中華民國第51屆中小學科學展覽會

作品說明書

高中組　數學科

040410

峰迴路轉—等比繞行的秘密

學校名稱：國立新竹高級商業職業學校

作者：	指導老師：
職二 孫宏奇 職二 陳家錡	林典蔚

關鍵詞：等比級數、隸美弗定理、橢圓

摘要

此研究著重於機器瓢蟲在不同的操控變因下所走出之路徑是否存在著某些性質。對於轉向次數$k \to \infty$且轉向角θ為任意角時，我們計算各收斂點P於坐標平面上恰形成圓C：

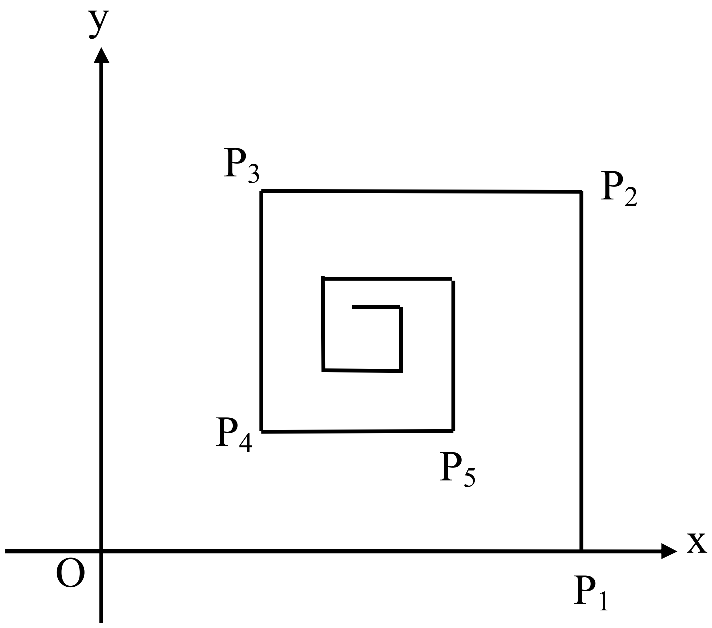
$$\left(x-\frac{1}{1-r^2}\right)^2+y^2=\left(\frac{r}{1-r^2}\right)^2$$

。將瓢蟲的轉向點P_1、P_2連線，圓心C與收斂點P連線，則$\overleftrightarrow{P_1P_2}$與$\overleftrightarrow{CP}$之交點$S$的軌跡形成長軸長為圓$C$半徑（$\frac{r}{1-r^2}$）的橢圓，且此橢圓的焦點為$P_1(1,0)$與$C\left(\frac{1}{1-r^2},0\right)$。各轉向點$P_n\left(n\in\mathbb{N}\right)$位於一個方程式為$R=m\cdot r^{\frac{\theta-\pi}{\alpha}}$，$m=\overline{OP}=\sqrt{\frac{1}{1-2r\cos\alpha+r^2}}$，定角為$\cot^{-1}(\frac{\ln r}{\alpha})$之等角螺線上；同時繪出轉向次數$k$在不同值時，瓢蟲行進終點之軌跡，以驗證當$k$愈來愈大時，各終點形成的軌跡會趨近於一個圓。當$k=2$時，圖形為蚶線並證明其經平移後之極坐標方程式為$R=r+2r^2\cos\theta$。最後我們展示行進公比$r\to1^-$，$r=1$，$r\to1^+$時所呈現的終點軌跡，並對此軌跡所呈現出的意象與自然界連結，而其實質關聯性則有待未來研究。

壹、研究動機

於高中數學第一冊第二單元 — 無窮等比級數中，我們曾學過以下題目：

坐標平面上一機器瓢蟲由原點出發，先向東移動 1 單位，停在 P_1 點，再往北移動 $\frac{4}{5}$ 單位，停在 P_2 點，接著又向西移動 $\left(\frac{4}{5}\right)^2$ 單位，停在 P_3 點，再向南移動 $\left(\frac{4}{5}\right)^3$ 單位，停在 P_4 點，再依序向東、向北、向西、向南、…繼續不斷（如下圖），每次移動距離都是前一次的 $\frac{4}{5}$，則這隻機器瓢蟲最後幾乎停止於 P 點，則 P 點的坐標為何？



上述問題中我們已知瓢蟲於 P_1、P_2、P_3、…時均需轉變行進方向，故瓢蟲轉變行進方向 k 次後會來到點 P_{k+1}，當 $k \to \infty$ 且此瓢蟲行進公比 $r = \frac{\overline{P_1P_2}}{\overline{OP_1}} = \frac{\overline{P_2P_3}}{\overline{P_1P_2}} = \cdots = \frac{\overline{P_kP_{k+1}}}{\overline{P_{k-1}P_k}} = \cdots$，$0 < r < 1$ 時，此瓢蟲最終會幾乎停止於某一個點 P。而當瓢蟲來到點 P_1、P_2、P_3、…時，原始行進方向與下個行進方向的夾角(以下簡稱轉向角)均為 $90°$，倘若轉向角改成 $120°$(正三角形的一個外角)、$72°$(正五邊形的一個外角)，$60°$(正六邊形的一個外角)、$\left(\frac{360°}{7}\right)$(正七邊形的一個外角)，…，$\left(\frac{360°}{N}\right)$(正 N 邊形的一個外角)，則此瓢蟲最後也均會停止於各點(以下簡稱收斂點)，而這些收斂點與收斂點間有什麼關係呢？又若改變瓢蟲的轉向角 θ 為任意角抑或轉向次數 k 為有限次時，則瓢蟲的終點所成的軌跡探討，促成了本次的研究。

貳、研究目的

一、探討當機器瓢蟲的轉向角為$\dfrac{360^\circ}{N}\left(N\in\mathbb{N},N\geq 3\right)$（正$N$邊形的一個外角）時，各轉向角所對應的收斂點於坐標平面上的關係。

二、探討當機器瓢蟲的轉向角θ為任意角時，各轉向角θ所對應的收斂點間的關係。

三、探討當機器瓢蟲的轉向角θ為任意角時，以直尺與圓規找出瓢蟲的收斂點。

四、探討各轉向點$P_n\left(n\in\mathbb{N}\right)$之關聯性。

五、探討當機器瓢蟲的轉向次數為k次$\left(k\in\mathbb{N},k\geq 3\right)$且轉向角$\theta$為任意角時，瓢蟲之終點$P_{k+1}$於坐標平面上所成之軌跡。

六、探討轉向次數$k=2$所成之軌跡。

七、當機器瓢蟲行進公比$\mathrm{r}\to 1^-,r=1,r\to 1^+$，轉向角$\theta$為任意角，轉向次數為$k$時，展示瓢蟲之終點$P_{k+1}$於坐標平面上所成之圖形。

參、研究設備及器材

紙、筆、電腦、GSP 幾何畫板、MathType5、Microsoft Office Excel、Microsoft Office Word

肆、研究過程或方法

一、轉向角為$\dfrac{360^\circ}{N}\left(N\in\mathbb{N},N\geq 3\right)$時，收斂點的猜想。

定理一：當瓢蟲的轉向角為$\dfrac{360^\circ}{N}\left(N\in\mathbb{N},N\geq 3\right)$時，各收斂點均位於圓 C 上。

（ 圓C：$\left(x-\dfrac{1}{1-r^2}\right)^2+y^2=\left(\dfrac{r}{1-r^2}\right)^2$ ）

（一）當瓢蟲的轉向角為$\dfrac{360^\circ}{N}\left(N\in\mathbb{N},N\geq 3\right)$時，收斂點坐標為$\begin{cases} x=\displaystyle\sum_{k=1}^{N}S_k\cos\left(\frac{360^\circ}{N}(k-1)\right)\\ y=\displaystyle\sum_{k=1}^{N}S_k\sin\left(\frac{360^\circ}{N}(k-1)\right)\end{cases}$

其中 $S_k = r^{k-1}+r^{N+k-1}+r^{2N+k-1}+\cdots+r^{(n-1)N+k-1}+\cdots=\dfrac{r^{k-1}}{1-r^{N}}$ 。

【證明】如圖一，透過觀察，我們定義 $S_1,S_2,S_3,\cdots,S_N$ 如下

$$S_1=\overline{OP_1}+\overline{P_NP_{N+1}}+\overline{P_{2N}P_{2N+1}}+\cdots=1+r^N+r^{2N}+\cdots$$

$$S_2=\overline{P_1P_2}+\overline{P_{N+1}P_{N+2}}+\overline{P_{2N+1}P_{2N+2}}+\cdots=r+r^{N+1}+r^{2N+1}+\cdots$$

$$\vdots$$

$S_{\mathrm{N}}=\overline{P_{\mathrm{N}-1}P_{\mathrm{N}}}+\overline{P_{2N-1}P_{2N}}+\overline{P_{3N-1}P_{3N}}+\cdots=r^{N-1}+r^{2N-1}+r^{3N-1}+\cdots$，由各式歸納得

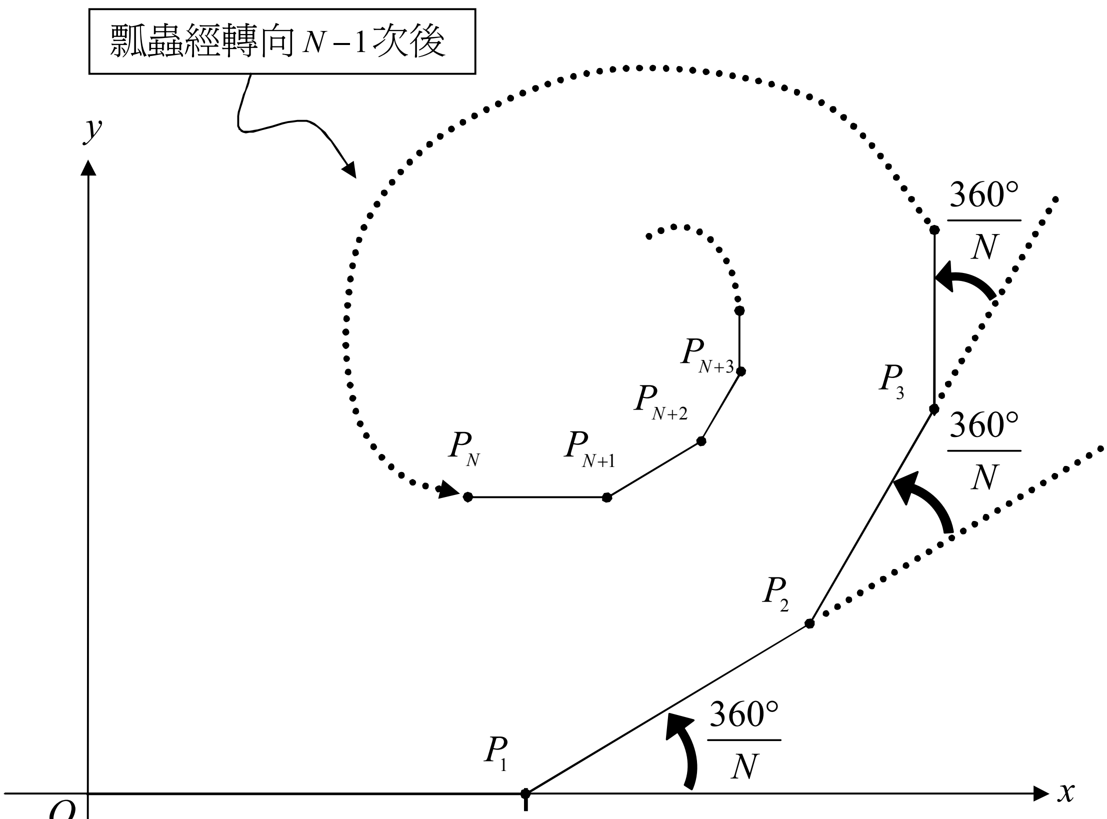
$S_{\mathrm{k}}=\overline{P_{\mathrm{k}-1}P_{\mathrm{k}}}+\overline{P_{N+\mathrm{k}-1}P_{N+\mathrm{k}}}+\overline{P_{2N+\mathrm{k}-1}P_{2N+\mathrm{k}}}+\cdots=r^{k-1}+r^{N+k-1}+r^{2N+k-1}+\cdots$（$1\le k\le N$）

故收斂點的 x 坐標 $=S_1+S_2\cos\dfrac{360^\circ}{N}+S_3\cos\left(\dfrac{360^\circ}{N}\times 2\right)+\ldots+S_N\cos\left(\dfrac{360^\circ}{N}\times(N-1)\right)$

$=\displaystyle\sum_{k=1}^{N}S_k\cos\left[\frac{360^\circ}{N}\times(k-1)\right]$

故收斂點的 y 坐標 $=S_2\sin\dfrac{360^\circ}{N}+S_3\sin\left(\dfrac{360^\circ}{N}\times 2\right)+\ldots+S_N\sin\left(\dfrac{360^\circ}{N}\times(N-1)\right)$

$=\displaystyle\sum_{k=1}^{N}S_k\sin\left[\frac{360^\circ}{N}\times(k-1)\right]$



▲圖一

（二）當瓢蟲的轉向角爲 $\theta\left(\theta=\dfrac{360^\circ}{N}, N\in\mathbb{N}, N\geq 3\right)$ 時，收斂點坐標可化簡爲

$$\begin{cases} x=\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1}\cos(n-1)\theta=\dfrac{1-r\cos\theta}{1-2r\cos\theta+r^2} \\ y=\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1}\sin(n-1)\theta=\dfrac{r\sin\theta}{1-2r\cos\theta+r^2} \end{cases}$$ 。

【證明】

1. $x=\sum_{k=1}^{N} S_k\cos\left(\dfrac{360^\circ}{N}(k-1)\right)$

$=S_1+S_2\cos\theta+S_3\cos 2\theta+S_4\cos 3\theta+\cdots$

$=\left(1+r^N+r^{2N}+\cdots\right)+\left(r+r^{N+1}+r^{2N+1}+\cdots\right)\cos\theta$

$+\left(r^2+r^{N+2}+r^{2N+2}+\cdots\right)\cos 2\theta+\cdots$

$=1+r(\cos\theta)+r^2(\cos 2\theta)+r^3(\cos 3\theta)+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1}\cos(n-1)\theta$

同理可得： $y=\ r(\sin\theta)+r^2(\sin 2\theta)+r^3(\sin 3\theta)+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1}\sin(n-1)\theta$

2.透過複數的極式可得 $x+yi$

$=\ 1+r(\cos\theta+i\sin\theta)+r^2(\cos\theta+i\sin\theta)^2+\cdots+r^{n-1}(\cos\theta+i\sin\theta)^{n-1}+\cdots$

$=\ \dfrac{1}{1-r(\cos\theta+i\sin\theta)}=\ \dfrac{1}{(1-r\cos\theta)-i(r\sin\theta)}$

$=\ \dfrac{(1-r\cos\theta)+i(r\sin\theta)}{\left[(1-r\cos\theta)-i(r\sin\theta)\right]\left[(1-r\cos\theta)+i(r\sin\theta)\right]}$

$=\ \dfrac{(1-r\cos\theta)+i(r\sin\theta)}{(1-r\cos\theta)^2-(ir\sin\theta)^2}\ =\ \dfrac{1-r\cos\theta+ir\sin\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}$

3.故瓢蟲的收斂點坐標可化簡爲 $\begin{cases} x=\dfrac{1-r\cos\theta}{1-2r\cos\theta+r^2} \\ y=\dfrac{r\sin\theta}{1-2r\cos\theta+r^2} \end{cases}\left(\theta=\dfrac{360^\circ}{N}, N\in\mathbb{N}, N\geq 3\right)$

（三）我們輔以 **Excel** 算出 $N=3,4,5,\cdots,500$ 所對應的各收斂點坐標，並繪於坐標平面上。

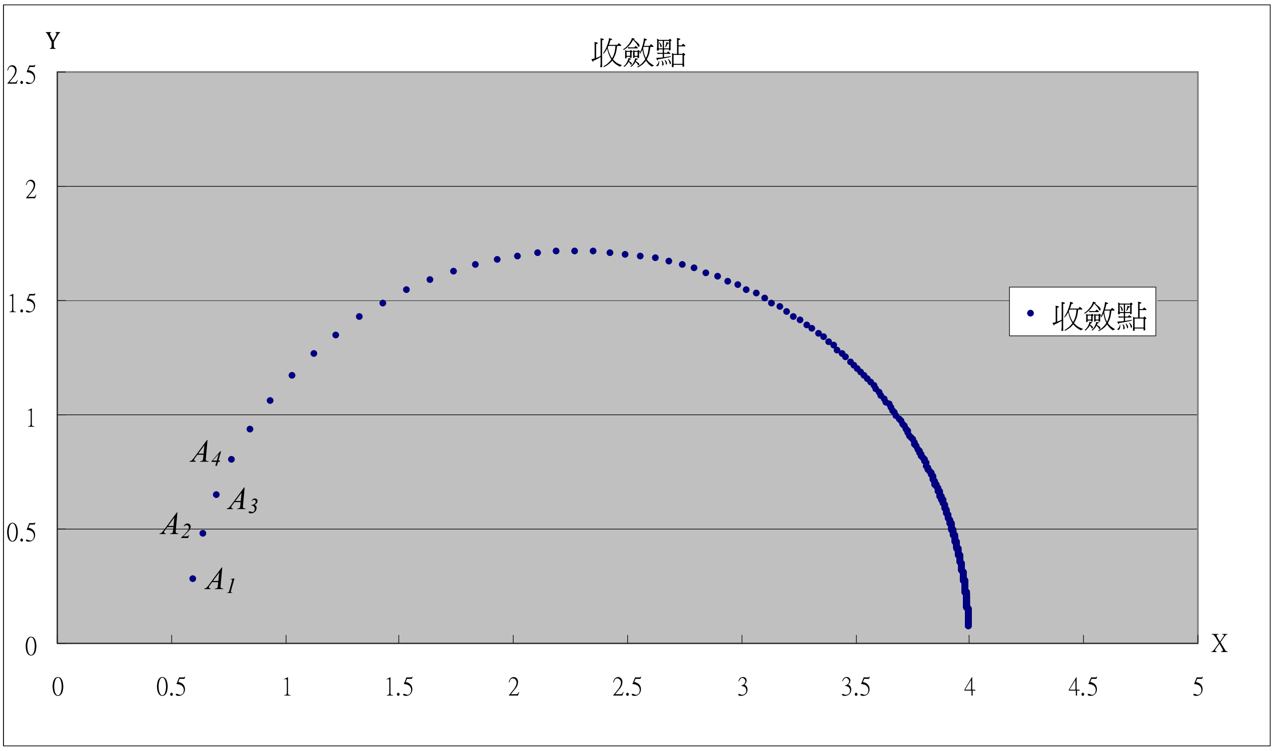
1. N 的取值為 3 至 500 的正整數時，各收斂點的(x,y)坐標

N 值	x 座標	y 座標
3	0.594595	0.280873
4	0.64	0.48
5	0.699049	0.649053
6	0.769231	0.799408
7	0.848736	0.93481
8	0.935896	1.056772
9	1.029106	1.166066
10	1.126837	1.263241
11	1.227664	1.348816
12	1.330291	1.423356
13	1.433568	1.487489
14	1.5365	1.5419
15	1.638245	1.587312
16	1.738109	1.62447
17	1.835538	1.654121
18	1.930102	1.676996
19	2.021484	1.6938
20	2.109459	1.705201
21	2.193888	1.711825
22	2.274696	1.71425
23	2.351866	1.713009
24	2.425425	1.708583
25	2.495434	1.701409
26	2.561982	1.691878
27	2.625175	1.68034
28	2.685137	1.667104
29	2.741999	1.652447
30	2.795899	1.636609
40	3.201702	1.449049
50	3.443038	1.264665

N 值	x 座標	y 座標
60	3.593309	1.10859
70	3.691634	0.9809
80	3.758894	0.876651
90	3.806682	0.790843
100	3.84174	0.719416
110	3.868165	0.659261
120	3.888547	0.608033
130	3.904581	0.563955
140	3.917413	0.525674
150	3.927837	0.492147
160	3.936416	0.462559
170	3.943558	0.436267
180	3.949567	0.412759
190	3.954668	0.391622
200	3.959036	0.372518
210	3.962804	0.35517
220	3.966076	0.339351
230	3.968936	0.324868
240	3.97145	0.311561
250	3.973671	0.299293
260	3.975644	0.287947
270	3.977403	0.277425
280	3.978979	0.26764
290	3.980395	0.258517
300	3.981674	0.249993
310	3.982831	0.24201
320	3.983883	0.234519
330	3.984841	0.227476
400	3.989668	0.187931
500	3.99338	0.150507

▲由於數據過多，僅以部分數據代表

2. 我們根據上表各收斂點坐標的數據，以 Excel 軟體描繪出以下圖形，根據其收斂點的軌跡（ A_1爲轉向角$\theta=\dfrac{360^\circ}{3}$之收斂點 、 A_2爲轉向角$\theta=\dfrac{360^\circ}{4}$之收斂點 、 A_3爲轉向角$\theta=\dfrac{360^\circ}{5}$之收斂點…以此類推），我們推測這些收斂點應位於某個圓上，以下我們將給予證明。



▲圖二：此圖爲 N 取值於 3 到 1000 的正整數所繪製

（四）各收斂點的軌跡方程式。

由（二）可知收斂點的坐標 $x=\dfrac{1-r\cos\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}$ 、 $y=\dfrac{r\sin\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}$

將兩式平方和得 x^2+y^2

$$=\frac{(1-r\cos)^2+(r\sin\theta)^2}{\left(1-2r\cos\theta+r^2\right)^2}=\frac{1-2r\cos\theta+r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta}{\left(1-2r\cos\theta+r^2\right)^2}$$

$$=\frac{1-2r\cos\theta+r^2}{\left(1-2r\cos\theta+r^2\right)^2}=\frac{1}{1-2r\cos\theta+r^2}\ \cdots\cdots①$$

又以 $x=\dfrac{1-r\cos\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}\Rightarrow x\left(1-2r\cos\theta+r^2\right)=1-r\cos\theta\Rightarrow\cos\theta=\dfrac{r^2x+x-1}{r(2x-1)}\cdots\cdots②$

將②代入①得 x^2+y^2

$$=\frac{1}{1-2r\left(\frac{r^2x+x-1}{r(2x-1)}\right)+r^2}=\frac{1}{\left(\frac{2x-1-2r^2x-2x+2+2r^2x-r^2}{2x-1}\right)}=\frac{1}{\left(\frac{1-r^2}{2x-1}\right)}$$

$$=\frac{2x-1}{1-r^2}=\frac{2x}{1-r^2}-\frac{1}{1-r^2}$$

$$\Rightarrow x^2-2x\left(\frac{1}{1-r^2}\right)+\left(\frac{1}{1-r^2}\right)^2+y^2=-\frac{1}{1-r^2}+\left(\frac{1}{1-r^2}\right)^2\Rightarrow\left(x-\frac{1}{1-r^2}\right)^2+y^2=\left(\frac{r}{1-r^2}\right)^2$$

（五）結論：各收斂點存在於一個圓心在 $\left(\frac{1}{1-r^2},0\right)$，且半徑爲 $\left(\frac{r}{1-r^2}\right)$ 的圓 C 上。

二、轉向角 θ 爲任意角 $(-180°<\theta\leq180°)$ 時之收斂點探討。

定理二：瓢蟲的轉向角 θ $(-180°<\theta\leq180°)$ 所對應的各收斂點於坐標平面上恰可形成

圓 C ：$\left(x-\frac{1}{1-r^2}\right)^2+y^2=\left(\frac{r}{1-r^2}\right)^2$。

（一）給定轉向角 θ $(-180°<\theta\leq180°)$，說明其收斂點的位置。

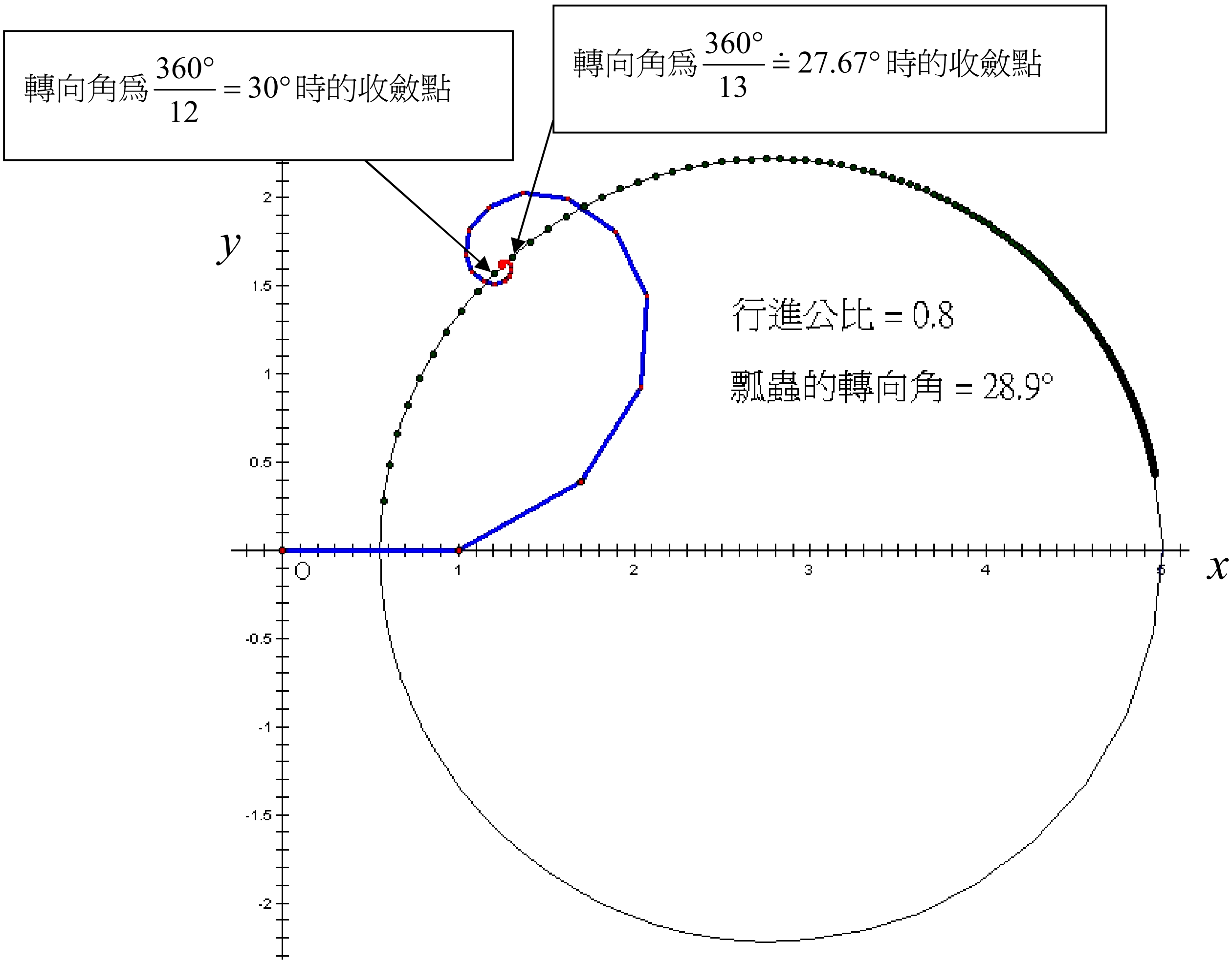
當瓢蟲的轉向角 θ 爲任意角度時，收斂點坐標仍爲

$$\begin{cases}x=\sum_{n=1}^{\infty}r^{n-1}\cos(n-1)\theta=\dfrac{1-r\cos\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}\\ y=\sum_{n=1}^{\infty}r^{n-1}\sin(n-1)\theta=\dfrac{r\sin\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}\end{cases}$$

，透過**定理一**的相關推導可得：當瓢蟲的轉向角 θ 爲任意角度時，各收斂點均位於圓 C ：$\left(x-\frac{1}{1-r^2}\right)^2+y^2=\left(\frac{r}{1-r^2}\right)^2$ 上。

（二）以 GSP 軟體繪圖。

當瓢蟲的轉向角 θ 爲任意角（EX：28.9°），行進公比 $r=0.8$，其收斂點也是位於圓 C 上。此外，這個點也會如預期的介於轉向角 $\frac{360°}{12}=30°$ 與 $\frac{360°}{13}\doteq26.67°$ 之間的弧上。（如圖三）



▲圖三

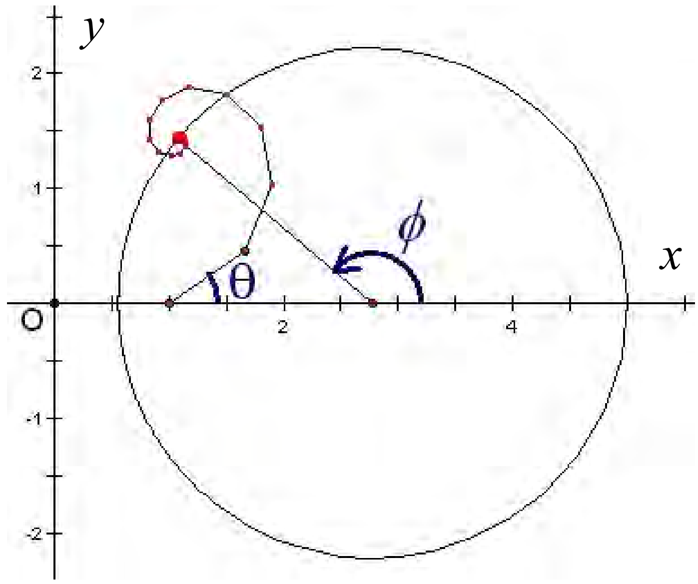
（三）**給定圓 C 上任一點 P，試證明可找到轉向角 θ $(-180°<\theta\leq 180°)$，使得瓢蟲之收斂點恰為 P。**

【證明】

1. 設 P 為圓 $C:\left(x-\frac{1}{1-r^2}\right)^2+y^2=\left(\frac{r}{1-r^2}\right)^2$ 上半部任一點，

由圓的參數式可得 $P:\begin{cases} x=\frac{1}{1-r^2}+\frac{r}{1-r^2}\cos\phi=\frac{1+r\cos\phi}{1-r^2} \\ y=\frac{r}{1-r^2}\sin\phi \end{cases}$ $(0°\leq\phi\leq 180°)$，

令 $m=\frac{\cos\phi+2r+r^2\cos\phi}{1+2r\cos\phi+r^2}$，



▲圖四

（1）證明$|m|\le 1$。

$\because m=\dfrac{\cos\phi+2r+r^2\cos\phi}{1+2r\cos\phi+r^2}\quad \therefore \cos\phi=\dfrac{m+r^2m-2r}{1+r^2-2rm}$

因爲$0^\circ\le\phi\le180^\circ$，故$|\cos\phi|\le 1$

$\therefore \left|\dfrac{m+r^2m-2r}{1+r^2-2rm}\right|\le 1 \Rightarrow \left|m+r^2m-2r\right|^2\le\left|1+r^2-2rm\right|^2$

$\Rightarrow m^2\left(1-2r^2+r^4\right)\le\left(1-2r^2+r^4\right)\quad \therefore m^2\le 1\quad \therefore |m|\le 1$

（2）由於$|m|\le 1$，可令$\theta=\cos^{-1}m=\cos^{-1}\left(\dfrac{\cos\phi+2r+r^2\cos\phi}{1+2r\cos\phi+r^2}\right)$，

故$\cos\theta=\dfrac{\cos\phi+2r+r^2\cos\phi}{1+2r\cos\phi+r^2}\Rightarrow\cos\phi=\dfrac{\cos\theta-2r+r^2\cos\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}\cdots\cdots$ ①

$\sin\phi=\pm\sqrt{1-\left(\dfrac{\cos\theta-2r+r^2\cos\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}\right)^2}\Rightarrow\sin\phi=\pm\dfrac{\left(1-r^2\right)\sin\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}$

因爲$0^\circ\le\phi\le180^\circ$，故$\sin\phi=\dfrac{\left(1-r^2\right)\sin\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}\cdots\cdots$ ②

將①、②代入$P:\begin{cases}x=\dfrac{1+r\cos\phi}{1-r^2}\\ y=\dfrac{r}{1-r^2}\sin\phi\end{cases}$ 整理可得$P:\begin{cases}x=\dfrac{1-r\cos\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}\\ y=\dfrac{r\sin\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}\end{cases}$

2. 同理可證當P爲圓$C:\left(x-\frac{1}{1-r^2}\right)^2+y^2=\left(\frac{r}{1-r^2}\right)^2$下半部任一點時，可找到轉向角

$\theta\left(-180°<\theta\le 0°\right)$，使得$P:\begin{cases}x=\dfrac{1-r\cos\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}\\ y=\dfrac{r\sin\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}\end{cases}$。

3. 給定圓$C:\left(x-\frac{1}{1-r^2}\right)^2+y^2=\left(\frac{r}{1-r^2}\right)^2$上任一點$P$，可找到轉向角$\theta$

$\left(-180°<\theta\le 180°\right)$，使得瓢蟲之收斂點恰爲$P$。

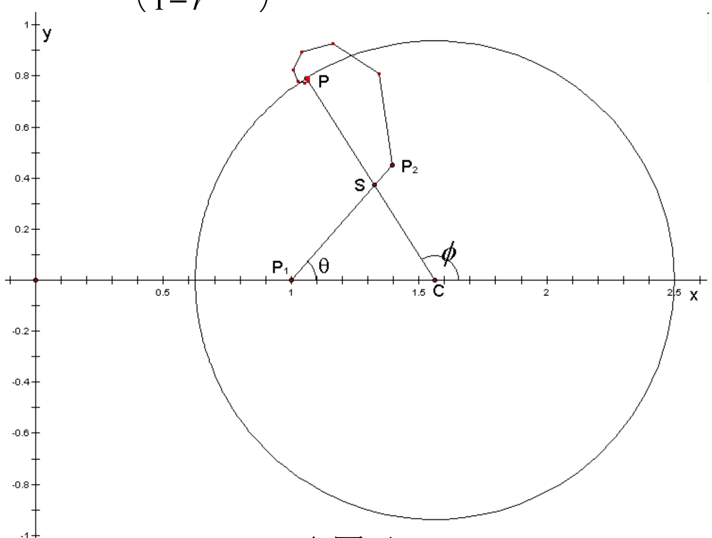
（四）結論：瓢蟲的轉向角θ $\left(-180°<\theta\le 180°\right)$所對應的收斂點於坐標平面上恰形成

圓$C:\left(x-\frac{1}{1-r^2}\right)^2+y^2=\left(\frac{r}{1-r^2}\right)^2$。

三、利用直尺與圓規找出瓢蟲的收斂點。

（一）藏於收斂圓中的橢圓。

定理三：已知C爲圓心在$C\left(\frac{1}{1-r^2},0\right)$，半徑爲$\frac{r}{1-r^2}$的圓，假設瓢蟲轉向角爲$\theta$時，其收斂點爲$P$。當$\theta$改變時，試證明$\overleftrightarrow{P_1P_2}$與$\overleftrightarrow{CP}$之交點$S$的軌跡形成一個橢圓，且此橢圓的焦點爲$C\left(\frac{1}{1-r^2},0\right)$與$P_1(1,0)$。（如圖五）



▲圖五

【證明】

由上圖知$\begin{cases} \overleftrightarrow{P_1P_2}: y=\tan\theta(x-1) \\ \overleftrightarrow{CP}: y=\tan\phi\left(x-\dfrac{1}{1-r^2}\right) \end{cases}\cdots$①，設$\overleftrightarrow{P_1P_2}$與$\overleftrightarrow{CP}$之交點$S$的坐標爲$(x,y)$，則：

$$\overline{SP_1}+\overline{SC}=\sqrt{(x-1)^2+y^2}+\sqrt{\left(x-\frac{1}{1-r^2}\right)^2+y^2}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{y}{\tan\theta}\right)^2+y^2}+\sqrt{\left(\frac{y}{\tan\phi}\right)^2+y^2}=\sqrt{y^2\left(\frac{1}{\tan^2\theta}+1\right)}+\sqrt{y^2\left(\frac{1}{\tan^2\phi}+1\right)}$$

$$=\frac{y}{\sin\theta}+\frac{y}{\sin\phi}=y\left(\frac{1}{\sin\theta}+\frac{1}{\sin\phi}\right)$$

由①可得S的y坐標爲$\dfrac{\frac{r^2}{1-r^2}}{\frac{1}{\tan\theta}-\frac{1}{\tan\phi}}$，故原式

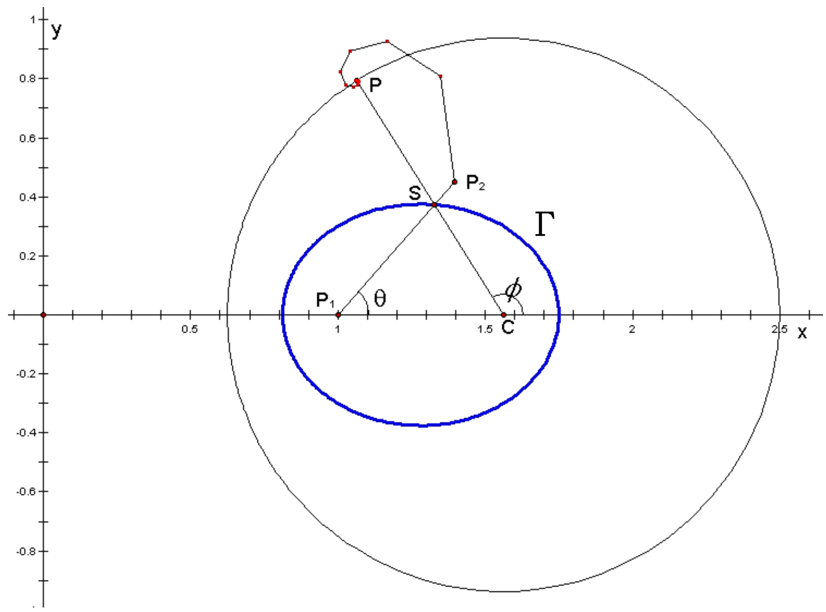
$$=\left(\frac{\frac{r^2}{1-r^2}}{\frac{1}{\tan\theta}-\frac{1}{\tan\phi}}\right)\left(\frac{1}{\sin\theta}+\frac{1}{\sin\phi}\right)=\left(\frac{r^2}{1-r^2}\right)\left(\frac{\sin\phi\sin\theta}{\sin(\phi-\theta)}\right)\left(\frac{\sin\theta+\sin\phi}{\sin\theta\sin\phi}\right)$$

$$=\left(\frac{r^2}{1-r^2}\right)\left(\frac{\sin\theta+\sin\phi}{\sin(\phi-\theta)}\right)$$

$\because \sin\phi=\dfrac{(1-r^2)\sin\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}$，$\cos\phi=\dfrac{\cos\theta-2r+r^2\cos\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}$，故$\dfrac{\sin\theta+\sin\phi}{\sin(\phi-\theta)}=\dfrac{1}{r}$，

所以：$\overline{SP_1}+\overline{SC}=\left(\dfrac{r^2}{1-r^2}\right)\left(\dfrac{\sin\theta+\sin\phi}{\sin(\phi-\theta)}\right)=\dfrac{r}{1-r^2}=$圓$C$半徑。

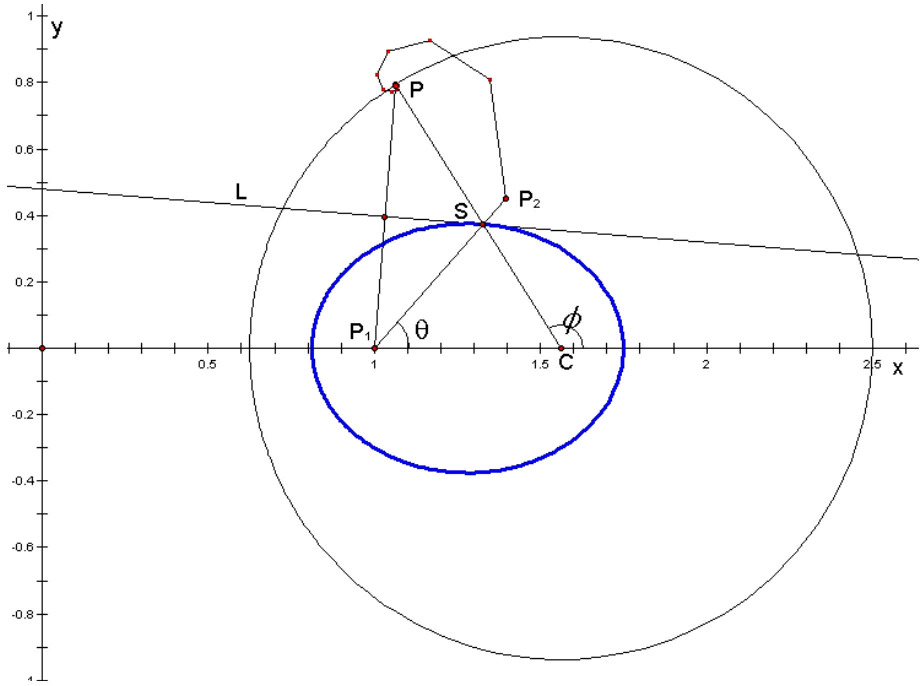
故：$\overleftrightarrow{P_1P_2}$與$\overleftrightarrow{CP}$之交點$S$的軌跡形成一個橢圓$\Gamma$且此橢圓的焦點爲$C\left(\dfrac{1}{1-r^2},0\right)$與$P_1(1,0)$。（如圖六）



▲圖六

（二）橢圓的作圖法與光學性質。

我們連接$\overline{P_1P}$並作其中垂線L，則L與$\overline{CP}$的交點坐標即為S，當我們改變θ時，P 點會在圓C上移動，則交點S的軌跡就是上述的橢圓Γ，中垂線L即為橢圓Γ的切線（如圖七）。此外，由橢圓的光學性質知：若自P_1點以有向角θ的方向發射一道光束，此光束碰到橢圓Γ後反射的路徑會通過C點，透過這個性質我們作出結論於（三）。



▲圖七

（三）結論：當瓢蟲從原點O行走至P_1時，若瓢蟲以轉向角θ、行進公比r進行運動，則我們只要先畫出圓C（圓心爲$\left(\dfrac{1}{1-r^2},0\right)$，半徑爲$\dfrac{r}{1-r^2}$），並透過圓$C$與$P_1$繪出上述的橢圓$\Gamma$，設直線$\overleftrightarrow{P_1P_2}$與橢圓$\Gamma$交於$\boldsymbol{S}$點，則射線$\overrightarrow{CS}$與圓$C$的交點就是瓢蟲的收斂點。

四、各轉向點$P_n\left(n\in\mathbb{N}\right)$之關聯性的探討。

定理四：當瓢蟲以行進公比 $\boldsymbol{r}$、轉向角爲α行進時，各轉向點$P_n\left(n\in\mathbb{N}\right)$位於一個極坐標方程式爲$R=m\cdot r^{\frac{\theta-\pi}{\alpha}},m=\overline{OP}=\sqrt{\dfrac{1}{1-2r\cos\alpha+r^2}}$，定角爲$\cot^{-1}(\dfrac{\ln r}{\alpha})$之等角螺線上。

（一）當瓢蟲的轉向角θ爲任意角且轉向次數爲k（$k\in\{0\}\cup\mathbb{N}$）次，則瓢蟲所行進之終點坐標 $\boldsymbol{P_{k+1}}$ 爲$\begin{cases} x=\dfrac{1-r\cos\theta-r^{k+1}\cos(k+1)\theta+r^{k+2}\cos k\theta}{1-2r\cos\theta+r^2} \\ y=\dfrac{r\sin\theta-r^{k+1}\sin(k+1)\theta+r^{k+2}\sin k\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}\end{cases}$。

【證明】

已知$x=1+r\cos\theta+r^2\cos2\theta+\cdots+r^k\cos k\theta$

$y=r\sin\theta+r^2\sin2\theta+\cdots+r^k\sin k\theta$

由棣美弗定理可得$x+iy$

$$=1+r\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)+r^2\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)^2+\cdots+r^k\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)^k$$

$$=\frac{1-[r\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)]^{k+1}}{1-r\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)}=\frac{1-[r\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)]^{k+1}}{\left(1-r\cos\theta\right)-i\sin\theta}\times\frac{\left(1-r\cos\theta\right)+i\sin\theta}{\left(1-r\cos\theta\right)+i\sin\theta}$$

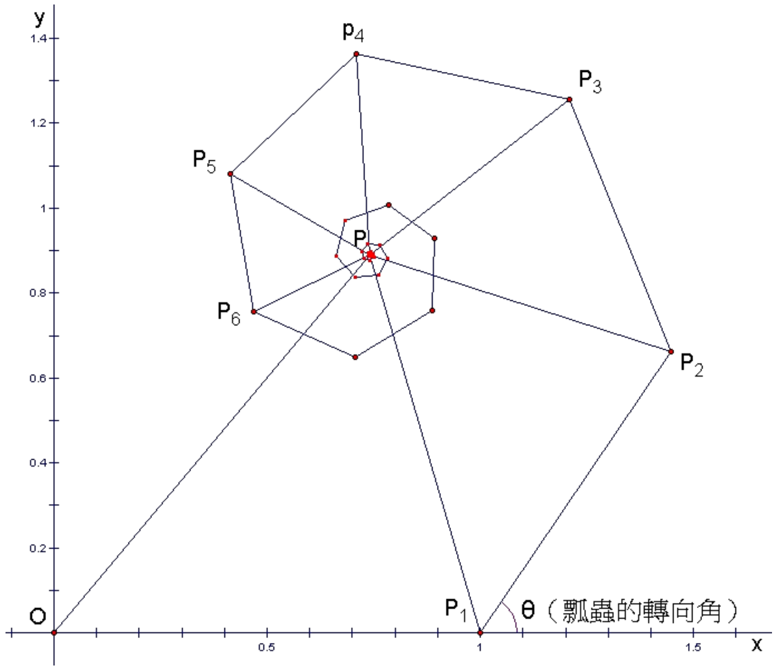
$$=\frac{\left(1-r^{k+1}\cos\left(k+1\right)\theta\right)\left(1-r\cos\theta\right)-\left(ir^{k+1}\sin\left(k+1\right)\theta\right)\left(ir\sin\theta\right)}{1-2r\cos\theta+r^2}$$

$$+i\times\frac{\left[\left(1-r^{k+1}\cos\left(k+1\right)\theta\right)\left(r\sin\theta\right)-\left(r^{k+1}\sin\left(k+1\right)\theta\right)\left(1-r\cos\theta\right)\right]}{1-2r\cos\theta+r^2}$$

$$\therefore x=\frac{1-r\cos\theta-r^{k+1}\cos\left(k+1\right)\theta+r^{k+2}\cos k\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}\qquad y=\frac{r\sin\theta-r^{k+1}\sin\left(k+1\right)\theta+r^{k+2}\sin k\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}$$

（二）**將瓢蟲的收斂點 P 與 O 點及各轉向點 $P_n\left(n\in\mathbb{N}\right)$ 連線，**

則 $\angle OPP_1=\angle P_1PP_2=\angle P_2PP_3=\cdots=\angle P_nPP_{n+1}=\cdots=$ 轉向角 θ 。（如圖八）



▲圖八

【證明】

由（一）知各轉向點 $P_n\left(n\in\mathbb{N}\right)$ 坐標為 $\begin{cases} x=\dfrac{1-r\cos\theta-r^n\cos n\theta+r^{n+1}\cos\left(\left(n-1\right)\theta\right)}{1-2r\cos\theta+r^2} \\ y=\dfrac{r\sin\theta-r^n\sin n\theta+r^{n+1}\sin\left(\left(n-1\right)\theta\right)}{1-2r\cos\theta+r^2} \end{cases}$

將瓢蟲各收斂點與各轉向點 $P_n\left(n\in\mathbb{N}\right)$ 連線後可得

$$\overline{PP_n}=\sqrt{\left[\frac{1-r\cos\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}-\frac{1-r\cos\theta-r^n\cos n\theta+r^{n+1}\cos\left(n-1\right)\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}\right]^2+\left[\frac{r\sin\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}-\frac{r\sin\theta-r^n\sin n\theta+r^{n+1}\sin\left(n-1\right)\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}\right]^2}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{r^n\cos n\theta-r^{n+1}\cos\left(n-1\right)\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}\right)^2+\left(\frac{r^n\sin n\theta-r^{n+1}\sin\left(n-1\right)\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{r^{2n}\left(1-2r\cos\theta+r^2\right)}{\left(1-2r\cos\theta+r^2\right)^2}}=r^n\sqrt{\frac{1}{1-2r\cos\theta+r^2}}=r^n\times\overline{OP}$$

$\Rightarrow\triangle OPP_1\sim\triangle P_1PP_2\sim\triangle P_2PP_3\sim\cdots\sim\triangle P_nPP_{n+1}\sim\cdots\left(SSS\text{相似}\right)$

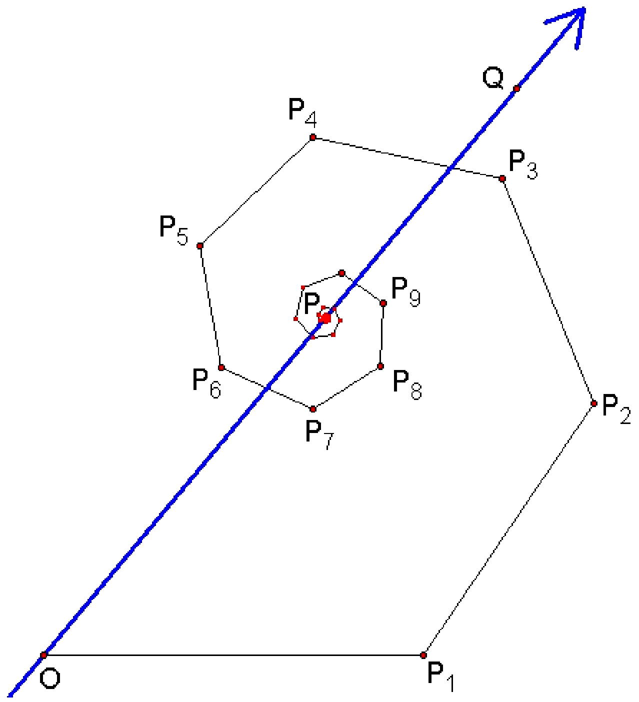
又 $\angle OPP_1 + \angle POP_1 = \angle PP_1P_2 +$ 轉向角 $\theta \Rightarrow \angle OPP_1 = \theta$

$\therefore \angle OPP_1 = \angle P_1PP_2 = \angle P_2PP_3 = \cdots = \angle P_nPP_{n+1}\left(n \in \mathbb{N}\right) = \cdots =$ 轉向角 θ

（三）**探究各轉向點 $P_n\left(n \in \mathbb{N}\right)$ 所在的曲線。**

【證明】

將原點 O 與瓢蟲之收斂點 P 連線，以 P 為極點，$\overrightarrow{PQ}$ 為極軸（如圖九），



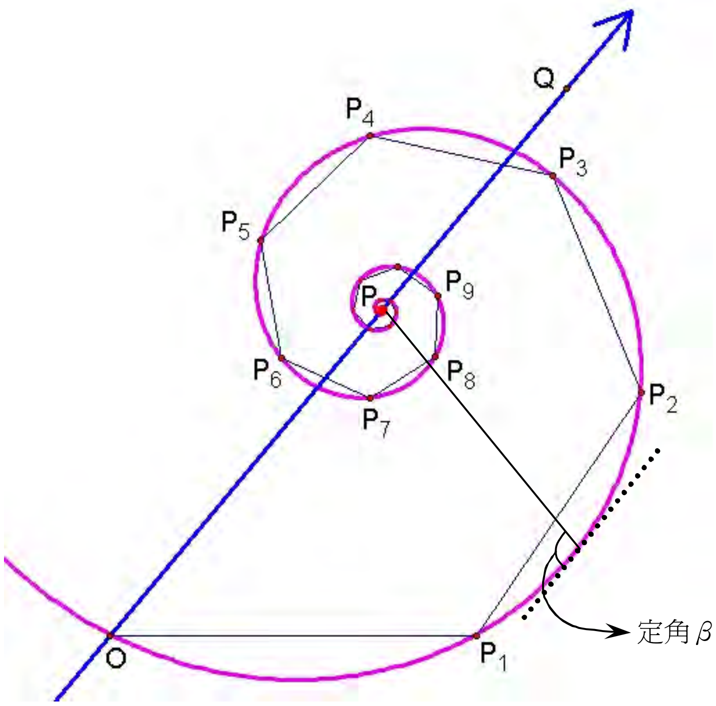
▲圖九

※為避免混淆，此處的轉向角 θ 改以 α 表示。

由（二）可得：$O\left(m,\pi\right)$、$P_1\left(mr,\pi+\alpha\right)$、$P_2\left(mr^2,\pi+2\alpha\right)$、…、$P_n\left(mr^n,\pi+n\alpha\right)$、…，

其中 $m = \overline{OP} = \sqrt{\dfrac{1}{1-2r\cos\alpha+r^2}}$ ，

我們發現上述各點恰位於一個極坐標方程式為 $R = m \cdot r^{\frac{\theta-\pi}{\alpha}}$ 之等角螺線上。



▲圖十

由等角螺線的標準式 $R=ae^{\theta\cot\beta}$（β 為螺線的定角）及點 $O(m,\pi)$ 可知

$a=me^{-\pi\cot\beta}$，故 $R=me^{(\theta-\pi)\cot\beta}=m\cdot r^{\frac{\theta-\pi}{\alpha}}\Rightarrow e^{(\theta-\pi)\cot\beta}=r^{\frac{\theta-\pi}{\alpha}}\Rightarrow(\theta-\pi)\cot\beta=\dfrac{\theta-\pi}{\alpha}\ln r$

$\Rightarrow$ 此等角螺線的定角 $\beta=\cot^{-1}(\dfrac{\ln r}{\alpha})$

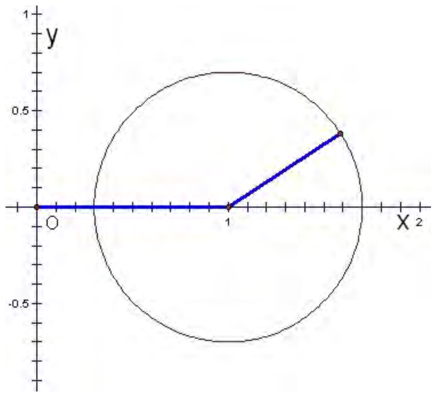
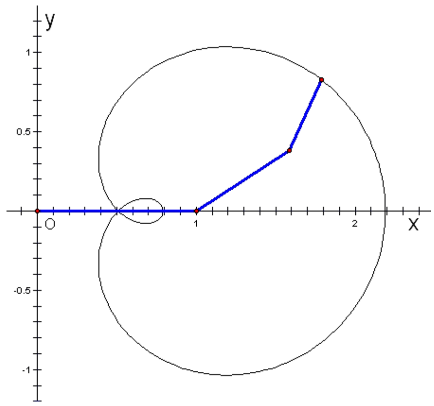
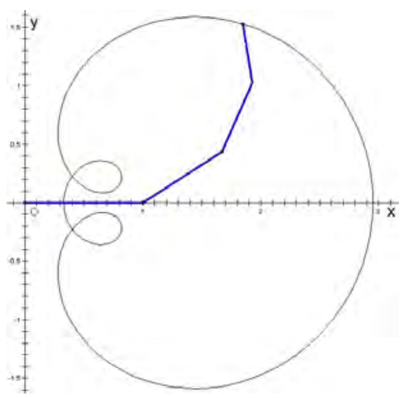
（四）結論：當瓢蟲以行進公比 r、轉向角為 α 行進時，各轉向點 $P_n\,(n\in\mathbb{N})$ 位於一個極坐標方程式為 $R=m\cdot r^{\frac{\theta-\pi}{\alpha}},m=\overline{OP}=\sqrt{\dfrac{1}{1-2r\cos\alpha+r^2}}$，定角為 $\cot^{-1}(\dfrac{\ln r}{\alpha})$ 之等角螺線上。

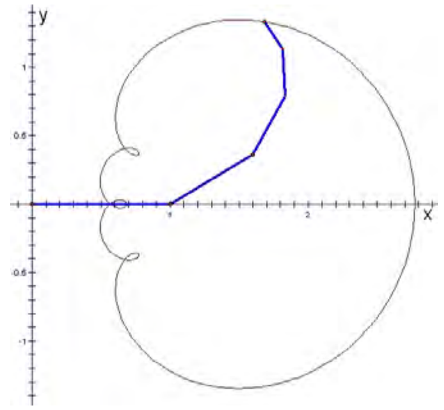
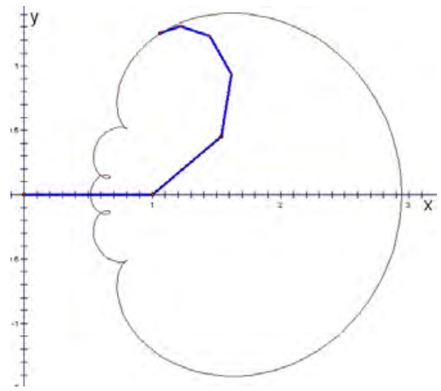
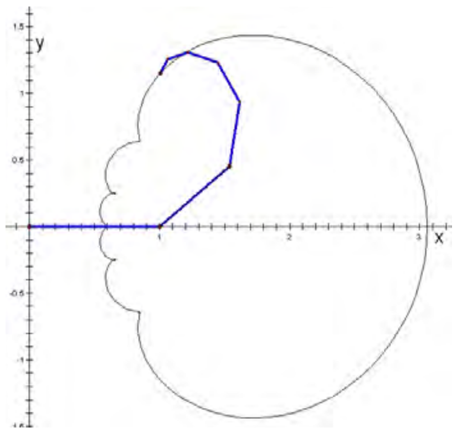
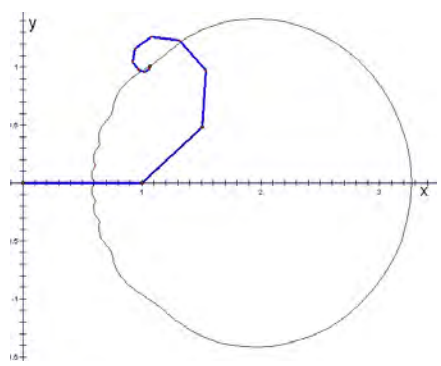
五、當機器瓢蟲轉向的次數爲k次$(k \in \mathbb{N})$且轉向角θ爲任意角時之終點軌跡的探討。

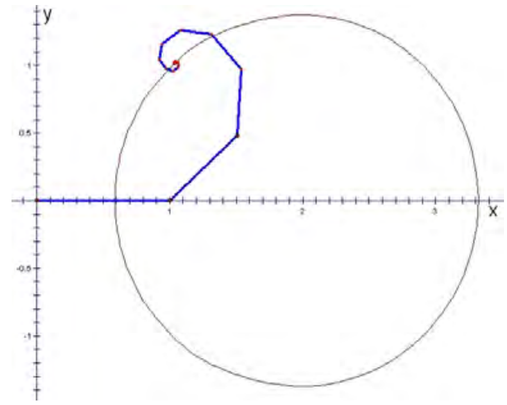
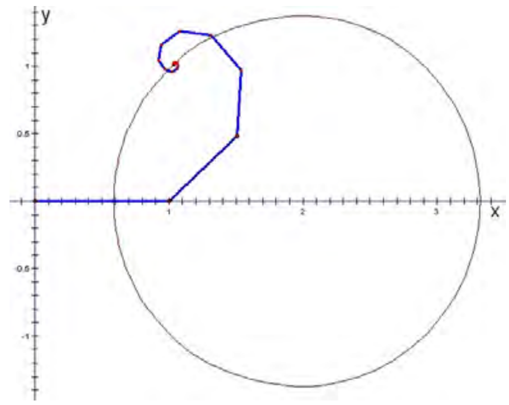
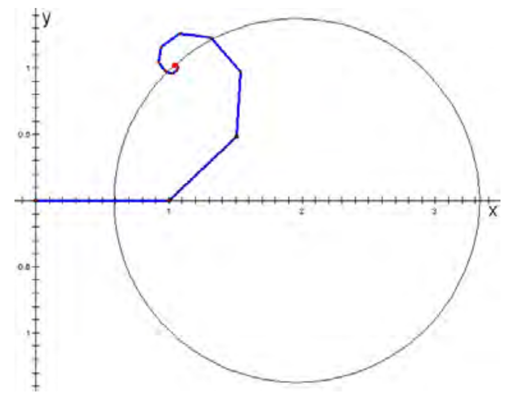
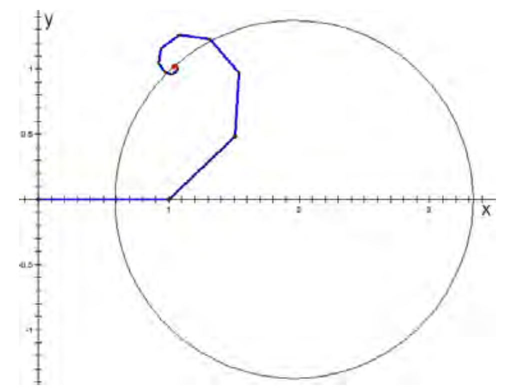
（一）承四－（一）可知：當瓢蟲的轉向角θ爲任意角且轉向次數爲k（$k \in \{0\} \cup \mathbb{N}$）次

則瓢蟲所行進之終點坐標 $\boldsymbol{P_{k+1}}$ 爲 $\begin{cases} x = \dfrac{1 - r\cos\theta - r^{k+1}\cos(k+1)\theta + r^{k+2}\cos k\theta}{1 - 2r\cos\theta + r^2} \\ y = \dfrac{r\sin\theta - r^{k+1}\sin(k+1)\theta + r^{k+2}\sin k\theta}{1 - 2r\cos\theta + r^2} \end{cases}$。

（二）瓢蟲的轉向次數$k = 1, 2, 3, 4, \cdots, 1000$時對應的圖形如下。

k 值	參數方程式	圖形
$k = 1$	$\begin{cases} x = 1 + r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$	
$k = 2$	$\begin{cases} x = 1 + r\cos\theta + r^2\cos 2\theta \\ y = r\sin\theta + r^2\sin 2\theta \end{cases}$	
$k = 3$	$\begin{cases} x = 1 + r\cos\theta + r^2\cos 2\theta + r^3\cos 3\theta \\ y = r\sin\theta + r^2\sin 2\theta + r^3\sin 3\theta \end{cases}$	

k 值	參數方程式	圖形
$k=4$	$\begin{cases} x=\sum_{n=0}^{4} r^n \cos n\theta \\ y=\sum_{n=1}^{4} r^n \sin n\theta \end{cases}$	
$k=5$	$\begin{cases} x=\sum_{n=0}^{5} r^n \cos n\theta \\ y=\sum_{n=1}^{5} r^n \sin n\theta \end{cases}$	
$k=6$	$\begin{cases} x=\sum_{n=0}^{6} r^n \cos n\theta \\ y=\sum_{n=1}^{6} r^n \sin n\theta \end{cases}$	
$k=10$	$\begin{cases} x=\sum_{n=0}^{10} r^n \cos n\theta \\ y=\sum_{n=1}^{10} r^n \sin n\theta \end{cases}$	

k 值	參數方程式	圖形
$k=15$	$\begin{cases} x=\sum_{n=0}^{15} r^n \cos n\theta \\ y=\sum_{n=1}^{15} r^n \sin n\theta \end{cases}$	
$k=20$	$\begin{cases} x=\sum_{n=0}^{20} r^n \cos n\theta \\ y=\sum_{n=1}^{20} r^n \sin n\theta \end{cases}$	
$k=100$	$\begin{cases} x=\sum_{n=0}^{100} r^n \cos n\theta \\ y=\sum_{n=1}^{100} r^n \sin n\theta \end{cases}$	
$k=1000$	$\begin{cases} x=\sum_{n=0}^{1000} r^n \cos n\theta \\ y=\sum_{n=1}^{1000} r^n \sin n\theta \end{cases}$	

（三）由上述各圖可看出當瓢蟲的轉向次數k越來越大時，其終點所形成的軌跡越來越趨近於一個圓。

當$k \to \infty$時，瓢蟲的終點坐標$(x, y)=$

$$\left(\lim_{k\to\infty}\left[\frac{1-r\cos\theta-r^{k+1}\cos(k+1)\theta+r^{k+2}\cos k\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}\right],\lim_{k\to\infty}\left[\frac{r\sin\theta-r^{k+1}\sin(k+1)\theta+r^{k+2}\sin k\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}\right]\right)$$

$=\left(\dfrac{1-r\cos\theta}{1-2r\cos\theta+r^2},\dfrac{r\sin\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}\right)$，其圖形也就是先前所推導的

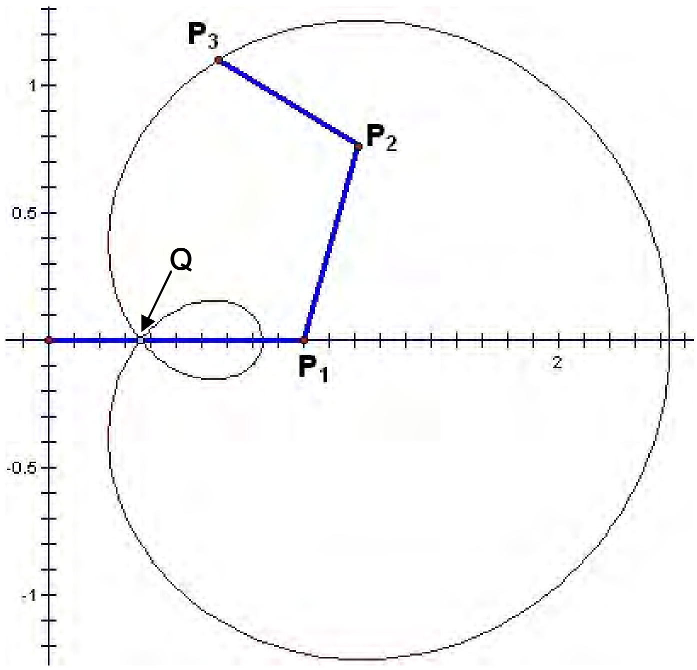
圓$C:\left(x-\dfrac{1}{1-r^2}\right)^2+y^2=\left(\dfrac{r}{1-r^2}\right)^2$

（四）當轉向次數$k=2$時瓢蟲所行進的軌跡探討。

定理五：當轉向次數$k=2$時瓢蟲行進之終點坐標$P_3\begin{cases}x=1+r\cos\theta+r^2\cos 2\theta\\ y=r\sin\theta+r^2\sin 2\theta\end{cases}$的軌跡爲一蚶線，且其經平移後的極坐標方程式爲$R=r+2r^2\cos\theta$。

【證明】

當$k=2$時由圖十一可知$P_3(x,y)=\left(1+r\cos\theta+r^2\cos 2\theta, r\sin\theta+r^2\sin 2\theta\right)$



▲圖十一

令 $y = r\sin\theta + r^2\sin 2\theta = r\sin\theta(1+2r\cos\theta) = 0$

$\therefore \sin\theta = 0$ 或 $\cos\theta = -\dfrac{1}{2r}$

當 $\dfrac{1}{2} \le r < 1$ 時，$x = 1+r+r^2$，$1-r+r^2$ 或 $1-r^2$

當 $0 < r < \dfrac{1}{2}$ 時，$x = 1+r+r^2$，$1-r+r^2$

由於此圖形為 $r = 0.8$ 之示意圖，故上述曲線之結點 Q 坐標為 $\left(1-r^2, 0\right)$

將原圖形向左平移 $1-r^2$ 單位（如圖十二），可得 A 點座標為

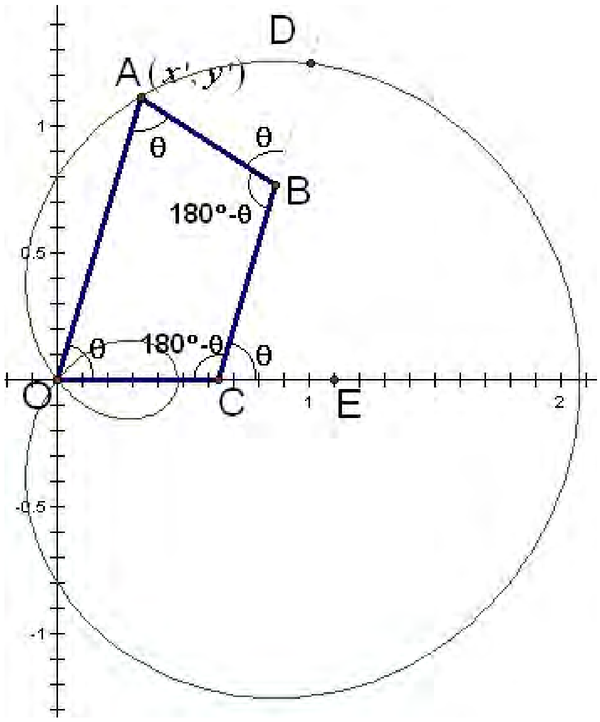
$$A\ \begin{cases} x' = x-\left(1-r^2\right) = r^2 + r\cos\theta + r^2\cos 2\theta \\ y' = y = r\sin\theta + r^2\sin 2\theta \end{cases}$$

由圖十二可得：

$\overline{CO} = 1-\left(1-r^2\right) = r^2$，$\overline{BC} = r$，$\overline{AB} = r^2$，$\angle BCE = \angle DBA =$ 轉向角 $= \theta$

$\therefore \angle BCO = \angle ABC = 180° - \theta \Rightarrow$ 四邊形 $ABCO$ 為等腰梯形，

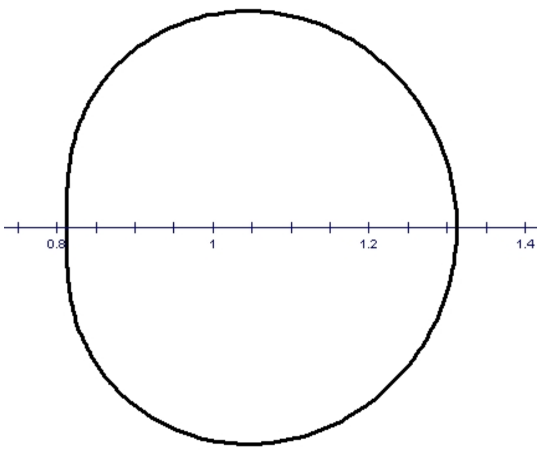
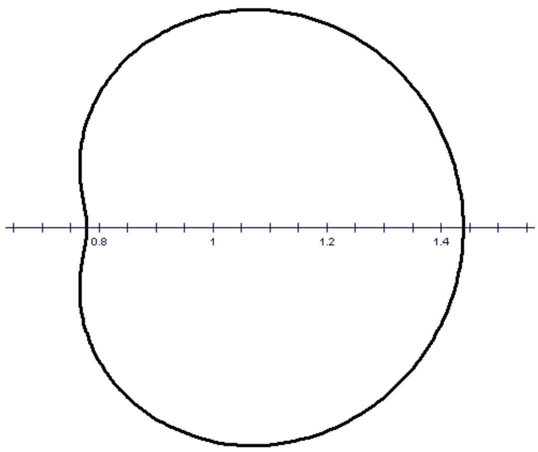
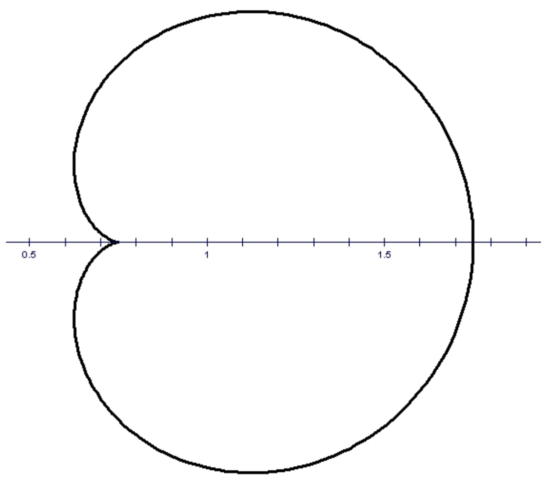
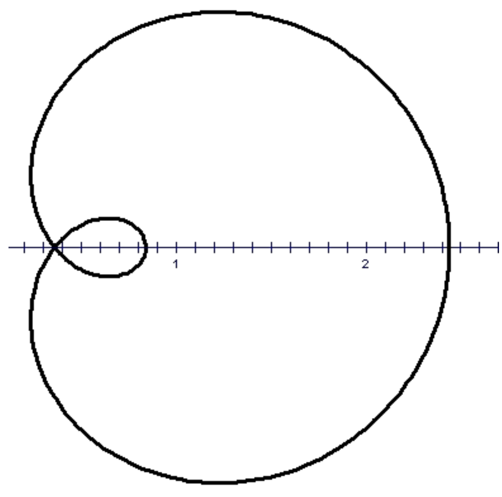
故 $\overline{AO} = R = r + 2r^2\cos\theta$，故上述曲線為基圓半徑為 r^2、基點為 O 之蚶線且其極坐標方程式為 $R = r + 2r^2\cos\theta$。



▲ 圖十二

（五）由上述可得當轉向次數$k=2$時經平移後之蚶線方程式為：$R=r+2r^2\cos\theta$

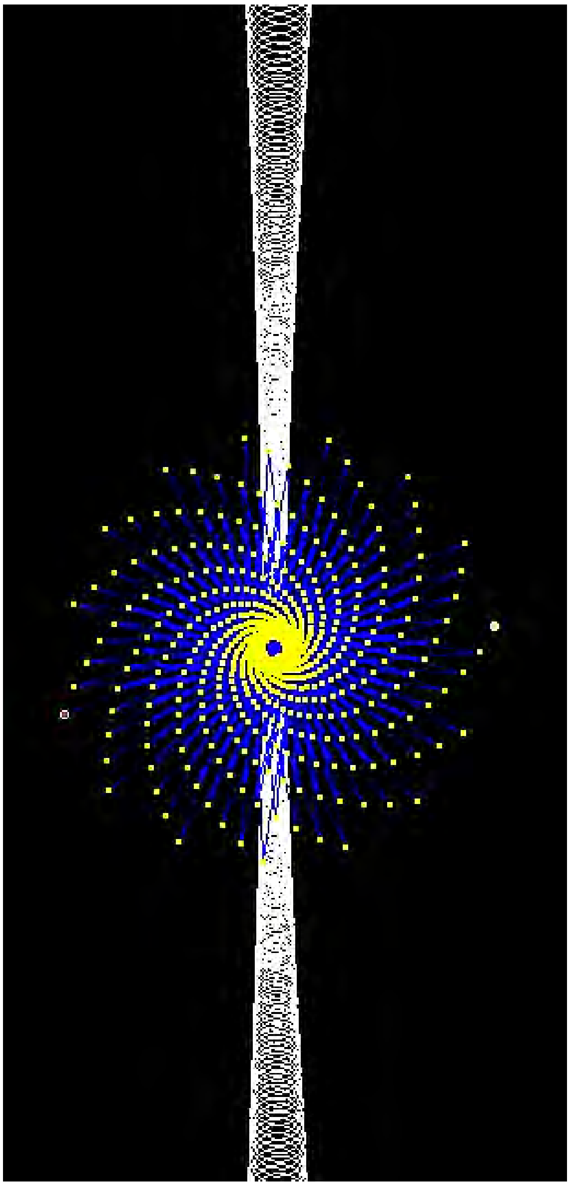
以下將討論當r於各區間所對應的圖形：

r值	$0<r\le\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}<r<\frac{1}{2}$
此時蚶線所代表的圖形	▲凸蚶線	▲凹蚶線
r值	$r=\frac{1}{2}$（此時極坐標方程式：$R=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\theta$）	$\frac{1}{2}<r<1$
此時蚶線所代表的圖形	▲心臟線	▲蚶線

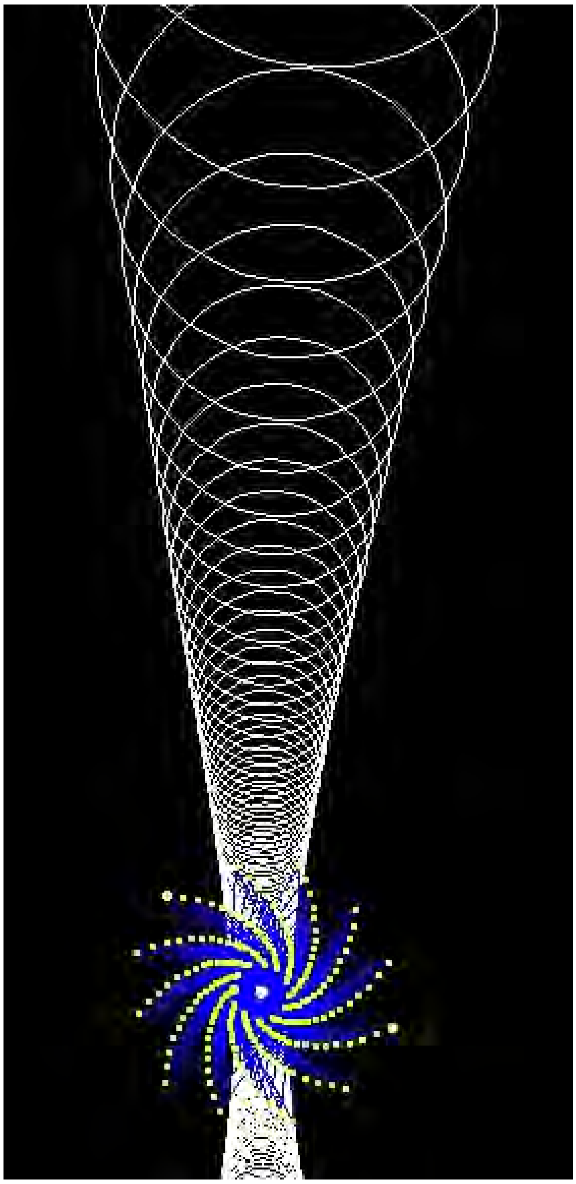
六、展示當機器瓢蟲行進公比 $r \to 1^-$，$r = 1$，$r \to 1^+$，**轉向角 θ 爲任意角，且轉向次數爲 k 次時（$k \in \mathbb{N}$），瓢蟲的終點坐標所形成之軌跡。**

研究的歷程中真的讓我們理解所謂「數學乃科學之母」，在本研究中我們發現如下：

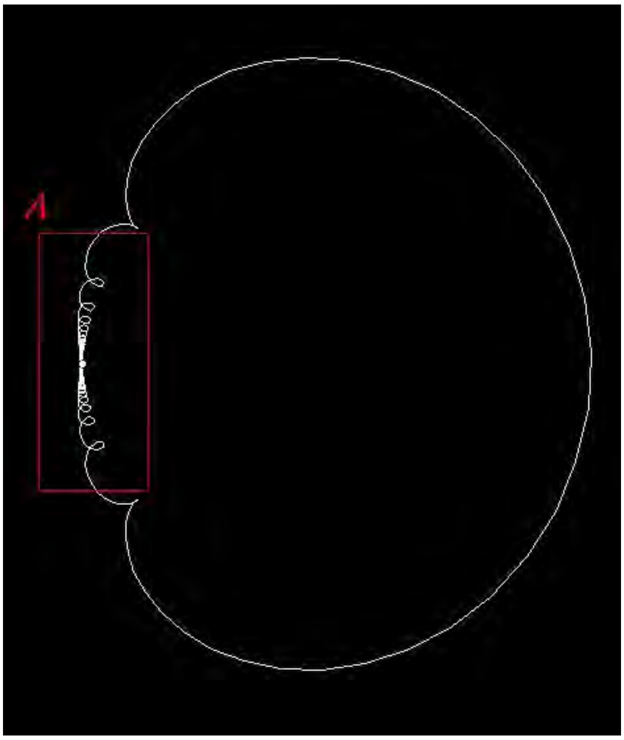
（一）瓢蟲的行進公比 $r \to 1^-$，我們取轉向次數爲 $k = 500$ 次時，其瓢蟲於各 θ 角所對應的終點坐標所形成的軌跡圖形呈現如下：當 $r = 0.996$，如圖十三與圖十四之黃色部分爲各轉向點，白色漩渦部分爲瓢蟲於各轉向角 θ 所對應的終點軌跡，其皆截自於圖十五中的 A 部分，你是否覺得這些圖形像似物理學上的黑洞（如圖十六）呢？



▲ 圖十三



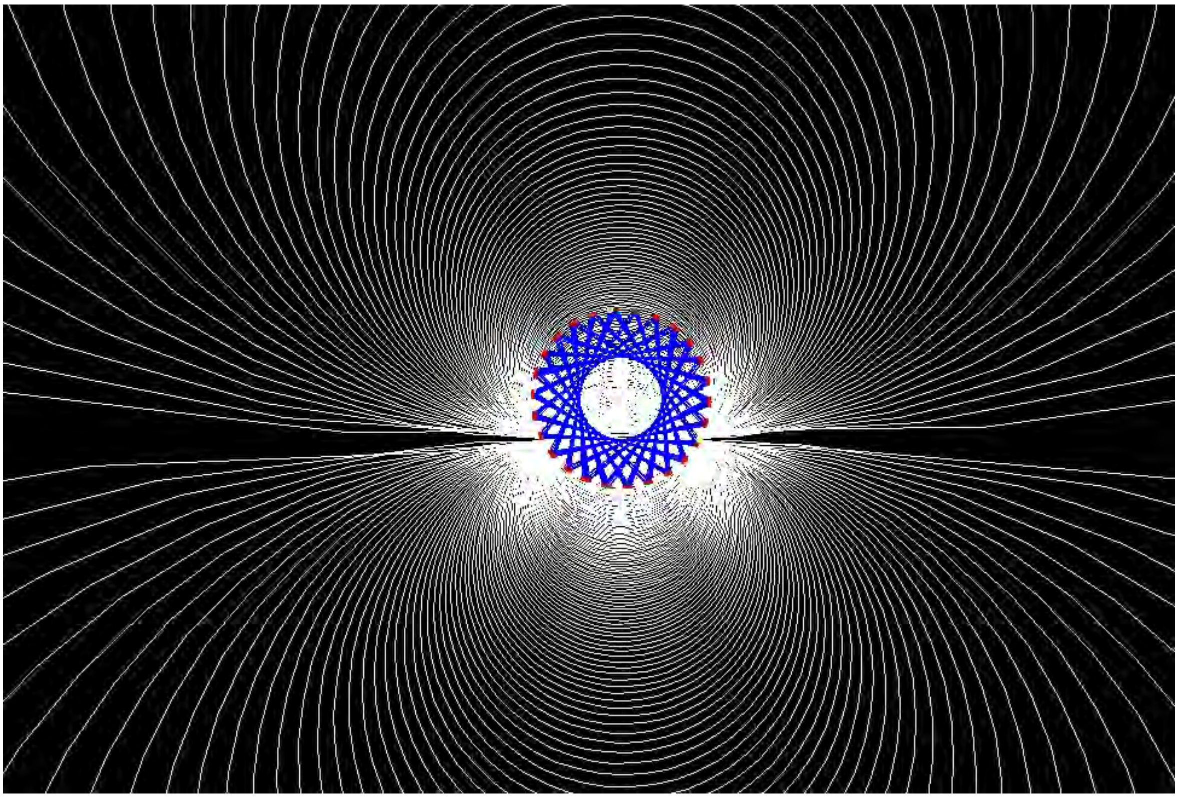
▲ 圖十四



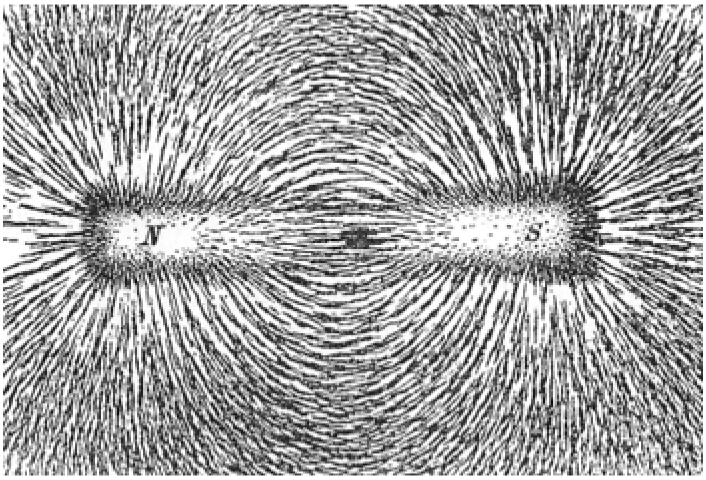
▲ 圖十五

▲ 圖十六 黑洞圖形

（二）瓢蟲的行進公比 r＝1，我們取轉向次數爲 $k=200$ 次時，各 θ 角所對應的終點坐標所形成的軌跡圖形（如圖十七），你是否覺得其圖形像似物理學上的磁力線（如圖十八）呢？

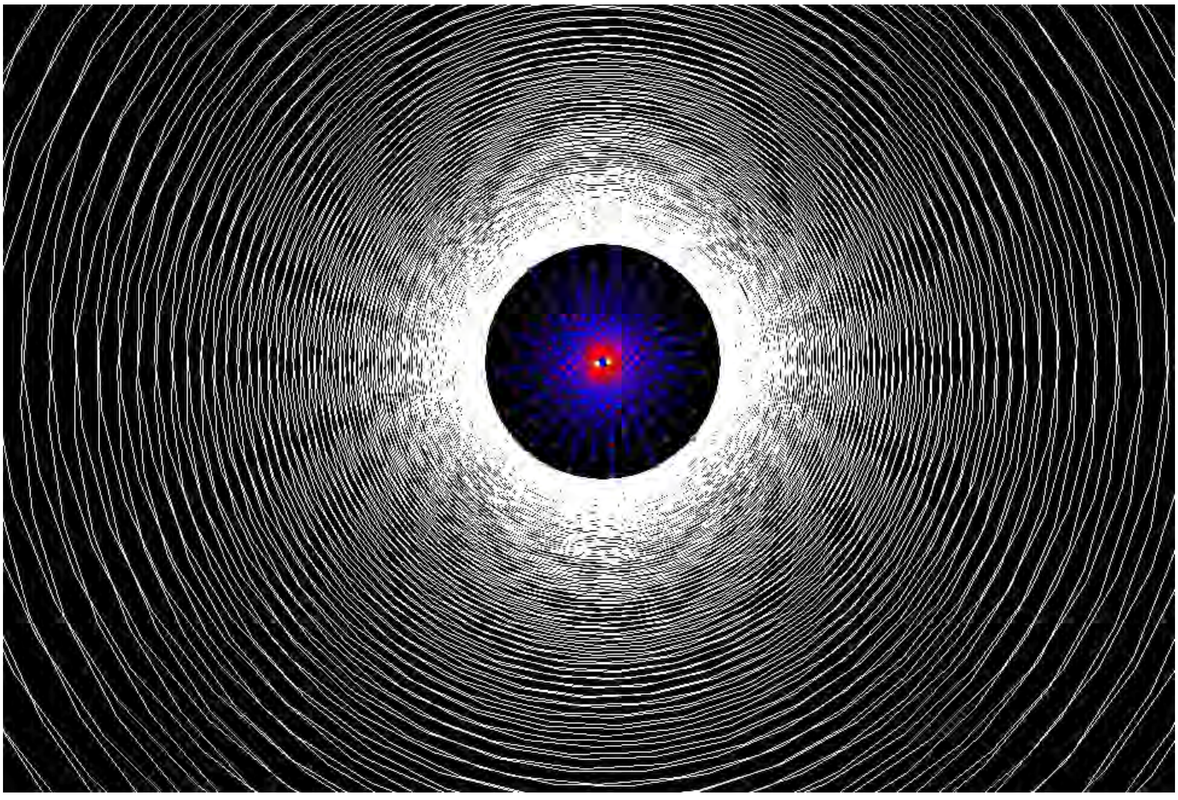


▲ 圖十七



▲圖十八

（三）瓢蟲的行進公比 $r=1.01$，我們取轉向次數為 $k=300$ 次時，瓢蟲於各 θ 角所對應的終點坐標所形成的軌跡圖形（如圖十九）。當遠看時，是否覺得其圖形很像蜘蛛呢？



▲ 圖十九

伍、研究結果架構圖

研究結果 三

將瓢蟲的第一、二個轉向點P_1、P_2連線，圓心C與收斂點P連線，則兩直線之交點S的軌跡形成一個長軸長為圓C半徑$=\dfrac{r}{1-r^2}$的橢圓，且此橢圓的焦點為$P_1(1,0)$與$C\left(\dfrac{1}{1-r^2},0\right)$。

研究結果 二

當機器瓢蟲的轉向角θ為任意角時，各收斂點P恰形成圓C。

研究結果 一

當機器瓢蟲的轉向角為$\dfrac{360°}{N}(N\in\mathbb{N},N\geq 3)$時，各收斂點均位於圓$C$上。

$k\to\infty$

高中數學 —
機器瓢蟲等比繞行之原題

呈現當機器瓢蟲轉向的次數為k次$(k\in\mathbb{N})$且轉向角θ為任意角時之終點軌跡圖形。

研究結果 五

當機器瓢蟲轉向次數$k=2$時，圖形為一蚶線且其經平移後的極座標方程式為

$$R=r+2r^2\cos\theta$$

研究結果 四

當瓢蟲以行進公比r、轉向角為α行進時，各轉向點$P_n(n\in\mathbb{N})$位於一個極坐標方程式為

$$R=m\cdot r^{\frac{\theta-\pi}{\alpha}}$$

$$m=\overline{OP}=\sqrt{\frac{1}{1-2r\cos\alpha+r^2}}$$

，定角為$\cot^{-1}(\dfrac{\ln r}{\alpha})$之等角螺線上。

研究結果 六

展示行進公比$r\to 1^-$時其圖形像似黑洞、$r=1$時其圖形像似磁力線、$r\to 1^+$其圖形像似蜘蛛的圖形並猜測其圖形與自然界應有深切關係。

陸、研究結果

一、當機器瓢蟲的轉向角爲$\dfrac{360^\circ}{N}\left(N\in\mathbb{N},N\geq 3\right)$時，各收斂點均位於圓$C$上。

（圓C ：$\left(x-\dfrac{1}{1-r^2}\right)^2+y^2=\left(\dfrac{r}{1-r^2}\right)^2$ ）

二、當機器瓢蟲的轉向角θ爲任意角時，各收斂點P恰形成圓C 。

三、當瓢蟲從原點O行走至第一個轉向點P_1時，若瓢蟲以轉向角θ 、行進公比r進行運動，則我們只要先畫出圓C（圓心爲$\left(\dfrac{1}{1-r^2},0\right)$，半徑爲$\dfrac{r}{1-r^2}$），並繪出以$C$與$P_1$爲焦點，$\dfrac{r}{1-r^2}$爲長軸長的橢圓$\Gamma$，若自$P_1$以有向角$\theta$射出一光線，當此光線射到橢圓$\Gamma$後，反射光的相反射線與圓$C$的交點就是瓢蟲的收斂點。

四、當瓢蟲以行進公比r、轉向角爲α行進時，各轉向點$P_n\left(n\in\mathbb{N}\right)$位於一個極坐標方程式爲$R=m\cdot r^{\frac{\theta-\pi}{\alpha}},m=\overline{OP}=\sqrt{\dfrac{1}{1-2r\cos\alpha+r^2}}$，定角爲$\cot^{-1}(\dfrac{\ln r}{\alpha})$之等角螺線上。

五、當機器瓢蟲轉向次數$k=2$時，圖形爲一蚶線且其經平移後的極座標方程式爲$R=r+2r^2\cos\theta$，當行進公比$0<r\leq\dfrac{1}{4}$時其對應的圖形爲凸蚶線、$\dfrac{1}{4}<r<\dfrac{1}{2}$爲凹蚶線、$r=\dfrac{1}{2}$爲心臟線、$\dfrac{1}{2}<r<1$爲蚶線。

六、展示行進公比$r\to 1^-$時其圖形像似黑洞、$r=1$時其圖形像似磁力線、$r\to 1^+$其圖形像似蜘蛛的圖形並猜測其圖形與自然界應有深切關係。

柒、討論與推廣

除了以上所述之討論，亦可繼續做更深入的延伸及推廣如下：

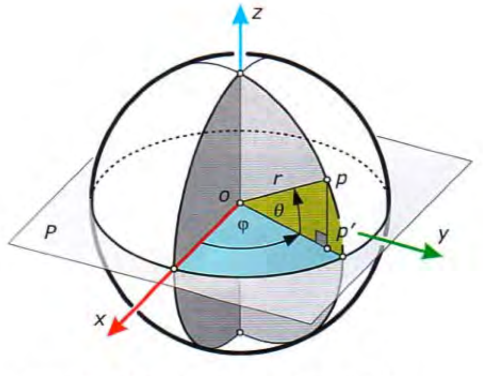
一、由討論結果可知 k 為不同值時有其對應圖形。當 $k=2$ 時，其圖形為「蚶線」，而當 k=2,3,4,5,6 ⋯時所形成圖形間是否有關聯？

二、當行進公比 $r \to 1^-$ 、 $r=1$ 、 $r \to 1^+$ 時其圖形像似黑洞、磁力線、蜘蛛等圖形，而其圖形與自然界的關聯性，則有待未來研究。

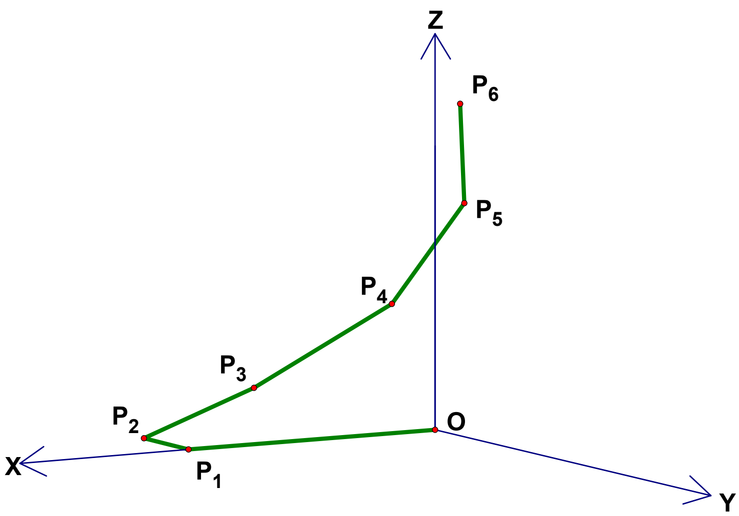
三、本研究原為二維平面之討論，倘若將瓢蟲之行進路線推廣至三維空間，我們定義：

φ ：方位角度座標值（$0 \le \varphi \le 2\pi$）；從 X 軸逆時針旋轉角

θ ：仰角角度座標值$\left(-\dfrac{\pi}{2} \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}\right)$；從 XY 面向上旋轉角



則數對(φ,θ)表示瓢蟲沿著方位角 φ、仰角 θ 的方向行走，如：瓢蟲從原點 O 向$(0°,0°)$前進 1 單位後來到點 P_1；再以(φ,θ)方向前進 r 單位來到點 P_2；再以$(2\varphi,2\theta)$方向前進 r^2 單位來到點 P_3；再以$(3\varphi,3\theta)$方向前進 r^3 單位來到點 P_4；……，繼續不斷，如下圖所示，每次移動距離都是前一次的 r 倍，故這隻機器瓢蟲最後幾乎停止於一點 P，則點 P 的坐標及其形成的軌跡為何？若轉向次數 k 為有限次時，瓢蟲的終點 P_{k+1} 所形成的軌跡為何？相關問題則有待未來研究。



捌、參考資料及其他

一、趙文敏（民 77）。大學微積分。台北市：書銘。

二、趙文敏（民 79）。蚶線，科學月刊第 21 卷第 7 期。（557-560 頁）。

三、國立台灣師範大學－陳創義教授個人網頁 http://math.ntnu.edu.tw/~cyc/。

四、余文卿（民 98）。高級普通中學數學第一冊（4 版）。台南市：翰林。

五、余文卿（民 88）。高級普通中學數學第二冊（1 版）。新北市：龍騰。

六、李虎雄（民 95）。高級普通中學數學第四冊（1 版）。新北市：康熹。

七、常庚哲（民 90）。神奇的複數－如何利用複數解中學數學難題。台北市：九章。

八、趙文敏。等角螺線及其他，科學月刊第 20 卷第 9、10 期。

九、毛爾（民 89）。毛起來說 e。台北市：天下遠見。

十、圖十六：節錄自網路－對撞機引發恐慌 掉進黑洞將會發生什麼事。(2008)

http://tech.china.com/zh_cn/science/universe/1030/20080914/15086873.html

十一、圖十八：節錄自網路－8.022 / ESG.8022 物理學 II：電磁學。(2006)

http://www.core.org.cn/OcwWeb/Physics/8-022Fall-2006/CourseHome/index.htm

十二、第 29 頁討論與推廣之三－球坐標圖形：節錄自網路－空間球坐標系統。(2010)

http://moodle.ncku.edu.tw/mod/resource/view.php?id=20050

【評語】040410

數學科展重視數學思維及數學方法。以本作品而言，其基本的數學舞台是複數而不是實數。整個等比繞行現象就在展示「複數幾何級數之部份和所形成的折線」，而蚶線、圓之內、擺線等都可視為由幾何級數之和所形成的複數曲線。以上各事都可以透過高一所學的複數來表達。