中華民國第51屆中小學科學展覽會

作品說明書

高中組　數學科

第二名

040413

環環相扣—二階遞迴數列探討

學校名稱：國立宜蘭高級中學

作者：	指導老師：
高二 吳羽倫	楊明雯

關鍵詞：遞迴數列、子元素、出現次數

摘要

二階遞迴數列與一般遞迴數列最大的不同之處在於一般遞迴數列的足碼是n的函數；而二階遞迴數列卻是n與A_n的函數，這代表在求出第n項不只需要參照前兩項的值，還必須參照過去未知項的值，而這個特殊的性質會造成有些二階遞迴數列因為無法參照而無法成立於是，我刻意不找出足碼的值是多少，而重點在於前後兩項足碼的〝差異〞，而因為在數列中有特殊涵義，因此特稱〝子元素〞。

〝出現次數〞也是很重要的研究工具，因為每一項都必須參照過去〝未知〞項的值，這就代表了代表前面的值會影響後面的值。

研究過程如下：

1. 找出子元素的性質
2. 利用子元素的性質找出出現次數的規律以及每個區間的影響範圍
3. 利用出現次數的規律找出一般項

壹、研究動機

高一時，老師曾經發過一張關於遞迴數列的補充資料，同時在Mathworld中卻看到更奇怪的遞迴數列，例如$A_n = A_{A_{n-A_{n-1}}} + A_{A_{n-1}}$，足碼竟然也需要參考$A_n$的值，而找到其他類似的數列例如G-Sequence, Q-Sequence,Hofstadter-Conway \$10000 Sequence…等，發現許多都是Hofstadter所提出的，而且這些數列都在時代雜誌科學專欄一起被提出，而既然是一起被提出，就代表這些數列一定有些規律是相仿的，這個想法激起的我的挑戰的心態，試圖找出一種方法，能夠找出這些數列的所有規律及一般項。

而在研究過程中，無意間創造了$A_1 = A_2 = 1$，$A_n = A_{n-A_{n-1}} + A_{n-1-A_{n-2}}$這個數列，並發現在研究此數列的方法可套用在Hofstadter的數列，而所有的研究就由此開始。

貳、研究目的

利用子元素的性質以及出現次數的規律求出二階費氏數列、Hofstadter-Conway \$10000 Sequence以及Hofstadter G-Sequence的規律以及一般項…等。

參、研究設備及器材

紙、筆、電腦(Excel)

肆、研究過程及方法（二階費氏數列）

一、數列簡介

$A_1 = A_2 = 1$，$A_n = A_{n-A_{n-1}} + A_{n-1-A_{n-2}}$，這是一個無意間創造出來的數列，因為可以寫成$A_n = A_{\alpha_n} + A_{\alpha_{n-1}}$（其中$\alpha_n = n - A_{n-1}$）的模式，因此稱之為二階費氏數列。

二、數列初探討

一開始，先利用 Excel 列出n及A_n兩者之間的關係：

n	A_n	n	A_n	n	A_n	n	A_n
1	1	17	9	33	17	49	26
2	1	18	10	34	18	50	26
3	$\boxed{2}$	19	10	35	18	51	27
4	$\boxed{2}$	20	11	36	19	52	28
5	3	21	12	37	20	53	28
6	$\boxed{4}$	22	12	38	20	54	28
7	$\boxed{4}$	23	12	39	20	55	29
8	$\boxed{4}$	24	13	40	21	56	30
9	5	25	14	41	22	57	30
10	6	26	14	42	22	58	31
11	6	27	15	43	23	59	$\boxed{32}$
12	7	28	$\boxed{16}$	44	24	60	$\boxed{32}$
13	$\boxed{8}$	29	$\boxed{16}$	45	24	61	$\boxed{32}$
14	$\boxed{8}$	30	$\boxed{16}$	46	24	62	$\boxed{32}$
15	$\boxed{8}$	31	$\boxed{16}$	47	24	63	$\boxed{32}$
16	$\boxed{8}$	32	$\boxed{16}$	48	25	64	$\boxed{32}$

（表 5-1）

發現：

（一）、$A_{2^k} = 2^{k-1}$

（二）、有$k+1$個n值使$A_n = 2^k$，例如有 13,14,15,16 四個值使$A_n = 2^3 = 8$

（三）、若項數（A_n的值）爲奇數，則只會有 1 個n值使該項數成立。

例如$A_n = 7$的n值只有 12 一個。

※$A_1 = A_2 = 1$是硬性規定所以不予考慮

（四）、$A_n - A_{n-1} = 0 \vee 1$，稱爲本數列遞增

二、出現次數的討論

在這裡先介紹兩個名詞：出現次數以及出現次數數列B：

在數列中有k個n值使$A_n = n'$，那麼k就是n'的出現次數，例如有 21、22、23 三個n值使$A_{21} = A_{22} = A_{23} = 12$，所以 12 的出現次數=3

出現次數數列則是$B_n =$（項數爲n的出現次數），記住，這裡的n跟A_n的下標是不一樣的意思，爲了區分，在這裡我做個例子：

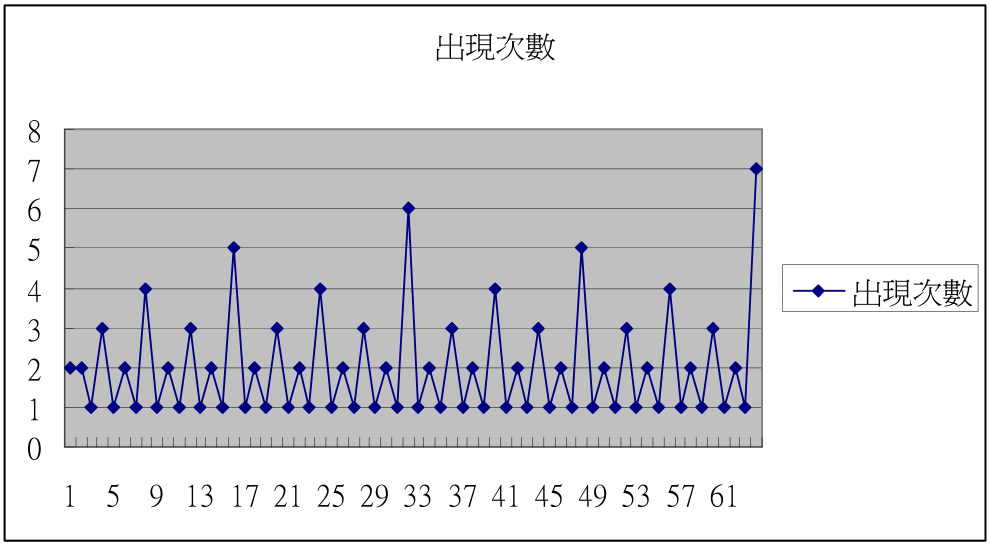
（一）、$B_{12} = 3$，指的就是項數等於 12 的出現次數爲三

（二）、$B_{A_{22}} = 3$，則是指$A_{22} = 12$，12 的出現次數爲三

所以這兩個代表的是相同的意義。

※還有一點要注意的是：$B_{A_{21}} = B_{A_{22}} = B_{A_{23}} = B_{12} = 3$

之前已經知道$B_{2k+1}=1$了，而其它項數的出現次數用圖表來觀察：



（圖 5-1）

A_n	B_n	A_n	B_n	A_n	B_n	A_n	B_n
1	2	17	1	33	1	49	1
2	2	18	2	34	2	50	2
3	1	19	1	35	1	51	1
4	3	20	3	36	3	52	3
5	1	21	1	37	1	53	1
6	2	22	2	38	2	54	2
7	1	23	1	39	1	55	1
8	4	24	4	40	4	56	4
9	1	25	1	41	1	57	1
10	2	26	2	42	2	58	2
11	1	27	1	43	1	59	1
12	3	28	3	44	3	60	3
13	1	29	1	45	1	61	1
14	2	30	2	46	2	62	2
15	1	31	1	47	1	63	1
16	5	32	6	48	5	64	7

（表 5-2）

從（圖 5-1）可以看出出現次數是具有一定規律的，但是並不是隨著項數的增加而增加，所以與其逐一討論哪些項數是哪些出現次數，不如討論出現次數相同的項數有哪些來的有效率。

再觀察（表 5-2），$B_n=1$時$n=2k+1$（$n\neq 1$）；$B_n=2$時$n=4k-2$，$B_n=3$時$n=8k-4\cdots$，而$2k-1$、$4k-2$、$8k-4\cdots$都可以表示成$2^l(2k-1)$的樣子，所以出現次數跟 2 的冪次有一定的關係，經過整理後，發現$B_n=k$時，$n=2^{k-1}(2l-1)$ （除了$B_1=2$是硬性規定以外），而

稍後會在證明這樣的規律。

三、A_n 到 n

利用剛剛觀察出的出現次數公式以及數列遞增的性質，推論出：

$$A_{(B_1+B_2+B_3+...+B_{n-1})+1}=A_{(B_1+B_2+B_3+...+B_{n-1})+2}=A_{(B_1+B_2+B_3+...+B_{n-1})+3}=...=A_{(B_1+B_2+B_3+...+B_{n-1}+B_n)}=n$$

$$\Rightarrow A_{(\sum_{k=1}^{n-1}B_k)+1}=A_{(\sum_{k=1}^{n-1}B_k)+2}=...=A_{(\sum_{k=1}^{n}B_k)}=n$$

例如 $A_{(\sum_{k=1}^{11}B_k)+1}=A_{(\sum_{k=1}^{11}B_k)+2}=...=A_{(\sum_{k=1}^{12}B_k)}=12$

如果我們要找出哪個項數分布在哪幾項，只要帶入就可以得到解了，只是這樣的公式並不算方便，因為我們不可能一個一個去記出現次數，所以我利用出現次數公式來化簡：

（一）、$B_{2^k(2l-1)}=k+1$，這個公式表達的意思是（把 n 化成標準分解式，質因數中 2 的冪次為 k，則 $B_n=k+1$），因此剛剛的式子可以改寫成 $\sum_{k=1}^{n}B_k=\sum_{k=1}^{n}(k\text{的標準分解式中2的冪次}+1)+1$，後面要加 1 式因為 $B_1=2$ 而非帶入公式得出的 1

（二）、

$$(A\text{的標準分解式中2的冪次})+(B\text{的標準分解式中2的冪次})=(A\times B\text{的標準分解式中2的冪次})$$

根據這個關係，就可以把剛剛的 $\sum_{k=1}^{n}(k\text{的標準分解式中2的冪次}+1)+1$ 改寫成

$$\sum_{k=1}^{n}(k\text{的標準分解式中2的冪次})+n+1=n!\text{的標準分解式中2的冪次}+n+1$$

（三）、$n!\text{的標準分解式中2的冪次}=\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{4}\right]+\left[\frac{n}{8}\right]+...=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{n}{2^k}\right]$，其中[ ]為高斯記號，帶入式子後得到 $n!\text{的標準分解式中2的冪次}+n+1=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{n}{2^k}\right]+n+1=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{n}{2^k}\right]+1$

最終就能得到 $A_{\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{n-1}{2^k}\right]+2}=A_{\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{n-1}{2^k}\right]+3}=A_{\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{n-1}{2^k}\right]+4}=...=A_{\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{n}{2^k}\right]+1}=n$

而最明顯的例子則是：$\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{2^l}{2^k}\right]+1=2^{l+1}\Rightarrow A_{2^{l+1}}=2^l$

四、子元素

在一開始我們提過 $A_n=A_{n-A_{n-1}}+A_{n-1-A_{n-2}}=A_{\alpha_n}+A_{\alpha_{n-1}}$，其中 $\alpha_n=n-A_{n-1}$，稱之為〝子元素〞。

子元素在二階遞迴數列中佔有相當重要的地位，原因是

$\alpha_{n+1}-\alpha_n=(n+1-A_n)-(n-A_{n-1})=1-(A_n-A_{n-1})$，利用這個關係式就可以把前後三項串聯起來！

一般遞迴數列與二階遞迴數列的比較：

（一）、一般遞迴數列：先找到前兩項的值，就可以找到第三項的值
（二）、二階遞迴數列：就算知道前兩項的值，也沒辦法找到第三項的值，但是可以先找到第三項的子元素，在往上推回一般項，如此一來就可以知道第三項和第二項的差異了。

名詞解釋：子元素：即α_n　　子項：A_{α_n}　　子項數：A_{α_n}的值

關於子元素的三項性質：
（一）、$\alpha_{n+1}-\alpha_n=(n+1-A_n)-(n-A_{n-1})=1-(A_n-A_{n-1})=1-0\vee 1-1=1\vee 0$

（二）、$\alpha_{n+1}=\alpha_n$時，$A_{\alpha_{n+1}}=A_{\alpha_n}$；$\alpha_{n+1}=\alpha_n+1$時，$A_{\alpha_{n+1}}-A_{\alpha_n}=A_{\alpha_n+1}-A_{\alpha_n}=0\vee 1$（5-1-4 式）

總結：$A_{\alpha_{n+1}}-A_{\alpha_n}=0\vee 1$

（三）、因為$A_{\alpha_{n+1}}-A_{\alpha_n}=0\vee 1$，$A_n=2k$時，$A_{\alpha_n}=A_{\alpha_{n-1}}=k$；$A_n=2k+1$時，$A_{\alpha_n}=A_{\alpha_{n-1}}+1=k+1$

總結：$A_{\alpha_n}=\left[\dfrac{A_n+1}{2}\right]$；$A_{\alpha_{n-1}}=\left[\dfrac{A_n}{2}\right]$

五、出現次數的證明

（一）、令$A_n=2k$，$A_{n+1}=2k+1$，則$\alpha_{n+2}-\alpha_{n+1}=1-1=0\Rightarrow A_{n+2}=2A_{\alpha_{n+1}}=2\left[\dfrac{2k+2}{2}\right]=2k+2$

結論：上述的情況解釋了$B_{2k+1}=1$

（二）、$\alpha_{n+3}-\alpha_{n+2}=1-(A_{n+2}-A_{n+1})=0\Rightarrow A_{\alpha_{n+3}}=A_{\alpha_{n+2}}=\left[\dfrac{2k+3}{2}\right]=k+1\Rightarrow A_{n+3}=2k+2$

結論：$B_{2k}\geq 2$（項數為偶數的出現次數至少為 2）

（三）、令$A_n=2k-1$，$A_n=2k$且$B_{2k}=n'$：

n	$n-1$	n	$n+1$	$n+2$	$n+3$	$\cdots$	$n+n'$	$n+n'+1$
A_n	$2k-2$	$2k-1$	$2k$	$2k$	$2k$		$2k$	$2k+1$
A_{α_n}	$k-1$	k	k	k	k		k	$k+1$
α_n	l	$l+1$	$l+1$	$l+1$	$l+2$		$l+n'-1$	$l+n'$

（表 5-3）

從（表 5-3）中可以看到，$B_{2k}=n'$時

$A_{l+1}=A_{l+2}=A_{l+3}=...=A_{l+n'-1}=k\Rightarrow B_k=(l+n'-1)-(l+1)+1=n'-1=B_{2k}-1$，也就是：

$B_{A_n}=B_{A_{\alpha_n}}+1$；$B_{2k}=B_k+1$

這個式子證明了：$B_{2^k(2l-1)}=B_{2^{k-1}(2l-1)}+1=B_{2^{k-2}(2l-1)}+2=...=B_{2l-1}+k=k+1$

六、遞增證明

到目前為止所發現的規律都是建立在一個基礎上：數列遞增。所以接下來要證明本數列遞增，以確保規律的正確性。

（一）、因為$A_1=A_2=1$，所以確定$n\leq 2$的範圍內數列遞增。

（二）、假設$n \le h$的範圍內數列遞增，因此$n \le h$的範圍內以下幾項規律成立：

1. $\alpha_{n+1}-\alpha_n=1-(A_n-A_{n-1})=0\vee 1$

2. $B_{2^k(2l-1)}=k+1$

3. $A_{\alpha_n}=\left[\dfrac{A_n+1}{2}\right]=\left[\dfrac{A_{n+1}}{2}\right]$

2. $A_{\alpha_n}\le A_{n-1}$（原因：$A_{n-1}\ge 1\Rightarrow \alpha_n=n-A_{n-1}\le n-1\Rightarrow A_{\alpha_n}\le A_{n-1}$）

（三）、(A_{h-1},A_h)有三種可能：（偶，偶）、（奇，偶）、（偶，奇），根據出現公式，不可能出現（奇，奇）的情況，而在$n\le h$的範圍內數列遞增，所以可以把這三種情況設爲$(2k,2k)$、$(2k-1,2k)$、$(2k,2k+1)$。

1. $(A_{h-1},A_h)=(2k,2k)$：$a_{h+1}=\alpha_h+1$，而$A_{\alpha_{h+1}}-A_{\alpha_h}=A_{\alpha_{h+1}}-k=0\vee 1\Rightarrow A_{h+1}=2k\vee 2k+1$

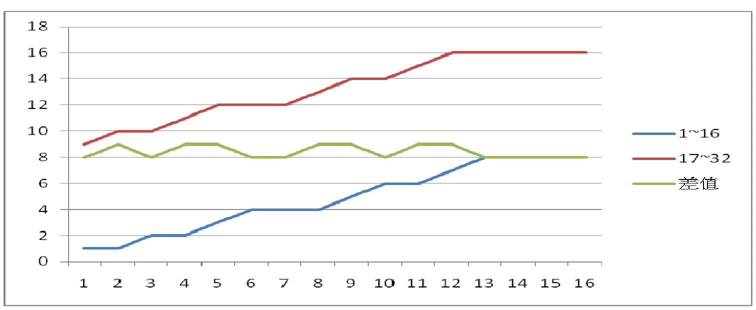
2. $(A_{h-1},A_h)=(2k-1,2k)$：$\alpha_{h+1}=\alpha_h$，因此$A_{h+1}=A_{\alpha_{h+1}}+A_{\alpha_h}=2A_{\alpha_n}=2k$

3. $(A_{h-1},A_h)=(2k,2k+1)$：$\alpha_{h+1}=\alpha_h$　，因此$A_{h+1}=A_{\alpha_{h+1}}+A_{\alpha_h}=2A_{\alpha_n}=2k+2$

三種情況皆符合$A_{h-1}-A_h=0\vee 1$，根據數學歸納法，數列遞增成立。

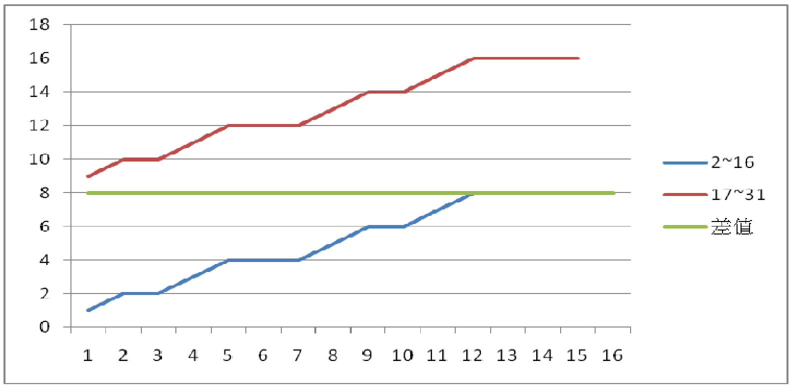
七、從n到A_n

根據（表 5-2），在$B_1\sim B_{2^k}$中除了$B_1=B_{2^{k-1}+1}+1$以及$B_{2^{k-1}}+1=B_{2^k}$以外，$B_n=B_{n+2^{k-1}}$（$2^{k-1}-1\ge n\ge 2$），這個規律所包含的意義是在前2^{k+1}項中，$A_{n+2^k}-A_n$（$2^k\ge n\ge 1$）大致是定值，從（圖 5-2）可以看出：



（圖 5-3）

而爲什麼不是定值，懷疑是因爲一開始的$B_1=2$所造成的，把本來的$A_{n+2^k}-A_n$修改成$A_{n+2^k}-A_{n+1}$，也就是忽略A_1，把 1 的出現次數當作是 1：



（圖 5-4）

（圖 5-4）是把算式改成 $A_{n+2^k}-A_{n+1}$ 所呈現出來的圖，確定兩者之差的確是定值。

至於差多少？只要帶 $n=1$ ， $A_{2^k+1}-A_2=(2^{k-1}+1)-1=2^{k-1}$ 就知道了。

接下來只要藉由 $A_{n+2^k}-A_{n+1}=2^{k-1}(2^{k-1}-1\geq n\geq 1)$ 以及 $A_{2^k}=2^{k-1}$ 這兩個公式就能計算從 n 到 A_n 了。例如 $n=27$ ：

$A_{27}=A_{27-16+1}+8=A_{12}+8=A_{12-8+1}+8+4=A_5+12=A_{5-4+1}+12+2=A_2+14=15$

或者 $n=23$ ：

$A_{23}=A_{23-16+1}+8=A_8+8=12$

對照（表 5-1），確實得到了正確的答案，只是這樣的公式並不方便，例如要計算 A_{2000} ？

$A_{2000}=A_{977}+512=A_{466}+768=A_{211}+896=\ldots$ 計算之繁複。

公式修正：（注意，以下的 a 是英文字母 a ，而不是子元素 α ，切勿搞混）

令 $a_1=n$ ， $a_h=a_{h-1}-2^{[\log_2 a_{h-1}]}+1$ （ a_{h-1} 的質因數不能只有 2），則 $A_{a_{h-1}}=A_{a_h}+2^{[\log_2 a_{h-1}]-1}$

其實這是一樣的意思，只是用高斯記號來表達限制而已，而 a_{h-1} 的質因數不能只有 2 的原因則是當 $a_{h-1}=2^k$ 時就沒有必要再算下去了。

例如 $n=27$ ，則 $a_2=27-2^{[\log_2 27]}+1=27-2^4+1=12$ ，所以 $A_{27}=A_{12}+8$

（一）、 $a_1=n$ ， $a_h=a_{h-1}-2^{[\log_2 a_{h-1}]}+1$ ，設 $a_h=2^k$ ：

$a_1=n$ ， $a_2=a_1-2^{[\log_2 a_1]}+1$ ， $a_3=a_2-2^{[\log_2 a_2]}+1$ ，⋯

這是一般的遞迴數列，所以過程不再詳述： $a_h=n-(2^{[\log_2 a_1]}+2^{[\log_2 a_2]}+\ldots+2^{[\log_2 a_{h-1}]})+(h-1)$

（二） $A_{a_1}=A_{a_2}+2^{[\log_2 a_1]-1}$ ， $A_{a_3}=A_{a_2}+2^{[\log_2 a_2]-1}$ ， $A_{a_4}=A_{a_3}+2^{[\log_2 a_3]-1}$ ，⋯， $A_{a_h}=A_{a_{h-1}}+2^{[\log_2 a_{h-1}]-1}$ 。

這也是一般的遞迴數列： $A_{a_1}=A_{a_h}+\frac{1}{2}\left(2^{[\log_2 a_1]}+2^{[\log_2 a_2]}+\ldots+2^{[\log_2 a_{h-1}]}\right)-(h-1)$

（三）、由於 $A_{a_1} = A_n$ ， $A_{a_h} = A_{2^k} = 2^{k-1} = \frac{a_h}{2}$ ，聯立就能得到 $A_n = \frac{n+h-1}{2}$

再用剛剛的 $n = 27$ 當例子： $a_1 = 27, a_2 = 12, a_3 = 5, a_4 = 2 = 2^1 \Rightarrow A_{27} = \frac{27+4-1}{2} = 15$

以及 $n = 2000$ ： $a_1 = 2000, a_2 = 977, a_3 = 466, a_4 = 211, a_5 = 84, a_6 = 21, a_7 = 6, a_8 = 3, a_9 = 2$

$\Rightarrow A_{2000} = \frac{2000+9-1}{2} = 1004$ ，顯然這樣的公式方便多了。

八、初始條件不同的狀況下

一開始我令 $A_1 = A_2 = 1$，如果改成 $A_1 = A_2 = A_3 = 1$呢？

前三項等於 1 的數列我用 A'_n 代替，以便跟原本的數列作比較，再列出表格：

n	A'_n	n	A'_n	n	A'_n	n	A'_n
1	1	17	8	33	16	49	25
2	1	18	9	34	17	50	26
3	1	19	10	35	18	51	26
4	2	20	10	36	18	52	27
5	2	21	11	37	19	53	28
6	3	22	12	38	20	54	28
7	4	23	12	39	20	55	28
8	4	24	12	40	20	56	29
9	4	25	13	41	21	57	30
10	5	26	14	42	22	58	30
11	6	27	14	43	22	59	31
12	6	28	15	44	23	60	32
13	7	29	16	45	24	61	32
14	8	30	16	46	24	62	32
15	8	31	16	47	24	63	32
16	8	32	16	48	24	64	32

發現 $A'_{n+1} = A_n$ ，這是為什麼呢？ $A_{n-A_{n-1}}$ 的意思是從第 n 項往回數的第（ A_{n-1} ）項，而在第 4 項的 A'_{α_4} 就是指從第 4 項往回數的第 1 項（因為前 3 項硬性規定等於 1，所以這裡一定是 1）；而在原本的數列中，第 3 項的 A'_{α_3} 就是指從第 3 項往回數的第 1 項，兩者的意思在本質上是相同的。換句話說，其實令前三項=1 的數列中，第 1 項根本沒被參照到，所以對數列根本沒影響。

而令 $A_1 = 1, A_2 = 2$ 呢？一樣先列表格：

n	A''_n	n	A''_n	n	A''_n	n	A''_n

1	1	17	10	33	18	49	26
2	2	18	10	34	18	50	27
3	2	19	11	35	19	51	28
4	3	20	12	36	20	52	28
5	4	21	12	37	20	53	28
6	4	22	12	38	20	54	29
7	4	23	13	39	21	55	30
8	5	24	14	40	22	56	30
9	6	25	14	41	22	57	31
10	6	26	15	42	23	58	32
11	7	27	16	43	24	59	32
12	8	28	16	44	24	60	32
13	8	29	16	45	24	61	32
14	8	30	16	46	24	62	32
15	8	31	16	47	25	63	32
16	9	32	17	48	26	64	33

發現 $A''_{n-1} = A_n$，原因也是差不多的，本來應該要在第三項項數才會等於 2，而令 $A_1 = 1, A_2 = 2$ 只是提前讓第二項就等於 2 了。

伍、研究過程及方法（Hofstadter Conway-$10000 Sequence）

二、數列初探討

$A_1 = A_2 = 1$，$n \in N \geq 3$，$A_n = A_{A_{n-1}} + A_{n-A_{n-1}}$ 這是 Conway 數列的公式。

首先列出 n 與 A_n 表格以及 A_n 與 B_n 的表格

n	A_n	n	A_n	n	A_n	n	A_n
1	1	17	9	33	17	49	28
2	1	18	10	34	18	50	29
3	2	19	11	35	19	51	29
4	2	20	12	36	20	52	30
5	3	21	12	37	21	53	30
6	4	22	13	38	21	54	30
7	4	23	14	39	22	55	31
8	4	24	14	40	23	56	31
9	5	25	15	41	24	57	31
10	6	26	15	42	24	58	31
11	7	27	15	43	25	59	32
12	7	28	16	44	26	60	32
13	8	29	16	45	26	61	32
14	8	30	16	46	27	62	32

15	8	31	16	47	27	63	32
16	8	32	16	48	27	64	32

（表 6-1）

A_n	B_n	A_n	B_n	A_n	B_n	A_n	B_n
1	2	17	1	33	1	49	1
2	2	18	1	34	1	50	1
3	1	19	1	35	1	51	2
4	3	20	1	36	1	52	1
5	1	21	2	37	1	53	2
6	1	22	1	38	2	54	3
7	2	23	1	39	1	55	1
8	4	24	2	40	1	56	2
9	1	25	1	41	1	57	3
10	1	26	2	42	2	58	4
11	1	27	3	43	1	59	1
12	2	28	1	44	1	60	2
13	1	29	2	45	2	61	3
14	2	30	3	46	1	62	4
15	3	31	4	47	2	63	5
16	5	32	6	48	3	64	7

（表 6-2）

觀察發現除了 $A_{2^k} = 2^{k-1}$ 以及 $B_{2^k} = k+1$ 以外並沒有跟二階費氏數列相仿之處，原因在於二階費氏數列是 $A_n = A_{\alpha_n} + A_{\alpha_{n-1}}$，而 Conway 數列則是 $A_n = A_{\alpha_n} + A_{\beta_n}$，其中 $\beta_n = A_{n-1}$，β_n 是一個新的子元素，我認爲 β 子元素的性質一定跟 α 子元素大相逕庭，才會造成兩個數列的差異性。

三、β 子元素的性質

（一）、$\beta_{n+1} - \beta_n = A_n - A_{n-1}$，有別與 α 子元素的 $1-(A_n - A_{n-1})$：

$A_n - A_{n-1}$	0	1
$\alpha_{n+1} - \alpha_n$	1	0
$\beta_{n+1} - \beta_n$	0	1

（表 6-3）

（二）、令 $A_{n-1} = A_n = k$，$A_{n+1} = k+1$：

$\alpha_{n+2} = \alpha_{n+1}$，$\beta_{n+2} = \beta_{n+1} + 1$　如果 $A_{\beta_{n+2}} = A_{\beta_{n+1}}$，則 $A_{n+2} = A_{n+1}$，子元素輪到 α 子元素控制，所以我令 $A_{\beta_{n+2}} = A_{\beta_{n+1}} + 1$，也就是 $A_{n+2} = k+2$。因爲 $\beta_{n+3} - \beta_{n+2} = 1$，又回到剛剛的情況：

$A_{\beta_{n+3}} - A_{\beta_{n+2}} = 0$ 還是 1？如果是 0，子元素又輪到 α 子元素控制，如果是 1，則 $A_{n+3} = k+3 \cdots$

再令 $A_{n+n'} = k+n'$ 且 $A_{n+n'+1} = A_{n+n'+2} = k+n'+1$ 然後列出相關表格：

n	$n-1$	n	$n+1$	$n+2$	$n+3$	$\cdots$	$n+n'$	$n+n'+1$	$n+n'+2$
A_n	k	k	$k+1$	$k+2$	$k+3$		$k+n'$	$k+n'+1$	$k+n'+1$
A_{β_n}		l	l	$l+1$	$l+2$		$l+n'-1$	$l+n'$	$l+n'$
β_n		k	k	$k+1$	$k+2$		$k+n'-1$	$k+n'$	$k+n'+1$

（表 6-4）

從表格上可以看出當 $B_{A_{n+1}} = B_{A_{n+2}} = ... = B_{A_{n+n'}} = 1$ 時，$B_{A_{k+1}} = B_{A_{k+2}} = ... = B_{A_{k+n'-1}} = 1$

也就是說當連續 n' 個項數的出現次數是 1 的時候，β 子項也會有連續 $n'-1$ 個子項數的出現次數是 1。

但是 B_l 會不會也等於 1 呢？

令 $\alpha_n = h$，則因 $(\alpha_n, \beta_n) = (h, k)$ 且

$(\alpha_n + \beta_n) - (\alpha_{n-1} + \beta_{n-1}) = (\alpha_n - \alpha_{n-1}) + (\beta_n - \beta_{n-1}) = 1 - (A_{n-1} - A_{n-2}) + (A_{n-1} - A_{n-2}) = 1$，所以

$(\alpha_{n-1}, \beta_{n-1}) = (h-1, k) \vee (h, k-1)$。再依兩種情況討論：

1.、$(\alpha_{n-1}, \beta_{n-1}) = (h, k-1)$：

$A_k - A_{k-1} = (A_n - A_h) - (A_{n-1} - A_h) = A_n - A_{n-1} = 0$，也就是 $A_k = A_{k-1} = a \Rightarrow B_a \neq 1$

2.、$(\alpha_{n-1}, \beta_{n-1}) = (h-1, k)$：

$A_{n-1} - A_{n-2} = 1 - (\alpha_n - \alpha_{n-1}) = 0 \Rightarrow A_{n-2} = A_{n-1} = k$ 也就是回到了剛剛二選一的情況，如果延續下去，總有一天會變成第一種情況，所以可以確定 $B_l \neq 1$

（三）、令 $A_n = k-1$，$A_{n+1} = ... = A_{n+n'} = A_{n+n'+1} - 1 = k$

1.令 $A_N = n$，$A_{N+1} = n+1$：$\beta_{N+1} = n$ 且 $\beta_{N+2} = n+1$

$\Rightarrow A_{N+2} = A_{N+1} + (A_{n+1} - A_n) = n+2 \Rightarrow \beta_{N+3} = n+2 \Rightarrow A_{N+3} = A_{N+2} + (A_{n+2} - A_{n+1}) = A_{N+2} = n+2 \Rightarrow B_{n+2} \geq 2$

2.令 $A_{N_1} = n+2$，$A_{N_1+1} = n+3$：$\beta_{N_1+1} = n+2$ 且 $\beta_{N_1+2} = n+3$

$\Rightarrow A_{N_1+2} = A_{N_1+1} + (A_{n+3} - A_{n+2}) = A_{N_1+1} = n+3 \Rightarrow B_{n+3} \geq 2$

3.令 $A_{N_2} = n+3$，$A_{N_2+1} = n+4$：$\beta_{N_2+1} = n+3$ 且 $\beta_{N_2+2} = n+4$

$\Rightarrow A_{N_2+2} = A_{N_2+1} + (A_{n+4} - A_{n+3}) = A_{N_2+1} = n+4 \Rightarrow B_{n+4} \geq 2$

依此類推，直到：

4. 令 $A_{N_{n'-1}} = n+n'$，$A_{N_{n'-1}+1} = n+n'+1$：$\beta_{N_{n'-1}+1} = n+n'$ 且 $\beta_{N_{n'-1}+2} = n+n'+1$

$\Rightarrow A_{N_{n'-1}+2} = A_{N_{n'-1}+1} + (A_{n+n'+1} - A_{n+n'}) = A_{N_{n'-1}+1} + 1 = n+n'+2 \Rightarrow B_{n+n'+1} = 1$

上述的公式的意義是：
如果β子項數的出現次數爲n'，則會有連續$n'-1$個項數的出現次數≥ 2

四、出現次數排列
先列出剛剛有關α及β的三個性質：

（一）$B_{A_n} = B_{A_{\alpha_n}} + 1$

（二）當連續n'個項數的出現次數是 1 的時候，β子項也會有連續$n'-1$個子項數的出現次數是 1。

（三）如果β子項數的出現次數爲n'，則會有連續$n'-1$個項數的出現次數≥ 2

現在我要利用這三個式子，盡可能把出現次數的規律弄清楚。

因爲$A_{2^k} \sim A_{2^{k+1}}$只會被$A_{2^{k-1}} \sim A_{2^k}$影響，所以我再創一個數列：D

D 數列的定義很簡單：$D_n = B_{2^{n-1}+1} \sim B_{2^n}$的排列

例如：$D_3 = B_5 \sim B_8$的排列$=1124$
那麼接下來要開始利用子元素的性質開始排列出現次數了：
$D_1 = 2$
D_2的部分則是看D_1：首先D_1的第一個數字不是 1，所以根據第二點D_2的第 1 個數字是 1；再來，D_1接下來的數字是 2，代表D_2接下來會有 1 個≥ 2的數字，而這個數字是多少？因爲它是第一個≥ 2的數字所以配D_1的第一個數字+1=3，所以$D_2 = 13$

再利用圖示：$D_1 = \underset{\circ\bullet}{2}$　數字下方的小白點是指 1，而小黑點則是指不是 1 的數字

爲了方便了解，我再列出幾個數列：

$D_2 = \underset{\circ\bullet}{2} = \circ\bullet = 13$

$D_3 = \underset{\circ}{1}\underset{\circ\bullet\bullet}{3} = \circ\circ\bullet\bullet = 1124$

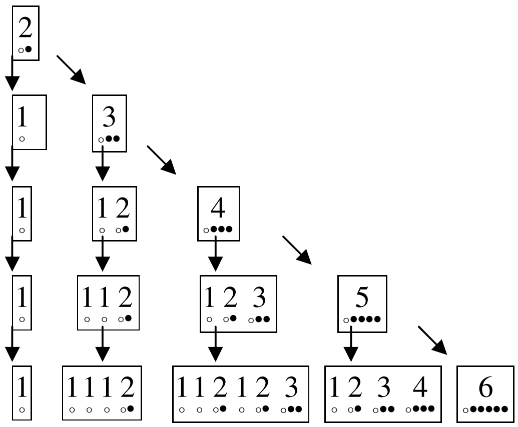
$D_4 = \underset{\circ}{1}\underset{\circ}{1}\underset{\circ\bullet}{2}\underset{\circ\bullet\bullet\bullet}{4} = \circ\circ\circ\bullet\circ\bullet\bullet\bullet = 11121235$

$D_5 \rightarrow \underset{\circ}{1}\underset{\circ}{1}\underset{\circ}{1}\underset{\circ\bullet}{2}\underset{\circ}{1}\underset{\circ\bullet}{2}\underset{\circ\bullet\bullet}{3}\underset{\circ\bullet\bullet\bullet\bullet}{5} \rightarrow \circ\circ\circ\circ\bullet\circ\circ\bullet\circ\bullet\bullet\circ\bullet\bullet\bullet\bullet \rightarrow 1111211212\ 312346$

再對照（表 6-2），證實推論出來的出現次數是正確的。
五、從n到A_n
觀察出現次數分層排列時，利用小白點與小黑點，可以知道哪些出現次數影響哪些出現次數，數字底下小白點與小黑點的樹目代表這一個數字會產生擠個出現次數，例如

$\underset{\circ\bullet\bullet}{3} \rightarrow \circ\bullet\bullet \rightarrow 123$，而每一層最右邊的數字會產生兩個群組，例如第二層的 3：$\boxed{\underset{\circ\bullet\bullet}{3}} \rightarrow \boxed{\underset{\circ}{1}\underset{\circ\bullet}{2}} + \boxed{\underset{\circ\bullet\bullet\bullet}{4}}$，

因為根據出現次數的推論，每一層最右邊的出現次數必須+1



而每一個群組都可以用一個組合(C)表示，例如

$\boxed{1\ 2\ \ 3}$：$1+2+3=\sum_{k=1}^{3}k=\frac{3\times 4}{2}=C_2^4$

$\boxed{1\,1\,2\,1\,2\ \ 3}$：$1+(1+2)+(1+2+3)=C_2^2+C_2^3+C_2^4=C_3^5$

而$\boxed{1\ 2\ \ 3}$影響下一層的$\boxed{1\,1\,2\,1\,2\ \ 3}$，所以代表$C_2^4$造成下一層的$C_3^5$

而每一個數字n都會造成下一層的$\sum_{k=1}^{n}k=\sum_{k=1}^{n}C_1^k=C_2^{n+1}$，再造成下一層的

$\sum_{k=1}^{n}\sum_{h=1}^{k}h=\sum_{k=1}^{n}C_2^{k+1}=C_3^{n+2}$…依此類推，因此出現次數分層排列又可以寫成這個樣子：

$C_1^2\Rightarrow C_2^2+C_1^3$，這裡比較特別，因為$C_1^2$是該層最右邊的數字，所以下一層是

$2\rightarrow 1+3=C_2^2+C_1^3$而非$2\rightarrow 1+2\rightarrow C_2^3$

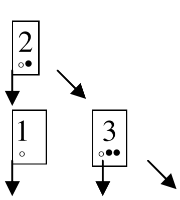
第三層：$C_2^2+(C_1^3)\Rightarrow C_3^3+(C_2^3+C_1^4)$，同理，最右邊的$C_1^3$是造成下一層的$C_2^3+C_1^4$

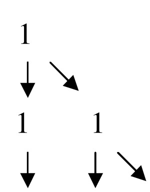
第四層：$C_3^3+C_2^3+(C_1^4)\Rightarrow C_4^4+C_3^4+(C_2^4+C_1^5)$

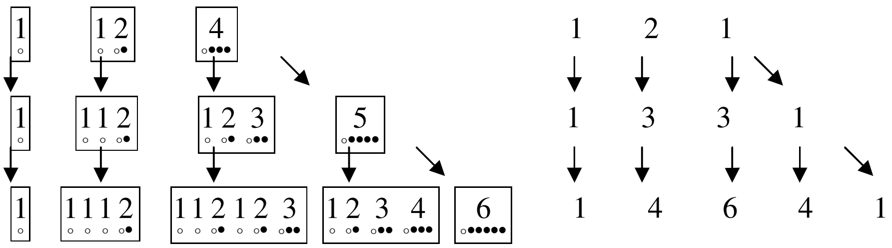
依此類推，得到：

$D_n=(C_n^n+C_{n-1}^n+C_{n-1}^n+C_{n-2}^n+...+C_2^n)+C_1^{n+1}$

根據這個式子，就可以把n轉換成A_n了：







右圖是計算出現次數分層的群組內的數字個數，這些數字代表項數，也就是 A_n 的值，因爲左圖代表的是每一個項數的出現次數，根據

$A_{(\sum_{k=1}^{n-1}B_k)+1} = A_{(\sum_{k=1}^{n-1}B_k)+2} = \ldots = A_{(\sum_{k=1}^{n}B_k)} = n$ 從 A_n 到 n 的公式，逆推：

$\sum_{k=1}^{l} B_k \geq n > \sum_{k=1}^{l-1} B_k$ ，則 $A_n = l$

而數字個數圖也可以用組合(C)表示：

$$C_0^1 \Rightarrow C_1^1 + C_0^2 \Rightarrow C_2^2 + C_1^2 + C_0^3 \Rightarrow C_3^3 + C_2^3 + C_1^3 + C_0^4 \Rightarrow \ldots$$

把出現次數以及數字個數圖都用組合表示：

C_1^2	C_0^1
$C_2^2 + C_1^3$	$C_1^1 + C_0^2$
$C_3^3 + C_2^3 + C_1^4$	$C_2^2 + C_1^2 + C_0^3$
$C_4^4 + C_3^4 + C_2^4 + C_1^5$	$C_3^3 + C_2^3 + C_1^3 + C_0^4$

可以很清楚的了解：

若出現次數 $= C_k^n$ ，則數字個數爲 C_{k-1}^{n-1}

接下來就要把 n 用組合表示了，在證明的過程中我用 $n = 47$ 當例子：

如果直接用出現次數分層來找的話，47 在黑底的位置上：

2

13

1124

11121235

1111211212312346

因爲前四層的數字總和爲 30(注意，出現次數分層是從 B_2 開始排，所以前四層其實總共有 $30 + B_1 = 32$ 項)，且前五層的數字總和爲 62，所以可以知道 47 在第五層的第 $47 - 2^5 = 15$ 的位置：

32+1111211212312346

又 $D_n=(C_n^n+C_{n-1}^n+C_{n-1}^n+C_{n-2}^n+\ldots+C_2^n)+C_1^{n+1}$

把剛剛的出現次數分層用群組表示：

32+(1)+(1112)+(112123)+(1234)+(6)，得出 47 在第三個群組，也就是 C_3^5 的位置上：

32+C_5^5+C_4^5+(112123)

又 $C_k^n=C_{k-1}^{k-1}+C_{k-1}^k+C_{k-1}^{k+1}+\ldots+C_{k-1}^{n-1}\Rightarrow C_3^5=C_2^2+C_2^3+C_2^4$

所以 32+C_5^5+C_4^5+(112123)＝32+C_5^5+C_4^5+(1)+(12)+(123)

= 32+C_5^5+C_4^5+C_2^2+C_2^3+ (123)

再把 123 拆成 $C_1^1+C_1^2+C_1^3$，最後得到

$$47=2^5+(C_5^5+C_4^5)+(C_2^2+C_2^3)+(C_1^1+C_1^2)+2$$

因爲 $47>2^5+(C_5^5+C_4^5)+(C_2^2+C_2^3)+(C_1^1+C_1^2)$ 而 C_1^3 又不能再分解

（ C_1^3 不能分解成 $C_0^0+C_0^1+C_0^2$ 是因爲之後要轉換成 A_n 時這些組合會變成 C_{-1}^{-1} 、 C_{-1}^0 以及

C_{-1}^1 ，這是不可能的情況。）所以把剩下的值擺到最右邊

再利用數字總和轉換成數字個數的轉換法把 n 轉換成 A_n ：

$$47=2^5+(C_5^5+C_4^5)+(C_2^2+C_2^3)+(C_1^1+C_1^2)+2$$

$$\Rightarrow A_{47}=2^4+(C_4^4+C_3^4)+(C_1^1+C_1^2)+(C_0^0+C_0^1)+1=16+5+3+2+1=27$$

對照表格，這是正確答案

類推上面的推導過程，得出：

$$n=2^k+(C_k^k+C_{k-1}^k+C_{k-1}^k+\ldots+C_{k-k_1}^k)$$

$$+(C_{k-k_1-2}^{k-k_1-2}+C_{k-k_1-2}^{k-k_1-1}+C_{k-k_1-2}^{k-k_1}+\ldots+C_{k-k_1-2}^{k_2})+(C_{k-k_1-3}^{k-k_1-3}+C_{k-k_1-3}^{k-k_1-2}+C_{k-k_1-3}^{k-k_1-1}+\ldots+C_{k-k_1-3}^{k_3})$$

$$+(C_{k-k_1-4}^{k-k_1-4}+C_{k-k_1-4}^{k-k_1-3}+C_{k-k_1-4}^{k-k_1-2}+\ldots+C_{k-k_1-4}^{k_4})+\ldots+(C_1^1+C_1^2+C_1^3+\ldots+C_1^{k'})+\text{t}$$

$$=2^k+\sum_{l=0}^{k_1}C_{k-l}^k+\sum_{l=0}^{k_2}C_{k-k_1-2}^{k-k_1-2+l}+\sum_{l=0}^{k_3}C_{k-k_1-3}^{k-k_1-3+l}+\ldots+\sum_{l=0}^{k'}C_1^{1+l}+t$$

t 是多出來的部份，例如：

$2^5+(C_5^5+C_4^5)+(C_2^2+C_2^3)+(C_1^1+C_1^2)>47>2^5+(C_5^5+C_4^5)+(C_2^2+C_2^3)+(C_1^1+C_1^2)$而

$47-(2^5+(C_5^5+C_4^5)+(C_2^2+C_2^3)+(C_1^1+C_1^2))=2$

所以$47=2^5+(C_5^5+C_4^5)+(C_2^2+C_2^3)+(C_1^1+C_1^2)+2$

則$A_n=2^{k-1}+\sum_{l=0}^{k_1}C_{k-1-l}^{k-1}+\sum_{l=0}^{k_2}C_{k-k_1-3}^{k-k_1-3+l}+\sum_{l=0}^{k_3}C_{k-k_1-4}^{k-k_1-4+l}+\ldots+\sum_{l=0}^{k'}C_0^{0+l}+\left[\dfrac{t}{t-\frac{1}{3}}\right]$

其中$\left[\dfrac{t}{t-\frac{1}{3}}\right]$只是用來判別$t$是否=0 的：若$t=0\Rightarrow\left[\dfrac{0}{-\frac{1}{3}}\right]=0$；若$t\in N\Rightarrow\left[\dfrac{t}{t-\frac{1}{3}}\right]=\left[1+\dfrac{\frac{1}{3}}{t-\frac{1}{3}}\right]=1$

例如$n=76$

$79=2^6+(C_6^6+C_5^6)+(C_3^3+C_3^4)+(C_2^2)+(C_1^1)+1$

$\Rightarrow A_{79}=2^5+(C_5^5+C_4^5)+(C_2^2+C_2^3)+(C_1^1)+(C_0^0)+1=45$

六、初始條件不同的狀況

在$A_n=A_{n-A_{n-1}}+A_{A_{n-1}}$的情況下，其實只要令前一項=1 就足夠了，只是這樣一來就變成

$A_2=2\Rightarrow A_3=A_1+A_2=3\Rightarrow A_4=A_1+A_3=4\Rightarrow\ldots\Rightarrow A_n=n$，因爲當連續$n'-1$個$\beta$子項的子項數的出現次數是 1 的時候，也會有連續$n'$個項數的出現次數是 1，而根據歸納法：

（一）、$n\le 2$時$A_n=n$成立

（二）、假設$n\le k$時$A_n=n$成立

（三）、因爲有連續k個β子項的子項數的出現次數是 1，所以會有連續n'個項數的出現次數是 1$\Rightarrow A_{k+1}-A_k=1\Rightarrow A_{k+1}=k+1$，得證$A_n=n$

那麼令前三項，前四項或者是前五項等於 1 時？

先令$A_1=A_2=A_3=1$，列出相關表格：

n	A_n	n	A_n	n	A_n	n	A_n
1	1	17	8	33	13	49	21
2	1	18	8	34	13	50	21
3	1	19	8	35	14	51	21
4	2	20	8	36	15	52	21
5	2	21	8	37	16	53	21
6	3	22	9	38	16	54	21
7	3	23	10	39	17	55	21
8	3	24	11	40	18	56	22
9	4	25	11	41	18	57	23

10	5	26	12	42	19	58	24
11	5	27	12	43	19	59	25
12	5	28	12	44	19	60	25
13	5	29	13	45	20	61	26
14	6	30	13	46	20	62	27
15	7	31	13	47	20	63	27
16	7	32	13	48	20	64	28

以及出現次數的表格：

A_n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
B_{A_n}	3	2	3	1	4	1	2	5	1	1	2	3	6	1	1	2
A_n	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
B_{A_n}	1	2	3	4	7	1	1	1	2	1	2	3	1	2	3	4
A_n	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48
B_{A_n}	5	8	1	1	1	2	1	1	2	1	2	3	1	2	3	4
A_n	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64
B_{A_n}	1	2	3	4	5	6	9	1	1	1	1	2	1	1	2	1

這樣子就可以清楚的知道，在某個區段中出現次數最大的項數不一定是2 、4或8等數字，而是2 3 5 8 13 ⋯等，有費式數列的性質出現。這是有其原因的，但是稍後才會去說明，現在要討論的是，為什麼令 $A_1 = A_2 = 1$時，某個區段中出現次數最大的項數都是 2 的冪次？而令 $A_1 = A_2 = A_3 = 1$ 、 $A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = 1$時，為什麼又不是？

如果仔細一點觀察令前三項等於 1 的數列，會發現當 $A_n = 3 \vee 5 \vee 8 \cdots$（出現次數最大的特定項數）時，$A_{\alpha_n} \neq A_{\beta_n}$ ，而這是另前兩項等於 1 的數列所沒發現過的事情。

現在所討論的特性，不只是令前三項等於 1 的數列，令前 n （ $n \neq 1$ ）項等於 1 的數列皆適用，不過在這裡只簡短說明令前三項以及令前四項等於 1 的數列：

在令前三項等於 1 的數列中：$\beta_4 = 1$，$\alpha_4 = 3$， $A_4 = A_1 + A_3 = 2$

這時候的 β 子項的項數是 1，而 $B_1 = 3$ ，這代表會有連續 2 個 α 子項在控制此數列， $B_2 = 2$ ，而在項數為 3 時的 α 子項=2，因此 $B_3 = B_2 + 1 = 3$ 。

再令前四項等於 1 的數列中：$\beta_5 = 1$ $\alpha_5 = 4$ ， $A_5 = A_1 + A_4 = 2$

這時候的 β 子項的項數是 1，而 $B_1 = 4$ ，這代表會有連續3個 α 子項在控制此數列， $B_2 = 2$ ，而在項數為 3 時的 α 子項=2，因此 $B_3 = B_2 + 1 = 3$ 。項數為 4 時的 α 子項=3， $B_4 = B_3 + 1 = 4$

要提醒的是， $B_2 = 2$ 在令前 n 項等於 1 的數列中， $\alpha_{n+1} = n$ ， $A_{n+1} = A_1 + A_n = 2$ 。所以 $\beta_{n+2} = 2$ ， $\alpha_{n+2} = n$ ， $A_{n+2} = A_2 + A_n = 2$ 。 最後， $\alpha_{n+3} = n + 1$ ， $\beta_{n+3} = 2$ ， $A_{n+3} = A_2 + A_{n+1} = 1 + 2 = 3$ ，因此 $B_2 = 2$ 。

從這兩個例子中，應該已經可以發現，在前 n 項等於 1 的數列中：

1. $B_1 = n$ ，所以這時候會有連續 $n-1$ 個 α 子項控制此數列

2. $B_2 = 2$ ，在項數等於 3 時的 α 子項=2，在項數等於 4 時的 α 子項=3⋯在項數等於 n 時的 α 子項= $n-1$ 。

3. 由第 2 點， $B_3 = B_2 + 1 = 3$ ， $B_4 = B_3 + 1 = 4$ ， $B_5 = B_4 + 1 = 5 \cdots B_n = B_{n-1} + 1 = n$ 。

現在開始正式的解釋出現次數（令前三項等於 1 的）

利用一樣的方法，$B_2=2$，$B_3=3$

$\underset{\circ\bullet}{2}\underset{\circ\bullet\bullet}{3}\to\circ\bullet\circ\bullet\bullet\bullet\to 14\circ\bullet\bullet$　　因爲 2 已經被用過，所以第一個小黑點是放$3+1=4$，至於還有三個小點沒放數字的原因是因爲數字不夠放了，所以先擱著：

$\circ\bullet\bullet\underset{\circ}{1}\underset{\circ\bullet\bullet\bullet}{4}\to\circ\bullet\bullet\circ\circ\bullet\bullet\bullet\to 125\circ\circ\bullet\bullet\bullet$　理由一樣。

在推幾次，就可以得到跟剛剛所列的出現次數一樣的：

323141251123611212347111212312345 8⋯

然後再分成若干排：

2

3

14

125

11236

11212347

1112123123458

再看看剛剛的情況（小點不夠，無法放數字），會發現 125 是放在 3 所製造的小點裡，11236 是放在 14 所製造的小點裡，⋯依此類推。而且，以 11236 來說，

$\underset{\circ}{1}\underset{\circ\bullet\bullet\bullet}{4}$總共會有 5 個小點（請對照一下 11236，是不是剛好 5 個數字？）而裡面的數字總和$1+1+2+3+6=13$則是$(1+2+5)+5$來的，怎麼說呢？11236 的兩個 1 都是小白點所放入的，而 236 則是 125 各+1 來的，所以不就是$(1+2+5)+5=13$嗎？

現在用D數列來表達：

（一）D_n的數字個數＝D_{n-2}的數字總和

（二）D_n的數字總和=D_{n-1}的數字總和＋D_{n-2}所產生的小點個數

＝D_{n-1}的數字總和＋D_{n-2}的數字總和

注意第二點，不正是費氏數列的公式嗎？而且$D_1=2$，$D_2=3$，而且既然數字總和有費氏數列的關係，根據第一點，數字個數也有一樣的性質。

再來解釋前四項等於 1 的：

$B_2=2$，$B_3=3$，$B_4=4$

$\underset{\circ\bullet}{2}\underset{\circ\bullet\bullet}{3}\underset{\circ\bullet\bullet\bullet}{4}\to\circ\bullet\circ\bullet\bullet\circ\bullet\bullet\bullet\to 15\circ\bullet\bullet\circ\bullet\bullet\bullet$

$\circ\bullet\bullet\circ\bullet\bullet\bullet\underset{\circ}{1}\underset{\circ\bullet\bullet\bullet\bullet}{5}\to\circ\bullet\bullet\circ\bullet\bullet\bullet\circ\circ\bullet\bullet\bullet\bullet\to 126\circ\bullet\bullet\bullet\circ\circ\bullet\bullet\bullet\bullet$

延伸下去：42341512612371123481121234 59

再分排：

2
3
4
15
126
1237
112348
112123459
一樣可以發現 126 是由 3 的小點所放入的，1237 是由 4 的小點所放入的…依此類推，1237 的數字總和$1+2+3+7=13$則是 126 的數字總和＋4 的小點（其實等於數字總和）來的，所以在這裡一樣可以歸納成：

（一）D_n 的數字個數＝ D_{n-3} 的數字總和

（二）D_n 的數字總和＝ D_{n-1} 的數字總和＋ D_{n-3} 的數字總和

總結後得到：令前 k （ $k \geq 2$ ）項等於 1 時：

（一）D_n 的數字個數＝ $D_{(n+1)-k}$ 的數字總和

（二）D_n 的數字總和= D_{n-1} 的數字總和＋ $D_{(n+1)-k}$ 的數字總和

而在令前 k 項等於 1 的數列也可以利用類似的方法解釋，以 $k=3$ 為例：
2
3
14
125
11236
11212347
1112123123458
因為 D_n 是被 D_{n-2} 影響的，所以必須把分層分成兩個部分：D_{2n-1} 以及 D_{2n} ，過程差不多，所以我只舉其中一個：

2	C^{2}_{1}
(1)4	$C^{2}_{2}+C^{4}_{1}$
(1)(123)6	$C^{3}_{3}+C^{4}_{2}+C^{6}_{1}$
(1)(112123)(12345)8	$C^{4}_{4}+C^{5}_{3}+C^{6}_{2}+C^{8}_{1}$

而令前四項=1 的 D_n 是被 D_{n-3} 影響的，所以必須把分層分成三個部分：D_{3n-1} 、D_{3n-2} 以及 D_{3n} ：再這裡一樣只列出 D_{3n-2} 的部分：

2	C^{2}_{1}

(1)5 $C_2^2+C_1^5$

(1)(1234)8 $C_3^3+C_2^5+C_1^8$

(1)(1121231234)(1234567)(11) $C_4^4+C_3^6+C_2^8+C_1^{11}$

其實影響的方式跟令前兩項=1 的數列差不多，差別只在於要把出現次數分層再分爲若干個群組而已（若前k項=1，則必須分成$k-1$組），然而，在解一般項的過程中，需要先知道$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}, a_n=a_{n-1}+a_{n-3}, a_n=a_{n-1}+a_{n-4}, a_n=a_{n-1}+a_{n-5},\ldots$等，詢問老師之後知道了利用高中所學到的方法，似乎只能解出$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$，也就是費氏數列的一般項而已，所以對初始條件不同的研究就此打住而不繼續研究一般項了。但是只要知道$a_n=a_{n-1}+a_{n-k}$的公式，利用子元素的方法仍然能夠找出此二階遞迴的一般項！

陸、研究過程及方法(Hofstadter G-Sequence)

一、數列初探討

經過了對二階費氏數列以及 Conway 數列的研究，對α子元素以及β子元素的特性已有相當程度的了解。接下來再討論一個數列：Hofstadter G-Sequence

$G_0=0$；$G_n=n-G_{G_{n-1}}$，$n\in N$ （接下來改寫成$G_n=n-G_{\beta_n}$）

這個數列跟 Conway 數列一樣用到了子元素β，不過在G數列中，β子項的係數卻是-1，因此認爲研究此數列會加深子元素在不同面向的特性

一樣先列出表格：

n	G_{n-1}	$G_{G_{n-1}}$	G_n	n	G_{n-1}	$G_{G_{n-1}}$	G_n
0			0				
1	0	0	1	21	12	8	13
2	1	1	1	22	13	8	14
3	1	1	2	23	14	9	14
4	2	1	3	24	14	9	15
5	3	2	3	25	15	9	16
6	3	2	4	26	16	10	16
7	4	3	4	27	16	10	17
8	4	3	5	28	17	11	17
9	5	3	6	29	17	11	18
10	6	4	6	30	18	11	19
11	6	4	7	31	19	12	19
12	7	4	8	32	19	12	20
13	8	5	8	33	20	12	21
14	8	5	9	34	21	13	21

15	9	6	9	35	21	13	22
16	9	6	10	36	22	14	22
17	10	6	11	37	22	14	23
18	11	7	11	38	23	14	24
19	11	7	12	39	24	15	24
20	12	8	12	40	24	15	25

（表 7-1）

發現$B_n \le 2$。

利用β子元素研究其規則：

$G_{n-1}=k-1$，$G_n=G_{n+1}=k$，則$\left(n+2-G_{G_{n+1}}\right)-\left(n+1-G_{G_n}\right)=1-(G_k-G_k)=1$

$G_{n+2}=k+1 \qquad \therefore B_k=2$

還可以發現到表格中G_n那一行的出現次數＋1＝G_{β_n}那一行的出現次數。

例如$G_6=G_7=4$（2 次），$G_{\beta_{10}}=G_{\beta_{11}}=G_{\beta_{12}}=4$。(3 次)

要證明這樣的規則也並不難：

令$G_{n-1}=k-1$，$G_n=k$，$G_{n+1}=k+1$；$G_{n'-1}=n-1$，$G_{n'}=n$：

$n'-G_{n-1}=n'-(k-1)=n \Rightarrow n'=n+(k-1)$

$G_{n'+1}=(n'+1)-G_n=(n+k)-k=n$

$G_{n'+2}=n+1(\because G_{n'}=G_{n'+1}=n)$

$\Rightarrow \beta_{n'}=n-1$，$\beta_{n'+1}=\beta_{n'+2}=n$，$\beta_{n'+3}=n+1$

$\Rightarrow G_{\beta_{n'}}=k-1$，$G_{\beta_{n'+1}}=G_{\beta_{n'+2}}=k$，$G_{\beta_{n'+3}}=k+1$

令$G_{n-1}=k-1$，$G_n=G_{n+1}=k$，$G_{n+2}=k+1$；$G_{n'-1}=n-1$，$G_{n'}=n$：

$n'-G_{n-1}=n'-(k-1)=n \Rightarrow n'=n+(k-1)$

$G_{n'+1}=(n'+1)-G_n=(n+k)-k=n$

$G_{n'+2}=n+1(\because G_{n'}=G_{n'+1}=n)$

$G_{n'+3}=(n+k+2)-(k)=n+2$

$\Rightarrow \beta_{n'}=n-1$，$\beta_{n'+1}=\beta_{n'+2}=n$，$\beta_{n'+3}=n+1$，$\beta_{n'+4}=n+2$

$\Rightarrow G_{\beta_{n'}}=k-1$，$G_{\beta_{n'+1}}=G_{\beta_{n'+2}}=G_{\beta_{n'+3}}=k$，$G_{\beta_{n'+4}}=k+1$

二、出現次數與排列與〝地標項〞

在之前證明的過程中還發現了一個規律：

令$G_{n-1}=k-1$，$G_n=k$以及$G_{n'-1}=n-1$，$G_{n'}=n$：

$n'=n+G_{n-1}=n+k-1$，$G_{n'+1}=(n+k)-k=n \Rightarrow B_n=2$

令$G_{n-1}=G_n=k$，$G_{n+1}=k+1$以及$G_{n'-1}=n-1$，$G_{n'}=n$：

$n'=n+G_{n-1}=n+k$，$G_{n'+1}=(n+k+1)-G_n=n+1$且$G_{n'+2}=(n+k+2)-G_{n+1}=n+1$

$\Rightarrow B_n=1$且$B_{n+1}=2$

把這兩個情況結合在一起，得到：

$G_n - G_{n-1} = 1 \Rightarrow B_n = 2$ ，$G_n - G_{n-1} = 0 \Rightarrow B_n = 1$

第一種情況可以把它看成是 $B_{G_n} = 1$ ，而第二種情況可以把它看成 $B_{G_n} = B_{G_{n-1}} = 1$ ，而且 $G_{n+1} - G_n = 1$ ，所以把第二種情況看成若一個項數的出現次數爲 2，則會造成之後有連續兩個項數的出現次數爲 1 跟 2。

接下來就可以排出現次數排列了：

$B_0 = 1 \Rightarrow B_1 = 2 \Rightarrow B_3 = 1, B_4 = 2 \Rightarrow B_5 = 2, B_6 = 1, B_7 = 2 \Rightarrow ...$

有一些區間會擺比較多個出現次數是爲了方便比較，前一個區間影響後一個區間，就像之前 Conway 數列的出現次數排列一樣，這裡也把出現次數分層排列：

1(1,0,1,1)

2(0,1,1,2)

12(1,1,2,3)

212(1,2,3,5)

12212(2,3,5,8)

21212212(3,5,8,13)

1221221212212(5,8,13,21)

在右邊的數對是(1 的個數,2 的個數,數字個數,數字總和)，很明顯的具有費氏數列的性質，原因很簡單：

設在第 n 層的數對爲(a,b,c,d)，則 $c = a + b$ ，$d = a + 2b = b + (a + b) = b + c$ ，因此數對可以改寫成(a,b,c=a+b,d=b+c)；而第 $n+1$ 層因爲出現次數的影響，數對則是 $(b, a+b, c', d') = (b, a+b, a+2b, 2a+3b)$ ，從這兩個角度來看都具有費氏數列的性質。

而數對中的數字個數其實就是項數個數，數字總合就是這幾個項數總共用掉了幾項，所以如果以 (c_n, d_n) 表示第 n 層的數字個數以及數字總和的話，那麼 $h = (\sum_{k=1}^{n} d_k) - 1$ 時，

$G_h = (\sum_{k=1}^{n} c_k) - 1$ ，要在後面減 1 是因爲數列是從 $G_0 = 0$ 開始而非 $G_1 = 1$ 開始的。而因爲這個數對明顯具有費氏數列的性質，所以 c_n 跟 d_n 分別用 a_n 以及 a_{n+1} 帶入，其中 a_n 爲費氏數列的第 n 項，在以此帶入剛剛的式子，得到：

$$G_{(\sum_{k=1}^{n} a_{n+1}) - 1} = (\sum_{k=1}^{n} a_n) - 1$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + ... + a_n = ((a_1 + a_2) + a_2 + a_3 + ... + a_n) - a_2 = ((a_2 + a_3) + a_3 + a_4 + ... + a_n) - a_2$$
$$= ((a_3 + a_4) + a_5 + a_6 + ... + a_n) - a_2 = ... = a_{n+2} - a_2 = a_{n+2} - 1$$

所以又可以改寫成 $G_{a_{n+3}-3} = a_{n+2} - 2$ ，這個式子就像二階費氏數列的 $A_{2^k} = 2^{k-1}$ ，成爲 G 數列的〝地標〞。

三、從 n 到 G_n

在觀察出現次數的分層排列時，發現：

1

2

12=1+2

212=2+12

12212=12+212

21212212=212+12212… $D_n = D_{n-2} + D_{n-1}$

這個證明過程很簡單，$D_2 = 2 \Rightarrow D_3 = 12 = D_1 + D_2$，而由於這是排列，所以在 D_3 時 $D_1 + D_2$ 的排列到了第四層理所當然的變成 $D_2 + D_3$，到了第五層又變成 $D_3 + D_4 \cdots$ 依此類推。

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
D_1 & \Rightarrow & D_2 & \Rightarrow & D_3 & \Rightarrow & D_4 & \Rightarrow & D_5 & \Rightarrow & D_6 & \Rightarrow & \cdots & \Rightarrow & D_n \\
 & & & & \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow & & & & \Downarrow \\
 & & & & D_1 & \Rightarrow & D_2 & \Rightarrow & D_3 & \Rightarrow & D_4 & \Rightarrow & \cdots & \Rightarrow & D_{n-2} \\
 & & & & + & & + & & + & & + & & & & + \\
 & & & & D_2 & \Rightarrow & D_3 & \Rightarrow & D_4 & \Rightarrow & D_5 & \Rightarrow & \cdots & \Rightarrow & D_{n-1}
\end{array}
$$

(表 7-2)

搭配 $D_n = D_{n-2} + D_{n-1}$ 以及 D_n（數字個數，數字總和）$= (a_n, a_{n+1})$，就可以找出一般項的公式了：

因爲現在要從 n 到 G_n 的轉換，所以在這裡 $D_n = a_{n+1}$

1. 首先要找到 n 再出現次數分層的第幾層，所以先找到 r 使 $\sum_{k=1}^{r} D_k - 1 > n \geq \sum_{k=1}^{r-1} D_k - 1$，解出的 r 及代表 n 在第 r 層，而因爲 $\sum_{k=1}^{r} D_k - 1 = \sum_{k=1}^{r} a_{k+1} - 1 = \sum_{k=1}^{r+1} D_k - 2 = a_{r+3} - 3$，所以剛剛的不等式又可寫爲 $a_{r+3} - 3 > n \geq a_{r+2} - 3$

   例如 $n = 8$，則 $a_7 - 3 > 8 \geq a_6 - 3 \Rightarrow r = 4$，代表 8 在第四層
2. 因爲 $D_n = D_{n-2} + D_{n-1}$，所以可以利用 D_n 寫出 n 值(跟 D_n 的下標是不一樣的東西)，例如 $8 = (a_{4+2} - 3) + 3$，代表 8 在第四層的第 3 個位置，而

   $D_4 = a_5 = a_3 + a_4 = a_3 + (a_2 + a_3) = (a_3 + a_2) + a_3 = 3 + a_3$，代表第 3 個位置在

$a_3 + a_2 = D_2 + D_1$ 的位置上。

如果一個數在第 n 層的第 k 個位置上，先找 k 是在哪個區間上，如果小於 D_{n-2} 則把 D_{n-2} 分解成 $D_{n-4} + D_{n-3}$，再找尋 k 在哪一個區間上，直到找到 k 的位置爲止；如果大於 D_{n-2} 則把 D_{n-1} 分解成 $D_{n-3} + D_{n-1}$，再找尋 k 在哪一個區間上…依此類推，即可找到 k 的位置，其通式如下：

$n = (a_{r+2} - 3) + k_1 a_{r-1} + k_2 a_{r-2} + k_3 a_{r-3} + ... + k_{r-2} a_2 + k_{r-1} \times 1$

其中 $a_{r+3} - 3 > n \geq a_{r+2} - 3$，$k_j = 0 \vee 1, j = 1 \sim r - 1$

$k_{r-1} \times 1$ 的存在是因爲 n 有可能在 D_2 的第 1 個位置上，例如 $n = 9$：

1

2

12

212(21 1+1)

9 在黑底的 2 的第一個位置

3. 式子裡面的a_n是從D_{n-1}轉換的，現在把它轉換回來：

$$n=(a_{r+2}-3)+k_1a_{r-1}+k_2a_{r-2}+k_3a_{r-3}+...+k_{r-2}a_2+k_{r-1}\times 1$$
$$=(\sum_{k=1}^{r-1}a_{k+1}-1)+k_1a_{r-1}+k_2a_{r-2}+k_3a_{r-3}+...+k_{r-2}a_2+k_{r-1}\times 1$$
$$=(\sum_{k=1}^{r-1}D_k-1)+k_1D_{r-2}+k_2D_{r-3}+k_3D_{r-4}+...+k_{r-2}D_1+k_{r-1}\times 1$$

再把D_n改為數字個數（$D_n=a_n$）

則$G_n=(\sum_{k=1}^{r-1}a_k-1)+k_1a_{r-2}+k_2a_{r-3}+k_3a_{r-4}+...+k_{r-2}a_1+k_{r-1}\times 1$

$$=(a_{r+1}-2)+k_1a_{r-2}+k_2a_{r-3}+k_3a_{r-4}+...+k_{r-2}a_1+k_{r-1}\times 1$$

就是從n到G_n的轉換方式了。

結論：$n=(a_{r+2}-3)+k_1a_{r-1}+k_2a_{r-2}+k_3a_{r-3}+...+k_{r-2}a_2+k_{r-1}\times 1$

其中$a_{r+3}-3>n\geq a_{r+2}-3$，$k_j=0\vee 1, j=1\sim r-1$

則$G_n=(a_{r+1}-2)+k_1a_{r-2}+k_2a_{r-3}+k_3a_{r-4}+...+k_{r-2}a_1+k_{r-1}\times 1$

例如：$n=15$：

$n=15=(a_{5+2}-3)+a_4+a_3 \Rightarrow G_n=(a_{4+2}-2)+a_3+a_2=9$

$n=27$：

$n=27=(a_{6+2}-3)+a_5+a_4+1 \Rightarrow G_{27}=(a_7-2)+a_4+a_3+1=17$

柒、結論

一、二階費氏數列

（一）、$B_{2^k(2l-1)}=k+1$

（二）、$A_{\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{n-1}{2^k}\right]+2}=A_{\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{n-1}{2^k}\right]+3}=A_{\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{n-1}{2^k}\right]+4}=...=A_{\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{n}{2^k}\right]+1}=n$

（三）、$A_{\alpha_n}=\left[\frac{A_n+1}{2}\right]$；$A_{\alpha_{n-1}}=\left[\frac{A_n}{2}\right]$

（四）、$A_{n+2^k}-A_{n+1}=2^{k-1}(2^{k-1}-1\geq n\geq 1)$

（五）、令$a_1=n$，$a_h=a_{h-1}-2^{[\log_2 a_{h-1}]}+1$（$a_{h-1}$的質因數不能只有 2），若$a_h=2^l$，則$A_n=\dfrac{n+h-1}{2}$

二、Hofstadter Conway-\$10000 Sequence

（一）、利用子元素找出出現次數的規律，並且發現某個範圍的出現次數影響下一個範圍的出現次數，因此稱之為出現次數分層，而我利用小白點與小黑點的輔數排出出現次數分層

（二）、每一層的出現次數都可以分為若干個群組，群組內的數字總和可用組合 C 表示：若數字總和為C_k^n，則，群組內數字個數為C_{k-1}^{n-1}，利用此方法可找出從n到A_n的公式：

$$n=2^k+\sum_{l=0}^{k_1}C_{k-l}^{k}+\sum_{l=0}^{k_2}C_{k-k_1-2}^{k-k_1-2+l}+\sum_{l=0}^{k_3}C_{k-k_1-3}^{k-k_1-3+l}+\ldots+\sum_{l=0}^{k'}C_1^{1+l}+t$$

其中 $(k-k_1-h+k_h)>(k-k_1-(h+1)+k_{h+1})\Rightarrow 1+k_h>k_{h+1}$

，則 $A_n=\sum_{l=0}^{k_1}C_{k-1-l}^{k-1}+\sum_{l=0}^{k_2}C_{k-k_1-3}^{k-k_1-3+l}+\sum_{l=0}^{k_3}C_{k-k_1-4}^{k-k_1-4+l}+\ldots+\sum_{l=0}^{k'}C_0^{0+l}+\left[\dfrac{t}{t-\frac{1}{3}}\right]$

（三）、令前 k （ $k\geq 2$ ）項等於 1 時：

1. D_n 的數字個數＝ $D_{(n+1)-k}$ 的數字總和

2. D_n 的數字總和= D_{n-1} 的數字總和＋ $D_{(n+1)-k}$ 的數字總和

三、Hofstadter G-sequence

（一）、 $B_n\leq 2$

（二）、 $G_n-G_{n-1}=1\Rightarrow B_n=2$ ， $G_n-G_{n-1}=0\Rightarrow B_n=1$

（三）、出現次數分層具有費氏數列的性質，而經過整理後，得出：

結論： $n=(a_{r+2}-3)+k_1a_{r-1}+k_2a_{r-2}+k_3a_{r-3}+\ldots+k_{r-2}a_2+k_{r-1}\times 1$

其中 $a_{r+3}-3>n\geq a_{r+2}-3$ ， $k_j=0\vee 1, j=1\sim r-1$

則 $G_n=(a_{r+1}-2)+k_1a_{r-2}+k_2a_{r-3}+k_3a_{r-4}+\ldots+k_{r-2}a_1+k_{r-1}\times 1$

四、子元素

（一）、 $\alpha_n=n-A_{n-1}$ ， $\beta_n=A_{n-1}$

（二）、 $a_{n+1}-\alpha_n=1-(A_n-A_{n-1})$ ； $\beta_{n+1}-\beta_n=A_n-A_{n-1}$

A_n-A_{n-1}	0	1
$\alpha_{n+1}-\alpha_n$	1	0
$\beta_{n+1}-\beta_n$	0	1

（三）、 $B_n=B_{\alpha_n}+1(B_n\geq 2)$

（四）、當 $B_{A_{n+1}}=B_{A_{n+2}}=\ldots=B_{A_{n+n'}}=1$ 時， $B_{A_{k+1}}=B_{A_{k+2}}=\ldots=B_{A_{k+n'-1}}=1$

（五）、如果 β 子項數的出現次數為 n' ，則會有連續 $n'-1$ 個項數的出現次數 ≥ 2

捌、參考資料

http://mathworld.wolfram.com/Hofstadter-Conway10000-DollarSequence.html

http://mathworld.wolfram.com/HofstadterG-Sequence.html

http://activity.ntsec.gov.tw/activity/race-1/47/senior/040406.pdf

【評語】040413

本文作者在探索各種形式的 Hofstadter 數列時，無意間觀察到一個有較佳規律的特例，並以歸納法證明其通式，進而將此作法延伸到原始的 Hofstadter-Conway $10000 Sequence 上。作品充分展現作者敏銳的觀察力與跳脫框架思考的能力，乘為佳作。