_1D$ 面積

∴ 弧形 COC_1 面積 $<$ 弧形 OD_1D 面積

其餘面積同理可證

(設此結論為※)



圖(二)

根據※知道：

弧形 OEC_n 面積 $<$ 弧形 OFD_n 面積

弧形 OC_nC_{n-1} 面積 $<$ 弧形 OD_nD_{n-1} 面積

∴

弧形 OC_2C_1 面積 $<$ 弧形 OD_2D_1 面積

弧形 OC_1C 面積 $<$ 弧形 OD_1D 面積

又弧形 OEA 面積=弧形 OEC_n 面積+弧形 OC_nC_{n-1} 面積+ $\square\square\square$ +弧形 OC_2C_1 面積+弧形 OC_1C 面積+弧形 OCA 面積

弧形 OFB 面積=弧形 OFD_n 面積+弧形 OD_nD_{n-1} 面積+ $\square\square\square$ +弧形 OD_2D_1 面積+弧形 OD_1D 面積+弧形 ODB 面積

故 弧形 OEA 面積<弧形 OFB 面積

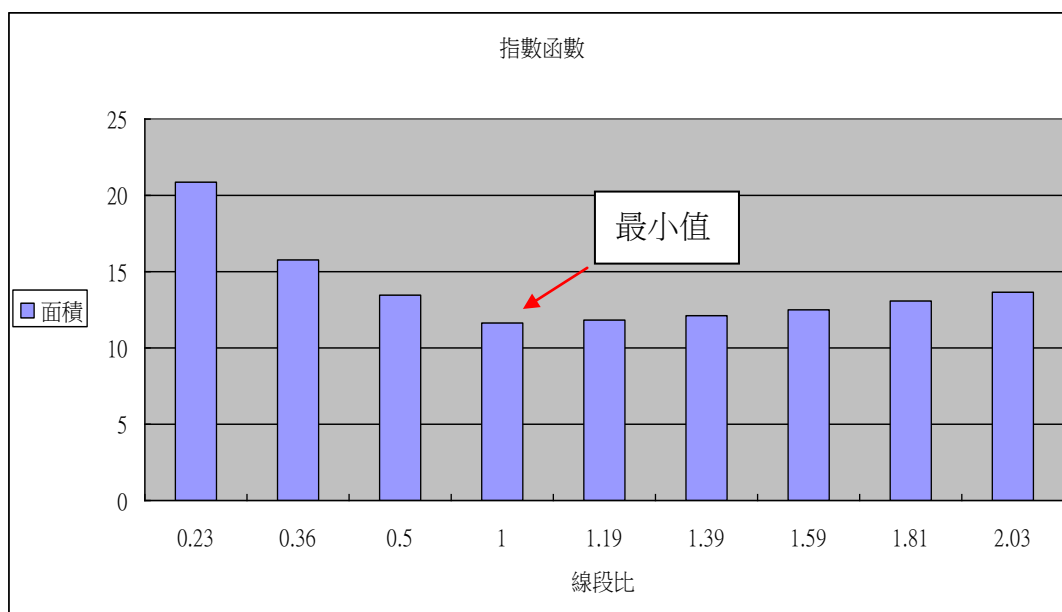
(設此結論為ⓑ)

由上述 2 證明可知雙曲線內一定點，該點的中點弦與雙曲線所圍面積 E ，則 E 過該點之弦與雙曲線所圍面積中的最小面積。

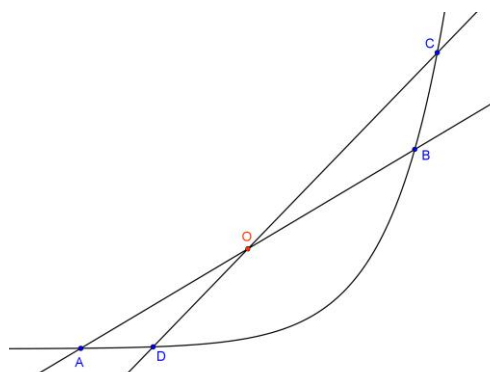
在證明過程中，我們是利用每次的旋轉，增加的面積都會大於減少的面積來證明的，故符合我們的長條圖形，遠離中點弦時，面積會遞增。

五、指數函數內一定點，該點的中點弦與指數函數所圍面積 E ，則 E 為過該點之弦與指數函數所圍面積中的最小面積。

利用數學軟體算出指數函數與過該點弦所圍面積，改變弦的斜率，使線段比產生變化，發現越接近中點弦時(線段比值=1)，有較小的面積。(表格說明，藍色面積為弦與函數圖形圍出面積。假設固定點 O ，弦與函數兩相交於 A 、 B 兩點，且線段比等於 $\overline{AO}:\overline{BO}$ 。)



說明：指數函數為只由一個凹口的曲線函數圖形，而在雙曲線的證明當中，我們已知當函數曲線圖形只有一個凹口時皆正確。



證明：

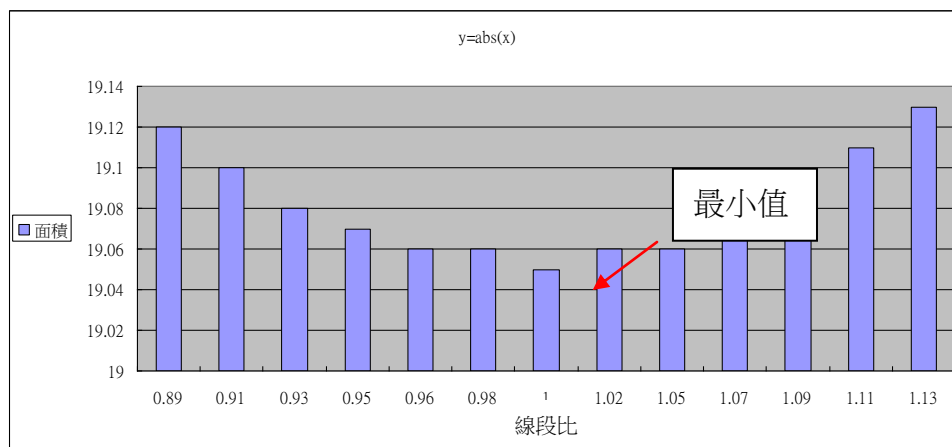
如上圖

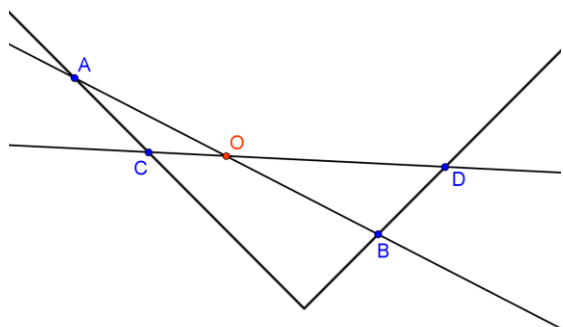
根據雙曲線證明中Ⓐ、Ⓑ結論，可知指數函數內一定點，該點的中點弦與指數函數所圍面積 E，則 E 為過該點之弦與指數函數所圍面積中的最小面積。

說明：既然我們已知當函數曲線圖形只有一個凹口時皆正確，故可以使用相同的方法去解出拋物線。

六、 $y = |x|$ 函數內一定點，該點的中點弦與 $y = |x|$ 函數所圍面積 E，則 E 為過該點之弦與 $y = |x|$ 函數所圍面積中的最小面積。

利用數學軟體算出 $y = |x|$ 與過該點弦所圍面積，改變弦的斜率，使線段比產生變化，發現越接近中點弦時(線段比值=1)，有較小的面積。(表格說明，藍色面積為弦與函數圖形圍出面積。假設固定點 O，弦與函數兩相交於 A、B 兩點，且線段比等於 $\overline{AO} : \overline{BO}$ 。)





證明：

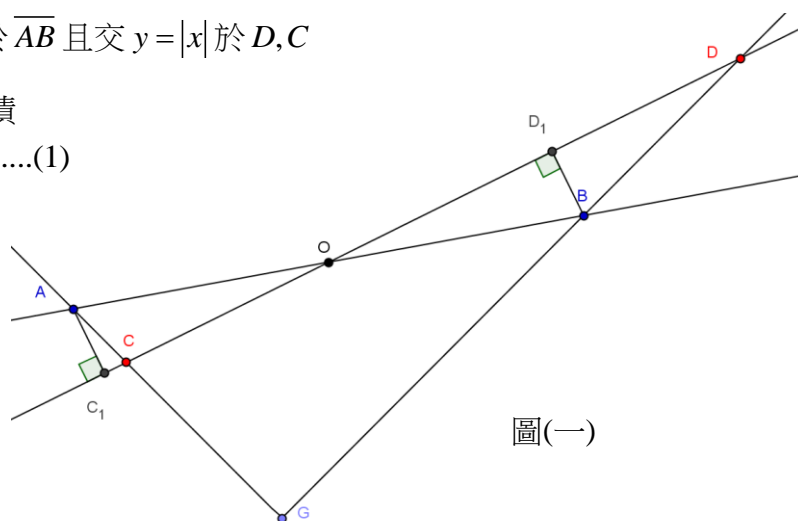
如圖(一)

已知 \overline{AB} 為 $y = |x|$ 的中點弦， O 為 \overline{AB} 中點

假設有一直線 L 之斜率大於 \overline{AB} 且交 $y = |x|$ 於 D, C

且設 $\square ABG$ 面積 $>$ $\square CGD$ 面積

即 $\square AOC$ 面積 $>$ $\square BOD$ 面積.....(1)



圖(一)

在 \overline{CD} 上兩點 C_1, D_1

使 $\overline{AC_1} \perp \overline{CD}, \overline{BD_1} \perp \overline{CD}$

且 $\square OAC_1$ 面積 $>$ $\square OAC$ 面積, $\square OBD$ 面積 $>$ $\square OBD_1$ 面積

$\because \overline{OA} = \overline{OB}, \angle AOC_1 = \angle BOD_1, \angle AC_1O = \angle BD_1O = 90^\circ$

$\therefore \square AOC_1 \cong \square BOD_1$ (AAS)

$\Rightarrow \square OBD$ 面積 $>$ $\square OBD_1$ 面積 $= \square OAC_1$ 面積 $>$ $\square OAC$ 面積

$\square OBD$ 面積 $>$ $\square OAC$ 面積與(1)矛盾

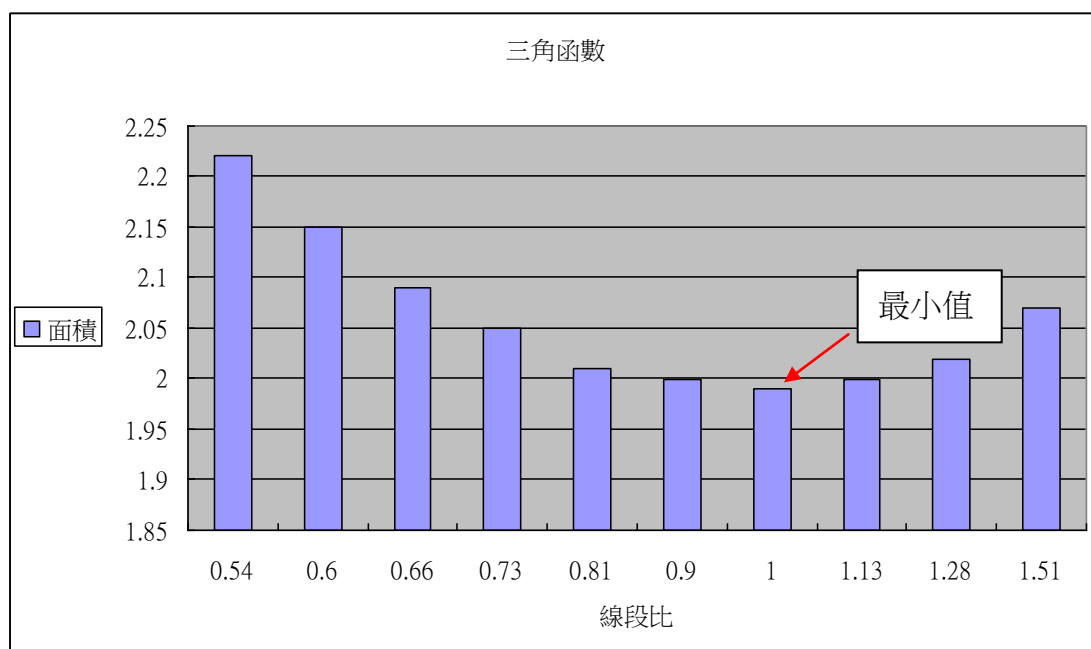
因此 $\square BGA$ 之面積為過 O 之弦圍出之最小值

當 L 斜率小於 \overline{BC} 時同理可證

故中點弦圍出之面積為最小值

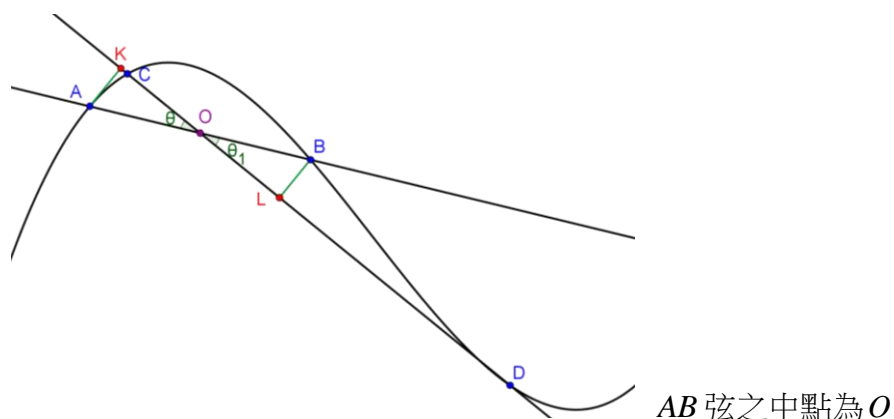
七、 $y = \sin(x)$ 函數內一定點，該點的中點弦與 $y = \sin(x)$ 函數所圍面積 E ，則 E 為過該點之弦與 $y = \sin(x)$ 函數所圍面積中的最小面積。

利用數學軟體算出 $y = \sin(x)$ 與過該點弦所圍面積，改變弦的斜率，使線段比產生變化，發現越接近中點弦時(線段比值=1)，有較小的面積。(表格說明，藍色面積為弦與函數圖形圍出面積。假設固定點 O ，弦與函數兩相交於 A 、 B 兩點，且線段比等於 $\overline{AO}:\overline{BO}$ 。)



說明：在雙曲線及指數函數的證明當中，我們已知當函數為只一個凹口的曲線時，中點弦會與函數圖形圍出最小面積，但在 $y = \sin(x)$ 中，考慮 $0 \leq x \leq 2\pi$ ，有兩個凹口且上下反向，故須考慮凹口方向改變後的特性。

證明：在凹口方向改變的函數圖形中，中點弦與函數圖形會圍出最小面積。



Pf :

如上圖

做另一弦 \overline{CD} 過 O 點，且使得 $\triangle OCA$ 及 $\triangle OBD$ 為鈍角三角形

在 \overline{CD} 上做 K 和 L ，使得 $\overline{AK} \perp \overline{CD}$ 及 $\overline{BL} \perp \overline{CD}$

又 $\angle KOA = \theta = \theta_1 = \angle BOL$ (對頂角)

$$\angle AKO \cong \angle BLO$$

$\overline{OA} = \overline{OB}$ 為 \overline{AB} 中點

$\therefore \triangle OAK \cong \triangle OBL$ (AAS)

弧形 OAC 面積 $<$ $\triangle OAK$ 面積 $= \triangle OBL$ 面積

又弧形 OBD 面積 $>$ $\triangle OBL$ 面積

故弧形 $OBD >$ 弧形 OAC

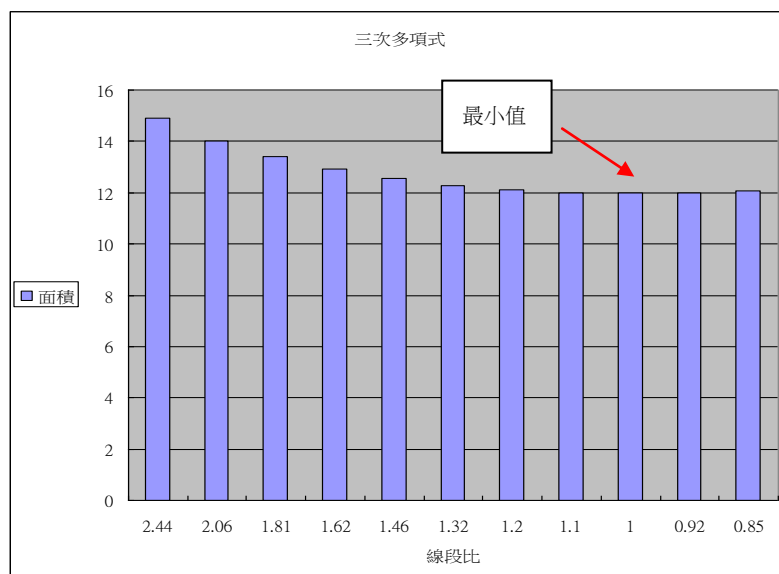
當 $\angle OCA$ 或 $\angle OBD$ 不為鈍角時，可根據⑥的方法同理可證。

(設此結論為⑦)

故中點弦圍出之面積為最小值

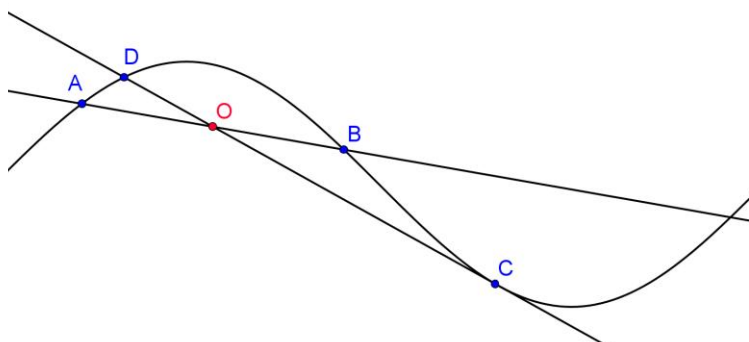
八、三次多項式函數內一定點，該點的中點弦與三次多項式函數所圍面積 E ，則 E 為過該點之弦與三次多項式函數所圍面積中的最小面積。

利用數學軟體算出三次多項式函數與過該點弦所圍面積，改變弦的斜率，使線段比產生變化，發現越接近中點弦時(線段比值=1)，有較小的面積。(表格說明，藍色面積為弦與函數圖形圍出面積。假設固定點 O ，弦與函數兩相交於 A 、 B 兩點，且線段比等於 $\overline{AO}:\overline{BO}$ 。)



說明：

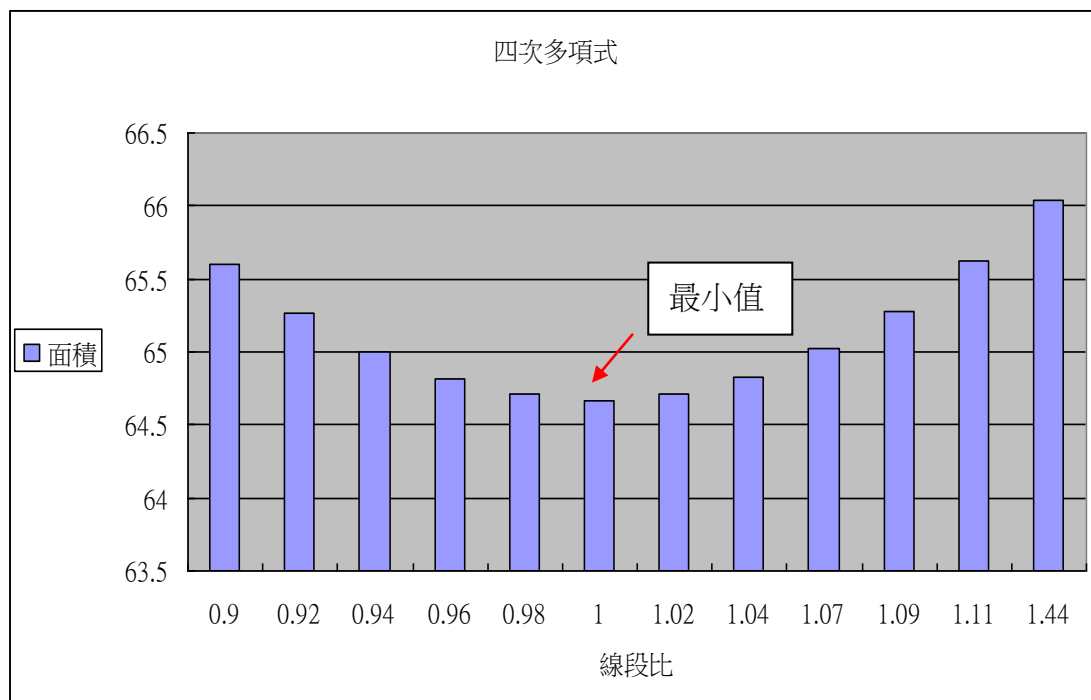
在上述 $y = \sin(x)$ 的證明中，已知在兩凹口反向的曲線函數圖形中，會有中點弦的性質。而三次多項式函數也為兩凹口反向的曲線函數圖形。



證明：根據㉔結論可知中點弦與三次多項式函數所圍出的面積小於其他弦與三次多項式函數所圍出的面積。

九、四次多項式函數內一定點，該點的中點弦與四次多項式函數所圍面積 E ，則 E 為過該點之弦與四次多項式函數所圍面積中的最小面積。

利用數學軟體算出四次多項式函數與過該點弦所圍面積，改變弦的斜率，使線段比產生變化，發現越接近中點弦時(線段比值=1)，有較小的面積。(表格說明，藍色面積為弦與函數圖形圍出面積。假設固定點 O ，弦與函數兩相交於 A 、 B 兩點，且線段比等於 $\overline{AO}:\overline{BO}$ 。)



說明：

我們已知當曲線函數圖形為一凹口或兩凹口反向時，都會有中點弦的性質。而四次多項式函數圖形為有兩同向凹口的函數曲線圖形，故須證明當弦經過兩同向凹口時的面積變化關係。

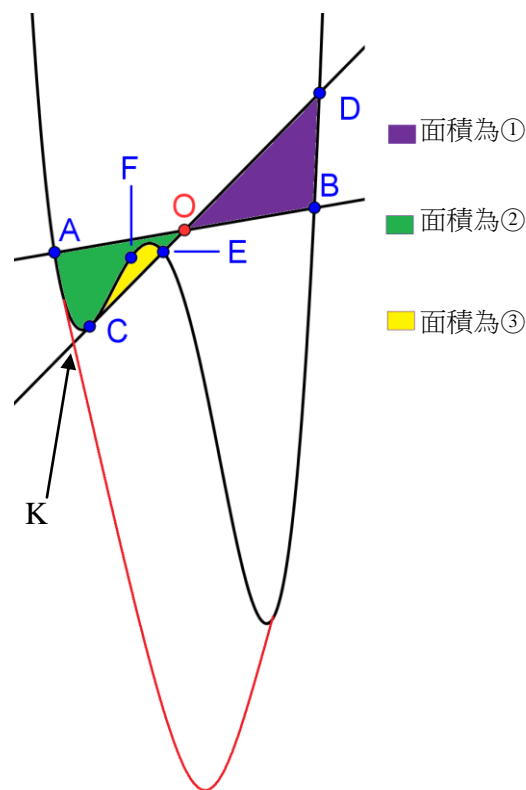
證明：當函數圖形為四次函數時，中點弦會與之圍出最小面積。

Pf：如右圖

(O 為 AB 弦之中點)

在四次函數中，當弦 AB 轉至 CD 弦時，發現減少的面積是②。

故做一曲線 **——**，使函數成為只有一個凹口的函數圖形



根據結論⑥

① > 弧形 OAK > ②，故得證

(設此結論為④)

十、歸類各式函數圖形，找出到底哪種函數圖形的中點弦會與該函數圖形為出最小的面積。

在我們目前所學的函數圖形及圓錐曲線當中：

- (1) 圓與橢圓可以利用圓內幕性質以及投影的方法，可知中點弦會與其圍出最小的面積。
- (2) 雙曲線、拋物線、指數函數和 $y = |x|$ 可根據結論①、②，可知中點弦會與其圍出最小的面積。
- (3) $\square OAC \cong \square OBD$ 、三次多項式函數可根據結論①、③，可知中點弦會與其圍出最小的面積。
- (4) 四次多項式函數可根據結論①、②、③、④，可知中點弦會與其圍出最小的面積。
- (5) 根據以上結論，我們發現自奇次函數利用①、③、④，中點弦會與之圍出最小面積，偶次函數利用①、②、③、④，中點弦會與之圍出最小面積。故多項式函數圖形中，中點弦會與函數圖形圍出最小面積。

補充：已知中點弦會與函數圖形圍出最小面積，但我們去忽略了，中點弦是否只有唯一一條。

證明：中點弦的唯一性。

已知 \overline{AB} 為過點 O 之中點弦

假設固定點 O 且逆時針轉動時有第二條中點弦 \overline{CD}

連接 $\overline{BD}, \overline{AE}$ 使 $\overline{BD} // \overline{AE}$, E 為直線 DE 上一點

$\because \overline{OA} = \overline{OB}, \angle AOC = \angle BOD, \angle AOE = \angle OBD$

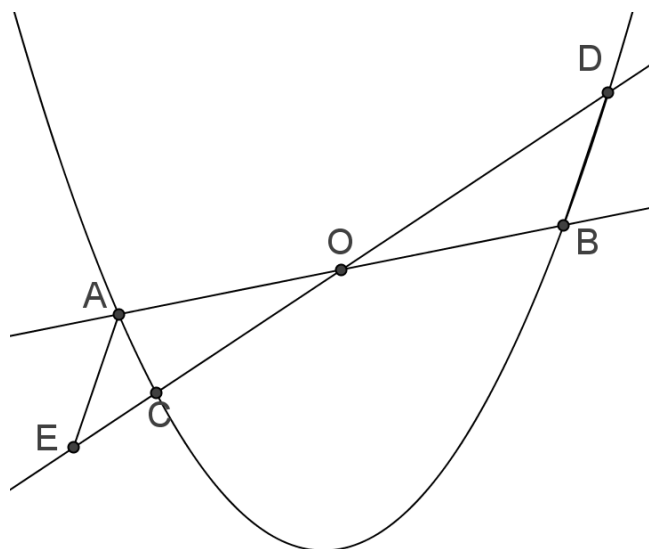
$\therefore \triangle OAE \cong \triangle OBD$

根據 $\triangle OAE \cong \triangle OBD$ 得知 $\overline{OD} = \overline{OE}$

又 $\because \overline{OD} = \overline{OE} \therefore \overline{OD} > \overline{OC}$

順時針轉時同理可證

故可知函數中過定點之中點弦只有一條



函數圖形方法	圓幕定理	投影	積分	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ
圓	▲			★	★		
橢圓	▲	▲		★	★		
拋物線			▲	★	★		
雙曲線				★	★		
指數函數				★	★		
$y= x $				★	★		
$y=\sin(x)$				★		★	
三次多項式函數				★		★	
四次多項式函數				★	★	★	★
奇次多項式函數				★		★	★
偶次多項式函數				★	★	★	★
任意多項式函數				★	★	★	★

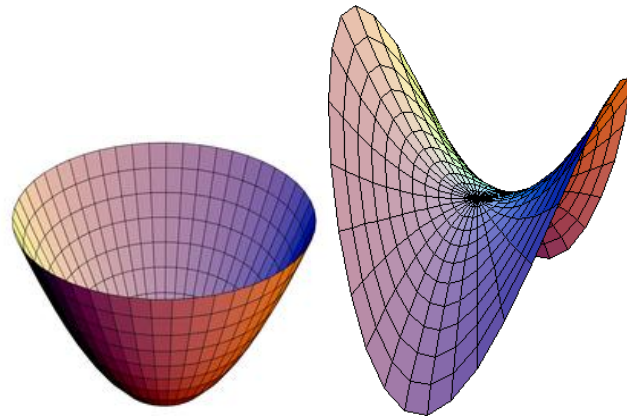
捌、 研究結論

- 一、圓與橢圓本身及為同一個圓錐所切出的圖形，故可用投影的方法，證明中點弦會與圖形圍出最小面積。
- 二、圓、橢圓、雙曲線、拋物線、 $y = |x|$ 、指數函數、 $y = \sin(x)$ 、三次多項式函數、四次多項式函數和所有多項式函數圖形，當可定義中點弦時，中點弦會與函數圍出最小面積。
- 三、我們從各個圖形的長條圖中發現，弦與函數圖形圍出的面積，當該弦越接近中點弦時，面積越小。由此我們也證明出將中點弦以順時鐘(或逆時鐘)方向旋轉時，弦與函數圖形所圍面積會遞增。

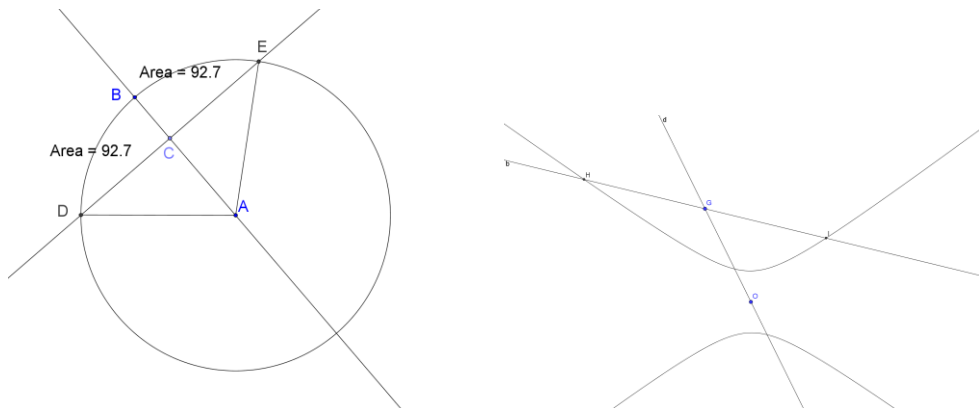
玖、 研究心得

在這次的研究過程中，我們得到最多的，就是可以把問題解開的那種喜悅，不是一兩分鐘的努力，而是花了一個假日甚至好幾個禮拜所研究出來的結果，當下我們兩個人的感動是不言而喻的！當想放棄的時候，那份好奇心還有源源不斷求知慾，就支持我們做下去。有時候時間對我們來說真的不夠，還有好多好多的問題可以得到解答。這次的研究真的讓我們發現數學是真的真的很有趣也很值得令人思考，從軟體的應用中，就可以深深的了解到，並不是紙上作業就可以完成一切的，做這次的科展真的讓我們受益良多！

壹拾、 未來研究目標



- 一、 往立體的圖形研究。
- 二、 生活中的應用。(這個理論在醫學中，可運用在切除器官時，如何切下最小的體積)
- 三、 我們也發現在圓錐曲線中直徑可以將圍出的最小面積平分。



- 四、 當直線與函數同時切出多個面積時的最小面積和。

壹拾壹、 參考資料

- 一、 科學教育月刊 272 期 93/9 。
- 二、 高二下數學課本。(南一版)
- 三、 高三下選修數學課本。(南一版)
- 四、 各個數學網站(請參照附錄)
- 五、 函數圖形與直線所圍城面積之最小值問題(請參照附錄)

附錄（各式函數圖形的積分或面積計算）：

（一）、圓：利用扇形面積減去三角形面積即可。

（二）、橢圓：

（A）

<http://frankliou.wordpress.com/2009/12/02/%E6%A9%A2%E5%9C%93%E7%A9%8D%E5%88%86/>

（B）

<http://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%A4%AD%E5%9C%86%E7%A7%AF%E5%88%86>

在這兩個網站中，我們發現橢圓中點弦和橢圓所圍出的面積並不是這麼好計算的，而且也已經超出了我們高中教材的範圍。

（三）、雙曲線：

http://www.amath.nchu.edu.tw/~tdoc/9_2.htm

我們也發現雙曲線積分過於困難，超越我們的能力範圍

（四）、各式函數

http://www.amath.nchu.edu.tw/~tdoc/9_2.htm

我們如果在各式函數時，運用積分去證明，我們必須要證明每一個係數改變的情況，如果證完一個，還會有千千萬萬個。

【評語】 040414

幾何裡的極值問題是促成數學發展的原動力。有關極值問題的最基本的證明往往是需要經歷嚴密的分析方法來證明，而分析方法則有深有淺。人們熟知的不等式即為重要的方法。許多較為深入的方法就必須倚賴代數拓樸、代數幾何、幾何分析、變分法、幾何分析才得以進行。幾年前許多數學家投入 Kepler 猜測的證明，但是似乎都被找到漏洞而被列入無可救藥的證明。在中學階段，有關幾何極值的證明若能夠達到作者如此周詳的策劃及表達，算是非常理想的展示。敬請作者努力建立深入的數學方法，到一定程度時即可將科展所出現的漏洞一一補足。