中華民國第 51 屆中小學科學展覽會

作品說明書

高中組　數學科

第三名

040411

棒子圍牆—另類等周問題之探討

學校名稱：國立科學工業園區實驗高級中學

作者：	指導老師：
高二 林其政	藍錦文
高二 林彥呈	莊添丁
高二 陶詩諺	

關鍵詞：等周問題、共圓、三角函數

棒子圍牆-另類等周問題之探討

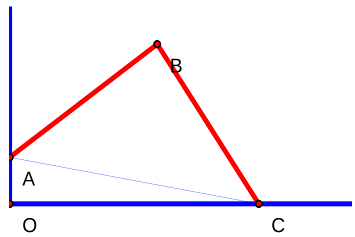
摘要

首先我們討論當兩面牆壁成直角，拿兩根相同的棒子圍牆壁，端點位於牆面上，另一頭互相接觸，如何圍出最大面積。接著，由兩根棒子推廣到 N 根棒子。再來推廣到棒子長度不相同與牆壁不成直角或其他形狀的牆壁。

壹、研究動機

相信"等周問題"大家應該都十分熟悉。當一根固定周長的繩子圍出最大面積時的圖形為圓形。我們對於這個問題十分有興趣，老師剛好提出一個有關的問題，激發我們研究的興趣。問題如下：

如右圖，兩面牆壁成直角，拿兩根相同的棒子圍牆壁，端點位於牆面上，另一頭互相接觸，如何圍出最大面積？



解出來此問題之後覺得很有趣，便開始研究將原始的條件改變，看看會得到什麼結論。

貳、研究目的

我們先解決兩面牆壁成直角，拿兩根相同的棒子圍牆壁，端點位於牆面上，另一頭互相接觸，如何圍出最大面積的問題。再來，依以下步驟做更進一步的討論。

一、 兩面牆夾角介於 0 度到 180 度之間，與 n 根等長棒子。
二、 兩面牆夾角介於 0 度到 180 度之間，與 n 根任意長棒子。
三、 兩面牆夾角大於 180 度，與 n 根任意長棒子。
四、 牆壁形狀為圓形，與 n 根任意長棒子。
五、 牆壁形狀為拋物線，與 n 根任意長棒子。
六、 牆壁形狀為橢圓，與 n 根任意長棒子。

參、研究設備及器材

筆，紙，電腦、GSP 軟體和 MathType 6。

肆、 研究的過程或方法

條件說明：本篇文章中，若無特別說明，則須滿足下列條件：

1.棒子的長度固定。
2.棒子在牆上移動時，棒子端點需貼緊牆壁，且兩根棒子的端點需接觸不可分離。
3.牆壁形狀固定。
4.若為兩面牆壁或拋物線牆壁，牆壁無限長。
5.圓形及橢圓形牆壁的情形中，所有棒子的長度總和小於等於直徑或短軸。

一、兩面牆夾角介於 0 度到 180 度之間，與 n 根等長棒子。

我們依下列步驟證明兩面牆夾角介於 0 度到 180 度之間，與 n 根等長棒子的情形:

(1)兩根等長的棒子，

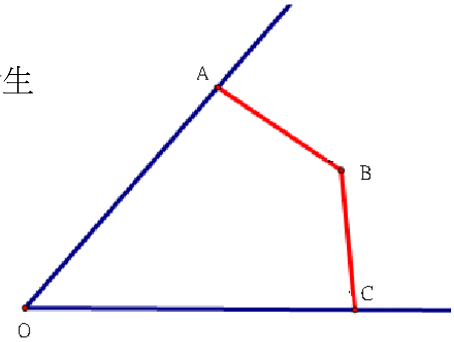
(2)n 根等長的棒子。

(1)兩根等長的棒子的情形

__**定理 1**__： 如圖(1)，若 $\overline{AB}=\overline{BC}=a$ 為固定的棒長且 $\angle AOC=\theta$ 為兩牆面之夾角，其中 $0<\theta\le\pi$，則當 A、B、C 在以 O 為圓心之圓上時，四邊形 OABC 有最大面積。

證明：我們將證明分成兩步驟進行。

1. 我們先固定 $\overline{AC}$ 的長度，並證明四邊形 $OABC$ 最大面積發生在當 $\overline{OA}=\overline{OC}$ 時。



圖(1)

若固定 $\overline{AC}$，則△ABC 面積為定值，因此，

△OAC 面積有最大值時，四邊形 OABC 有最大面積。

由正弦定理可知△OAC 中，$\dfrac{\overline{OA}}{\sin\angle OCA}=\dfrac{\overline{OC}}{\sin\angle OAC}=\dfrac{\overline{AC}}{\sin\theta}$。

故△OAC 面積=$\dfrac{1}{2}\overline{OA}\times\overline{OC}\times\sin\theta=\dfrac{\overline{AC}^2}{2\sin\theta}\times\sin\angle OCA\times\sin\angle OAC$

因為，$2\sin\angle OCA\times\sin\angle OAC=\cos(\angle OCA-\angle OAC)-\cos(\angle OCA+\angle OAC)$

$$=\cos(\angle OCA-\angle OAC)-\cos(\pi-\theta)$$

所以，$\angle OCA=\angle OAC$ 時，$2\sin\angle OCA\times\sin\angle OAC$ 有最大值。

因此，△OAC 面積的最大值發生在 $\angle OCA=\angle OAC$ 時，即 $\overline{OA}=\overline{OC}$。

2. 證明：當 $\overline{OA}=\overline{OC}=\overline{OB}$ 時，四邊形 $OABC$ 有最大面積。

因為 $\overline{OA}=\overline{OC}$ 且 $\overline{AB}=\overline{BC}=a$，所以四邊形 $OABC$ 面積=2△ OAB 面積。

由正弦定理知△OAB 中 $\dfrac{\overline{OA}}{\sin\angle OBA}=\dfrac{\overline{OB}}{\sin\angle OAB}=\dfrac{\overline{AB}}{\sin\angle AOB}$。

因此△OAB 面積$=\dfrac{1}{2}\overline{OA}\times\overline{OB}\times\sin\angle AOB=\dfrac{\overline{AB}^2}{2\sin\angle AOB}\sin\angle OBA\times\sin\angle OAB$。

因為 $2\sin\angle OBA\times\sin\angle OAB=\cos(\angle OBA-\angle OAB)-\cos(\angle OBA+\angle OAB)$

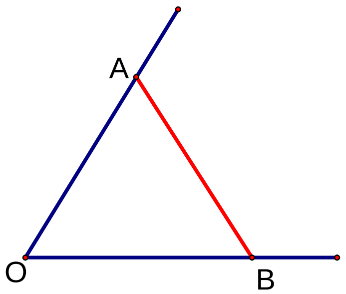
$$=\cos(\angle OBA-\angle OAB)-\cos(\pi-\frac{\theta}{2})$$

在 $\angle OBA=\angle OAB$ 時有最大值。

我們得知三角形△OAB 面積在 $\angle OBA=\angle OAB$ 時有最大值。所以，當 $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}$ 時，也就是 A、B、C 位於以 O 為圓心之圓上時，四邊形 $OABC$ 有最大面積。

接下來我們先證明下面的性質：

<u>**引理 1**</u>： 如右圖，$\overline{\mathrm{AB}}=a$ 為固定的棒長且 $\angle AOB=\theta$ 為兩牆面之夾角，其中 $0<\theta\le\pi$ ，則當 $|\angle AOB-\angle BOA|$ 越小時 ΔAOB 面積越大。



證明：

$$\Delta AOB\text{ 面積}=\frac{1}{2}\overline{OA}\times\overline{OB}\times\sin\theta$$

$$=\frac{a^2}{2\sin\theta}\times\sin\angle AOB\times\sin\angle BOA$$

$$=\frac{a^2}{4\sin\theta}\times\left[\cos(\angle AOB-\angle BOA)-\cos(\angle AOB+\angle BOA)\right]$$

$$=\frac{a^2}{4\sin\theta}\times\left[\cos(\angle AOB-\angle BOA)-\cos(\pi-\theta)\right]$$

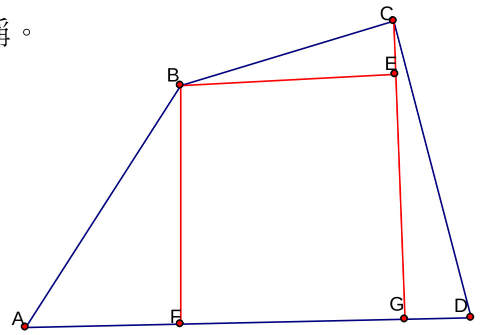
由上式可知，$\cos(\angle AOB-\angle BOA)$ 越大時 ΔAOB 面積越大，且 $0\le|\angle AOB-\angle BOA|<\pi$ ，$-1<\cos(\angle AOB-\angle BOA)\le 1$，故當 $|\angle AOB-\angle BOA|$ 越小時，$\cos(\angle AOB-\angle BOA)$ 越大，ΔAOB 面積越大。

(2)n 根等長的棒子的情形

<u>**引理 2**</u>：如圖(2)，若 $\overline{AB}=\overline{CD}=a$ 、 $\overline{BC}=b$ 且 $\overline{AD}=k$ （ $0\le k<2a+b$ ）為固定之長度，則當四邊形 $ABCD$ 有最大面積時，三根棒子 $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 和 $\overline{CD}$ 必「**對稱擺放**」。所謂「對稱擺放」是指平面上存在一直線 L，並且四邊形 $ABCD$ 關於 L 左右對稱。

證明：

如圖(2)，作 $\overline{BF}\perp\overline{AD}$ 且 $\overline{CG}\perp\overline{AD}$ 。假設 $\overline{BF}\le\overline{CG}$ 且作 $\overline{BE}\perp\overline{CG}$ 。設 $\angle BAF=\theta_1$ ，$\angle CBE=\theta_2$ 且 $\angle CDG=\theta_3$ 。



圖(2)

要證明三根棒子 $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 和 $\overline{CD}$ 必**對稱**擺放僅需要證明 $\theta_2=0$ 且 $\theta_1=\theta_3$ 即可。因為 $\overline{AD}=k=aCos\theta_1+bCos\theta_2+aCos\theta_3$ ，所以我們有

四邊形 $ABCD$ 面積=Δ ABF 面積 ＋Δ CDG 面積 ＋ 梯形 $BCGF$ 面積

$$=\frac{a^2}{2}Sin\theta_1Cos\theta_1+\frac{a^2}{2}Sin\theta_3Cos\theta_3+\frac{ab}{2}(Sin\theta_1+Sin\theta_3)Cos\theta_2$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(Sin\theta_1Cos\theta_1+Sin\theta_3Cos\theta_3+(Sin\theta_1+Sin\theta_3)\left(\frac{k}{a}-Cos\theta_1-Cos\theta_3\right)\right)$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(\frac{k}{a}Sin\theta_1+\frac{k}{a}Sin\theta_3-Sin\theta_1Cos\theta_1-Sin\theta_3Cos\theta_3\right)$$

$$=\frac{a^2}{2}\left[\frac{k}{a}(Sin\theta_1+Sin\theta_3)-Sin(\theta_1+\theta_3)\right.$$

$$=\frac{a^2}{2}\left[\frac{2k}{a}Sin\left(\frac{\theta_1+\theta_3}{2}\right)Cos\left(\frac{\theta_1-\theta_3}{2}\right)-Sin(\theta_1+\theta_3)\right]$$

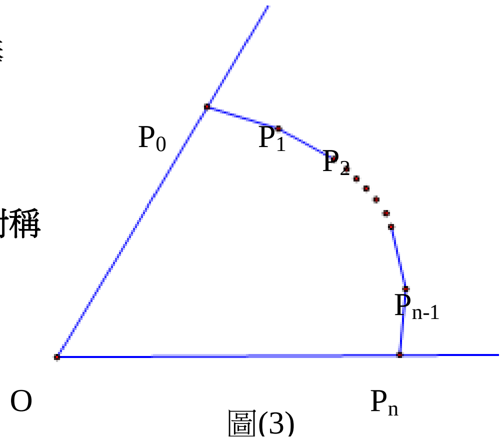
$$=a^2\mathrm{Sin}((\theta_1+\theta_3)/2)\times(k\,\mathrm{Cos}((\theta_1-\theta_3)/2)/a-\mathrm{Cos}((\theta_1+\theta_3)/2))$$

由於 k 與 a 均為定值，當四邊形 $ABCD$ 有最大面積時，$\frac{2k}{a}Sin(\frac{\theta_1+\theta_3}{2})Cos(\frac{\theta_1-\theta_3}{2})-Sin(\theta_1+\theta_3)$ 亦必有最大值。另一方面，因為 $\frac{k}{a}-\frac{bCos\theta_2}{a}=Cos\theta_1+Cos\theta_3=2Cos(\frac{\theta_1+\theta_3}{2})Cos(\frac{\theta_1-\theta_3}{2})$，所以當 $\theta_2=0$ 且 $\theta_1=\theta_3$ 時，$\mathrm{Cos}\theta_2$、$\mathrm{Cos}((\theta_1-\theta_3)/2)$有最大值，所以 $Cos(\frac{\theta_1+\theta_3}{2})$ 有最小值，且 $Sin(\frac{\theta_1+\theta_3}{2})$ 有最大值。因此，在對稱時($\theta_2=0$ 且 $\theta_1=\theta_3$)，四邊形 $ABCD$ 面積 $a^2\mathrm{Sin}((\theta_1+\theta_3)/2)\times(\mathrm{k}\,\mathrm{Cos}((\theta_1-\theta_3)/2)/a-\mathrm{Cos}((\theta_1+\theta_3)/2))$有最大值。若是 $\overline{BF}\geq\overline{CG}$，可以得到相同結果。

<u>**定理 2**</u>：如圖(3)，設兩牆角夾角 $\angle P_0OP_n=\theta$，和 n 根等長棒子 $\overline{P_0P_1}=\overline{P_1P_2}=\cdots\cdots=\overline{P_{n\text{-}1}P_n}=a$。我們有以下結論：

(1) 多邊形 $OP_0\ldots P_n$ 有最大面積時，$\overline{P_0P_1},\overline{P_1P_2},\cdots\cdots,\overline{P_{n\text{-}1}P_n}$ 必**對稱**擺放。

(2) 當 $P_0,P_1,\cdots,P_n$ 在以 O 為圓心之圓上時，多邊形 $OP_0\ldots P_n$ 有最大面積。



圖(3)

1.證明：我們先證明(1)。

由引理 2 可得知，先固定 P_0P_n，討論當多邊形 $P_1P_2\ldots P_{n\text{-}1}$ 形狀固定時($\overline{P_1P_{n-1}}$ 也固定)，可視 $\overline{P_0P_1}$ 、 $\overline{P_1P_{n-1}}$ 、 $\overline{P_{n-1}P_n}$ 為三根棒子，多邊形 $P_0P_1\ldots P_n$ 有最大面積時，即四邊形 $P_0P_1P_{n\text{-}1}P_n$ 有最大面積時。因此，當 $\overline{P_1P_{n-1}}$ 固定時，$\overline{P_0P_1}$ 、 $\overline{P_1P_{n-1}}$ 、 $\overline{P_{n-1}P_n}$ 對稱擺放，面積才會是最大值。接著固定 $\overline{P_1P_{n-1}}$，考慮多邊形 $P_2P_3\ldots P_{n\text{-}2}$ 形狀固定時(即 $\overline{P_2P_{n-2}}$ 固定時)，視 $\overline{P_1P_2}$ 、 $\overline{P_2P_{n-2}}$ 、 $\overline{P_{n-2}P_{n-1}}$ 為三根棒子。多邊形 $OP_0\ldots P_n$ 有最大面積時，四邊形 $P_1P_2P_{n\text{-}2}P_{n\text{-}1}$ 有最大面積。當 $\overline{P_1P_{n-1}}$ 、$\overline{P_2P_{n-2}}$

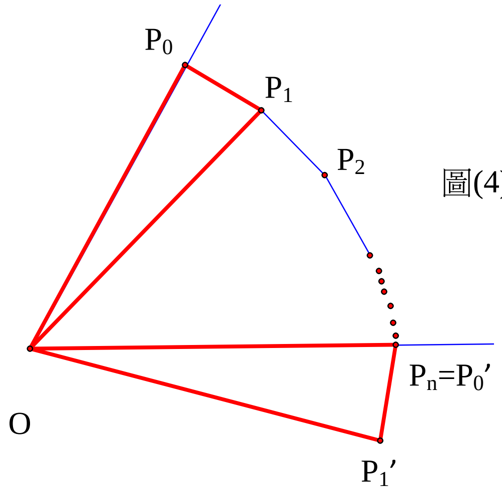
固定時，$\overline{P_1P_2}$ 、$\overline{P_2P_{n-2}}$ 、$\overline{P_{n-2}P_{n-1}}$ 對稱擺放，多邊形 $OP_1\ldots P_{n-1}$ 面積才是最大值。依此類推，可

得到多邊形 $OP_0\ldots P_n$ 有最大面積時，n 根棒子 $\overline{P_0P_1},\overline{P_1P_2},\cdots\cdots,\overline{P_{n-1}P_n}$ 必須**對稱**擺放。

2.接下來我們來證明(2)。

如圖(4)，n 根棒子為 $\overline{P_0P_1},\overline{P_1P_2},\cdots\cdots,\overline{P_{n-1}P_n}$ 。因為(1)成立，所以我們僅需要考慮

$\overline{P_0P_1},\overline{P_1P_2},\cdots\cdots,\overline{P_{n-1}P_n}$ **對稱**擺放。將△ OP_0P_1 旋轉 θ 度，使得 P_0 與 P_n 重疊，P_1 移至 P_1'。此時，觀察 $P_1,P_2,\cdots\cdots,P_n,P_1'$，若以 $\overline{OP_1}$ 與 $\overline{OP_1'}$ 為新的牆壁，則多邊形 $OP_0\ldots P_n$ 與多邊形 $OP_1\ldots P_nP_1'$ 面積相同。
因此，可將 $P_1\ldots P_nP_1'$ 視為新的一種排法。
由(1)知必需對稱面積才有可能是最大值，
$OP_0=OP_n$，且因 $P_1\ldots P_nP_1'$ 須對稱，所以 $OP_2=OP_n$。
以此類推，得到 **$OP_0=OP_2=\ldots$且 $OP_1=OP_3=\ldots$**時
面積最大。



圖(4)

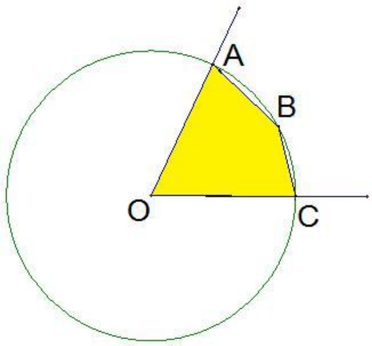
1.若 n 為偶數，由紅色條件可得到 $OP_1=OP_2=\ldots=OP_{n-1}$，且因為旋轉前須對稱，所以 $OP_1=OP_n$，所以 $OP_0=OP_1=\ldots=OP_n$ 時面積最大。
2.若 n 為奇數，由紅色條件得到四邊形 $OP_0P_1P_2=OP_1P_2P_3=\ldots=OP_{n-2}P_{n-1}P_n$，相當於兩根相同長度的棒子圍牆角為(θ/n)牆壁時的情況，所以 P_1、$P_2\ldots P_n$ 皆共以 O 為圓心之圓時，面積最大。

因此，$\overline{OP_0}=\overline{OP_1}=\cdots\cdots=\overline{OP_n}$ ，即棒子端點共圓時，多邊形 $P_0\ldots P_n$ 有最大面積。

二、兩面牆夾角介於 0 度到 180 度之間，與 n 根任意長棒子。
我們依下列步驟證明兩面牆夾角介於 0 度到 180 度之間，與 n 根等長棒子的情形:
(1)兩根不等長的棒子
(2)n 根任意長的棒子。

(1)兩根不等長的棒子的情形

<u>**定理 3**</u>：如圖(5)，若牆壁夾角為 $\angle AOC=\theta$ 且棒長 $\overline{AB}=a,\overline{BC}=b$，其中 $0<\theta\le\pi$ 且 $a\ge b$，則四邊形 $OABC$ 有最大面積時，A、B 和 C 在以 O 為圓心之圓上。



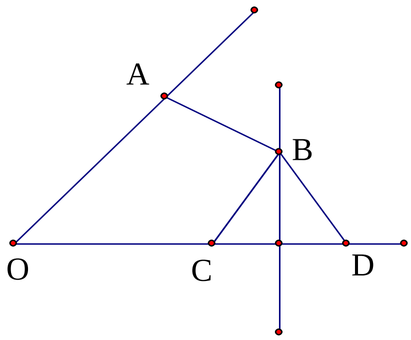
圖(5)

證明：我們將證明分三個步驟來討論。

(1) 先固定 $\overline{AC}$ 的長度。由定理 1 證明中的討論知道，當 $\overline{OA}=\overline{OC}$ 時，△OAC 的面積有最大值。

因此，我在此可以只考慮 $\overline{OA}=\overline{OC}$ 。

(2) 如右圖，若$\angle OCB > \frac{\pi}{2}$，則必能在$\overline{OC}$上找到一點 D 使得$\overline{BC} = \overline{BD}$且四邊形 OABD 面積大於四邊形 OABC 面積。因此四邊形 OABC 面積出現最大值時，$\angle OCB \leqq \frac{\pi}{2}$必成立。因為令 a≧b，故$\angle OAB \leqq \frac{\pi}{2}$也必成立。



(3) 由(1)和(2)知∠OAC=∠OAC $=\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}$，∠OCB≦$\frac{\pi}{2}$且∠OAB≦$\frac{\pi}{2}$。故知∠BAC≦$\frac{\theta}{2}$且∠BCA≦$\frac{\theta}{2}$。因此，四邊形 OABC 的最大面積必發生在 x=∠ABC≥$\pi-\theta$時。因為，

四邊形 OABC 面積=Δ OAC 面積＋Δ ABC 面積

$$=\frac{\overline{AC}^2}{4\tan\frac{\theta}{2}}+\frac{abSin\ x}{2}=\frac{a^2+b^2-2abCos\ x}{4\tan\frac{\theta}{2}}+\frac{abSin\ x}{2}\ 。$$

又 a、b 和θ為定值，所以$Sin\ x-\frac{Cos\ x}{\tan\frac{\theta}{2}}$有最大值時，四邊形 OABC 面積有最大值。

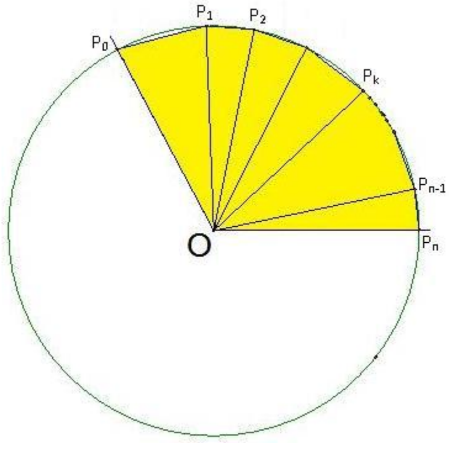
由三角函數的疊合得知，$Sin\ x-\frac{Cos\ x}{\tan\frac{\theta}{2}}=Sin(x-\gamma)\sqrt{1+\frac{1}{(\tan\frac{\theta}{2})^2}}$，其中

$$Cos\gamma=\left(1+\frac{1}{(\tan\frac{\theta}{2})^2}\right)^{-1/2}=Sin\frac{\theta}{2}\ 。$$

故知$\gamma=\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}$。由上面的式子知$Sin\ x-\frac{Cos\ x}{\tan\frac{\theta}{2}}$的極大值發生在$\mathrm{Sin}(x-\gamma)=1$或是$x=\gamma+\frac{\pi}{2}$時。

因此，$\angle ABC=x=\pi-\frac{\theta}{2}\geq\pi-\theta$時，四邊形 OABC 面積有最大值，且因為$\angle ABC=\pi-\frac{\theta}{2}$，所以，$A$、$B$ 和 C 在以 O 為圓心之圓上。

(2)n 根任意長的棒子的情形



圖(6)

<u>定理 4</u>：如圖(6)，若兩牆壁夾角為$\angle P_0OP_n$，n 根任意長度的棒子 P_0P_1、P_1P_2...、$P_{n-1}P_n$，則 P_0、P_1、……、P_n 皆在以 O 為圓心之圓上時，多邊形 $OP_0P_1…P_n$ 有最大值面積。

假設集合刪去法

在證明定理 4 之前，我們先定義一集合 A：

集合 A＝{包含所有棒子的排列方式}，

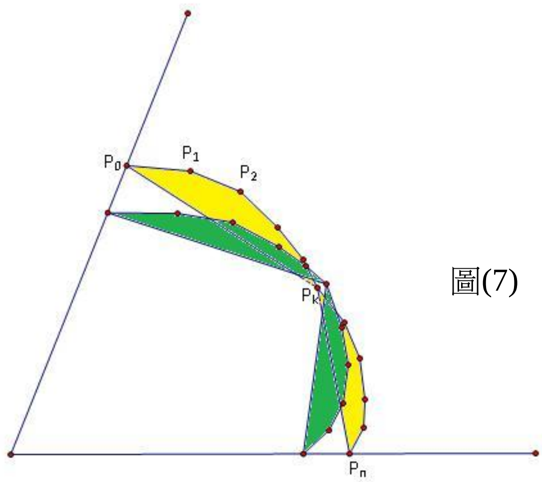
每一種排法都是集合 A 中的一個元素，刪去不會出現最大值的排法，剩下的即是圍出最大面積的排法。

在集合 A 所有的元素中，若將 P_0P_k 及 P_kP_n($k\in$自然數，$2\leq k\leq n-1$)皆相等的元素(排法)放入同一個子集合中，依照這種分類方式，將集合 A 中的元素分類後形成一個新的集合 L_k，我們稱這種分類方法為 **k 分類法**。L_k 集合中的元素跟集合 A 完全相同，只是 L_k 中的元素分類到它的各個子集合中。

舉例來說:在 L_k 集合中，符合 $P_0P_k = a$，$P_kP_n = b$ 的所有排法會被分到同一個子集合 l_{ab} 中，而符合 $P_0P_k = c$，$P_kP_n = d$ 的所有排法會被分到另一個子集合 l_{cd} 中。

有 **2 分類法、3 分類法、…、k 分類法、…、(n-1)分類法**，共有 n-2 種分類法，依照各種分類法，可將集合 A 中的元素分類後形成新的集合 L_1、L_2、…L_k…、$L_{(n-1)}$。
L_k 集合中包含很多子集合 l，舉例來說 ：l_{ab} 子集合中的元素皆符合 $P_0P_k = a$，$P_kP_n = b$ 的條件。
l_{ab} 集合中也包含很多子集合 shape，舉例來說 ：shapeAB 子集合中的元素皆符合多邊形 $P_0P_1\ldots P_k$ 的形狀為 shapeA、多邊形 $P_kP_{k+1}\ldots P_n$ 的形狀為 shapeB。

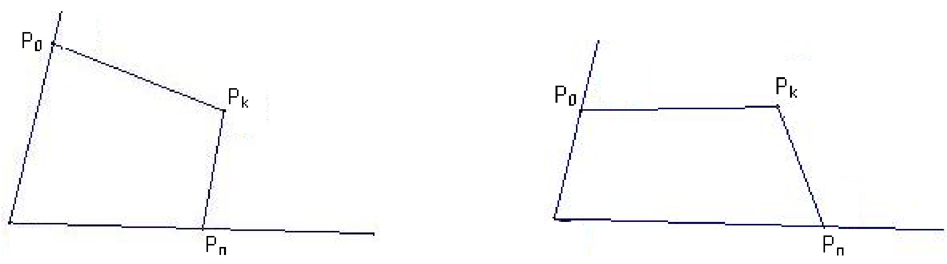
所以在同一個 l 集合中的元素，P_0P_k 及 P_kP_n 長度相同；在同一個 shape 集合中的元素，多邊形 $P_0P_1\ldots P_k$ 及多邊形 $P_kP_{k+1}\ldots P_n$ 的形狀相同。



圖(7)

舉例來說：

1. 先把集合 A 依照 **k 分類法**分類後形成新的集合 L_k。也就是說，先將 P_0P_k 及 P_kP_n 長度相同的排法分到同一個子集合中。
2. 再從集合 L_k 中挑出子集合 l_{ab}，挑出所有 $P_0P_k = a$，$P_kP_n = b$ 的排法。
3. 再從集合 l_{ab} 中再度挑出子集合 shapeAB，代表除了 P_0P_k 及 P_kP_n 長度相同之外,再挑出多邊形 $P_0P_1\ldots P_k$ 及多邊形 $P_kP_{k+1}\ldots P_n$ 的形狀相同的排法。
4. 因此,所挑出來的排法，可以看成 P_0P_k 及 P_kP_n 兩條線段長度固定，在兩牆壁中轉動，且多邊形 $P_0P_1\ldots P_k$ 及多邊形 $P_kP_{k+1}\ldots P_n$ 的形狀也固定(上方的其餘棒子的排列固定)，當轉動到不同位置會形成不同的排法，而這些排法都被包含在同一個 shape 集合中。
5. 換句話說，影響排列方式的因素此時只剩下 P_0P_k 及 P_kP_n 的位置，見圖 7。
6. 因此,可簡化為 P_0P_k 及 P_kP_n 在牆上轉動的情形，如下圖:



現在我們來證明定理 4。

<u>定理 4 的証明</u>：

1.把集合 A 依照 **k 分類法**分類後形成新的集合 L_k

2.從集合 L_k 中挑出子集合 l_{ab}

3.從集合 l_{ab} 中再度挑出子集合 shapeAB

4.從 shapeAB 集合中**刪除**不可能圍出最大面積之排法，由前面討論得知，當 P_0P_k 及 P_kP_n 長度固定時，可以看成是兩根任意長度的棒子，由**定理 3** 得知四邊形 $OP_0P_kP_n$ 面積之最大值出現在 $\boxed{OP_0=OP_k=OP_n}$時，因此不符合 $\boxed{OP_0=OP_k=OP_n}$的排法會被刪除。

5.利用 **2 分類法、3 分類法、…k 分類法…、(n-1)分類法**，在 L_1、L_2、…L_k…、$L_{(n-1)}$集合中，檢驗所有的 *l* 子集合，在所有的 *l* 集合中，檢驗所有的 shape 子集合，檢驗 shape 集合中的所有元素，刪除不可能為最大值的排法。

6.顯然,最後無法被刪除掉的排法(元素)為 $\boxed{OP_0=OP_1=OP_2=\ldots\ldots=OP_n\text{的排法}}$。

7.因此，最大值出現在時 $\boxed{OP_0=OP_1=OP_2=\ldots\ldots=OP_n}$，故得證。

計算最大面積:

如圖(6)，設兩牆壁夾角為$\angle P_0OP_n$，n 根棒子長度為 $P_0P_1=a_1$、$P_1P_2=a_2$、……、$P_{n-1}P_n=a_n$，且$\angle P_0OP_1=\theta_1$、$\angle P_1OP_2=\theta_2$、……、$\angle P_{n-1}OP_n=\theta_n$。$P_0$、$P_1$、……、$P_n$ 在以 O 為圓心之圓上時，棒子圍出的面積最大。設此圓的半徑為 R，計算最大面積：

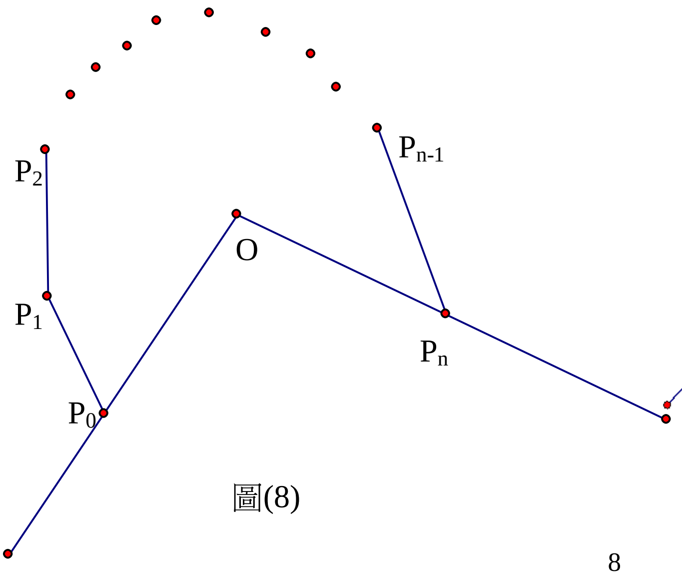
1.因為 $a_i = 2RSin\dfrac{\theta_i}{2}$，所以 $\theta_i = 2\sin^{-1}\left(\dfrac{a_i}{2R}\right)$。故 $\theta = \sum_{i=1}^{n-1}\theta_i = 2\sum_{i=1}^{n-1}\sin^{-1}\left(\dfrac{a_i}{2R}\right)$

2. 最大面積$=\dfrac{R^2}{2}\sum_{i=1}^{n-1}Sin\theta_i = R^2\sum_{i=1}^{n-1}Sin\dfrac{\theta_i}{2}Cos\dfrac{\theta_i}{2}$

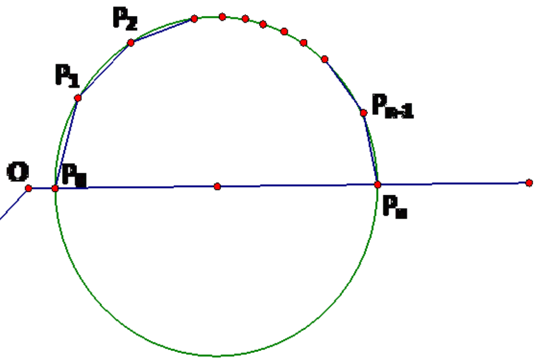
多邊形 $OP_0P_1\ldots P_n$ 最大面積為 $R^2\sum_{i=1}^{n-1}\mathrm{Sin}\dfrac{\theta_i}{2}\mathrm{Cos}\dfrac{\theta_i}{2}$，其中 $\mathrm{Sin}\dfrac{\theta_i}{2}=\dfrac{a_i}{2R}$ 且 $\theta = 2\sum_{i=1}^{n-1}\sin^{-1}\left(\dfrac{a_i}{2R}\right)$。

三、兩面牆夾角大於 180 度，與 n 根任意長棒子。

定理 5: 如圖(8)，若 n 根任意長度棒子，兩面牆壁夾角為 $\angle AOB=\theta$，其中 $\pi<\theta<2\pi$，則當 P_0 與 P_n 在同一面牆上，且 P_0、$P_1\ldots P_n$ 在以 P_0P_n 中點為圓點，$P_0P_n/2$ 為半徑之圓上時，棒子所圍出的面積最大。



圖(8)



圖(9)

證明：

先固定多邊形 $P_0P_1 \ldots P_n$。棒子圍出的面積=多邊形 $OP_0P_1 \ldots P_n$ 面積 - △ P_0OP_n 面積，且多邊形 $OP_0P_1 \ldots P_n$ 面積被固定，所以僅需考慮△ P_0OP_n 面積，△ P_0OP_n 面積的最小值，即為棒子圍出面積的最大值。

又 P_0 與 P_n 在同一面牆上時，△ P_0OP_2 面積之值為 0，因此棒子圍出的面積最大值必發生在 P_0 與 P_n 在同一面牆上時。

所以棒子圍出最大面積的方法與牆角為 180 度時的結果相同。排法為(如圖(9))：P_0 與 P_n 在同一面牆上，且 P_0、P_1、$P_2 \ldots P_n$ 在以 P_0P_n 中點為原點，$P_0P_n/2$ 為半徑之圓上時，棒子所圍出的面積最大。

四、牆壁形狀為圓形，與 n 根任意長棒子

我們依下列步驟證明牆壁形狀為圓形，與 n 根任意長棒子的情形:

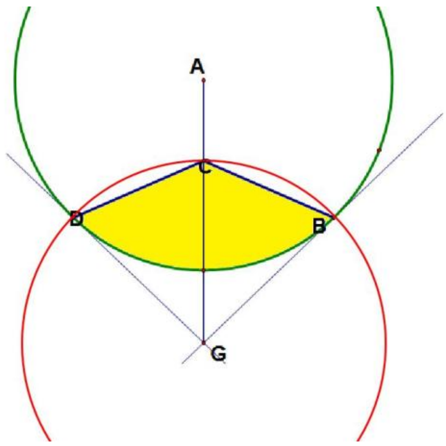
(1)兩根等長的棒子

(2)兩根不等長的棒子

(3)n 根任意長的棒子

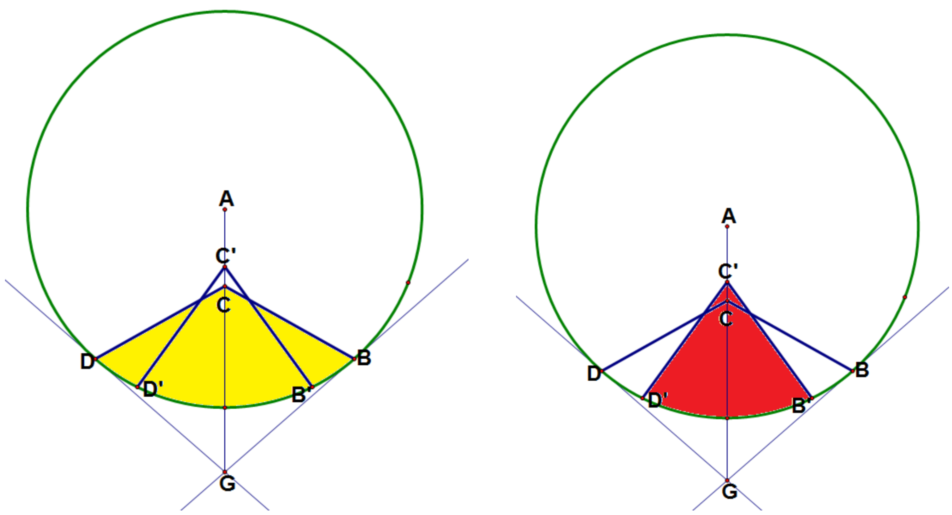
(1) 兩根等長的棒子

經過利用 GSP 的嘗試，我們發現面積最大值彷彿**會出現在線段ＤＧ＝ＣＧ＝ＢＧ時，即棒子端點位於以切線（直線ＤG，ＢＧ）的交點 G 為圓心的圓上時。（如右圖）**



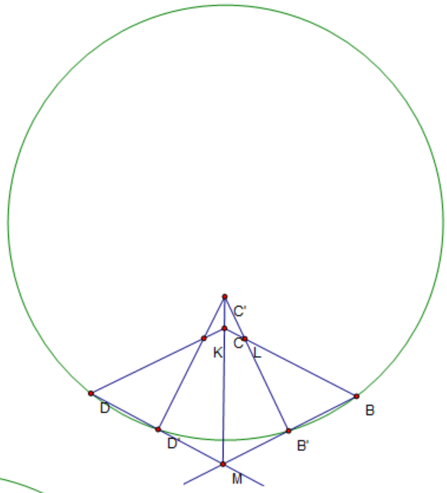
接著我們證明上述的猜測是對的:

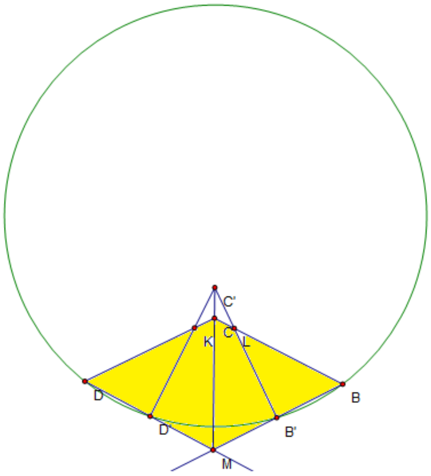
命題一：當滿足共圓條件時，把 D 點往下移，面積會變小。如下圖(10)，黃色面積大於紅色面積。

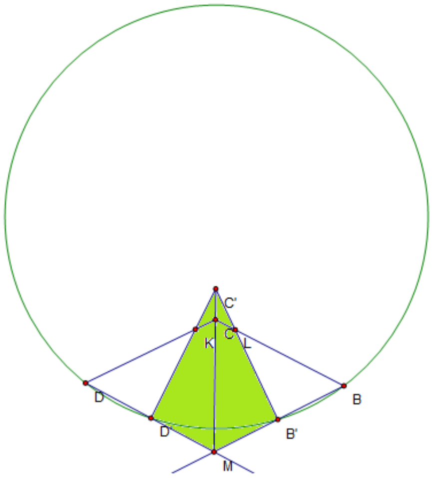


圖(10)

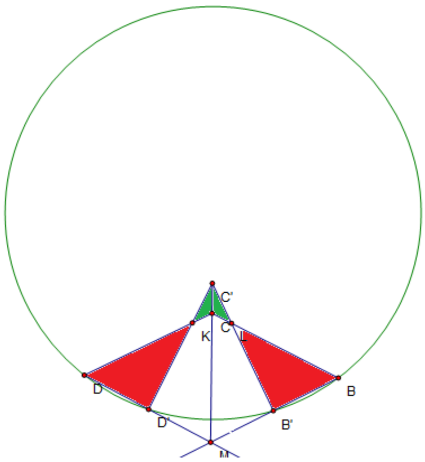
分析如下：連 D、D’及 B、B’，如右圖。
視線段 DD’，BB’為兩面牆壁且兩根相同長度的棒子在上面滑動。由**引理 1** 得知：當**角ＭＤＣ與角ＤＣＭ的差值越小時，面積會越大**。當Ｄ點下移時，
角 MD’C’＞角 MDC 且角 MC’D’＜角 MCD，
因此往下移時角度差會變大。因此，
四邊形 MDCB 面積＞四邊形 MD’C’B’的面積。
即下圖黃色部分比綠色部分大。

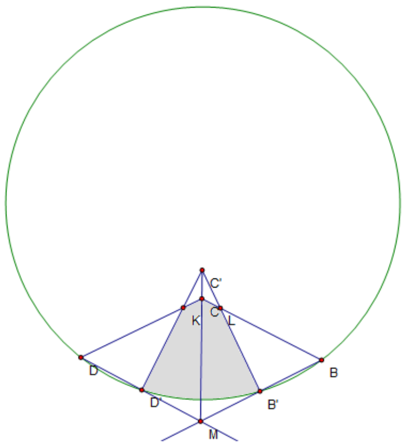




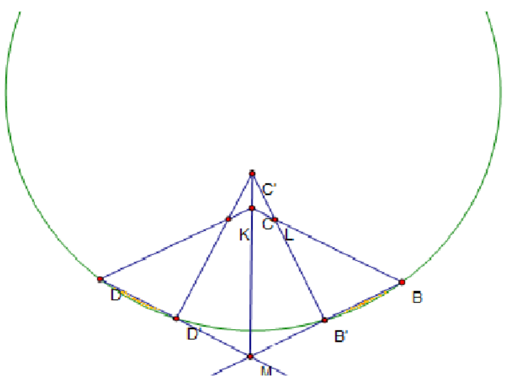


由上述結果可得知，如下左圖，紅色部分面積＞綠色部分面積。





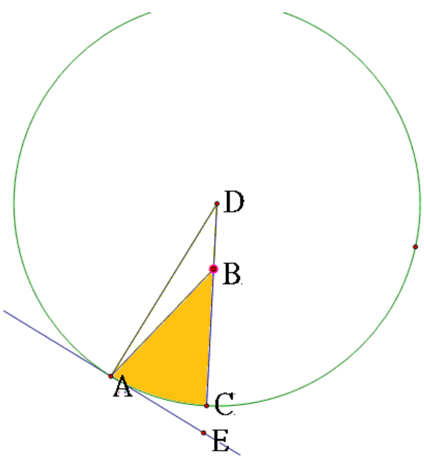
紅色部分+右上圖灰色部分面積＞綠色部分+右上圖灰色部分面積。
紅色部分+灰色部分+下圖橘黃色部分面積＞綠色部分+灰色部分面積。
因此在共圓條件時把Ｄ點往下移，面積會減少。命題得證。

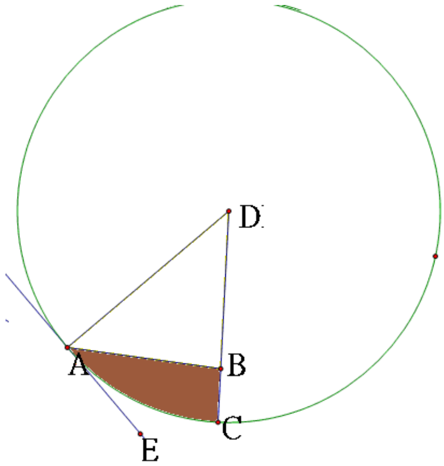


（命題二）滿足共圓條件時，把Ｄ點往上移，面積會變小。

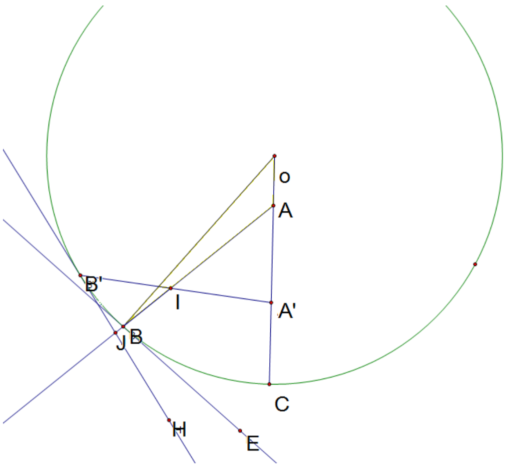
P.S 圓形兩邊對稱，因此只考慮一邊的情形。

引理３:當∠ＡＢＣ＝∠ＥＡＢ時，橘色面積會比棕色面積大。其中 AE 為 A 點之切線。

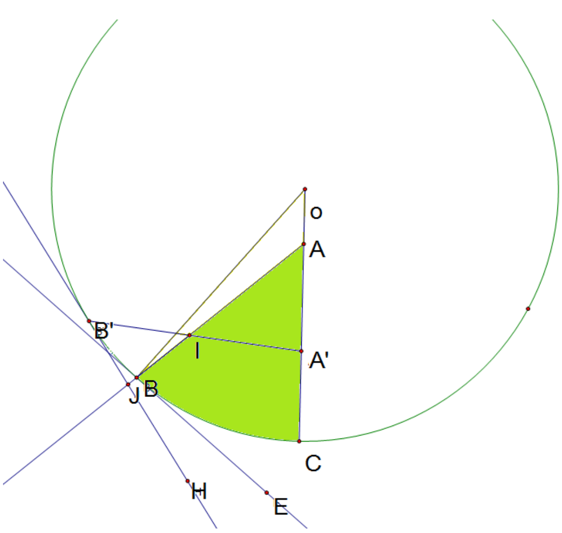


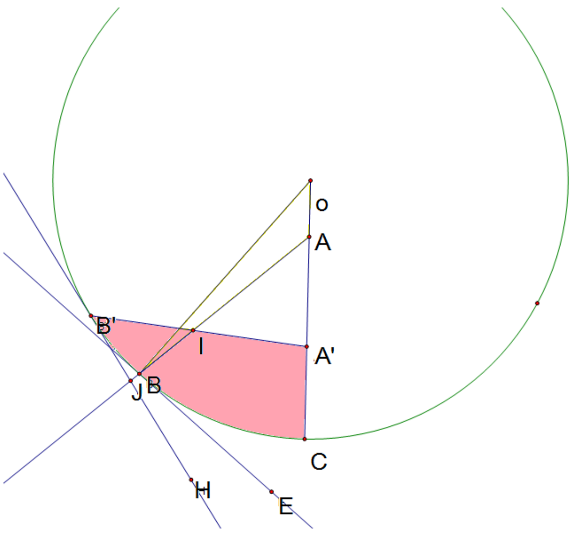


以下圖做說明：

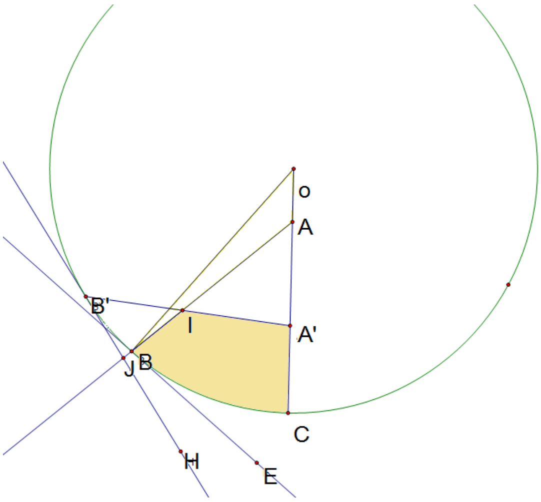


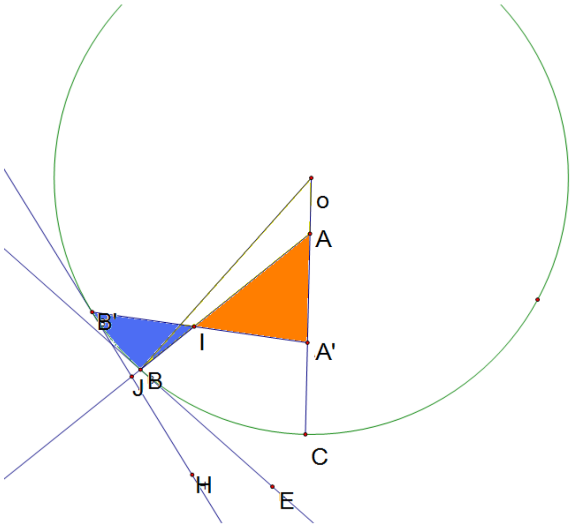
這時∠ＨＢ‘Ａ’＝∠ＢＡＣ。我們要證明的是綠色的面積會大於粉紅色的面積：



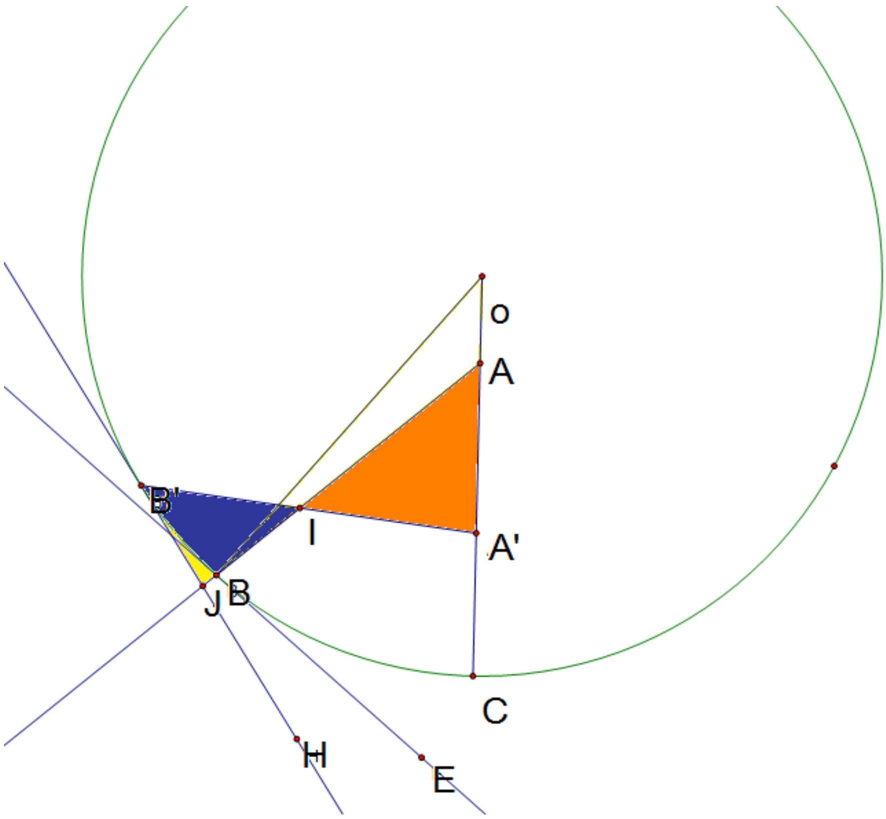


下左圖淺棕色的面積是重複的，因此只需證明：橘色面積＞藍色面積。

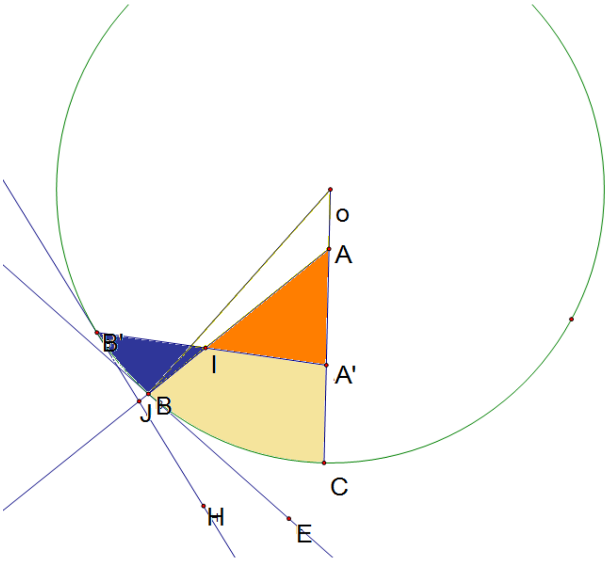


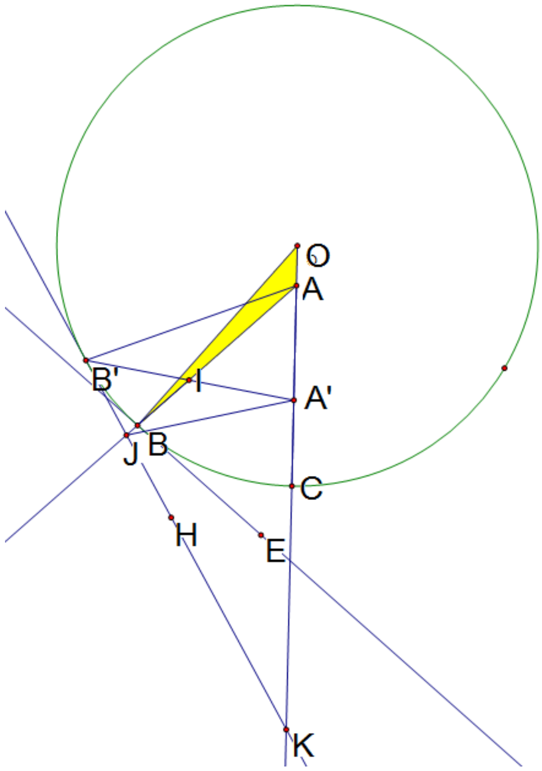


因為：角 HBA’＝角 BAC，角 B’IJ＝角 AIA’，故三角形 JB’I 相似於三角形 AIA’。

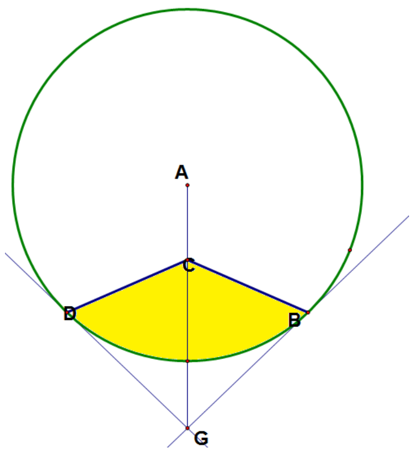


藍色面積為三角形 B’JI 減掉圖中的黃色部分。所以，只需證明三角形 AIA’＞三角形 B’JI 即可證明橘色部分比藍色部分大，橘色和藍色部分加上重複的淺棕色部分大小關係不變，就是欲證的命題。如左下圖:



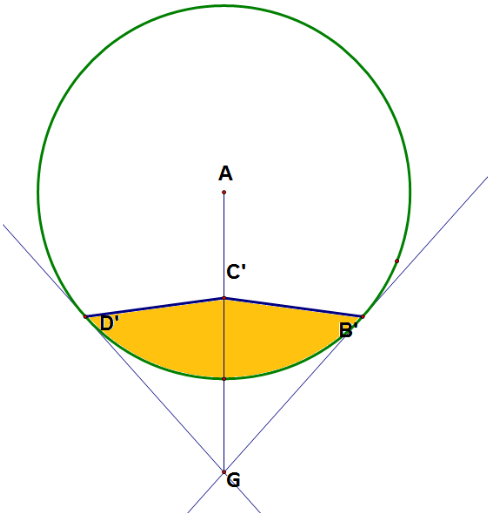


我們延長射線 ***AC*** 交直線 ***B'H*** 於 ***K*** 點，並且連接
線段 ***AB'***以及線段 ***A'J***，如右上圖 ：
顯然：*三角形* ***AJK*** 與*三角形* ***B'A'K*** 相似
故 ***AJ：JK＝B'A'：A'K***
又 ***AJ＝AB＋BJ＝B'A'＋BJ＞B'A'***
故 ***JK＞A'K***
因此*角* ***JA'K＞****角* ***A'JK***
又因角 **AJK＝**角 **B'A'K**
故角 ***IJA'＞****角* ***IA'J*****----(1)**
因為*角* ***JAA'＝****角* ***JB'A'***
故 ***AB'JA'***四點共圓
因此*角* ***B'AI＝****角* ***IAJ'***，且*角* ***AB'I＝****角* ***IJA*****----(2)'**
由(1),(2)得知:*角* ***AB'I＞****角* ***B'AI***，因此線段 ***IA＞IB'***，
又因*三角形* ***JB'I*** 相似於*三角形* ***AIA'***，因此*三角形* ***AIA'＞****三角形* ***B'IJ***，命題得證。



在共圓條件下（上圖），把 D 點往上移時得到下圖左。因為共圓條件下把 D 點往上移，會使角 GDC 小於角 DCG，而往下移時則會使角 GDC 大於角 DCG，所以此時一定能把 D 點從共

圓條件往下移使∠D’’C’’G=∠GD’C’，便可以建造出另一種情形（下圖右）其面積比左圖大（由**引理 2** 得知）

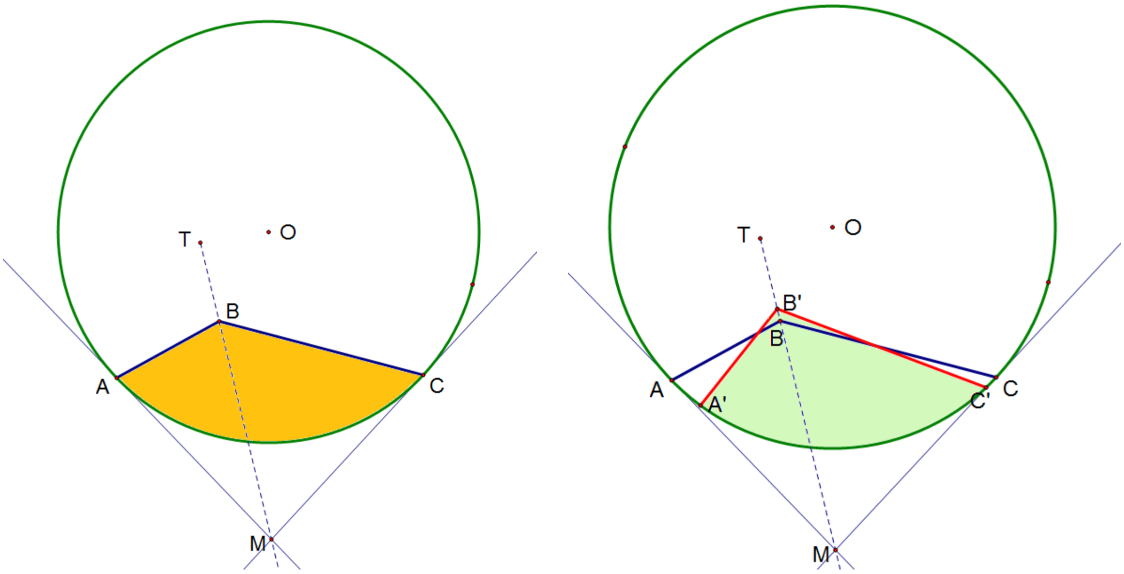


又共圓條件下的面積一定會比右上圖大(由命題一)，因此，當兩根相同長度的棒子圍牆壁時，共圓條件時的面積會最大。

(2)兩根不等長的棒子

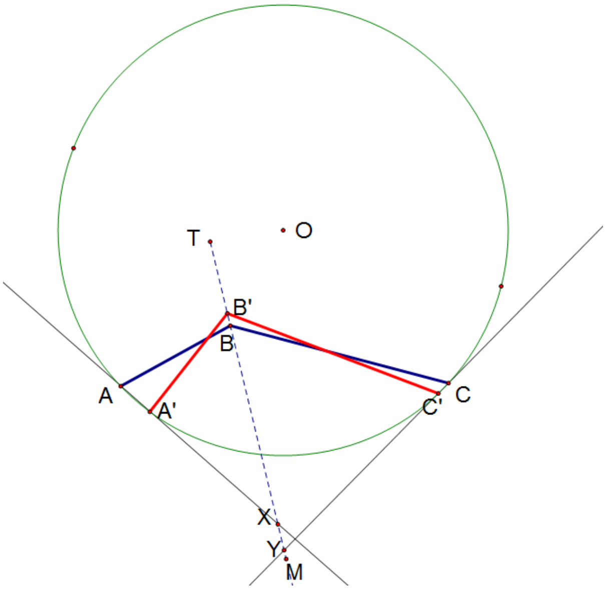
我們用 GSP 作圖之後，發現會有相同的性質（滿足共圓條件時），花了很多時間證明，後來發現與兩根相同長度棒子的證法有異曲同工之妙。

（命題一）滿足共圓條件時（在兩根棒子與圓形牆壁的接點做切線，棒子的三個端點落在以兩條切線交點為圓心的圓上面時），把棒子往下移，面積會變小。



如左上圖，此時滿足共圓條件。我們現在要探討把棒子往下移的情形。因為圓形是一個完美的對稱圖形，當角 ABC 固定後，其排法就已經固定住了，因此，當 B 點在直線 TM 上移動時，會包含所有可能的情況，也就是說，我們現在使 B 點在線段 TM 中往上移動，即會包含所有棒子往下移動的情形。（如上圖右，把 B 點往上移到 B’，點 A,C 會分別往下跑到點 A’,C’）。我們要證明的就是橘色面積比淺綠色面積大。

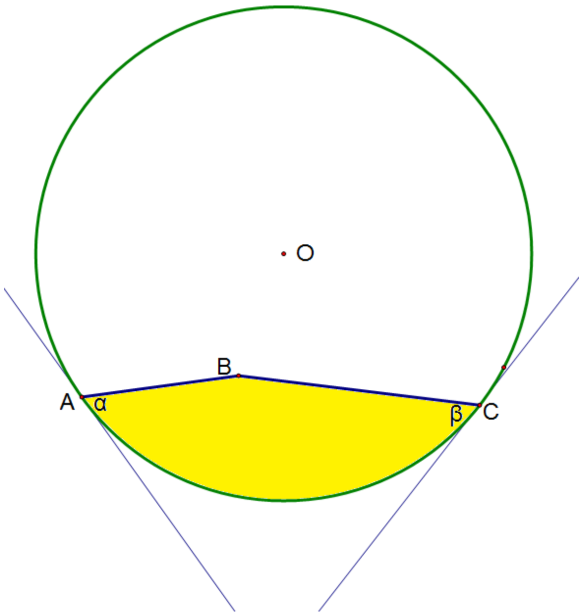
連線直線 AA’,CC’分別交直線 TM 於 X,Y。（下圖）



與證明兩根相同長度棒子時的方法相同。先看左邊部分，因為 A 點下移之後，使得∠XA’B’ ＞∠XAB，又>∠ABX>∠A’B’X，因此∠XA’B’與∠A’B’X 得差值比∠XAB 與>∠ABX 的差值大，由先前的結論之，三角形 XAB＞三角形 XA’B’，又共圓條件下還包括線段 AA'與圓交出的一小怪弓形面積(此塊很小)，因此可以確定左邊的部分從共圓條件往下移之後面積會變小。同理可推出右邊部分也會變小。由上述看來，把棒子往下移後，顯然面積會變小。

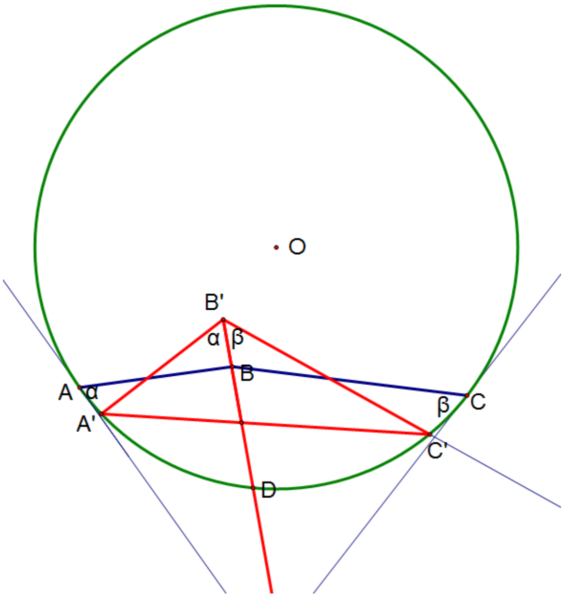
命題二：共圓條件下把棒子往上移，其面積會變小。

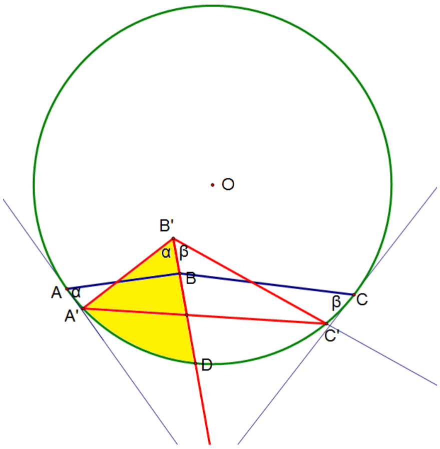
先把共圓條件下的棒子**往上移**，如下圖。

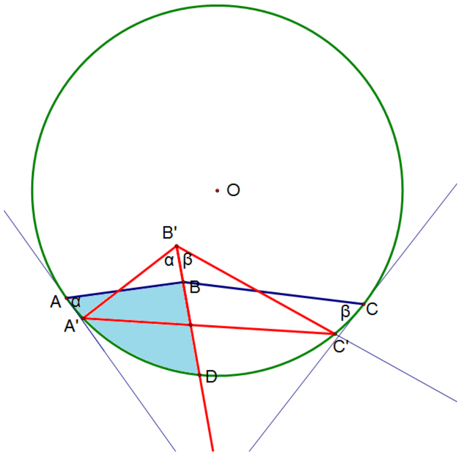


令切線與棒子的夾角分別為α ,β 。

接下來，擺進另外兩根棒子（長度與 AB,BC 相同）且∠A’B’B=α， ∠C’B’B=β ，如下圖。







由**引理 2** 得知，直線 B’D 左邊的部分，黃色面積將會比淺藍的面積大，右邊的狀況亦然，因此，紅色棒子圍出的面積會比先前的藍色棒子圍出的面積大。命題一證過，共圓條件時的面積一定比往下移的情形大，而如果我們在任意一組往上移的情況都可以找到另一組往下移的情況與之對應，就證出把棒子往上移時的面積一定會比共圓條件時小。

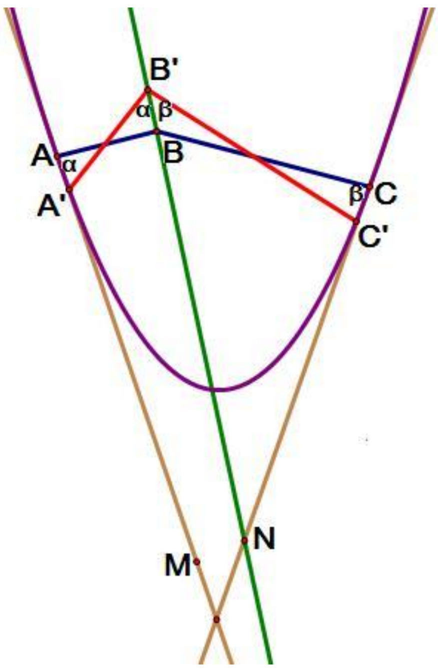
因此，引入引理 3

引理 3(可用於之後的拋物線，橢圓)

紫色部分為圓，橢圓，或拋物線

AB，BC 為兩根在共圓條件時上移的不等長棒子（BC≧AB）(目標棒子)，且 **AC 垂直於對稱軸（牆壁為圓形時是半徑，橢圓時為短軸或長軸，拋物線時為其對稱軸）**。兩條土黃色直線為點 A，C 的切線。α ，β 分別為 AB，BC 與兩條切線夾角。→必存在三點 A’，B’，C’ 滿足 AB=A’B’，BC=B’C’，∠A’B’B=α ，∠BB’C’=β

作三角形 A’B’C’，A’B’=AB，B’C’=BC，且過 B’ 作一條標準線，使得標準線與 A’B’的夾角=α ；標準線



與 B’C’的夾角=β 。稱此三角形滿足 T 條件

將此固定三角形的邊 A’C’在牆壁上與**標準線**一起移動，維持著上面紅字的條件。證明**標準線**必會通過 B 點即可證明引理 3。

----

(1)證明標準線必會與 BC 線段相交:

如圖 A。AB、BC 為目標棒子，分別在點 A、C 作切線交於 O。將三角形 OAB 及 OBC 翻面建造兩三角形 OB”A”及 OC”B”，其中 OB”A”全等於 OAB（點 O,A,B 的對應點分別為 O,B”,A”）， OC”B”全等於 OBC（點 O,B,C 的對應點分別為 O,C”,B”）(僅討論線段 AC 垂直於拋物線對稱軸的情況，所以 OA=OC，故翻轉之後的兩三角形會共用點 B”)

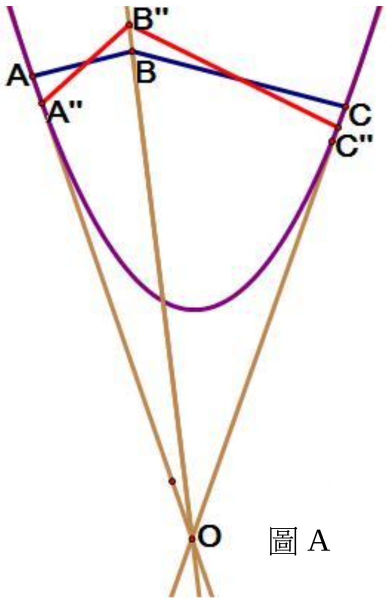


圖 A

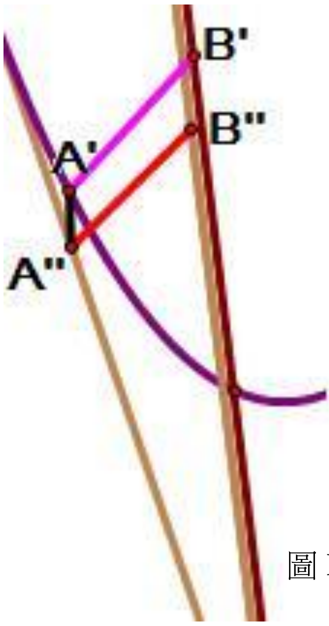


圖 B

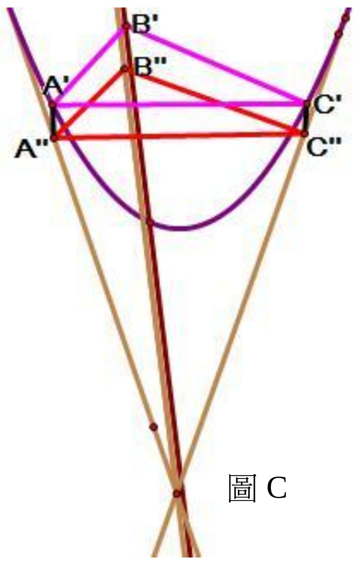


圖 C

如圖 B，翻轉後 A”及 C”**都在土黃色切線**上，且 A”C”同樣也會垂直於對稱軸。(A”O=BO=C”O)因此可將三角形 A”B”C”向上平移直到 A”，C”均在曲線上（此時分別稱之為 A’，C’）如圖 C 所示。平移時**標準線**會一起向上平移，相當於將圖 C 中的 A”B”C”的土黃色標準線移成 A’B’C’的咖啡色標準線，也可想像成把圖 A 的 BB’向上平移。因為 BC≧AB，所以標準線是向左斜，故往上移動之後標準線一定會與 BC 相交。

經過翻轉和平移之後得到三角形 A’B’C’，可視為一滿足 T 條件的三角形在曲面上移動到 A’C’垂直對稱軸，此時標準線會通過 BC。

(2)證明標準線移動一定會通過 B 點

1.曲線為封閉的曲線(圓形或橢圓形)

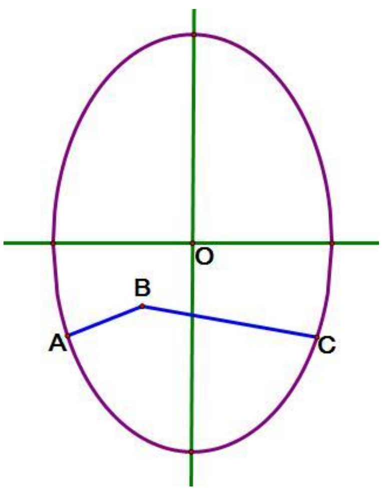


圖 D

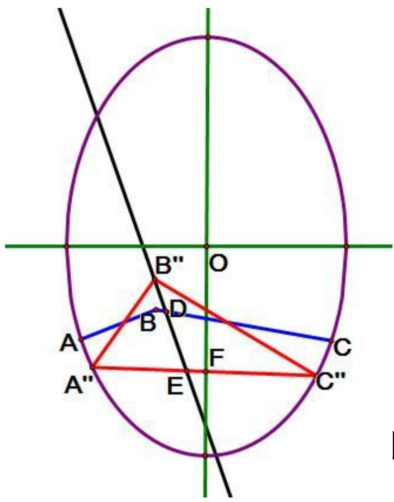


圖 E

AB，BC 為於共圓條件上移的兩根不等長棒子（BC≧AB），且 **AC 垂直於對稱軸**（綠線）。之前證明出，滿足$\boxed{\text{T條件}}$的三角形 A"B"C"在曲面上移動到 A’’C’’垂直對稱軸時其標準線會通過 BC。（圖 E）

根據正弦定律:

$A''E / \sin\angle A''B''E = A''B'' / \sin\angle A''EB''$， $C''E / \sin\angle C''B''E = C''B'' / \sin\angle C''EB''$

又 $\sin\angle A''EB'' = \sin\angle C''EB''(\angle A''EB''+\angle C''EB''=180)$

故 $A''E : C''E = A''B'' \sin\angle A''B''E : C''B'' \sin\angle C''B''E$

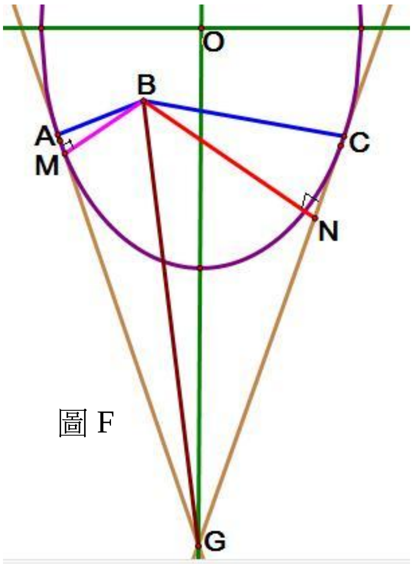


圖 F

如右圖，分別以 A、C 為切點作切線，兩切線交於 G

$BM\perp AG$，$BN\perp NG$，

B 點在 OG 之左邊，所以$\angle BGM < \angle BGN$，$BM<BN$，

$BM= AB \sin\angle A''B''E= A''B'' \sin\angle A''B''E$

$BN= CB \sin\angle C''B''E= C''B'' \sin\angle C''B''E$

所以 $A''B'' \sin\angle A''B''E > C''B'' \sin\angle C''B''E$

證得 $A''E > C''E$。

故若 F 點為 A’’C’’之中點，E 點會在 F 點的左邊（圖 F)，所以如下圖 G 所示，淺綠色部分會包含 B 點。

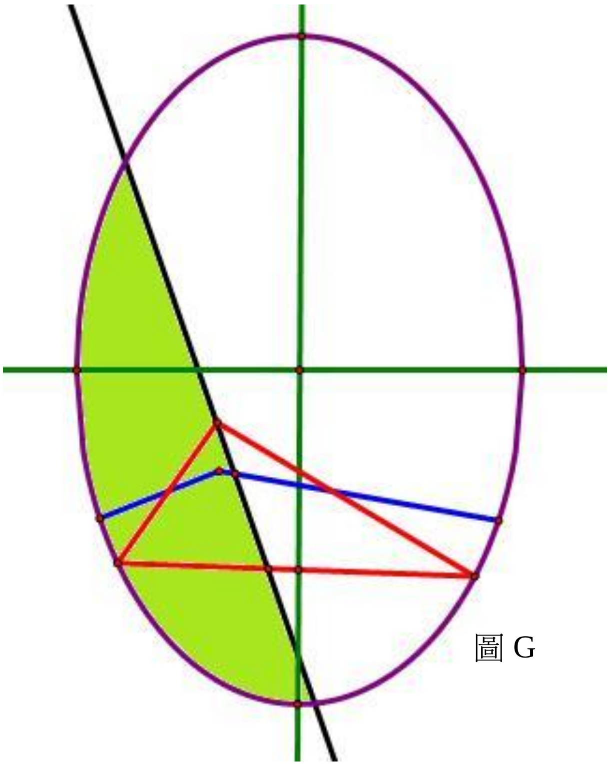


圖 G

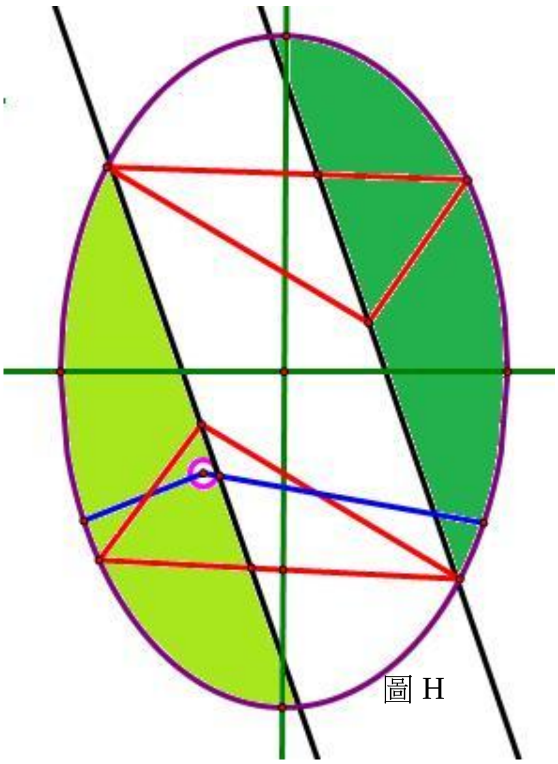


圖 H

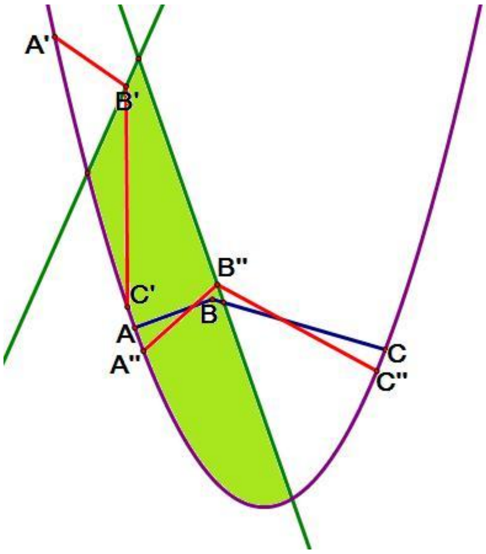
若將標準軸旋轉 180 度，旋轉後會與原本點對稱，如圖 H 所示，旋轉後的深綠色面積沒有包含 B 點，所以旋轉過程中黑色的**標準線**必會掃過 B 點(桃紅色圈起來的部分)。

2.曲線為開放的曲線(拋物線)

由上述證明知道當 AC 平行 A”C”，此時標準線(綠色線)會與 BC 相交，如右圖，這種情況時，棒子端點為 A”、B”、C”。接著我將紅色棒子移動到 A’、B’、C’的位置，此時 B’C’與 AB 不相交，如左上圖所示。

若紅色棒子從 A”、B”、C”移動至 A’、B’、C’，L(綠色線)掃過的部分為右上圖之淺綠色部分，可以看出一定**會掃過 B 點**。

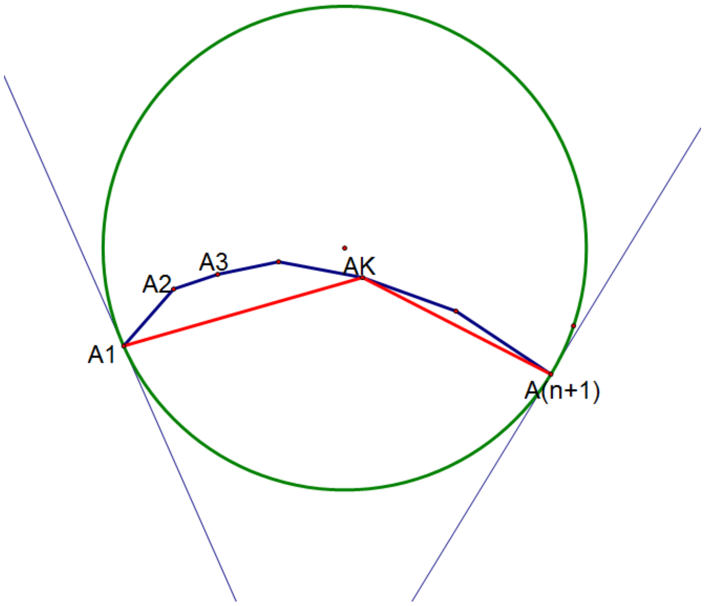
◎整合**封閉的曲線**及**開放的曲線**，引理 3 得證。



(3)n 根任意長的棒子

棒子與圓形牆壁接觸的兩個端點做切線，所有棒子的端點均排在以兩條切線交點為圓心的圓上時圍出的面積最大。

如果我們把所有排法集中到一個集合 A 中，剔除不會是面積最大值的元素，剩下來的便是有最大值的排法。如隨便挑出一個元素，如果其中有一端點 Ak 不滿足共圓條件，那就可以連接 A1,Ak 以及 Ak,A(n+1)並視之為兩根不同長度的棒子，且棒子以上的圖形固定，把這兩根棒子調成共圓條件後面積會變大。所以集合中唯一不可能被調大的元素就是滿足共圓條件的情形了！



五、牆壁形狀為拋物線，與 n 根任意長棒子。

我們依下列步驟證明牆壁形狀為拋物線的情形:

(1)兩根等長的棒子

(2)兩根不等長的棒子

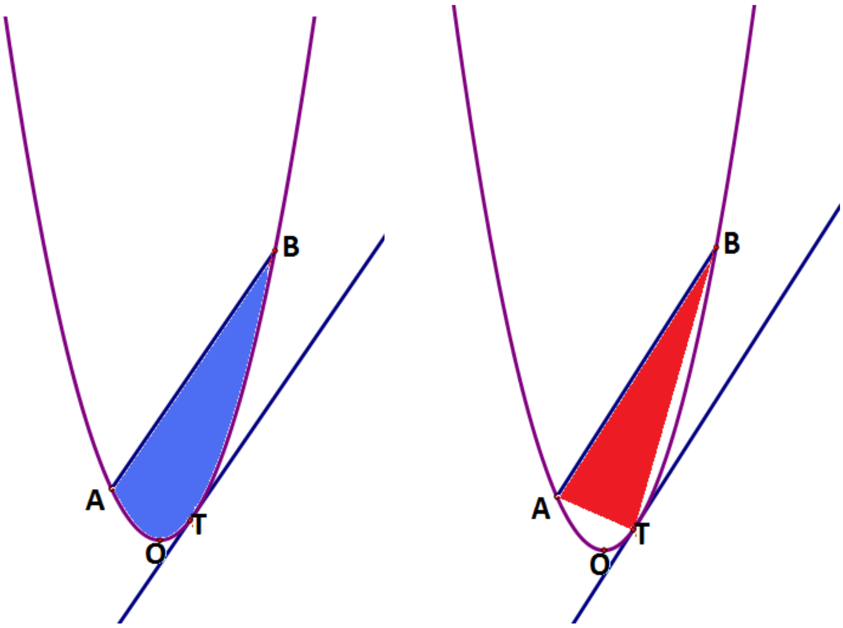
(3)n 根任意長的棒子

(1)兩根等長的棒子

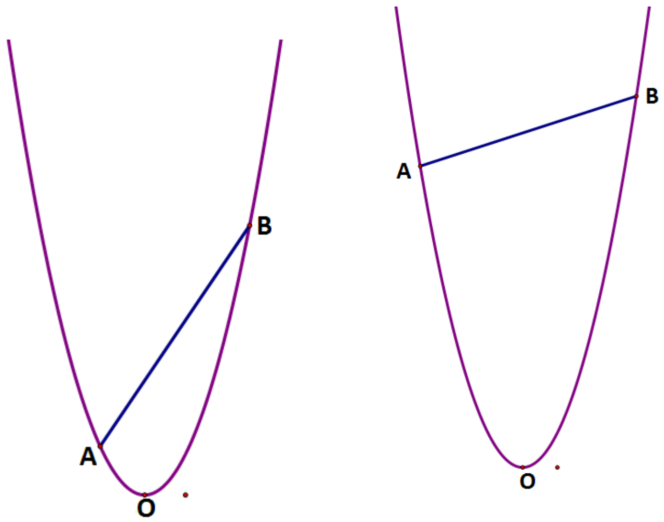
（命題一）最大值出現時，兩個棒子的接點連線一定垂直拋物線的對稱軸。

（定理）

如下圖，阿基米德推導出線段 AB 與拋物線所圍出的面積等於和拋物線上一點 T（由 T 點做切線，其切線平行直線 AB）形成的三角形 ABT 面積的 $\frac{4}{3}$ 倍。即藍色面積為紅色面積的 $\frac{4}{3}$ 倍。



拿一根長度為定值的棒子 AB，在拋物線上移動。如下圖。



設拋物線為 $y=ax^2$，直線 AB 方程式為 $y=mx+c$， $A\left(x_1, mx_1+c\right)$， $B\left(x_2, mx_2+c\right)$， $\overline{AB}=k$

則 $\sqrt{(x_1-x_2)^2+[(mx_1+c)-(mx_2+c)]^2}=k$

經由整理得到 $\sqrt{(m^2+1)(x_1-x_2)^2}=k$

即 $\sqrt{(m^2+1)[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]}=k$ -----(1)

點 A,B 為 $y=mx+c$ 與 $y=ax^2$ 的交點，因此 x_1， x_2 為方程式 $ax^2-mx-c=0$ 的兩根

由根與係數關係得知 $x_1+x_2=\dfrac{m}{a}$，$x_1x_2=\dfrac{-c}{a}$，帶入(1)得

$k=\sqrt{(m^2+1)(\dfrac{m^2}{a^2}+\dfrac{4c}{a})}$，因此 $c=\dfrac{1}{4}\left[\dfrac{ak^2}{(m^2+1)}-\dfrac{m^2}{a}\right]$-----(2)

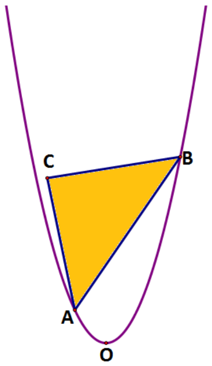
又切線斜率為 m 切於此拋物線的點為 $\mathrm{T}\left(\dfrac{m}{2a},\dfrac{m^2}{4a}\right)$

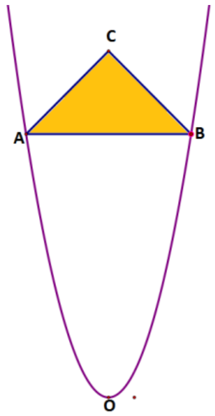
T 點到直線 $y=mx+c$ 的距離為 $\dfrac{\dfrac{m^2}{2a}-\dfrac{m^2}{4a}+c}{\sqrt{m^2+1}}$，等於 $\dfrac{\dfrac{m^2}{4a}+c}{\sqrt{m^2+1}}$

三角形 ABT 的面積為 $\dfrac{k}{2}(\dfrac{\dfrac{m^2}{4a}+c}{\sqrt{m^2+1}})$，把(2)帶入化簡得到 $\dfrac{ak^3}{8\sqrt{(m^2+1)^3}}$

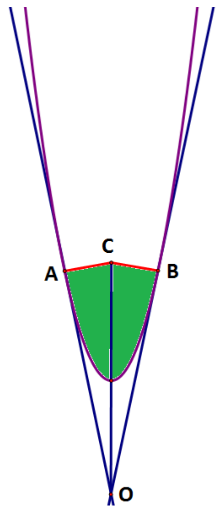
由定理知線段 AB 與拋物線圍出的面積為 $\dfrac{ak^3}{6\sqrt{(m^2+1)^3}}$

a，k 為定值。當直線 AB 的斜率 m=0 時會出現最大面積。
因此，現在把兩根長度的棒子分別擺在 A,B 上面，先固定三角形 ABC 的形狀。此時把 AB 調到垂直對稱軸可得到最大值。





所以，最大值一定出現在直線 AB 垂直拋物線對稱軸時。命題得證。
把棒子調到共圓的條件此時，無論把 A 點往下或往上移
其面積都會變小，作法與牆壁為圓形時相同。
因此，當兩根相同長度棒子圍拋物線牆壁時，
最大面積也是出現在共圓條件時。如右圖。

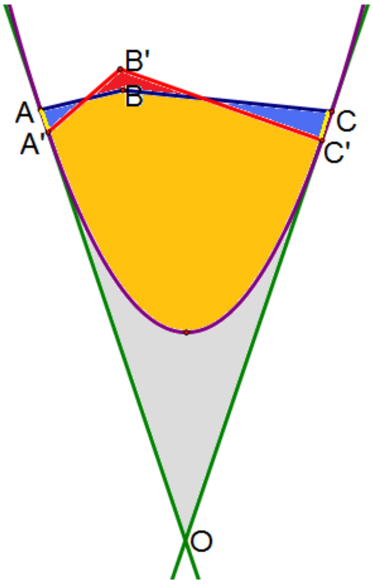


(2)兩根不等長的棒子

根據上面的證明，棒子在拋物線上移動時，AC 須垂直
對稱軸，面積才可能是最大的。
證明當 A、B、C 三點共圓時，棒子所圍出的面積最大。

1.證明棒子從共圓時下移所圍出的面積會變小。

如下圖



AB 及 BC 為兩根不同長度的棒子。

A'B'及 B'C'為下移後的棒子。

若視割線 AA'及 BB'為兩面牆壁(θ 為牆角角度)，且牆角為 O 點

AC，A'C'均垂直拋物線對稱軸(只需討論垂直對稱軸的情形，因為此時才有可能有最大值)

故 <u>AO=C0，且 A'0=C'0</u>，因此可以根據<u>定理 3</u>:

兩根不同長度的棒子在兩面牆壁上影響棒子圍出面積的因素為 $\mathrm{Sin}\ x-\dfrac{\mathrm{Cos}\ x}{\tan\dfrac{\theta}{2}}$ (θ 為牆角角度，

介於 0~π ，X 為兩根棒子的夾角)

且 $\mathrm{Sin}\ x-\dfrac{\mathrm{Cos}\ x}{\tan\dfrac{\theta}{2}}=\sqrt{1+\dfrac{1}{(\tan\dfrac{\theta}{2})^2}}\mathrm{Sin}(x+\dfrac{\theta}{2}-\dfrac{\pi}{2})$

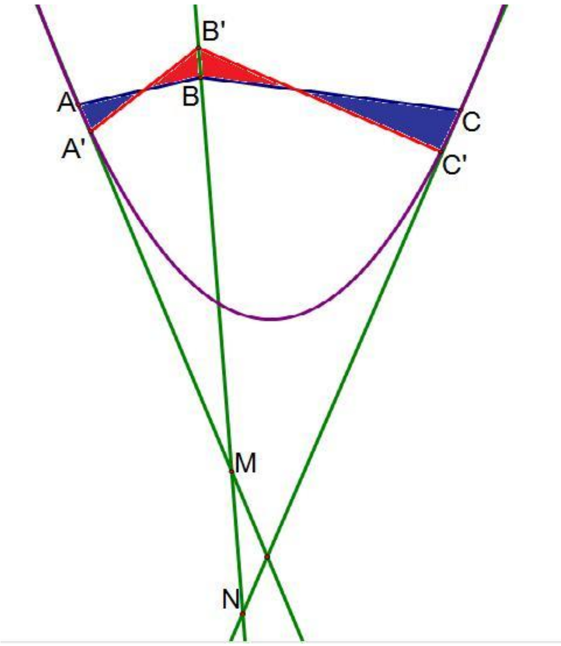
棒子端點共圓時， $x+\dfrac{\theta}{2}-\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\pi}{2}$

棒子下移時， x 變小， $x+\dfrac{\theta}{2}-\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{\pi}{2}$ ， $\sin(x+\dfrac{\theta}{2}-\dfrac{\pi}{2})$ 變小

由上述可得證當棒子下移後面積會變小，也就是四邊形 OABC 面積大於四邊形 OA'B'C'，扣掉灰色部分，得藍色面積加橘色面積大於紅色區域面積加橘色面積。共圓條件下面積為藍色加橘色再加上黃色(線段 AA'和 CC'與拋物線圍出的小塊面積)而往下移後面積變為紅色加橘色。故棒子從共圓條件時下移，所圍出的面積會變小。

2.證明棒子從共圓時上移所圍出的面積會比下移時的小。

如下圖，AB、BC 為棒子上移後的情形；A'B'、B'C'為一種棒子下移後的情形。



證明:上移後的任意情形都可以找到一種下移後的情形與它對應使得上移後的面積小於下移後的面積，所以上移後所圍出的面積必不為最大值。

AM 為以 A 為切點之切線，CN 為以 C 為切點之切線
假設棒子上移後:∠MAB=α ，∠NCB=β
只要利用引理 3，就可證出必有一種下移後的情形使得:
∠MB’A’=α ，∠NC’B’=β
如此一來由**引理 2** 可證明出紅色部分面積大於藍色部分面積。故得證上移後的任意情形必小於下移後所圍出的面積。

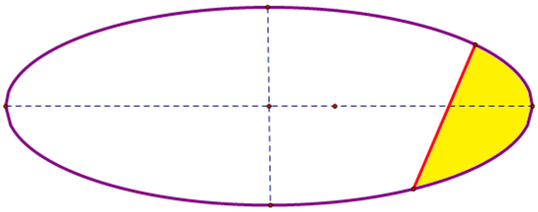
結合上述 1.及 2.的證明，兩根不同長度的棒子下移後面積變小，且上移後的面積會比一種下移後的情形小，所以拋物線圍牆壁的結果也是棒子端點共圓時，圓心為棒子與牆壁接觸點作切線，兩切線的交點。

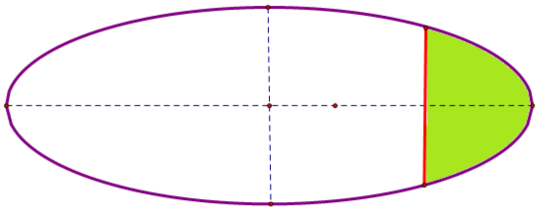
(3)n 根任意長的棒子
依照假設集合刪去法(在定理 4 中)，可知全部滿足共圓條件時會出現最大面積。

六、牆壁形狀為橢圓，與 n 根任意長棒子。
我們依下列步驟證明牆壁形狀為橢圓，與 n 根任意長棒子的情形:
(1) 兩根等長的棒子
(2) 兩根不等長的棒子
(3) n 根任意長的棒子

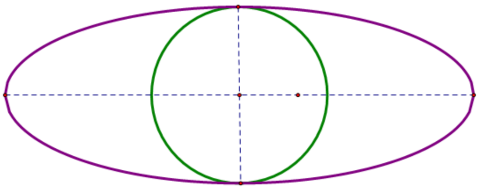
(1)兩根等長的棒子
（命題一）最大值出現值，棒子與牆壁的接點必定垂直於橢圓的長軸。
把兩根棒子與牆壁的交點連線，當成另外一條紅色棒子。證明當紅色棒子的長度固定時，綠

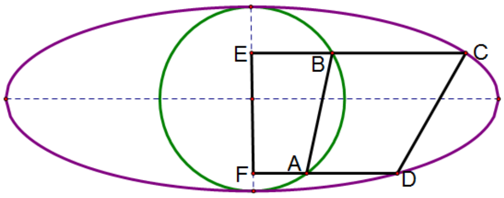
色面積會比黃色面積大。



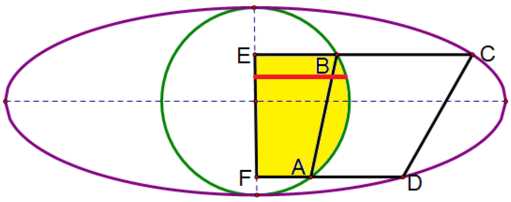


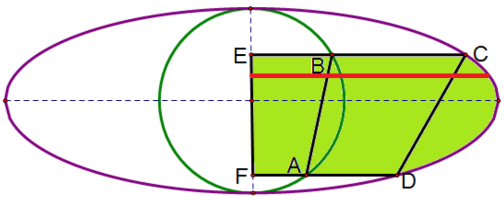
令橢圓的方程式為$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，可看成圓$x^2+y^2=b^2$中，每一點的 x 座標被拉長$\frac{a}{b}$倍，如左下圖。拉兩條平行長軸的水平線 EC,FD。分別交圓和橢圓於點 A,B 以及點 C,D，如右下圖。



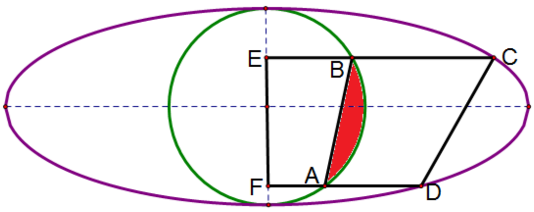


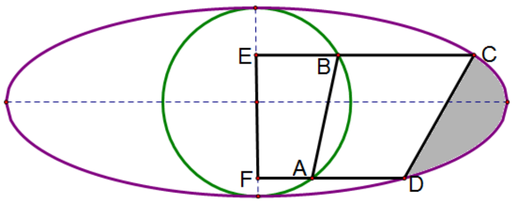
因為線段 FD,EC 分別為線段 EB,FA 的$\frac{a}{b}$倍,又梯形 EFDC 與 EFAB 的高相同,因此梯形 EFDC 面積為梯形 EFAB 的$\frac{a}{b}$倍。又下圖中綠色的面積也為黃色面積的$\frac{a}{b}$倍（在線段 EF 上取許多極小段 dy，而每一段向右在圓形和橢圓拉線。而每一段與橢圓的連線長度均是圓形連線長度的$\frac{a}{b}$倍，見下圖的紅線）





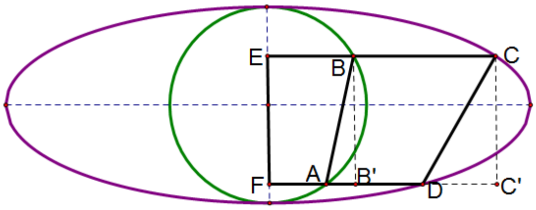
因此，灰色部分面積就是紅色部分的$\frac{a}{b}$倍。



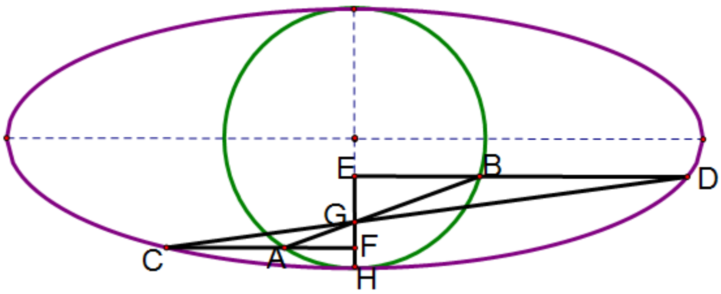


如果線段 CD 不平形短軸，對應到的 AB 線段一定會變短。因為如果把 B,C 向下投影到直線 FD 上的 B’,C’點，線段 DC’也會視線段 AB’的$\frac{a}{b}$倍，加上 BB’=CC’，所以 CD 線段一定比線

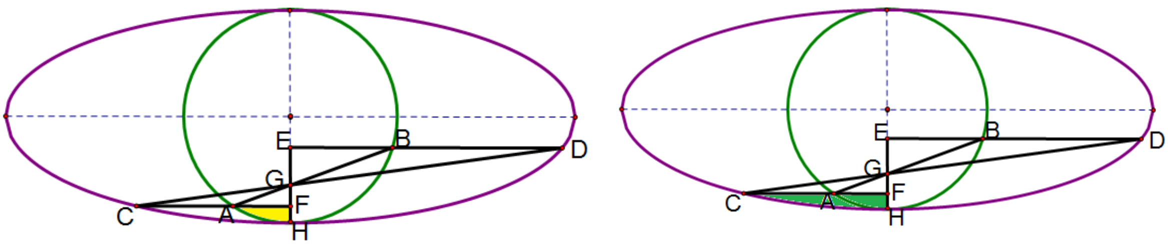
段 AB 長。.



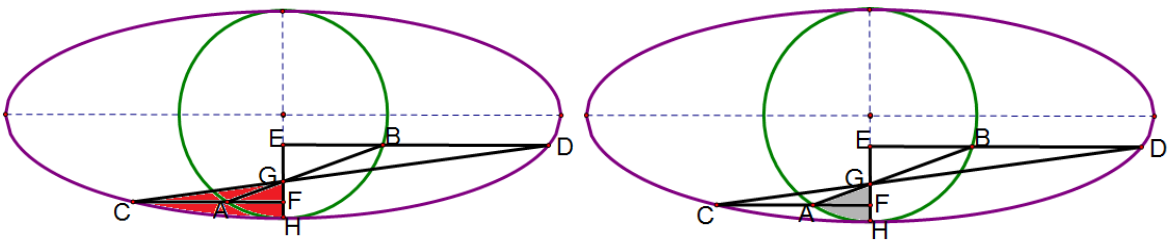
且當固定長度的 CD 棒子平行短軸時，AB 為最大值 CD。
不過，如果 CD 往下移動到某種程度，將會出現以下的情形（橫跨左右兩邊）：



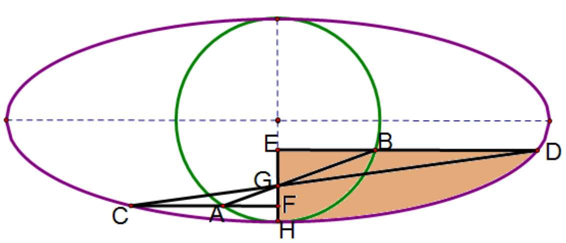
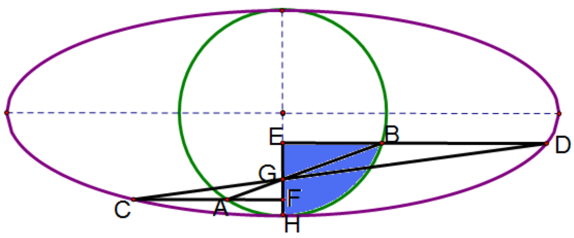
此時分析方法類似。在短軸上找點 E,F 使得線段 ED,CF 平行長軸。線段 ED,CF 分別交圓於點 B,A。由拉長的比例關係得知：三角形 CGF 面積為三角形 AGF 的 $\frac{a}{b}$ 倍，圖中綠色部分面積也會是黃色部分面積的 $\frac{a}{b}$ 倍（想法與之前相同）。



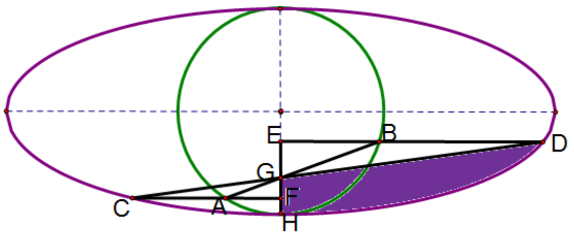
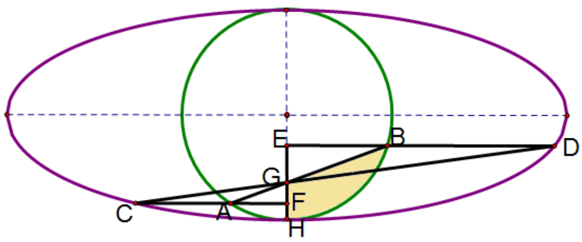
顯然，下圖紅色部分面積為灰色部分面積的 $\frac{a}{b}$ 倍。



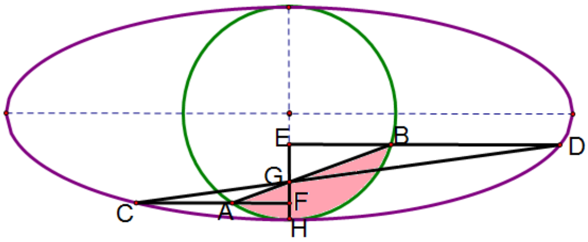
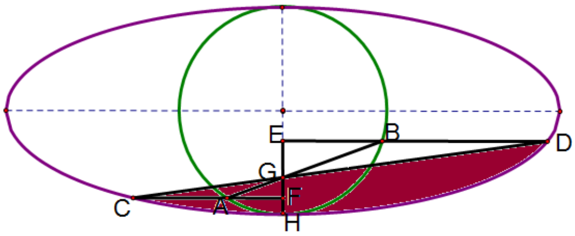
同理可知，三角形 EGD 面積為三角形 EGB 的 $\frac{a}{b}$ 倍，且棕色部分為藍色部分的 $\frac{a}{b}$ 倍。

故紫色部分也為土黃部分的 $\frac{a}{b}$ 倍。

所以，線段 CD 與橢圓圍出的面積也會是線段 AB 與圓形圍出面積的 $\frac{a}{b}$ 倍。

同樣的，把線段 CD 移動到平行短軸後，其長度就會與 AB 相等，其餘情形比 AB 大。

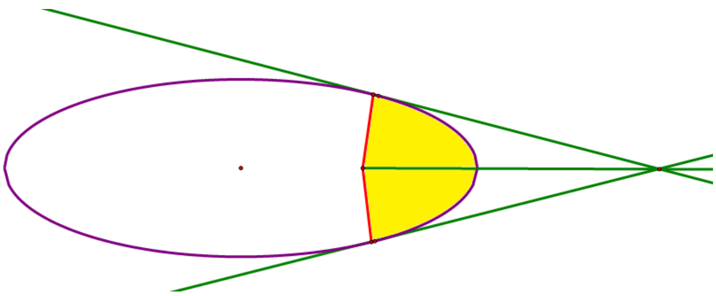
綜合上述兩種情形的結論：

固定長度的棒子 CD 平行短軸時，對應到的 AB 有最大值。故其與圓圍出的弓形面積也最大，所以 CD 與橢圓圍出的面積也最大（維持著 $\frac{a}{b}$ 的比例關係）。

因此，當兩根相同長度棒子圍橢圓時，圍出最大面積時，其與牆壁的兩個接點的連線，必定會垂直長軸。

（命題二）滿足共圓條件時圍出的面積最大。

最大值發生時棒子對稱於長軸，可運用兩根相同棒長圍圓形和拋物線的證法得證。



(2)2 根不同長度的棒子

與拋物線相同，棒子與牆壁的接觸點連線會垂直於對稱軸（長軸），因此可利用相同的證法得

證。

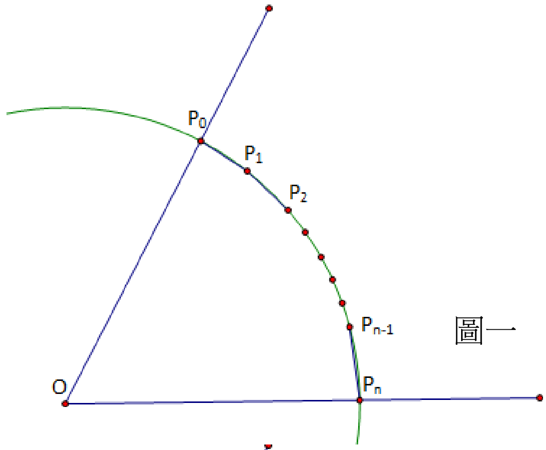
(3)n 根任意長度的棒子

依照假設集合刪去法(在定理 4 中)，可知棒子滿足共圓條件時會圍出最大面積。

伍、研究結果

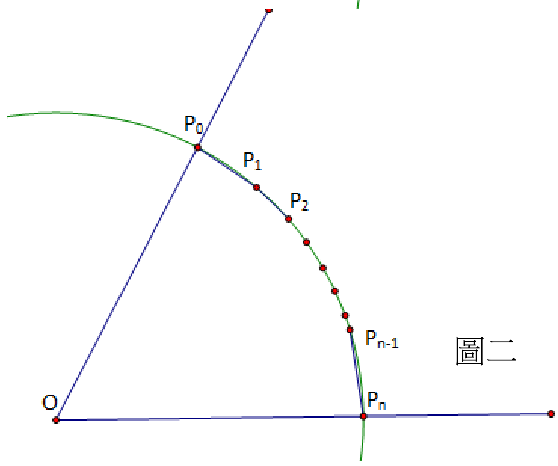
總結論:

1. n 根等長棒子擺放在兩面牆壁上，兩面牆夾角介於 0 度到 180 度之間，圍出最大面積時是在棒子端點共圓時，圓心為牆角。(圖一)



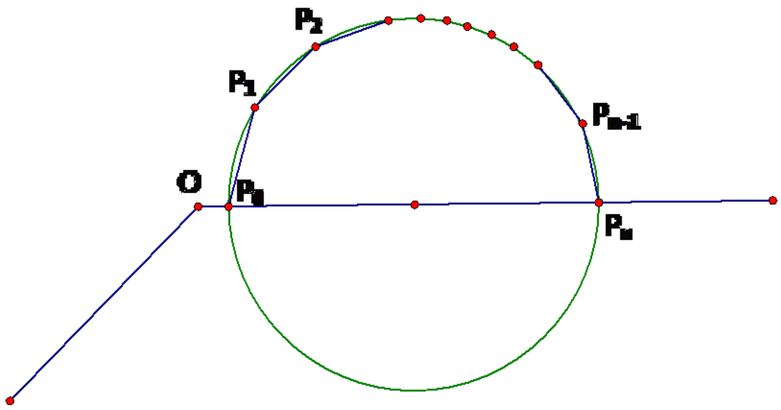
圖一

2. n 根任意長的棒子擺放在兩面牆壁上，兩面牆夾角介於 0 度到 180 度之間，圍出最大面積時也是在棒子端點共圓時，圓心為牆角。(圖二)



圖二

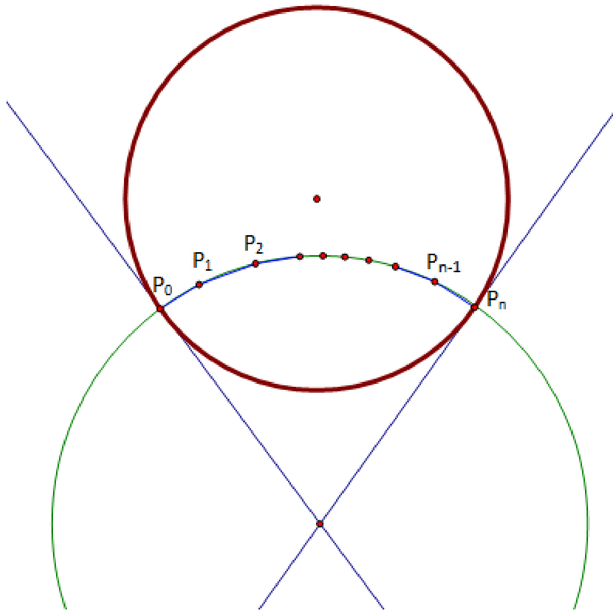
3. n 根任意長的棒子擺放在兩面牆壁上，兩面牆夾角大於 180 度，圍出最大面積時與牆角為 180 度時相同，圓心在其中一面牆壁上。(圖三)



圖三

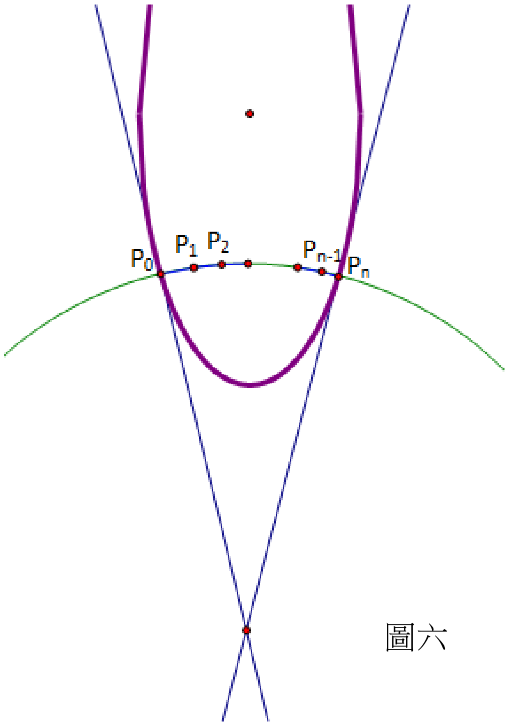
4. n 根任意長棒子擺放在圓形牆圍出最大面積時，是在棒子端點共圓時，在棒子與圓形牆壁的接觸點做切線，兩條切線的焦點即為圓心。(圖四)

5. n 根任意長棒子擺放在拋物線牆圍出最大面積時，是在棒子端點共圓時，在棒子與拋物線牆壁的接觸點做切線，兩條切線的焦點即為圓心。(圖五)

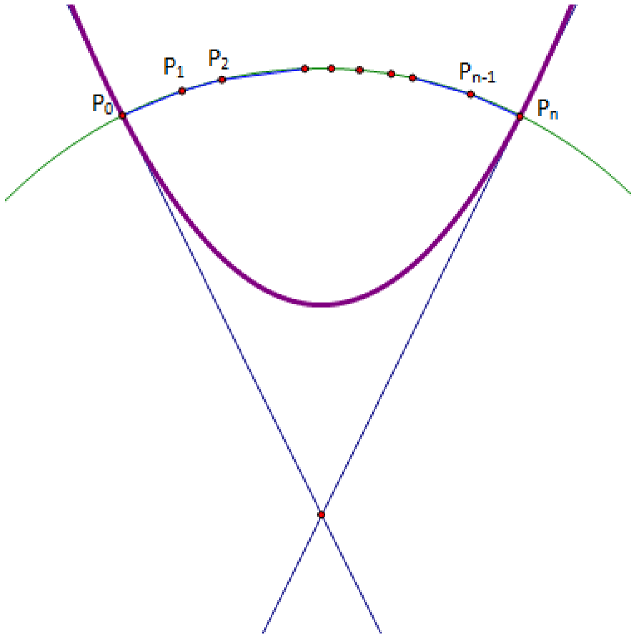


圖四

6. n 根任意長棒子擺放在橢圓牆圍出最大面積時，是在棒子端點共圓時，在棒子與橢圓形牆壁的接觸點做切線，兩條切線的焦點即為圓心。(圖六)



圖六



圖五

陸、未來展望

1、證明出雙曲線牆壁的情況。

2、找出此問題與等周問題之關聯。

3、後來，我們在網路上找到一篇文章，如參考資料 4，其中介紹了一個定理，

克拉美定理：在給定邊長為 a_1，a_2，a_3，…，a_n 的所有 n 邊形中，能夠內接於圓的 n 邊形具有最大的面積。

而我們所討論的結果可以視為上述定理的推廣。

柒、參考資料

1、高中數學課本 第二冊　余文卿編著　翰林出版社

2、高中數學課本 第三冊　余文卿編著　翰林出版社

3、「400 個最新世界著名數學最值問題」　劉培杰編著　哈爾濱工業大學出版社

4、「等周問題」 霍柏曦著　香港培正中學

【評語】040411

本文探討以兩根固定長度之棒子，如何在一牆角圍出最大面積，並推廣至 N 根棒子以及曲面牆之狀況。本作品充分展現作者在綜合幾何與三角函數上之功力，期許作者百尺竿頭，更上層樓。