中華民國第51屆中小學科學展覽會

作品說明書

高中組　數學科

佳作

040412

這樣分就對了

學校名稱：嘉義市私立興華高級中學

作者：	指導老師：
高二 李聰韋 高二 吳若萱 高二 羅文君	王聖賢

關鍵詞：等差數列、分組

作品名稱： 這樣分就對了

摘要：

本篇研究主題為 ” 若有 x 個數分別為 A^2、$(\mathrm{A+D})^2$、$(\mathrm{A+2D})^2\ldots$、$\left[\mathrm{A}+(\mathrm{x\text{-}1})\mathrm{D}\right]^2$ ，$x\in$□ ，$A,D\in$□ ，今將這些數分為 y 組，$y\in$□ ，使每組皆有 $\dfrac{x}{y}$ 個數，且每組數之和都相等，試問應該如何分組？ ” 的問題，我們以一個有系統的方式推導出一種分組的方法。除此之外，我們還將此問題推廣至” 若有x個數分別為 A^p 、$(A+D)^p$ 、$(A+2D)^p\ldots$、$\left[A+(x-1)D\right]^p$，$x,P\in$□ ,$A,D\in$□ ，今將這些數分為 y 組，$y\in$□ ，使每組皆有 $\dfrac{x}{y}$ 個數，且每組數之和都相等，試問應該如何分組？ ”的問題，很幸運地，我們也成功的歸納出一套有系統的分組方法來解決這類問題。

壹、研究動機：

在上第一冊第二章「數列與級數」時，老師給了我們一個問題：「已知有 1^2、2^2、3^2、4^2、5^2、6^2、7^2、8^2，今將這些數分為兩組，使每組皆有 4 個數且每組數之和都相等，試問應如何分組？」經過多次的嘗試後，終於找到一種分組方法解決此題目，但我們開始思索，若題目的數字變大，分組數變多時，是否能找到更有效率的解決方法，所以決定作更深入的研究。

貳、研究目的：

一、 已知有 x 個數，$x\in$□ ，分別為 A^2、$(\mathrm{A+D})^2$、$(\mathrm{A+2D})^2\ldots$、$\left[\mathrm{A}+(\mathrm{x\text{-}1})\mathrm{D}\right]^2$，$A,D\in$□ ，今將這些數分為 y 組，$y\in$□ ，使每組皆有 $\dfrac{x}{y}$ 個數，且每組數之和都相等。

(一) 探討分組數 y 與個數 x 之間有何關聯性？

(二) 希望能找到一個規則，成功且漂亮地將它們平均分配成 y 組，且每組和皆相等。

二、 已知有 x 個數，$x\in$□ ，分別為 A^3、 $(\mathrm{A+D})^3$、$(\mathrm{A+2D})^3\ldots$、$\left[\mathrm{A}+(\mathrm{x\text{-}1})\mathrm{D}\right]^3$，$A,D\in$□ ，今將這些數分為 y 組，$y\in$□ ，使每組皆有 $\dfrac{x}{y}$ 個數，且每組數之和都相等。

三、 已知有 x 個數，$x\in$□ ，分別為 A^p、$(A+D)^p$、$(A+2D)^p\ldots$、$\left[A+(x-1)D\right]^p$，$A,D\in$□ ，今將這些數分為 y 組，$y\in$□ ，使每組皆有 $\dfrac{x}{y}$ 個數，且每組數之和都相等。

參、研究設備及器材：

紙、筆、黑板、粉筆、電腦(桌上型+筆記型)、電腦軟體Mathematica。

肆、研究過程或方法：

一、

(一) 探討將 A^2、$(A+D)^2$、$(A+2D)^2$…、$\left[A+(x\text{-}1)D\right]^2$ 分為 y 組，使每組數之和都相等時，x 與 y 之間有何關聯性？

在我們研究的過程中，我們發現 x 與 y 必須滿足下列條件：

1. 因為有 x 個數分成 y 組，每組有 $\frac{x}{y}$ 個數，所以 $\frac{x}{y} \in$ □

2. 因為 $A^2 + (A+D)^2 + (A+2D)^2 + \ldots + \left[A+(x\text{-}1)D\right]^2$

$$= \frac{x\left[6A^2+6AD(x-1)+D^2(2x^2-3x+1)\right]}{6}$$

，所以每一組數之總和 $= \dfrac{x\left[6A^2+6AD(x-1)+D^2(2x^2-3x+1)\right]}{6y}$ 且給定 x 與 y 後，

A 與 D 的各項係數必須為正整數。

當 $2 \le x \le 27$ 時，符合以上兩種條件的所有可能 y 值，如下表：

x 值		**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
y 組				2				**2**、4	3	5
x 值	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
y 組		**2**		7	5	**2**、4、8		**3**		**2**、5、10
x 值	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**			
y 組	7	11		**2**、4	5	13	**3**、9			

(二) 我們希望能找到一個規則，將 A^2、$(A+D)^2$、$(A+2D)^2$…、$\left[A+(x\text{-}1)D\right]^2$ 成功且漂亮地將其平均分成 y 組。研究過程如下：

1、**<u>當 x = 2、3、5、7、11、13、17、19、23 等質數時</u>**，因為其分組數 y 皆為其因數，而分組數 **y = 1, x 時，**不可能每組和皆相等，故這些狀況皆不予考慮。

2、**<u>當 x = 4，y = 2 時</u>**，固定 A 為第一組第一個，共有 3 個不同的分組方式：

Case I：

$$A^2 + (A+D)^2 = 2A^2 + 2AD + D^2$$

$$(A+2D)^2 + (A+3D)^2 = 2A^2 + 10AD + 13D^2$$

Case　II：

$$A^2 \quad + \quad (A+2D)^2 \quad = \quad 2A^2 + 4AD + 4D^2$$

$$(A+D)^2 \quad + \quad (A+3D)^2 \quad = \quad 2A^2 + 8AD + 10D^2$$

Case　III：

$$A^2 \quad + \quad (A+3D)^2 \quad = (2A^2 + 6AD + 5D^2) + 4D^2$$

$$(A+D)^2 \quad + \quad (A+2D)^2 \quad = 2A^2 + 6AD + 5D^2$$

從這 3 種狀況中並沒有發現可以將 4 個等差數平方後分成兩組，且每組和皆相等的方法，但是我們有注意到 **Case　III** 的分組方式可以使 2 組的平方和相差 $4D^2$，這或許是可以拿來利用的關鍵。

4、**<u>當 x = 8，y =2 時</u>**，固定 A 為第一組第一個，共有 $C^7_3C^4_4$=35 個不同的分組方式，

但是經計算後，我們發現僅只有一個可以分為 2 組，且每組和皆相同。

(方法一)：

$$A^2+(A+3D)^2+(A+5D)^2+(A+6D)^2=4A^2+28AD+70D^2$$

$$(A+D)^2+(A+2D)^2+(A+4D)^2+(A+7D)^2=4A^2+28AD+70D^2$$

所以 $\sum_{k=1}^{8}\left[A+(k-1)D\right]^2$ 可分為 2 組，每組 4 個數，和為 $4A^2 + 28AD + 70D^2$，因此，

$\sum_{k=1}^{8R}\left[A+(k-1)D\right]^2$ 皆可分為兩組，$R\in$ □ ，每組 4R 個數，且每組的總和為

$\frac{2}{3}$ R　6A^2　6AD　D^2　48ADR　24D^{2}R　128D^{2}R^2

<u>當 x = 8，y = 4 時</u>，每組和為 $2A^2+14AD+35D^2 \le$ 最大項與最小項的平方和 $(A+7D)^2+A^2=2A^2+14AD+49D^2$，故無法找到將 8 個等差數平方後分成 4 組，且每組和皆相等的方法。

5、**<u>當 x = 9，y = 3 時</u>**，並沒有發現可以將 9 個等差數平方後分成 3 組，且每組和皆相等的方法。

6、**<u>當 x = 10，y = 5 時</u>**，每組和為 $2A^2+18AD+57D^2 \le$ 最大項與最小項的平方和 $(A+9D)^2+A^2=2A^2+18AD+81D^2$，故無法找到將 10 個等差數平方後分成 5 組，且每組和皆相等的方法。

7、**<u>當 x = 12，y = 2 時</u>**，固定 A 為第一組第一個，共有 $C_5^{11}C_6^6=462$ 個不同的分組方式，但是經計算後，我們發現僅只有一個可以分為 2 組，且每組和皆相同。

$\boxed{\text{(方法二)：}}$

$$A^2+(A+2D)^2+(A+6D)^2+(A+7D)^2+(A+8D)^2+(A+10D)^2=6A^2+66AD+253D^2$$
$$(A+D)^2+(A+3D)^2+(A+4D)^2+(A+5D)^2+(A+9D)^2+(A+11D)^2=6A^2+66AD+253D^2$$

所以 $\sum_{k=1}^{12}\left[A+(k-1)D\right]^2$ 可分為 2 組，每組 6 個數，和為 $6A^2+66AD+253D^2$，因此，

$\sum_{k=1}^{12T}\left[A+(k-1)D\right]^2$ 皆可分為 2 組，$T\in\mathbb{N}$，每組 6T 個數，且每組的總和為

T 6A^2 6AD D^2 72ADT 36D^{2}T 288D^{2}T^2

結論一：因為由$\boxed{\text{方法一}}$知，若我們分成 2 組時，其個數為 8 的倍數，令其為 8 R，$R\in\mathbb{N}$；

由$\boxed{\text{方法二}}$知，若我們分成 2 組時，其個數為 12 的倍數，令其為 12 T，$T\in\mathbb{N}$，

所以當個數 $x=8R+12T=2\times2^2\times R+3\times2^2\times T=4\times M$，$M=2R+3T\geq 2$，

$R,T\in\mathbb{N}$ **時，我們可知** A^2、$(A+D)^2$、$(A+2D)^2$、……、$\left[A+(4M-1)D\right]^2$，$M\geq 2$

能成功且漂亮地分成 2 組，且 2 組和皆相同。

8. **<u>當 x = 14，y = 7 時</u>**，每組和為 $2A^2+26AD+117D^2\leq$ 最大項與最小項的平方和 $(A+13D)^2+A^2=2A^2+26AD+169D^2$，故無法找到將 14 個等差數平方後分成 7 組，且每組和皆相等的方法。

9. **<u>當 x = 15，y = 5 時</u>**，並沒有發現可以將 14 個等差數平方後分成 2 組，且每組和皆相等的方法。

10.

<u>當 x = 16，y = 2 時</u>，利用$\boxed{\text{結論一}}$中的通式可解決，故可以將 16 個等差數平方後分成 2 組，且每組和皆相等。

<u>當 x = 16，y = 4 時</u>，並沒有發現可以將 16 個等差數平方後分成 4 組，且每組和皆相等的方法。

<u>當 x = 16，y = 8 時</u>，每組和為 $2A^2+30AD+155D^2\leq$ 最大項與最小項的平方和 $(A+15D)^2+A^2=2A^2+30AD+225D^2$，故無法找到將 16 個等差數平方後分成 8 組，且每組和皆相等的方法。

11. **<u>當 x = 18，y = 3 時</u>**，固定 A 為第一組第一個，共有 $\frac{C_5^{17}C_6^{12}C_6^6}{2!}$=2858856 個不同的分組方式，個不同的分組方式，但是經計算後，我們找到一個方法可以分為 2 組，且每組和皆相同。

$\boxed{\text{(方法三)：}}$

$A^2 + (A+5D)^2 + (A+8D)^2 + (A+9D)^2 + (A+13D)^2 + (A+16D)^2$
$= 6A^2 + 102AD + 595D^2$

$(A+D)^2 + (A+4D)^2 + (A+6D)^2 + (A+11D)^2 + (A+14D)^2 + (A+15D)^2$
$= 6A^2 + 102AD + 595D^2$

$(A+2D)^2 + (A+3D)^2 + (A+7D)^2 + (A+10D)^2 + (A+12D)^2 + (A+17D)^2$
$= 6A^2 + 102AD + 595D^2$

所以 $\sum_{k=1}^{18}\left[A+(k-1)D\right]^2$ 可分為 3 組，每組 6 個數，和為 $6A^2 + 102AD + 595D^2$，因此，

$\sum_{k=1}^{18R}\left[A+(k-1)D\right]^2$ 皆可分為 3 組，每組 6R 個數，且每組的總和為

$R\ \ 6A^2\ \ 6AD\ \ D^2\ \ 108ADR\ \ 54D^2R\ \ 648D^2R^2$

12.

<u>當 x = 20，y = 2 時</u>，利用$\boxed{\text{結論一}}$中的通式可解決，故可以將 20 個等差數平方後分成 2 組，且每組和皆相等。

<u>當 x = 20，y = 5 時</u>，並沒有發現可以將 20 個等差數平方後分成 5 組，且每組和皆相等的方法。

<u>當 x = 20，y = 10 時</u>，每組和為 $2A^2+38AD+247D^2 \le$ 最大項與最小項的平方和 $(A+19D)^2+A^2=2A^2+38AD+361D^2$，故無法找到將 20 個等差數平方後分成 10 組，且每組和皆相等的方法。

13. **<u>當 x = 21，y = 7 時</u>**，並沒有發現可以將 21 個等差數平方後分成 7 組，且每組和皆相等的方法。

14. **<u>當 x = 22，y = 11 時</u>**，每組和為 $2A^2+42AD+301D^2 \le$ 最大項與最小項的平方和 $(A+21D)^2+A^2=2A^2+42AD+441D^2$，故無法找到將 22 個等差數平方後分成 11 組，且每組和皆相等的方法。

15.

<u>**當 x = 24，y = 2 時**</u>，利用結論一中的通式可解決，故可以將 24 個等差數平方後分成 2 組，且每組和皆相等。

<u>**當 x = 24，y = 4 時**</u>，並沒有發現可以將 24 個等差數平方後分成 4 組，且每組和皆相等的方法。

16. <u>**當 x = 25，y = 5 時**</u>，並沒有發現可以將 16 個等差數平方後分成 4 組，且每組和皆相等的方法。

17. <u>**當 x = 26，y =13 時**</u>，每組和為 $2A^2+50AD+425D^2 \le$ 最大項與最小項的平方和 $(A+25D)^2+A^2=2A^2+50AD+625D^2$，故無法找到將 26 個等差數平方後分成 13 組，且每組和皆相等的方法。

18. <u>**當 x = 27，y = 3 時**</u>，固定 A 為第一組第一個，共有 $C_5^{11}C_6^6$=462 個不同的分組方式，但是經計算後，我們發現僅只有一個可以分為 2 組，且每組和皆相同。

(方法四)：

$$A^2+(A+4D)^2+(A+8D)^2+(A+11D)^2+(A+12D)^2+(A+16D)^2+(A+19D)^2+(A+23D)^2+(A+24D)^2$$
$$=9A^2+234AD+2067D^2$$

$$(A+D)^2+(A+5D)^2+(A+6D)^2+(A+9D)^2+(A+13D)^2+(A+17D)^2+(A+20D)^2+(A+21D)^2+(A+25D)^2$$
$$=9A^2+234AD+2067D^2$$

$$(A+2D)^2+(A+3D)^2+(A+7D)^2+(A+10D)^2+(A+14D)^2+(A+15D)^2+(A+18D)^2+(A+22D)^2+(A+26D)^2$$
$$=9A^2+234AD+2067D^2$$

所以 $\sum_{k=1}^{27}\left[A+(k-1)D\right]^2$ 可分為 3 組，每組 9 個數，和為 $9A^2+234AD+2067D^2$，因此，$\sum_{k=1}^{27T}\left[A+(k-1)D\right]^2$ 皆可分為 3 組，每組 9T 個數，且每組的總和為

$\frac{3}{2}$ T 6A^2 6AD D^2 162 ADT 81 D^{2}T 1458 D^{2}T^2

結論：(1) 由 方法三 知，若我們分成 3 組時，其個數為 18 的倍數，令其為 18R，$R\in$□；

由 方法四 知，若我們分成 3 組時，其個數為 27 的倍數，令其為 27T，所以當個數 $x=18R+27T=2\times3^2\times R+3\times3^2\times T=9M$，$M=2R+3T\ge2$ 時，我們可知 A^2、$(A+D)^2$、$(A+2D)^2$、…、$\left[A+(9M-1)D\right]^2$ 能成功且漂亮地分成 3 組，且每組和皆相同。

(2) 當 $y=4,5,\ldots\ldots$ 時，由先前分 2 組、3 組的方法，以此類推，我們可以將它們成功且漂亮地平均分成 y 組。

(三) 若有 x 個數字 A^2、$(A+D)^2$、$(A+2D)^2$、……、$\left[A+(x\text{-}1)D\right]^2$，今將這些數分為 y 組，使每組皆有 $\frac{x}{y}$ 個數，且各組之和都相等。

1. $\boxed{\text{當 } x=2y^2 \text{ 時}}$，我們能將 A^2、$(A+D)^2$、$(A+2D)^2$、……、$\left[A+(2y^2\text{-}1)D\right]^2$ 成功且漂亮地平分成 y 組之方法如下：

說明：

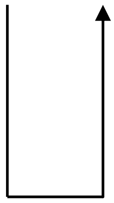
(1) 將 $2y^2$ 個數按順序排好後再分成 y 組，每組 2y 個數。

(2) 再將這 y 組數字都按照我們所找的規則排列。註(1)。

(3) 降層規則： 第 k 組降(k-1)層, k＝1,…, y。

(4) 最後在將這 y 組接在一起即為所求。

註(1)：排列規則：



ex：

1	8	12	13	19	22	26	31
2	7	9	16	20	21	27	30
3	6	10	15	17	24	28	29
4	5	11	14	18	23	25	32

故分組結果如下：

$$A^2 + \left[A+(2y-1)d\right]^2 + \left[A+(3y-1)D\right]^2 + \left[A+(3y-2)D\right]^2 + \ldots\ldots + \left[A+(2y^2-2y+1)D\right]^2 + \left[A+(2y^2-2)D\right]^2$$

$$(A+D)^2 + \left[A+(2y\text{-}2)D\right]^2 + \left[A+2yD\right]^2 + \left[A+(4y-1)D\right]^2 + \ldots\ldots + \left[A+(2y^2-2y+2)D\right]^2 + \left[A+(2y^2-3)D\right]^2$$

$$(A+2D)^2 + \left[A+(2y\text{-}3)D\right]^2 + \left[A+(2y+1)D\right]^2 + \left[A+(4y-2)D\right]^2 + \ldots\ldots + \left[A+(2y^2-2y+3)D\right]^2 + \left[A+(2y^2-4)D\right]^2$$

: : :

: : :

: : :

$$\left[A+(y\text{-}2)\right]^2 I + \left[A+(y+1)D\right]^2 + \left[A+(3y-3)D\right]^2 + \left[A+(3y+2)D\right]^2 + \ldots\ldots + \left[A+(2y^2-y-1)D\right]^2 + \left[A+(2y^2-y)D\right]^2$$

$$\left[A+(y\text{-}1)D\right]^2 + \left[A+yD\right]^2 + \left[A+(3y-2)D\right]^2 + \left[A+(3y+1)D\right]^2 + \ldots\ldots + \left[A+(2y^2-2y)D\right]^2 + \left[A+(2y^2-1)D\right]^2$$

因此，我們可知 A^2、$(A+D)^2$、$(A+2D)^2$、……、$\left[A+(2k^2\times R-1)D\right]^2$ 均能成功地平均分成 y 組。

2. $\boxed{\text{當 } x=3y^2 \text{ 時}}$，若分組數 $y=2h+1$，$h\in\mathbb{N}$，則 $x=3(2h+1)^2$。

將 A^2、$(A+D)^2$、$(A+2D)^2$、⋯、$\left\{A+\left[3(2h+1)^2-1\right]D\right\}^2$ 成功且漂亮地平均分成 $2h+1$ 組

說明：

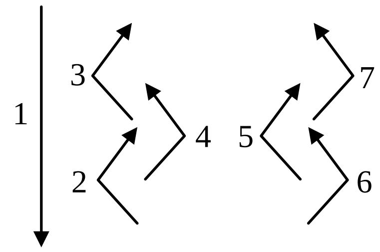
(5) 將 $3(2h+1)^2$ 個數按順序排好後再分成 $2h+1$ 組，每組 $3(2h+1)$ 個數。

(6) 再將這 $2h+1$ 組數字都按照我們所找的規則排列。註(2)。

(7) 降層規則： 第 k 組降(k-1)層, k＝1,…, $2h+1$。

(8) 最後在將這 $2h+1$ 組接在一起即為所求。

註(2)：排列規則：



ex：

1	8	15	20	21	28	34	39	41	48	52	59	62	70	72
2	10	12	16	23	30	35	36	43	49	54	56	63	67	74
3	7	14	17	25	27	31	38	45	50	51	58	64	69	71
4	9	11	18	22	29	32	40	42	46	53	60	65	66	73
5	6	13	19	24	26	33	37	44	47	55	57	61	68	75

故分組結果如下：

$A^2+\left[A+(3h+1)D\right]^2+\left[A+(6h+2)D\right]^2+\cdots\cdots+\left[A+(12h^2+10h+1)D\right]^2+$
$\left[A+(12h^2+11h+1)D\right]^2$

$(A+D)^2+\left[A+(4h+1)D\right]^2+\left[A+(5h+1)D\right]^2+\cdots\cdots+\left[A+(12h^2+9h)D\right]^2+\left[A+(12h^2+12h)D\right]^2$

$(A+2D)^2+\left[A+(3h)D\right]^2+\left[A+(6h)D\right]^2+\cdots\cdots+\left[A+(12h^2+10h)D\right]^2+\left[A+(12h^2+11h)D\right]^2$

$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$

$\left[A+(2h-2)D\right]^2+\left[A+(2h+2)D\right]^2+\left[A+(5h+3)D\right]^2+\cdots\cdots+\left[A+(12h^2+9h+2)D\right]^2+\left[A+(12h^2+10h+2)D\right]^2$

$\left[A+(2h-1)D\right]^2+\left[A+(3h+2)D\right]^2+\left[A+(4h+2)D\right]^2+\cdots\cdots+\left[A+(12h^2+8h+1)D\right]^2+\left[A+(12h^2+11h+2)D\right]^2$

$\left[A+(2h)D\right]^2+\left[A+(2h+1)D\right]^2+\left[A+(5h+2)D\right]^2+\cdots\cdots+\left[A+(12h^2+9h+1)D\right]^2+\left[A+(3(2h+1)^2-1)D\right]^2$

因此，我們可知 A^2、$(A+D)^2$、$(A+2D)^2$、……、$\left\{A+\left[3(2h+1)^2\times T-1\right]D\right\}^2$ 能成功且漂亮地平均分成 $(2h+1)$ 組。

3. $\boxed{\text{當 } x = 3y^2 \text{ 時}}$，若分組數 $y = 2h$ ， $h \in \mathbb{N}$ ，則 $x = 3(2h)^2$：

將 A^2、$(A+D)^2$、$(A+2D)^2$、…、$\left\{A+\left[3(2h)^2-1\right]D\right\}^2$ 成功且漂亮地平均分成 2h 組之方法如下：

說明：

(9) 將 $3(2h)^2$ 個數按順序排好後再分成 h 組，每組 12h 個數。

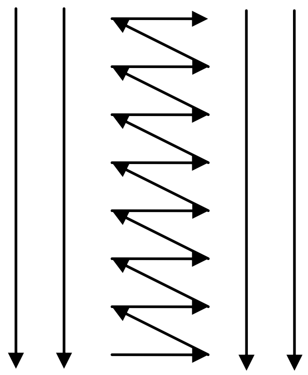
(10) 再將這 h 組數字都按照我們所找的規則排列。註(2)。

(11) 接下來把這 h 組都分成上下 2 部分，每部份 6h 個數。

(12) 降層規則： 第 k 組降(k-1)層, k＝1,…,h。

(13) 最後在將這 h 組接在一起即為所求。

註(2)：排列規則：



ex: 當 A = 1，D = 1，x = 108，y = 6 時：

(1) 將 108 個數由小至大分成 3 組，每組 36 個數。

(2) 再將這 3 組數字都按照我們所找的規則排列。

$1^2+7^2+23^2+24^2+25^2+31^2$	$37^2+43^2+59^2+60^2+61^2+67^2$	$73^2+79^2+95^2+96^2+97^2+103^2$
$2^2+8^2+21^2+22^2+26^2+32^2$	$38^2+44^2+57^2+58^2+62^2+68^2$	$74^2+80^2+93^2+94^2+98^2+104^2$
$3^2+9^2+19^2+20^2+27^2+33^2$	$39^2+45^2+55^2+56^2+63^2+69^2$	$75^2+81^2+91^2+92^2+99^2+105^2$
$4^2+10^2+17^2+18^2+28^2+34^2$	$40^2+46^2+53^2+54^2+64^2+70^2$	$76^2+82^2+89^2+90^2+100^2+106^2$
$5^2+11^2+15^2+16^2+29^2+35^2$	$41^2+47^2+51^2+52^2+65^2+71^2$	$77^2+83^2+87^2+88^2+101^2+107^2$
$6^2+12^2+13^2+14^2+30^2+36^2$	$42^2+48^2+49^2+50^2+66^2+72^2$	$78^2+84^2+85^2+86^2+102^2+108^2$

(3) 接下來把這 h 組都分成上下 2 部分，每部份 18 個數。

$1^2+7^2+23^2+24^2+25^2+31^2$	$37^2+43^2+59^2+60^2+61^2+67^2$	$73^2+79^2+95^2+96^2+97^2+103^2$
$2^2+8^2+21^2+22^2+26^2+32^2$	$38^2+44^2+57^2+58^2+62^2+68^2$	$74^2+80^2+93^2+94^2+98^2+104^2$
$3^2+9^2+19^2+20^2+27^2+33^2$	$39^2+45^2+55^2+56^2+63^2+69^2$	$75^2+81^2+91^2+92^2+99^2+105^2$

$4^2+10^2+17^2+18^2+28^2+34^2$	$40^2+46^2+53^2+54^2+64^2+70^2$	$76^2+82^2+89^2+90^2+100^2+106^2$
$5^2+11^2+15^2+16^2+29^2+35^2$	$41^2+47^2+51^2+52^2+65^2+71^2$	$77^2+83^2+87^2+88^2+101^2+107^2$
$6^2+12^2+13^2+14^2+30^2+36^2$	$42^2+48^2+49^2+50^2+66^2+72^2$	$78^2+84^2+85^2+86^2+102^2+108^2$

(4) 降層規則： 第 k 組降(k-1)層, k＝1,…3。

$1^2+7^2+23^2+24^2+25^2+31^2$	$39^2+45^2+55^2+56^2+63^2+69^2$	$74^2+80^2+93^2+94^2+98^2+104^2$
$2^2+8^2+21^2+22^2+26^2+32^2$	$37^2+43^2+59^2+60^2+61^2+67^2$	$75^2+81^2+91^2+92^2+99^2+105^2$
$3^2+9^2+19^2+20^2+27^2+33^2$	$38^2+44^2+57^2+58^2+62^2+68^2$	$73^2+79^2+95^2+96^2+97^2+103^2$
$4^2+10^2+17^2+18^2+28^2+34^2$	$42^2+48^2+49^2+50^2+66^2+72^2$	$77^2+83^2+87^2+88^2+101^2+107^2$
$5^2+11^2+15^2+16^2+29^2+35^2$	$40^2+46^2+53^2+54^2+64^2+70^2$	$78^2+84^2+85^2+86^2+102^2+108^2$
$6^2+12^2+13^2+14^2+30^2+36^2$	$41^2+47^2+51^2+52^2+65^2+71^2$	$76^2+82^2+89^2+90^2+100^2+106^2$
降 0 層	降 1 層	降 2 層

(5) 最後在將這 3 組接在一起即為所求。

$$1^2+7^2+23^2+24^2+25^2+31^2+39^2+45^2+55^2+56^2+63^2+69^2+74^2+80^2+93^2+94^2+98^2+104^2=70959$$
$$2^2+8^2+21^2+22^2+26^2+32^2+37^2+43^2+59^2+60^2+61^2+67^2+75^2+81^2+91^2+92^2+99^2+105^2=70959$$
$$3^2+9^2+19^2+20^2+27^2+33^2+38^2+44^2+57^2+58^2+62^2+68^2+73^2+79^2+95^2+96^2+97^2+103^2=70959$$
$$4^2+10^2+17^2+18^2+28^2+34^2+42^2+48^2+49^2+50^2+66^2+72^2+77^2+83^2+87^2+88^2+101^2+107^2=70959$$
$$5^2+11^2+15^2+16^2+29^2+35^2+40^2+46^2+53^2+54^2+64^2+70^2+78^2+84^2+85^2+86^2+102^2+108^2=70959$$
$$6^2+12^2+13^2+14^2+30^2+36^2+41^2+47^2+51^2+52^2+65^2+71^2+76^2+82^2+89^2+90^2+100^2+106^2=70959$$

因此，我們可得知 1^2、2^2、3^2、……、$[\,3(2h)^2\times T\,]^2$ 均能成功且漂亮地平均分成 2h 組。

4. **結論：因為由 1.知，若我們分成 y 組時，其個數為 $2\times y^2$ 的倍數，令其為 $2\times y^2\times R$；由 2.、3.知，若我們分成 y 組時，其個數為 $3\times y^2$ 的倍數，令其為 $3\times y^2\times T$，所以當個數 $x=2\times y^2\times R+3\times y^2\times T=y^2\times M$，$M=2R+3T\geq 2$ 時，我們可知**

A^2、$(A+D)^2$、$(A+2D)^2$…、$\left[A+\left(y^2\times M-1\right)D\right]^2$ 能成功且漂亮地平均分成 y 組，且每組和皆相同。

(四) **總結論：**

1. 我們得知將 A^2、$(A+D)^2$、$(A+2D)^2$…、$\left[A+(x-1)D\right]^2$ 分為 y 組，使每組數之和都相等時，x 與 y 至少必須滿足下列兩個條件：

(1). 因為有 x 個數分成 y 組，每組有 $\frac{x}{y}$ 個數，所以 $\frac{x}{y}\in$□

(2). 每一組數之總和 $=\dfrac{x\left[6A^2+6AD(x-1)+D^2(2x^2-3x+1)\right]}{6y}$ 且給定 x 與 y 後，A 與 D 的各項係數必須為正整數。

2. 當 $x=2\times y^2\times R+3\times y^2\times T=y^2\times M$，$M=2R+3T\geq 2$ 時，我們找到一個規則能將 A^2、$(A+D)^2$、$(A+2D)^2$…、$\left[A+(x-1)D\right]^2$ 成功且漂亮地平均分成 y 組，且各組之和相等。

二、

(一) 已知有 x 個數為 A^3、$(A+D)^3$、$(A+2D)^3$…、$\left[A+(x\text{-}1)D\right]^3$，希望能找到一個規則，將這些數分為 y 組，使每組皆有 $\frac{x}{y}$ 個數，且每組數之和都相等。

1. **<u>當 x = 8，y = 2 時</u>**，利用$\boxed{\text{方法一}}$的規則排列：

$$A^3+(A+3D)^3+(A+5D)^3+(A+6D)^3=4A^3+42A^2D^2+210AD^2+368D^3$$

$$(A+D)^3+(A+2D)^3+(A+4D)^3+(A+7D)^3=\left[4A^3+42A^2D^2+210AD^2+368D^3\right]+48D^3$$

發現兩組的和並不相同，但是卻相差 $48D^3$ ，因此我們用相同手法再列出 8 個等差數的 3 次方：

$$(A+8D)^3+(A+11D)^3+(A+13D)^3+(A+14D)^3=4A^3+138A^2D^2+1650AD^2+6784D^3$$

$$(A+9D)^3+(A+10D)^3+(A+12D)^3+(A+15D)^3=\left[4A^3+138A^2D^2+1650AD^2 \ldots\right]+ \ldots D^3$$

將第二組降一階後再與第一組相加：

$$A^3+(A+3D)^3+(A+5D)^3+(A+6D)^3+(A+9D)^3+(A+10D)^3+(A+12D)^3+(A \ldots$$

$$=8A^3+180A^2D^2+1860AD^2+7200D^3$$

$$(A+D)^3+(A+2D)^3+(A+4D)^3+(A+7D)^3+(A+8D)^3+(A+11D)^3+(A+13D)^3+(\ldots$$

$$=8A^3+180A^2D^2+1860AD^2+7200D^3$$

所以 $\sum_{k=1}^{16}\left[A+(k-1)D\right]^3$ 可分為兩組，每組 8 個數，和為 $8A^3+180A^2D^2+1860AD^2+7200D^3$，

因此，$\sum_{k=1}^{16R}\left[A+(k-1)D\right]^3$ 皆可分為兩組，每組 8R 個數，且每組的總和為

4R 2A D 1 16R A^2 AD 1 16R $8D^2$R 1 16R

2. **<u>當 x = 12，y = 2 時</u>**，利用$\boxed{\text{方法二}}$的規則排列：

$$A^3+(A+2D)^3+(A+6D)^3+(A+7D)^3+(A+8D)^3+(A+10D)^3$$
$$=6A^3+99A^2D+759AD^2+2079D^3$$

$$(A+D)^3+(A+3D)^3+(A+4D)^3+(A+5D)^3+(A+9D)^3+(A+11D)^3$$
$$=\left[6A^3+99A^2D+759AD^2+2079D^3\right]+198D^3$$

發現兩組的和並不相同，但是卻相差 $198D^3$，因此我們用相同手法再列出 12 個等差數的 3 次方：

$$(A+12D)^3+(A+14D)^3+(A+18D)^3+(A+19D)^3+(A+20D)^3+(A+22D)^3$$
$$=6A^3+315A^2D+5727AD^2+35811D^3$$

$$(A+13D)^3+(A+15D)^3+(A+16D)^3+(A+17D)^3+(A+21D)^3+(A+23D)^3$$
$$=\left[6A^3+315A^2D+5727AD^2+35811D^3\right]+198D^3$$

將第二組降一階後再與第一組相加：

$$A^3+(A+2D)^3+(A+6D)^3+(A+7D)^3+(A+8D)^3+(A+10D)^3+(A+13D)^3+(A+15D)^3+(A+16D)^3$$
$$+(A+17D)^3+(A+21D)^3+(A+23D)^3=12A^3+414A^2D+6486AD^2+38088D^3$$

$$(A+D)^3+(A+3D)^3+(A+4D)^3+(A+5D)^3+(A+9D)^3+(A+11D)^3+(A+12D)^3+(A+14D)^3+(A+18D)^3$$
$$+(A+19D)^3+(A+20D)^3+(A+22D)^3=12A^3+414A^2D+6486AD^2+38088D^3$$

所以 $\sum_{k=1}^{24}\left[A+(k-1)D\right]^3$ 可分為兩組，每組 12 個數，和為 $12A^3+414A^2D+6486AD^2+38088D^3$，

因此，$\sum_{k=1}^{24T}\left[A+(k-1)D\right]^3$ 皆可分為兩組，每組 12T 個數，且每組的總和為

6T 2A D 1 24T A^2 AD 1 24T 12 D^2T 1 24T

結論一：因為由 $\boxed{1.}$知，若我們分成 2 組時，其個數為 16 的倍數，令其為 16 *R*；

由 $\boxed{2.}$知，若我們分成 2 組時，其個數為 24 的倍數，令其為 24 *T*，所以當

個數為 $16R+24T=2\times2^3\times R+3\times2^3\times T=8\times M$，$M=2R+3T\geq2$ 時

，我們可知 A^3、$(A+D)^3$、$(A+2D)^3$、…、$\left[A+(8M-1)D\right]^3$ 能成功且漂亮

地平均分成 2 組。

3. <u>**當 x = 18，y = 3 時**</u>，利用$\boxed{\text{方法三}}$的規則排列：

$$A^3+(A+5D)^3+(A+8D)^3+(A+9D)^3+(A+13D)^3+(A+16D)^3$$
$$=6A^3+153A^2D+1785AD^2+7659D^3$$

$$(A+D)^3+(A+4D)^3+(A+6D)^3+(A+11D)^3+(A+14D)^3+(A+15D)^3$$
$$=\left[6A^3+153A^2D+1785AD^2+7659D^3\right]+72D^3$$

$$(A+2D)^3+(A+3D)^3+(A+7D)^3+(A+10D)^3+(A+12D)^3+(A+17D)^3$$
$$=\left[6A^3+153A^2D+1785AD^2+7659D^3\right]+360D^3$$

發現三組的和並不相同，但第二組比第一組多 $72D^3$，第三組比第一組多 $360D^3$，因此我們用相同手法再列出 36 個等差數的 3 次方：

$$(A+18D)^3+(A+23D)^3+(A+26D)^3+(A+27D)^3+(A+31D)^3+(A+34D)^3$$
$$=6A^3+477A^2D+13125AD^2+124353D^3$$

$$(A+19D)^3+(A+22D)^3+(A+24D)^3+(A+29D)^3+(A+32D)^3+(A+33D)^3$$
$$=\left[6A^3+477A^2D+13125AD^2+124353D^3\right]+72D^3$$

$$(A+20D)^3+(A+21D)^3+(A+25D)^3+(A+28D)^3+(A+30D)^3+(A+35D)^3$$
$$=\left[6A^3+477A^2D+13125AD^2+124353D^3\right]+360D^3$$

$$(A+36D)^3+(A+41D)^3+(A+44D)^3+(A+45D)^3+(A+49D)^3+(A+52D)^3$$
$$=6A^3+801A^2D+36129AD^2+550143D^3$$
$$(A+37D)^3+(A+40D)^3+(A+42D)^3+(A+47D)^3+(A+50D)^3+(A+51D)^3$$
$$=\left[6A^3+801A^2D+36129AD^2+550143D^3\right]+72D^3$$
$$(A+38D)^3+(A+39D)^3+(A+43D)^3+(A+46D)^3+(A+48D)^3+(A+53D)^3$$
$$=\left[6A^3+801A^2D+36129AD^2+550143D^3\right]+360D^3$$

將第三組降二階加上第二組降一階再與第一組相加，可得每組和為
$18A^3+1431A^2D+51039AD^2+682587D^3$

所以$\sum_{k=1}^{54}\left[A+(k-1)D\right]^3$可分為三組，每組 18 個數，和為$18A^3+1431A^2D+51039AD^2+682587D^3$，

因此，$\sum_{k=1}^{54R}\left[A+(k-1)D\right]^3$皆可分為三組，每組 18R 個數，且每組的總和為

9R 2A D 54DR A^2 AD 54ADR 27D^2R 1458 D^2R^2

4. **<u>當 x = 27，y = 3 時</u>**，利用$\boxed{\text{方法四}}$的規則排列：

$$A^3+(A+4D)^3+(A+8D)^3+(A+11D)^3+(A+12D)^3+(A+16D)^3+(A+19D)^3+(A+23D)^3+(A+24D)^3$$
$$=9A^3+351A^2D+6201AD^2+40581D^3$$

$$(A+D)^3+(A+5D)^3+(A+6D)^3+(A+9D)^3+(A+13D)^3+(A+17D)^3+(A+20D)^3+(A+21D)^3+(A+25D)^3$$
$$=\left[9A^3+351A^2D+6201AD^2+40581D^3\right]+486D^3$$

$$(A+2D)^3+(A+3D)^3+(A+7D)^3+(A+10D)^3+(A+14D)^3+(A+15D)^3+(A+18D)^3+(A+22D)^3+(A+26D)^3$$
$$=\left[9A^3+351A^2D+6201AD^2+40581D^3\right]+972D^3$$

發現三組的和並不相同，但第二組比第一組多$486D^3$，第三組比第一組多$972D^3$，因此我們用相同手法再列出 27 個等差數的 3 次方：

$$(A+27)^3+(A+31D)^3+(A+35D)^3+(A+38D)^3+(A+39D)^3+(A+43D)^3+(A+46D)^3+(A+50D)^3+(A+51D)^3$$
$$=9A^3+1080A^2D+44838AD^2+641034D^3$$

$$(A+28D)^3+(A+32D)^3+(A+33D)^3+(A+36D)^3+(A+40D)^3+(A+44D)^3+(A+47D)^3+(A+48D)^3+(A+52D)^3$$
$$=\left[9A^3+1080A^2D+44838AD^2+641034D^3\right]+486D^3$$

$$(A+29D)^3+(A+30D)^3+(A+34D)^3+(A+37D)^3+(A+41D)^3+(A+42D)^3+(A+45D)^3+(A+49D)^3+(A+53D)^3$$
$$=\left[9A^3+1080A^2D+44838AD^2+641034D^3\right]+972D^3$$

$$(A+54D)^3+(A+58D)^3+(A+62D)^3+(A+65D)^3+(A+66D)^3+(A+70D)^3+(A+73D)^3+(A+77D)^3+(A+78D)^3$$
$$=9A^3+1809A^2D+122841AD^2+2816127D^3$$

$$(A+55D)^3+(A+59D)^3+(A+60D)^3+(A+63D)^3+(A+67D)^3+(A+71D)^3+(A+74D)^3+(A+75D)^3+(A+79D)^3$$
$$=\left[9A^3+1809A^2D+122841AD^2+2816127D^3\right]+486D^3$$

$$(A+56D)^3+(A+57D)^3+(A+61D)^3+(A+64D)^3+(A+68D)^3+(A+69D)^3+(A+72D)^3+(A+76D)^3+(A+80D)^3$$
$$=\left[9A^3+1809A^2D+122841AD^2+2816127D^3\right]+972D^3$$

將第三組降二階加上第二組降一階再與第一組相加，可得每組和為
$27A^3+3240A^2D+173880AD^2+3499200D^3$

所以 $\sum_{k=1}^{81}\left[A+(k-1)D\right]^3$ 可分為三組，每組 27 個數，和為 $27A^3+3240A^2D+173880AD^2+3499200D^3$

，因此，$\sum_{k=1}^{81T}\left[A+(k-1)D\right]^3$ 皆可分為三組，每組 $27T$ 個數，且每組的總和為

$\frac{27}{4}$ T 2A D 81 DT 2A^2 2AD 162 ADT 81 D^2 T 6561 D^2 T^2

5. 當 $y=4$, 5 , ……時，由先前分 2 組、3 組的方法，以此類推，我們可以將它們成功且漂亮地平均分成 y 組。

6. **結論：** 將 A^3、$(A+D)^3$、$(A+2D)^3$…、$\left[A+(x-1)D\right]^3$ ，今將這些數分為 y 組，且各組之和都相等。

   (1) 當 $x=2y^3$ 時，我們能將 A^3、$(A+D)^3$、$(A+2D)^3$…、$\left[A+(2y^3\times R-1)D\right]^3$成功且漂地平均分成 y 組。

   (2) 當 $x=3y^3$ 時，我們能將 A^3、$(A+D)^3$、$(A+2D)^3$…、$\left[A+(3y^3\times T-1)D\right]^3$能成功且漂亮地平均分成 y 組。

   (3) 因為由(1)知，若我們分成 y 組時，其個數為 $2\times y^3$ 的倍數，令其為 $2\times y^3\times R$ ；由(2)知，若我們分成 y 組時，其個數為 $3\times y^3$ 的倍數，令其為 $3\times y^3\times T$ ，所以當個數 $x=2\times y^3\times R+3\times y^3\times T=y^3\times M$，$M=2R+3T\geq 2$ 時，我們可知

   A^3、$(A+D)^3$、$(A+2D)^3$…、$\left[A+(y^3\times M-1)D\right]^3$能成功且漂亮地平均分成 y 組。

(二) 已知有 x 個數為 A^p 、 $(A+D)^p$ 、 $(A+2D)^p$ … 、 $\left[A+(x-1)D\right]^p$ ，希望能找到一個規則，

將這些數分為 y 組，使每組皆有 $\frac{x}{y}$ 個數，且每組數之和都相等。

1. 當 $x=2y^p$ 時，我們能將 A^p 、 $(A+D)^p$ 、 $(A+2D)^p$ … 、 $\left[A+(2y^p\times R-1)D\right]^p$成功且漂亮地平均分成 y 組。

2. 當 $x=3y^p$ 時，我們能將 A^p 、 $(A+D)^p$ 、 $(A+2D)^p\ldots$ 、 $\left[A+(3y^p\times T-1)D\right]^p$ 能成功且漂亮地平均分成 y 組。

3. 因為由 1.知，若我們分成 y 組時，其個數為 $2y^p$ 的倍數，令其為 $2\times y^p\times R$；
由 2.知，若我們分成 y 組時，其個數為 $3y^p$ 的倍數，令其為 $3\times y^p\times T$ ，所以當個數 x = $2\times y^p\times R+3\times y^p\times T=y^p\times M$ ， $M=2R+3T\geq 2$ 時，我們可知

A^p 、$(A+D)^p$ 、$(A+2D)^p\ldots$ 、$\left[A+\left(y^p\times M-1\right)D\right]^p$ 能成功且漂亮地平均分成 y 組。

伍、研究結果：

一、

(一) 我們得知有 x 個數分別為 A^2、$(A+D)^2$、$(A+2D)^2\ldots$、$\left[A+(x-1)D\right]^2$ 分為 y 組，使每組數之和都相等時，x 與 y 至少

必須滿足下列兩個條件：

1. 因為有 x 個數分成 y 組，每組有 $\frac{x}{y}$ 個數，所以 $\frac{x}{y}\in$

2. 因為 $A^2+(A+D)^2+(A+2D)^2+\ldots+\left[A+(x-1)D\right]^2=\frac{x\left[6A^2+6AD(x-1)+D^2(2x^2-3x+1)\right]}{6}$

，所以每一組數之總和 $=\frac{x\left[6A^2+6AD(x-1)+D^2(2x^2-3x+1)\right]}{6y}$ 且給定 x 與 y 後，

A 與 D 的各項係數必須為正整數。

(二) 當 $x=2\times y^2\times R+3\times y^2\times T=y^2\times M$，$M=2R+3T\geq 2$ 時，我們找到一個規則能將 A^2、$(A+D)^2$、$(A+2D)^2\ldots$、$\left[A+(x-1)D\right]^2$ 成功且漂亮地平均分成 y 組，且各組之和相等。

二、

(一) 已知有 x 個數為 A^3、$(A+D)^3$、$(A+2D)^3\ldots$、$\left[A+(x-1)D\right]^3$ 時：

1. 當 $x=2\times y^3\times R+3\times y^3\times T=y^3\times M$，$M=2R+3T\geq 2$ 時，我們找到一個規則能將 A^3、$(A+D)^3$、$(A+2D)^3\ldots$、$\left[A+(x-1)D\right]^3$ 成功且漂亮地平均分成 y 組，且各組之和相等。

三、

(一) 已知有 x 個數為 A^p 、 $(A+D)^p$ 、 $(A+2D)^p\ldots$ 、$\left[A+(x-1)D\right]^p$ 時：

1. 當 $x=2\times y^p\times R+3\times y^p\times T=y^p\times M$ ， $M=2R+3T\geq 2$ 時，我們找到一個規則能將 A^p 、 $(A+D)^p$ 、 $(A+2D)^p\ldots$ 、$\left[A+\left(y^p\times M-1\right)D\right]^p$ 成功且漂亮地平均分成 y 組，且各組之和相等。

陸、討論:

雖然目前我們已找到一個規則能將 A^p 、 $(A+D)^p$ 、 $(A+2D)^p\ldots$、 $\left[A+(x-1)D\right]^p$ ($x=y^p\times M, M\geq 2$)成功且漂亮地平均分成 y 組，各組之和都相等，但或許還有其他的 x 值亦能分成 y 組，我們尚未完全討論出來，希望以後能繼續研究並加以完備，歡迎更多志同道合的朋友能共同來研究這個問題。

柒、參考資料及其他：

一. 龍騰版 高中數學第一冊、第四冊

二. 胡炳生著(1991)，數學解題思維方法，九章出版社 出版。

三. 嚴鎮軍主編(2002)，高中數學競賽教程，九章出版社 出版

四. mathematica (數學應用軟體)

【評語】040412

本文研究是否能將 x 項等差數列分成 y 組，使得每組的平方和相等，並進一步擴展到 p 次方和相等的問題。作者擅用數論及不等式進行討論，足見其對相關工具的熟稔程度，值得嘉許。