中華民國第 51 屆中小學科學展覽會

作品說明書

高中組　數學科

第三名

040409

Shoot？or not？

—以全決策盒分析循環賽局之最佳策略

學校名稱：國立高雄師範大學附屬高級中學

作者：	指導老師：
高一 平震傑	張彥平 歐志昌

關鍵詞：最佳策略、Nash 平衡解、全決策盒

摘要

物價飛漲時，商家會用什麼方式因應，以維持或增加客源? 我們將此想法，轉換為循環槍手賽局，針對其策略進行探討。遊戲規則：槍手依序輪流開一槍，若自己的靶被擊中就必須退出，最後留在遊戲中的為勝利者。若參考槍手們的命中率，並選擇射擊對象或不射擊，則如何決策才能讓自己的勝率最高?

先運用**樹狀圖**及**幾何**的方式找出兩人槍手遊戲的 Nash 平衡解。再考慮三人**規範式**槍手遊戲：選定一策略，只要槍手組合不變，其策略亦不變。給定三槍手的命中率，可用**機率轉移矩陣**及**全決策盒**找出最佳策略。而槍手的命中率或過去行動訊息缺乏時，可運用**條件機率**及**截面**的概念，找出其不完美最佳策略。

推廣到**一般化賽局**的全決策空間，試提供賽局理論一個新的分析方法。

壹、研究動機

近日來油價、物價飛漲，報載有一家量販店推出了35元的雞腿便當吸引客源。而我們感到好奇:物價上漲時，有三家販售相同物品的廠商，若您是其中一家，會考慮漲價嗎？

在一本有關賽局理論的書《剪刀石頭布》中，有一道有趣的題目，寫成遊戲的形式是這個樣子的：有三個人，打算來一場打靶戰，遊戲規則是: **三位槍手各有一個靶，若自己的靶被擊中就必須退出遊戲，而三個人依序輪流開一槍，自行選擇要瞄準的靶，直到遊戲中剩一人為止(此人即為勝利者)。**這個遊戲和我們遇到的漲價問題很像；當其中一家漲價，其他兩家維持原價，則現實的問題是--顧客流失，這種情形如同被其他兩個槍手攻擊一般，很有可能被市場淘汰，剩其他兩家競爭；當然，業者也可以反向操作，就是降價，或是針對某一家的特有商品調降價格，相當於攻擊其他兩家或是只攻擊某一家……若我們身為業者，該降價嗎？還是漲價呢？書中說:**若根據統計，先射擊的那位槍手只有三分之一機會打中目標，第二個射擊的有三分之二機會打中目標，最後射擊的則是彈無虛發。如果你是槍法最差的那個(即先射擊者)，你該對誰開槍?**而它提出的解答是: **對空鳴槍就好!**

然而，我們對此感到疑惑，**命中率較差的人，真的只能等待結果嗎? 三個槍手彼此之間命中率大小的差距，對結果沒有影響嗎?若三個人當中，沒有人百發百中，那其他槍手的策略會改變嗎？**是否有更完善且精確的方法可以探討這個問題? 因此，我們決定對這個問題做更深入的探討，並提出一些在討論賽局的時候，有用且新穎的思考模式。

貳、研究目的

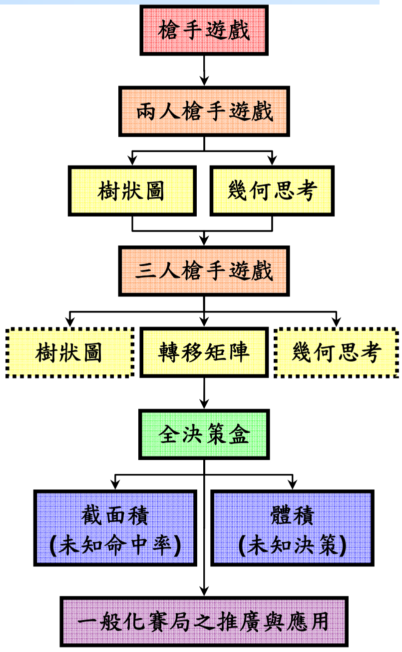
我們閱讀過賽局理論的相關書籍後，發現這個問題的解答並未經過嚴謹的討論，所以我們想要進行更深入的探究，以新的方式分析賽局問題。本研究運用全決策盒來分析槍手遊戲，並將此討論方式推廣至一般化賽局的應用。基於此研究目的，擬探討以下研究問題：

一、 探討兩人槍手遊戲中，槍手們的最佳策略組合及勝率。

二、 探討三人槍手遊戲中，槍手們的最佳策略組合及勝率。

三、 探討不完全信息遊戲中，槍手的不完美最佳策略。

四、 探討決策空間對於一般化賽局的用途及延伸。



參、研究器材

Wxmaxima、Geogebra、Mathematica、樹狀圖、吸收馬可夫鏈。

肆、名詞定義

一、**槍手**: 我們以正體大寫英文字母表示(A,B,C)。並假設這些槍手都是明智的，會選擇對自己有最大勝率的決策，

二、**槍手命中率**: 槍手射擊他人的靶，且命中使他人退出的機率，以槍手相對應的斜體小寫英文字母表示$(a,b,c)(0<a,b,c\le 1)$。為方便敘述，槍手 A 射擊 B 的靶，我們簡述為 A 射 B。並以$\bar{a},\bar{b},\bar{c}$表示槍手沒有命中的機率($\bar{a}=1-a,\ \bar{b}=1-b,\ \bar{c}=1-c$)。

三、**策略(決策)**: 槍手思考後的各種行動，以$\overline{\mathrm{A}}$表 A 的策略。如:A 射 B、A 射 C 或 A 不射。

四、**勝率**: 槍手得勝(其他人退出，只剩下槍手一人)的機率。在兩人槍手賽局，選擇策略 s 時之勝率計為P_s；三人槍手賽局在條件 S 下，槍手 X 的勝率，我們記為 $P_{Xwin}(S)$。

五、**勝率分布圖**: 在直角座標系中，紀錄每一個行動後之勝率分布(P_{Awin}, P_{Bwin})。

六、**最佳策略**: 槍手遊戲中，在同一前提下，槍手有可能選擇的策略中，勝率較高者。並以$\overline{\mathrm{X}}^{\circ}$表示槍手 X 的最佳策略。例如：兩人槍手遊戲中，在槍手 A 射 B 的前提下，不論命中率如何，槍手 B 選擇射 A 的勝率，會大於選擇不射的勝率；故在槍手 A 射 B 時，槍手 B 射 A 為槍手 B 的最佳策略。

七、**Nash 平衡解:** 在兩人槍手遊戲中，當槍手 A 採用策略α時，策略β為槍手 B 之最佳策略；當槍手 B 採用策略β時，策略α為槍手 A 之最佳策略，則此時稱(α,β)為 A,B 之 Nash 平衡解。

八、**最佳策略組合**: 在三人規範式槍手遊戲中，每個槍手各自的最佳策略所形成的組合。三人槍手遊戲之最佳策略組合，以符號$(\overline{\mathrm{A}}^{\circ},\overline{\mathrm{B}}^{\circ},\overline{\mathrm{C}}^{\circ})$表示。我們並將每一種可能情況下得到的**最佳策略組合編碼**，以方便敘述。

九、**不完美最佳策略**: 當槍手沒有完全信息(例如:槍手們的命中率或過去槍手們的決策)時，有最大機率成為槍手最佳策略者，稱之為**不完美最佳策略**。根據成為槍手最佳策略的機率比例所做的決策，則稱為不完美最佳混合策略。

十、**機率轉移矩陣**: 以 M(X×Y)表示 X 射 Y 這個動作對應到的機率轉移矩陣。

十一、**決策盒**: 在空間坐標系中，將槍手的命中率a、b、c 對應到x、y、z 軸；因$\{(a,b,c)|0<a,b,c\le 1\}$，故當以三坐標軸為稜，此稜長為 1 的立方體即為**決策盒**。

十二、**決策臨界面:** 在決策盒中，某槍手選擇兩不同策略後勝率值大小的分界面。如果是槍手們兩不同策略組合成為最佳策略所佔的命中率範圍之間的分界面，則稱決策組合臨界面。

十三、**全決策盒**：槍手遊戲中，一組槍手的命中率會對應到一個最佳策略組合。我們將所有滿足此最佳策略組合的命中率值(a,b,c)均描繪於決策盒中；此決策盒即為三人槍手遊戲之全決策盒。

伍、研究過程

一、前提假設、預備定理及預備知識:

(一) 遊戲規則:

設有 n 個人，照固定的順序輪流射擊，每個人都能自行決定射擊對象或不射擊，直到剩下一個人在遊戲中為止，此人即成為勝利者。

(二) 前提假設:

賽局進行時槍手們的命中率不會改變。本賽局具有齊次馬可夫性質。(當兩事件只有時間點不同，其餘條件(玩家、命中率)皆相同時，兩事件發生的機率相同。)

二、兩人槍手遊戲的最佳決策探討:

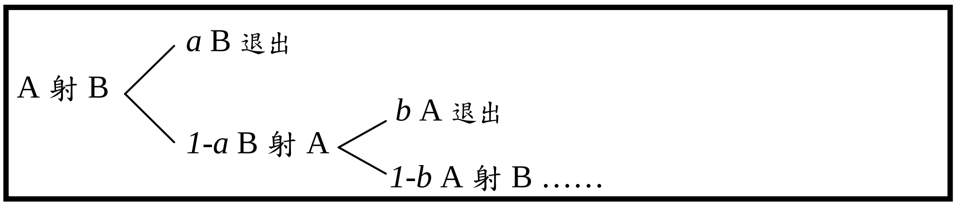
槍手有 A 與 B 兩個人，輪流射擊，每個人都能選擇射擊(Shoot)或者不射擊(None)，直到剩下一個人在遊戲中，此人即成為勝利者。賽局進行時，槍手在不同的時間點皆能選擇不同的策略，我們將其策略(S：射擊；N：不射擊)依順序寫成策略集(如：{S,N,S,S,N,S,S...})，此種策略集有無限多種可能。槍手 A、B 該選哪一種策略來使自己的勝率較高?

為進行以下討論，我們定義策略 α ={S, T_2, T_3, T_4, T_5…}、策略 β = {N, T_2, T_3, T_4, T_5…}、策略 γ = { T_2, T_3, T_4, T_5…}，其中 $T_i \in \{S, N\}$ ，$i \in \{1,2,3...\}$ ，並假設策略 I 為「玩家在每次輪到時都選擇射擊」(即:{S,S,S,S,S…}簡稱 I)。

(一) 策略選擇的勝率比較:

1. A 選擇 α 、B 選擇 I :

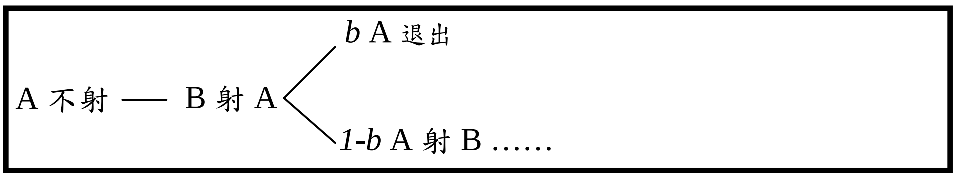
此賽局的發展，我們能畫成樹狀圖的形式：



利用馬可夫性質及上圖知：

$$P_\alpha\text{(Awin|A 先射)} = 1 \cdot a + \bar{a}\,\bar{b}\,P_\gamma\text{(Awin|A 先射)}$$

2. A 選擇 β 、B 選擇 I :



利用馬可夫性質及上圖知：

$$P_\alpha\text{(Awin|A 先射)} = 0 \cdot b + \bar{b}\,P_\gamma\text{(Awin|A 先射)}$$

由 **1**、**2** 的討論知 $a+\bar{a}\bar{b}P_{\gamma}-\bar{b}P_{\gamma} = a+\bar{b}P_{\gamma}(\bar{a}-1) = a(1-\bar{b}P_{\gamma})\geq 0$

則當 B 選擇 I 時，A 選擇策略 α 較策略 β 佳。……(*)

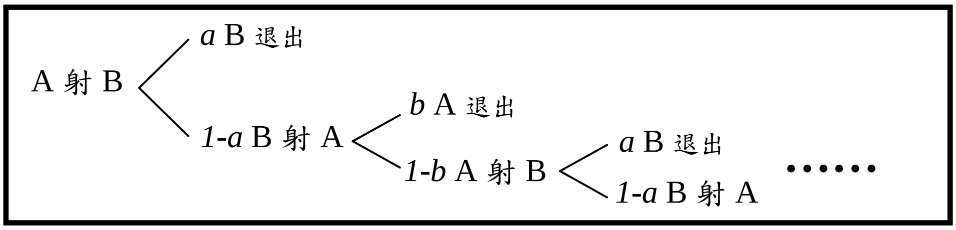
利用以上結果，我們可以得到以下結果：

(1)當 B 選擇策略 I 時，對於 A 而言，策略 I 為其最佳策略。
(2)當 A 選擇策略 I 時，對於 B 而言，策略 I 為其最佳策略。

<u>證明</u>:假設 B 採用策略 I 。考慮策略 $\delta_0=\{T_1,T_2...,T_{K-1},S,T_{K+1}...\}$ 和 $\delta_1=\{T_1,T_2...,T_{K-1},N,T_{K+1}...\}$，由於此兩策略前 K-1 次選擇相同，對 A 的勝率影響相同，我們可以暫不討論；而槍手 A 第 K 次後之勝率討論由(*)知 δ_0 較 δ_1 佳。重覆以上分析可知，當 B 選擇策略 I 時，對 A 而言，策略 I 比其他任何策略都好，亦即策略 I 是最佳策略。同理，我們也可得出**(2)**之結果。

(二) 馬可夫性質的思考:

由(一)的結果可得出當 A 與 B 皆選擇策略 I 時，其樹狀圖如下：



P_{I}(Awin|A 先射)=P_{I}(Awin|A 先射且射中 B 的靶)P_{I}(A 先射且射中 B 的靶| A 先射) +P_{I}(Awin|A 先射且沒射中 B 的靶)P_{I}(A 先射且沒射中 B 的靶| A 先射)

$=1\cdot a+P_{\mathrm{I}}(\text{Awin|B 先射})\cdot\bar{a}$

P_{I}(Awin|B 先射)=P_{I}(Awin|B 先射且射中 A 的靶)P_{I}(B 先射且射中 A 的靶| B 先射) +P_{I}(Awin|B 先射且沒射中 A 的靶)P_{I}(B 先射且沒射中 A 的靶| B 先射)

$=0\cdot b+P_{\mathrm{I}}(\text{Awin|A 先射})\cdot(1-b)$

計算後得 $P_{\mathrm{I}}(\text{Awin|A 先射})=\dfrac{a}{1-\bar{a}\bar{b}}$ 、 $P_{\mathrm{I}}(\text{Bwin|A 先射})=1-\dfrac{a}{1-\bar{a}\bar{b}}=\dfrac{\bar{a}b}{1-\bar{a}\bar{b}}$

$P_{\mathrm{I}}(\text{Awin|B 先射})=\dfrac{a\bar{b}}{1-\bar{a}\bar{b}}$ 、 $P_{\mathrm{I}}(\text{Bwin|B 先射})=1-\dfrac{a\bar{b}}{1-\bar{a}\bar{b}}=\dfrac{b}{1-\bar{a}\bar{b}}$

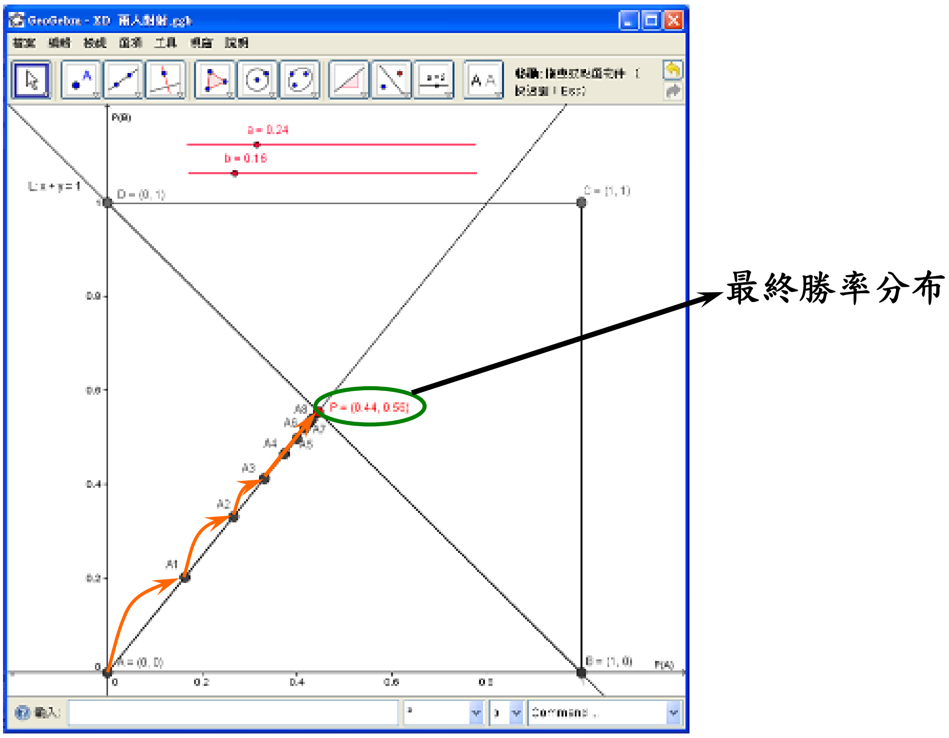
(三) 幾何方式的思考:

在 A 先射擊之條件下，記 **P_{I}(Awin)** 為 **P_{Awin}** 且 **P_{I}(Bwin)** 為 **P_{Bwin}**，我們將 P_{Awin}, P_{Bwin} 當成 *x* 軸和 *y* 軸上移動的變量，並將每一次循環後的機率分布點，描繪於平面坐標系(A_i 表第 i 回合時，兩人之勝率)，形成勝率分布圖如下，展示了機率分布點隨時間(回合)的變化。由於最終狀態中，$P_{Awin}+P_{Bwin}=1$，因此機率分布點會逐漸趨近於 $P_{Awin}+P_{Bwin}=1$，我們可算出在第 *n* 輪後的機率分布如下頁。

$$P_{\text{Awin}}(n)=a\sum_{i=0}^{n}(1-a)^i(1-b)^i \qquad P_{\text{Bwin}}(n)=b(1-a)\sum_{i=0}^{n}(1-a)^i(1-b)^i$$

$$\boxed{\begin{array}{ll}\dfrac{\Delta P_{\text{Awin}}}{\Delta n}=\dfrac{P_{\text{Awin}}(n+1)-P_{\text{Awin}}(n)}{(n+1)-n}=a(1-a)^n(1-b)^n & \\ & \dfrac{\frac{\Delta P_{\text{Bwin}}}{\Delta n}}{\frac{\Delta P_{\text{Awin}}}{\Delta n}}=\dfrac{b(1-a)}{a} \\ \dfrac{\Delta P_{\text{Bwin}}}{\Delta n}=\dfrac{P_{\text{Bwin}}(n+1)-P_{\text{Bwin}}(n)}{(n+1)-n}=b(1-a)(1-a)^n(1-b)^n & \end{array}}$$

因此，機率分布點在坐標系中的軌跡會是一直線(斜率為$\dfrac{b(1-a)}{a}$)，求出其與直線 L: $P_{\text{Awin}}+P_{\text{Bwin}}=1$ 的交點即為**最終勝率分布**。以數學軟體 GeoGebra 展現如下:



(四) 總結:

1.當對手選擇策略Ⅰ時，槍手自己的最佳策略亦為策略Ⅰ。故**(策略Ⅰ，策略Ⅰ)為 Nash 平衡解**，即 A 與 B 的**最佳策略組合為(A 射 B,B 射 A)**。

2.當 A 先射擊時，A 與 B 都選擇最佳策略(策略Ⅰ)之勝率如下：

$$P_{Awin}=\frac{a}{1-(1-a)(1-b)}=\frac{a}{1-\bar{a}\times\bar{b}} \qquad P_{Bwin}=\frac{(1-a)b}{1-(1-a)(1-b)}=\frac{\bar{a}\times b}{1-\bar{a}\times\bar{b}}$$

3. 在 A,B 皆選擇策略Ⅰ的情況下，由 P(Awin|A 先射)=$\dfrac{a}{1-\bar{a}\bar{b}}$ > P(Awin|B 先射)=$\dfrac{\bar{a}b}{1-\bar{a}\bar{b}}$

知當兩槍手對決時，若槍手 A 可以選擇先射或後射時，**選擇先射的勝率會大於選擇後射得勝率**。

以上討論完兩人對射的情形，我們繼續進行三人槍手賽局的研究。

四、三人槍手遊戲的討論方式:

玩家有 A, B, C 三個人，輪流射擊，每個人都自行選擇射擊對象，直到剩下一個人在遊戲中，此人即成為勝利者。賽局進行時，槍手在不同的時間點皆能選擇不同的策略，如：槍手 A 可選擇射 B(B)、射 C(C)、不射擊(N)三策略。我們仿照兩人槍手遊戲，將槍手的策略寫成策略集，如：槍手 C 的某一策略為{B,A,B,B,N, A…}。

由於槍手的命中率與勝率皆會影響最佳策略的選取，因此在不失一般性的情況下，我們假設三人皆未出局的射擊順序為 ABCABC……；一但有人出局，則射擊順序即為留下的兩人依序輪流。

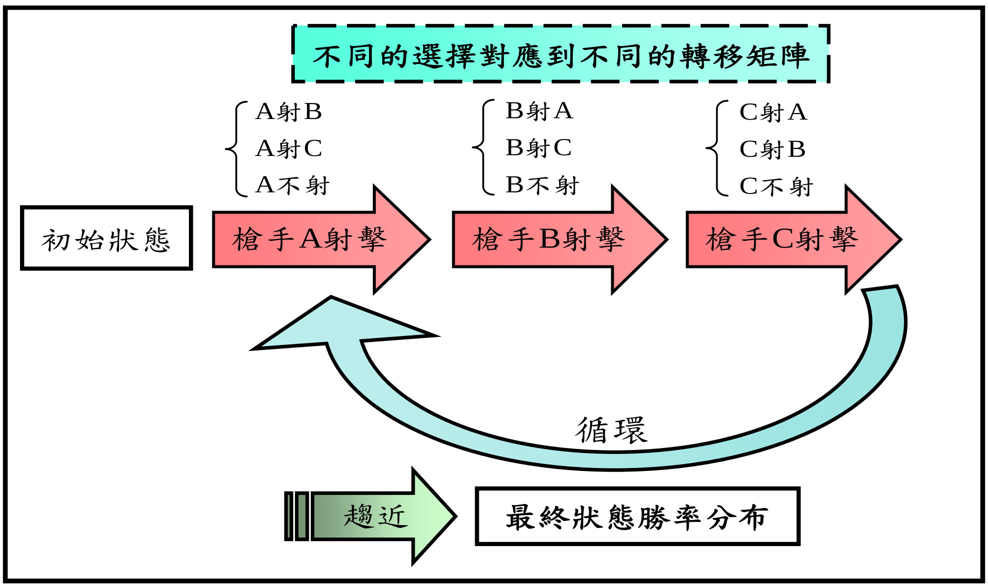
在三人槍手遊戲中，我們考慮一些類似底下的問題：當槍手 A 的策略為{B,B,B…}且槍手 B 的策略為{A,A,A…}時，則在 a,b,c 滿足什麼條件下，策略{A,A,A…}會是槍手 C 的最佳策略？或者是{A,N,B,B…}…等其他策略呢？

對於上述的問題，目前我們尚未解決，但如果將此賽局改為規範式賽局來討論，我們已找到一些關於最佳策略組合的 a,b,c 之條件。所謂**規範式賽局**，就是當槍手選擇一策略後，只要槍手組合不變，其策略亦不改變。

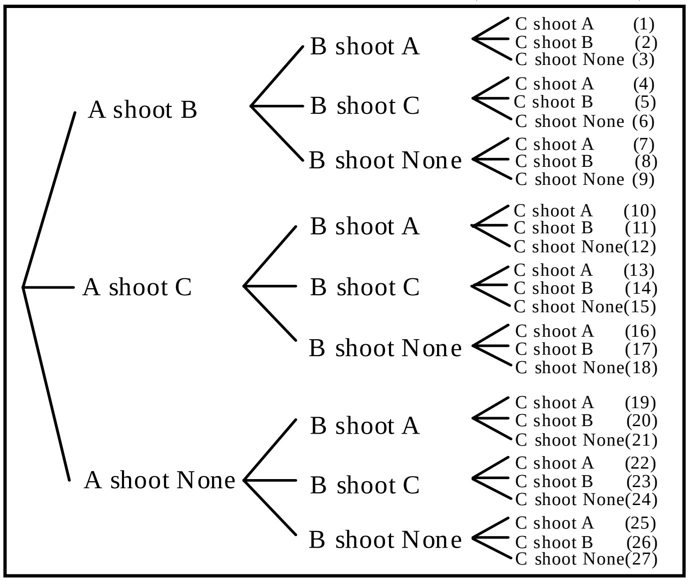
而我們將其策略簡單表達(如：槍手 C 選擇策略{A,A,A…}寫成槍手 C 射 A)，而遊戲中若有一人退出，則會進入兩人槍手賽局的最佳策略繼續進行。以下即為討論此賽局的方法。

(一) 三人槍手遊戲流程:

我們大致描述整個賽局的流程:



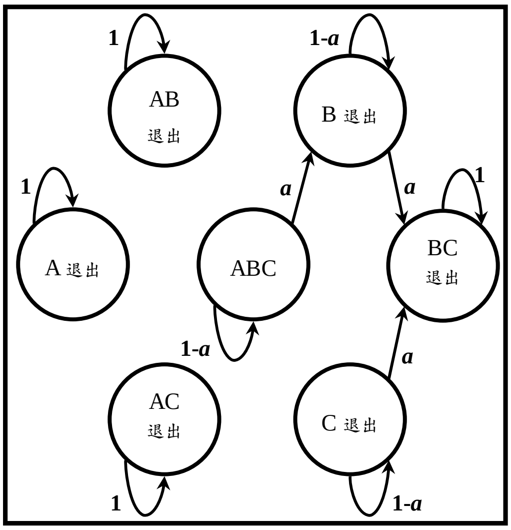
因此槍手 ABC 的決策各有三種，排列後共有 27 種可能的策略組合，為了方便討論所有可能的策略組合，我們依以下方式編號(對照決策樹):



(二)槍手遊戲中的轉移矩陣:

接著我們必須做出各種行動所對應到的轉移矩陣，我們舉 **A 射 B** 這個策略為例子。(轉移矩陣右方為 **A 射 B** 前在遊戲中的玩家，而上方為 **A 射 B** 後在遊戲中的玩家)

1.轉移圖:



2.轉移矩陣:

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} A & B & C & AB & BC & AC & ABC \end{array} \\
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
a & 0 & 0 & 1-a & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
a & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-a & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1-a
\end{bmatrix}
\end{array}
\begin{array}{l}
\rightarrow A\ \textbf{(1)} \\
\rightarrow B\ \textbf{(2)} \\
\rightarrow C\ \textbf{(3)} \\
\rightarrow AB\ \textbf{(4)} \\
\rightarrow BC\ \textbf{(5)} \\
\rightarrow CA\ \textbf{(6)} \\
\rightarrow ABC\ \textbf{(7)}
\end{array}
$$

狀態 1, 2, 3 為吸收狀態，遊戲已結束

狀態 4, 6 為兩人槍手遊戲，有 a 的機率命中 B(轉移到狀態 1)

狀態 5 中，槍手 A 已退出，無法射擊 B (轉移回原狀態)。

狀態 7 中，槍手 A 選擇射擊 B，有 a 的機率命中 B(轉移到狀態 6)

(三) 轉移矩陣表:

以此類推，我們可以推得所有不同行動所對應的轉移矩陣，整理如下表:

$\mathrm{M}(\mathrm{A}\times\mathrm{C})=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 1-a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 1-a \end{bmatrix}\begin{array}{l} \rightarrow \text{A alive} \\ \rightarrow \text{B alive} \\ \rightarrow \text{C alive} \\ \rightarrow \text{AB alive} \\ \rightarrow \text{BC alive} \\ \rightarrow \text{CA alive} \\ \rightarrow \text{ABC alive} \end{array}$	$\mathrm{M}(\mathrm{A}\times\mathrm{None})=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 1-a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{array}{l} \rightarrow \text{A alive} \\ \rightarrow \text{B alive} \\ \rightarrow \text{C alive} \\ \rightarrow \text{AB alive} \\ \rightarrow \text{BC alive} \\ \rightarrow \text{CA alive} \\ \rightarrow \text{ABC alive} \end{array}$
$\mathrm{M}(\mathrm{B}\times\mathrm{A})=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 1-b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & 1-b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 1-b \end{bmatrix}\begin{array}{l} \rightarrow \text{A alive} \\ \rightarrow \text{B alive} \\ \rightarrow \text{C alive} \\ \rightarrow \text{AB alive} \\ \rightarrow \text{BC alive} \\ \rightarrow \text{CA alive} \\ \rightarrow \text{ABC alive} \end{array}$	$\mathrm{M}(\mathrm{B}\times\mathrm{C})=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 1-b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & 1-b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 1-b \end{bmatrix}\begin{array}{l} \rightarrow \text{A alive} \\ \rightarrow \text{B alive} \\ \rightarrow \text{C alive} \\ \rightarrow \text{AB alive} \\ \rightarrow \text{BC alive} \\ \rightarrow \text{CA alive} \\ \rightarrow \text{ABC alive} \end{array}$

$$\mathrm{M}(\mathrm{B}\times\mathrm{None})=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0\\0&b&0&1-b&0&0&0\\0&b&0&0&1-b&0&0\\0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{array}{l}\to\text{A alive}\\\to\text{B alive}\\\to\text{C alive}\\\to\text{AB alive}\\\to\text{BC alive}\\\to\text{CA alive}\\\to\text{ABC alive}\end{array}$$

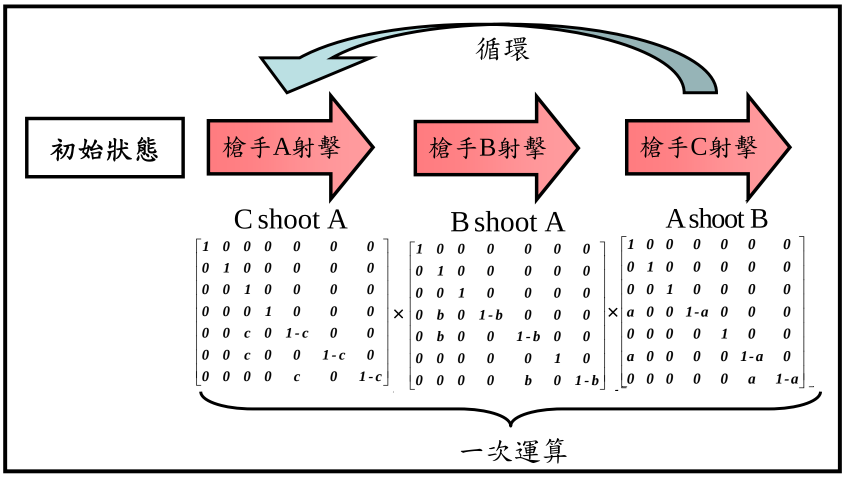
$$\mathrm{M}(\mathrm{C}\times\mathrm{A})=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0\\0&0&c&0&1-c&0&0\\0&0&c&0&0&1-c&0\\0&0&0&0&c&0&1-c\end{bmatrix}\begin{array}{l}\to\text{A alive}\\\to\text{B alive}\\\to\text{C alive}\\\to\text{AB alive}\\\to\text{BC alive}\\\to\text{CA alive}\\\to\text{ABC alive}\end{array}$$

$$\mathrm{M}(\mathrm{C}\times\mathrm{B})=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0\\0&0&c&0&1-c&0&0\\0&0&c&0&0&1-c&0\\0&0&0&0&0&c&1-c\end{bmatrix}\begin{array}{l}\to\text{A alive}\\\to\text{B alive}\\\to\text{C alive}\\\to\text{AB alive}\\\to\text{BC alive}\\\to\text{CA alive}\\\to\text{ABC alive}\end{array}$$

$$\mathrm{M}(\mathrm{C}\times\mathrm{None})=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0\\0&0&c&0&1-c&0&0\\0&0&c&0&0&1-c&0\\0&0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{array}{l}\to\text{A alive}\\\to\text{B alive}\\\to\text{C alive}\\\to\text{AB alive}\\\to\text{BC alive}\\\to\text{CA alive}\\\to\text{ABC alive}\end{array}$$

五、三人槍手遊戲的最佳決策探討:

(一) 轉移矩陣的運用:



於是我們就將一次次的決策，轉換為一個個的矩陣乘法，其中藉由數學軟體 WxMaxima 進行矩陣的運算。因此，最終勝率分布矩陣($\mathrm{M}_{\mathrm{Final}}$)便可經由以下方式計算出: ($\mathrm{M}_{\mathrm{Start}}$ 為初始矩陣，即所有槍手都在遊戲中)

$$\mathrm{M}_{\mathrm{Final}}=\lim_{n\to\infty}\Big(\mathrm{M}(\mathrm{C}\text{決策})\times\mathrm{M}(\mathrm{B}\text{決策})\times\mathrm{M}(\mathrm{A}\text{決策})\Big)^{n}\times\mathrm{M}_{\mathrm{Start}}$$

(二) 研究過程及方法:

接著我們便能開始討論三人槍手遊戲的情形。首先，我們必須依序找出槍手 C, B, A 的最佳策略，再解出槍手們的勝率函數。以下是我們的研究步驟:

Step1 **找出已知槍手 A, B 的策略時，C 的最佳策略。**

Step2 **找出已知槍手 A 的策略時，B 的最佳策略。**

Step3 **找出 A 的最佳策略，建構三人槍手賽局的全決策盒。**

Step4 **計算槍手們的勝率一般式。**

Step1 找出已知 A, B 的策略時，C 的最佳策略:

1.研究方法:

1.1 A,B 的策略組合共有九組(如下表)，我們舉 A 射 B、B 射 A 為例說明。

A 射 B、B 射 A	A 射 C、B 射 A	A 不射、B 射 A
A 射 B、B 射 C	A 射 C、B 射 C	A 不射、B 射 C
A 射 B、B 不射	A 射 C、B 不射	A 不射、B 不射

例:(A 射 B、B 射 A):

已知槍手 A, B 的策略為 A 射 B 及 B 射 A 時，槍手 C 可以選擇策略(1)或(2)或(3)。藉由轉移矩陣的運算，我們能計算出 C 選擇三策略的勝率分別如下:

$$P_{Cwin}(1) = \frac{c\left(a^2b^2c^2-2ab^2c^2+b^2c^2-2a^2bc^2+4abc^2-2bc^2+a^2c^2-2ac^2+c^2-a^2b^2c+ab^2c+3a^2bc-5abc+bc-a^2c+2ac-a^2b+2ab\right)}{(1-(1-a)(1-c))(1-(1-b)(1-c))(1-(1-a)(1-b)(1-c))}$$

$$P_{Cwin}(2) = \frac{c\left(a^2b^2c^2-2ab^2c^2+b^2c^2-2a^2bc^2+4abc^2-2bc^2+a^2c^2-2ac^2+c^2-a^2b^2c+2ab^2c-b^2c+2a^2bc-5abc+2bc+ac-a^2b+2ab\right)}{(1-(1-a)(1-c))(1-(1-b)(1-c))(1-(1-a)(1-b)(1-c))}$$

$$P_{Cwin}(3) = \frac{-c\left(a^2bc-3abc+bc+ac-a^2b+2ab\right)}{(1-(1-a)(1-c))(1-(1-b)(1-c))(1-(1-a)(1-b))}$$

接著我們將 $P_{Cwin}(1)$, $P_{Cwin}(2)$及 $P_{Cwin}(3)$兩兩相減，找出大小關係的充要條件:

由 $P_{Cwin}(1) - P_{Cwin}(2) = \dfrac{-(1-a)(1-b)(b-a)c^2}{(1-(1-a)(1-c))(1-(1-b)(1-c))(1-(1-a)(1-b)(1-c))}$

知 $P_{Cwin}(1) > P_{Cwin}(2) \quad \Leftrightarrow \quad a > b$ ....(∗)

$P_{Cwin}(1) < P_{Cwin}(2) \quad \Leftrightarrow \quad a < b$

由 $P_{Cwin}(2) - P_{Cwin}(3) = \dfrac{-(1-a)(1-b)\left(a^2b^2c-2ab^2c+b^2c-a^2bc+a^2c-a^2b^2+2ab^2-b^2+ab\right)c^2}{(1-(1-a)(1-b))(1-(1-a)(1-c))(1-(1-b)(1-c))(1-(1-a)(1-b)(1-c))}$

知 $P_{Cwin}(2) > P_{Cwin}(3) \quad \Leftrightarrow \quad c < \dfrac{(1-a)^2b^2-ab}{(1-a)^2b^2+a^2(1-b)}$

$P_{Cwin}(2) < P_{Cwin}(3) \quad \Leftrightarrow \quad c > \dfrac{(1-a)^2b^2-ab}{(1-a)^2b^2+a^2(1-b)}$

由 $P_{Cwin}(3) - P_{Cwin}(1) = \dfrac{c^2(1-a)(1-b)\left(a^2b^2c-2ab^2c+b^2c-a^2bc+a^2c-a^2b^2+ab^2+a^2b+ab-a^2\right)}{(1-(1-a)(1-b))(1-(1-b)(1-c))(1-(1-c)(1-a))(1-(1-a)(1-b)(1-c))}$

知 $P_{Cwin}(3) > P_{Cwin}(1) \quad \Leftrightarrow \quad c < \dfrac{a^2(1-b)-a(1-a)b^2-ab}{(1-a)^2b^2+a^2(1-b)}$

$P_{Cwin}(3) < P_{Cwin}(1) \quad \Leftrightarrow \quad c > \dfrac{a^2(1-b)-a(1-a)b^2-ab}{(1-a)^2b^2+a^2(1-b)}$

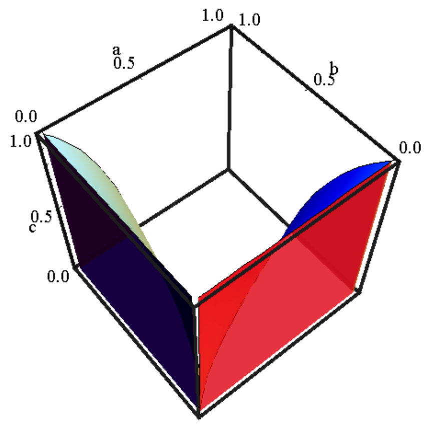
藉由以上討論方式，我們可以找出各種勝率大小關係的充要條件，然而我們不清楚這些式子間是否有任何關係，造成不必要的結論，我們舉個例子:

當 $P_{Cwin}(1) > P_{Cwin}(2) > P_{Cwin}(3)$發生時

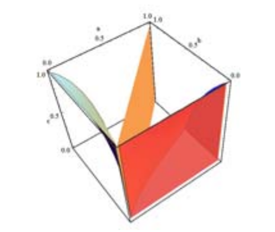
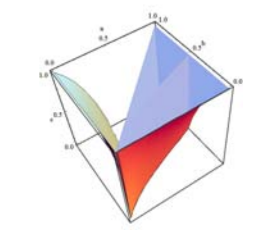
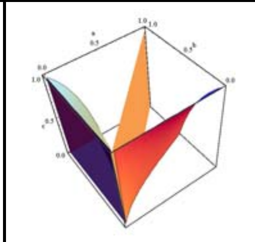
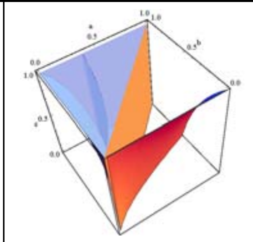
$$a > b \wedge c > \frac{a^2(1-b)-a(1-a)b^2-ab}{(1-a)^2b^2+a^2(1-b)} \wedge c < \frac{(1-a)^2b^2-ab}{(1-a)^2b^2+a^2(1-b)}$$

然而這種情形可能發生嗎?

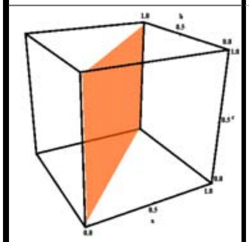
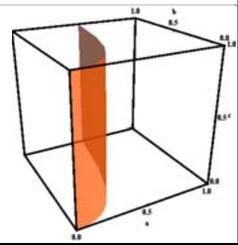
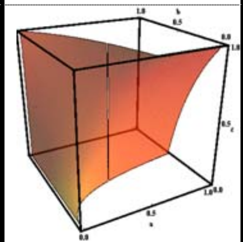
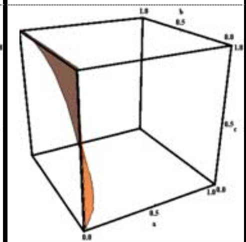
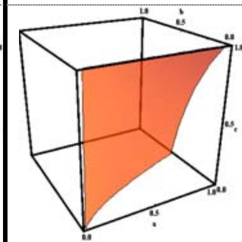
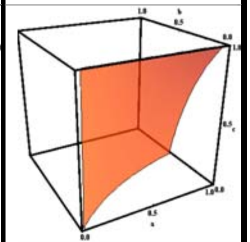
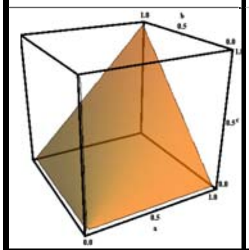
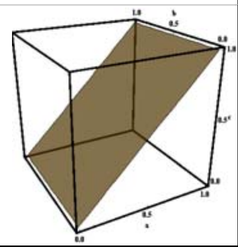
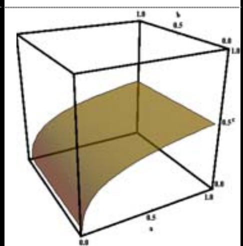
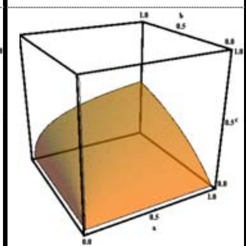
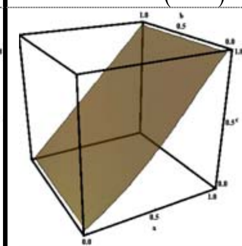
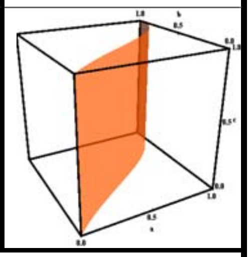
將 $c > \dfrac{a^2(1-b)-a(1-a)b^2-ab}{(1-a)^2b^2+a^2(1-b)}$ 及 $c < \dfrac{(1-a)^2b^2-ab}{(1-a)^2b^2+a^2(1-b)}$ 這兩條不等式所代表的區域繪於三維空間中(如右圖)，便可發現兩式是不可能同時發生在決策盒中。

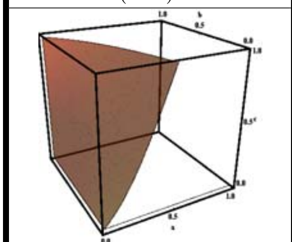
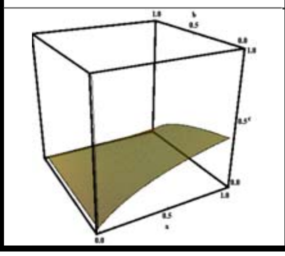
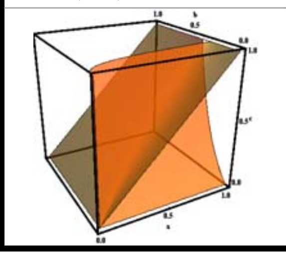
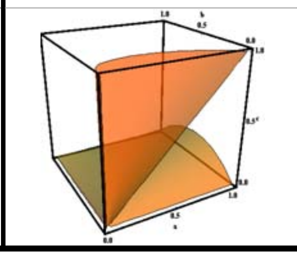
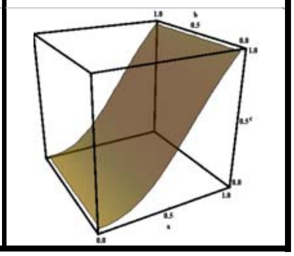


因此，我們藉由數學軟體 *Mathematica* 8.0 將這些決策臨界面描繪在決策盒中，可獲得 **Step1** 的結果共 9 個表格。而下表為上述例子討論後所得之結果:

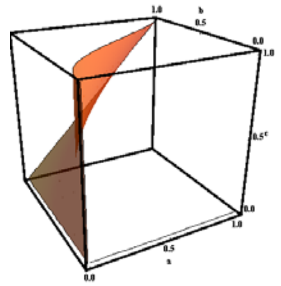
命中率的範圍	$a>b$		$a<b$	
	$c<\frac{a^2(1-b)-a(1-a)b^2-ab}{(1-a)^2b^2+a^2(1-b)}$	$c>\frac{a^2(1-b)-a(1-a)b^2-ab}{(1-a)^2b^2+a^2(1-b)}$	$c<\frac{(1-a)^2b^2-ab}{(1-a)^2b^2+a^2(1-b)}$	$c>\frac{(1-a)^2b^2-ab}{(1-a)^2b^2+a^2(1-b)}$
命中率範圍的對應圖形				
槍手 C 的最佳策略	**策略(3): C 不射**	**策略(1): C 射 A**	**策略(2): C 射 B**	**策略(3): C 不射**

為了進行 *Step2*，我們繼續將策略組合依槍手 A 的策略分為(1)~(9), (10)~(18)及(19)~(27)三組。但由於判別三人槍手遊戲勝率充要條件的式子非常複雜，故我們以判別函數 f_k 來說明命中率 a,b,c 的範圍由哪些不等式求得。我們以前頁例中(＊)的式子說明:**使得 $P_{Cwin}(1)>P_{Cwin}(2)$ 的充要條件為 $a>b$；因此，我們知道當 $a-b>0$ 時，槍手 C 使用策略(1)優於策略(2)，故定義 $f_1\equiv a-b$ 以方便表示。**以下為判別函數 $f_k(k=1\sim 37)$ 之定義及其對應圖形：

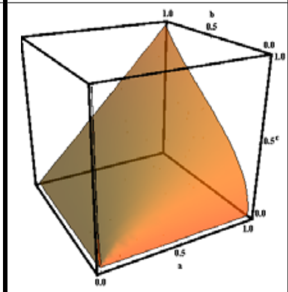
$f_1\equiv a-b$	$f_2\equiv b-\frac{a^2}{\bar{a}^2}$	$f_3\equiv c-\frac{a^2\bar{b}^2-ab^2}{a^2\bar{b}-b\bar{a}^2\bar{b}}$	$f_4\equiv c-\frac{\bar{a}^2b^2-ab}{\bar{a}^2b^2+a^2\bar{b}}$	$f_5\equiv c-\frac{a^2\bar{b}-a\bar{a}b^2-ab}{\bar{a}^2b^2+a^2\bar{b}}$	$f_6\equiv c-\frac{a\bar{b}-b}{a\bar{b}}$
					
$f_7\equiv\bar{a}\bar{b}bc^2+\bar{a}bc+a(c-b)$	$f_8\equiv a-c$	$f_9\equiv a-\frac{c^2}{\bar{c}^2}$	$f_{10}\equiv-\bar{a}bc^2+ab\bar{c}-ac$	$f_{11}\equiv\bar{a}^2\bar{b}^2c^2+\bar{a}b^2c+\bar{a}^2bc+\bar{a}bc-a^2\bar{b}+a(c-b)$	$f_{12}\equiv a-\frac{b}{b^2-b+1}$
					

$f_{13}\equiv\bar{a}^2\bar{b}^2bc^2+b^2c^2+2a^2b^2c-\bar{a}^2b^3c-3ab^2c+a\bar{b}c^2+a\bar{a}b(b+c)+a^2b+bc^2$	$f_{14}\equiv a^2b\bar{c}^2+\bar{a}bc^2-a^2\bar{c}^2+ac$	$f_{15}\equiv\bar{a}^2b\bar{b}^2c^2-a\bar{a}b\bar{b}+c^2(a-b)+2a^2b^2c+a\bar{a}bc+2abc^2+ab-3abc(b+c)-\bar{a}^2b^3c$	$f_{16}\equiv-\bar{a}^2b\bar{b}c^2-a\bar{a}c^2-a^2b\bar{b}-a^2b^2c+bc(a+c)$	$f_{17}\equiv c-\frac{a^2}{(a^2-a+1)}$
				

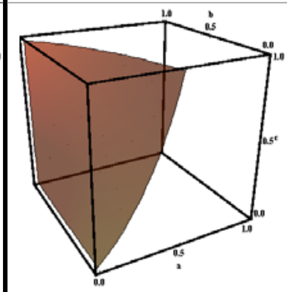
$$f_{18} \equiv a\bar{b}^2 c - b^2 c + ab$$



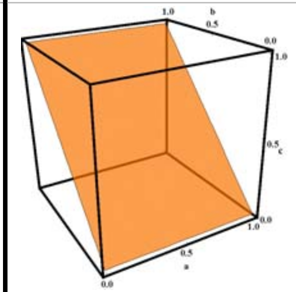
$$f_{19} \equiv a\bar{b}^2 c^2 + b\bar{b}c^2 + b(c-a)$$



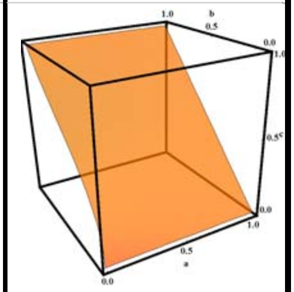
$$f_{20} \equiv \bar{a}\bar{b}c - a$$



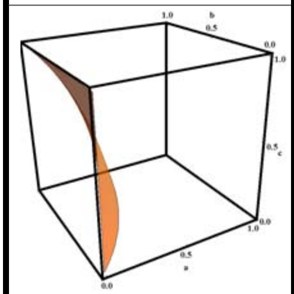
$$f_{21} \equiv b - c$$



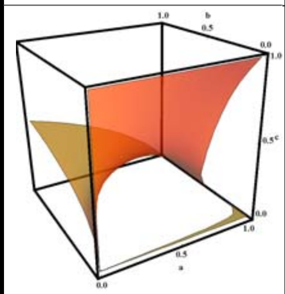
$$f_{22} \equiv abc^2 - bc^2 - ac^2 + c^2 - abc + bc + ac - b$$



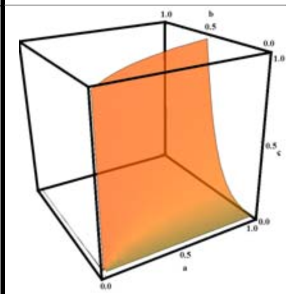
$$f_{23} \equiv b - \frac{a}{(1-a)(1-c)}$$



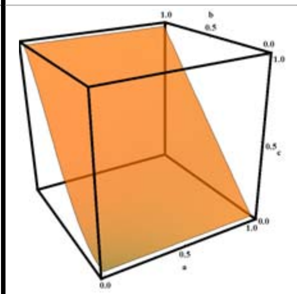
$$f_{24} \equiv ab^2c^2 - b^2c^2 - 2abc^2 + bc^2 + ac^2 - 2ab^2c + 2b^2c + 2abc - ac + ab^2 - b^2$$



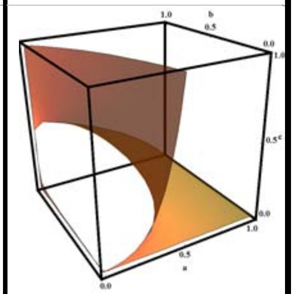
$$f_{25} \equiv ab^2c - abc - bc + ac - ab^2$$



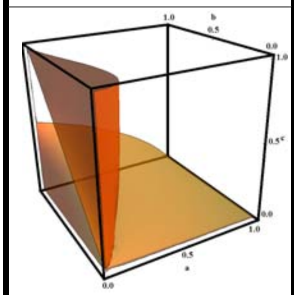
$$f_{26} \equiv ab^2c - b^2c - abc + bc - c - ab^2 + b^2 + ab$$



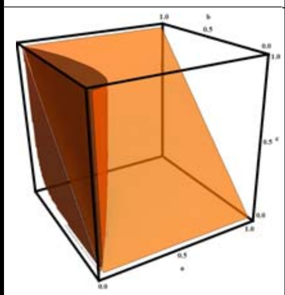
$$f_{27} \equiv a^2bc^2 - 2abc^2 + bc^2 - a^2c^2 + 2ac^2 - c^2 - 2a^2bc + 2abc + a^2c + a^2b - ab$$



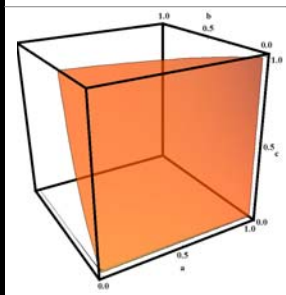
$$f_{28} \equiv 2a^2b^2c^2 - 3ab^2c^2 + b^2c^2 - 3a^2bc^2 + 3abc^2 - bc^2 + a^2c^2 - a^2b^3c + 2ab^3c - b^3c - ab^2c + b^2c + abc + a^2b^2 - ab^2$$



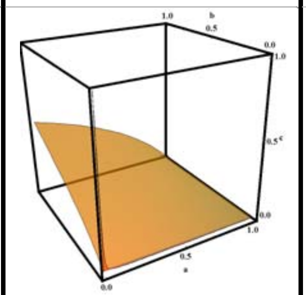
$$f_{29} \equiv a(2a^3b^2c^2 - 5a^2b^2c^2 + 4ab^2c^2 - b^2c^2 - 3a^3bc^2 + 6a^2bc^2 + ab^2 - 4abc^2 + bc^2 + a^3c^2 - a^2c^2 - a^3b^3c + 3a^2b^3c - 3ab^3c + a^2b + b^3c + a^3b^2c - 3a^2b^2c + 3ab^2c - b^2c + a^2bc - abc - a^2c - a^2b^2)$$



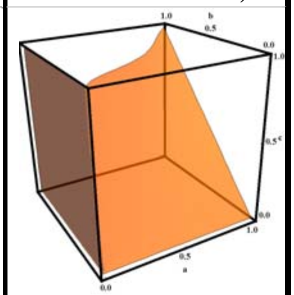
$$f_{30} \equiv ab^2c^2 - b^2c^2 - 2abc^2 + 2bc^2 + ac^2 - c^2 - ab^2c + bc + ab^2$$



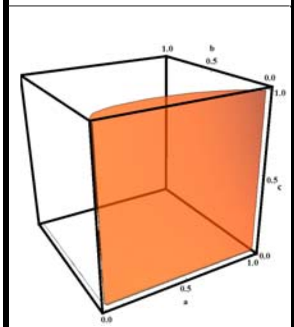
$$f_{31} \equiv ab^2c^2 - b^2c^2 - 2abc^2 + bc^2 + ac^2 - ab^2c + b^2c + bc + ab^2 - b^2$$



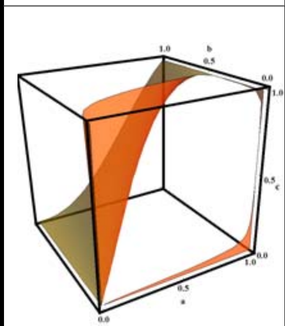
$$f_{32} \equiv a(a^3b^2c^2 - 2a^2b^2c^2 + ab^2c^2 - 2a^3bc^2 + 4a^2bc^2 - 2abc^2 + a^3c^2 - 2a^2c^2 + ac^2 - a^3b^3c + 3a^2b^3c - 3ab^3c + b^3c + 3a^3b^2c - 9a^2b^2c + 8ab^2c - 2b^2c - 2a^3bc + 4a^2bc - 2abc + a^2c - a^3b^2 + 3a^2b^2 - 2ab^2 + a^3b - 2a^2b)$$



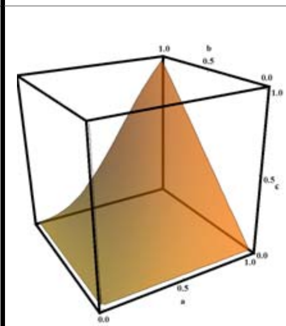
$$f_{33} \equiv a^2b^2c^2 - ab^2c^2 - 2a^2bc^2 + 2abc^2a^2c^2 - ac^2 - a^2b^3c + 2ab^3c - b^3c + 2a^2b^2c - 5ab^2c + 2b^2c - a^2bc + 2abc + ab^2$$



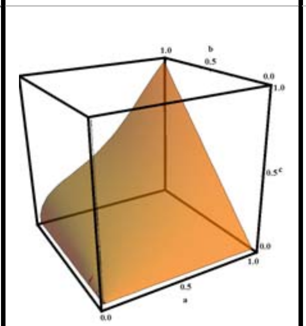
$$f_{34} \equiv a^2bc^2 - abc^2 - a^2c^2 + ac^2 - a^2b^2c + 2ab^2c - b^2c - abc + a^2b$$



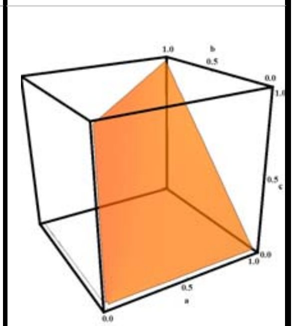
$$f_{35} \equiv a^2bc - 2abc + bc + ac - a^2b$$



$$f_{36} \equiv a^3b^2c^2 - 2a^2b^2c^2 + ab^2c^2 - 2a^2bc^2 + 3abc^2 - bc^2 + a^3b^2 + a^2c^2 - ac^2 - 2a^3b^2c - a^2c + 4a^2b^2c - 2ab^2c + a^2bc - abc - 2a^2b^2 + ab^2 + a^2b$$



$$f_{37} \equiv a^2b^2c - ab^2c - abc + bc - ac - a^2b^2 + ab^2 + ab$$



2.結果:在已知槍手 A, B 的策略時，槍手 C 的最佳策略，整理如下：

2.1　在 A 射 B 的前提下(策略(1)~(9)):

命中率滿足下列不等式的解	B 射 A 時 C 選擇	B 射 C 時 C 選擇	B 不射時 C 選擇
$f_2 < 0 \wedge f_5 < 0$	策略(3) - C 不射	策略(6) - C 不射	策略(9) - C 不射
$f_2 > 0 \wedge f_5 < 0$	策略(3) - C 不射	策略(4) - C 射 A	策略(9) - C 不射
$f_2 < 0 \wedge f_5 > 0 \wedge f_6 < 0$	策略(1) - C 射 A	策略(6) - C 不射	策略(9) - C 不射
$f_2 > 0 \wedge f_5 > 0 \wedge f_6 < 0$	策略(1) - C 射 A	策略(4) - C 射 A	策略(9) - C 不射
$f_1 > 0 \wedge f_2 > 0 \wedge f_6 > 0$	策略(1) - C 射 A	策略(4) - C 射 A	策略(7) - C 射 A
$f_2 < 0 \wedge f_3 < 0 \wedge f_6 > 0$	策略(1) - C 射 A	策略(6) - C 不射	策略(7) - C 射 A
$f_1 > 0 \wedge f_2 < 0 \wedge f_5 > 0$	策略(1) - C 射 A	策略(6) - C 不射	策略(7) - C 射 A
$f_1 < 0 \wedge f_2 > 0 \wedge$ $f_3 > 0 \wedge f_4 > 0$	策略(3) - C 不射	策略(5) - C 射 B	策略(9) - C 射 A
$f_3 > 0 \wedge f_4 < 0$	策略(2) - C 射 B	策略(5) - C 射 B	策略(9) - C 射 A
$f_3 < 0 \wedge f_4 < 0$	策略(2) - C 射 B	策略(5) - C 射 B	策略(9) - C 射 A
$f_2 > 0 \wedge f_3 < 0 \wedge f_5 > 0$	策略(3) - C 不射	策略(5) - C 射 B	策略(9) - C 射 A
$f_1 < 0 \wedge f_2 < 0$	策略(3) - C 不射	策略(6) - C 不射	策略(9) - C 射 A

2.2　在 A 射 C 的前提下(策略(10)~(18)):

命中率滿足下列不等式的解	B 射 A 時 C 選擇	B 射 C 時 C 選擇	B 不射時 C 選擇
$f_{12} > 0$	策略(10) - C 射 A	策略(13) - C 射 A	策略(16) - C 射 A
$f_1 > 0 \wedge f_{12} < 0$	策略(12) - C 不射	策略(13) - C 射 A	策略(16) - C 射 A
$f_1 < 0$	策略(10) - C 射 A	策略(14) - C 射 B	策略(17) - C 射 B

2.3　在 A 不射的前提下(策略(19)~(27)):

命中率滿足下列不等式的解	B 射 A 時 C 選擇	B 射 C 時 C 選擇	B 不射時 C 選擇
$f_1 > 0$	策略(21) - C 不射	策略(22) - C 射 A	策略(25) - C 射 A
$f_1 < 0 \wedge f_{23} < 0$	策略(21) - C 不射	策略(23) - C 射 B	策略(26) - C 射 B
$f_{23} > 0$	策略(20) - C 射 B	策略(23) - C 射 B	策略(26) - C 射 B

***Step2*　找出已知 A 的策略時，B 的最佳策略:**

1.研究方法:

A 的策略有 A 射 B、A 射 C 及 A 不射三種，仿照 *Step1* 的研究方法，B 可以選擇射 A、射 C 或不射。藉由轉移矩陣的運算，分別計算出 B 選擇三種策略的勝率(須利用 *Step1* 之結果)，兩兩相減比較其值，找出勝率大小關係的充要條件。最後用決策盒的方式，呈現不同範圍下的命中率所對應到 B 的最佳策略。

2.結果:

2.1 A 射 B 的前提下(策略(1)~(9)):

命中率滿足下列不等式的解		B, C 的最佳策略
$f_2 < 0 \wedge f_5 < 0$		策略(3) - B 射 A, C 不射
$f_2 > 0 \wedge f_5 < 0$		策略(1) - B 射 A, C 射 A
$f_2 < 0 \wedge f_5 > 0 \wedge f_6 < 0$	$f_7 > 0$	策略(4) - B 射 C, C 射 A
	$f_7 < 0$	策略(3) - B 射 A, C 不射
$f_2 > 0 \wedge f_5 > 0 \wedge f_6 < 0$	$f_8 > 0$	策略(4) - B 射 C, C 射 A
	$f_8 < 0$	策略(1) - B 射 A, C 射 A
$f_1 > 0 \wedge f_2 > 0 \wedge f_6 > 0$	$f_8 < 0$	策略(4) - B 射 C, C 射 A
	$f_8 > 0$	策略(1) - B 射 A, C 射 A
$f_2 < 0 \wedge f_3 < 0 \wedge f_6 > 0$	$f_7 > 0 \wedge f_{27} < 0$	策略(4) - B 射 C, C 射 A
	$f_7 < 0 \wedge f_{10} > 0$	策略(3) - B 射 A, C 不射
	$f_{10} < 0 \wedge f_{27} > 0$	策略(7) - B 不射, C 射 A
$f_1 > 0 \wedge f_3 > 0$	$f_9 < 0 \wedge f_{27} > 0$	策略(7) - B 不射, C 射 A
	$f_8 > 0 \wedge f_9 > 0$	策略(1) - B 射 A, C 射 A
$f_1 < 0 \wedge f_2 > 0 \wedge f_3 > 0 \wedge f_4 > 0$	$f_{11} > 0$	策略(6) - B 射 C, C 不射
	$f_{11} < 0$	策略(2) - B 射 A, C 射 B
$f_3 > 0 \wedge f_4 < 0$	$f_8 > 0$	策略(2) - B 射 A, C 射 B
	$f_8 < 0$	策略(5) - B 射 C, C 射 B
$f_3 < 0 \wedge f_4 < 0$	$f_8 > 0$	策略(2) - B 射 A, C 射 B
	$f_8 < 0$	策略(5) - B 射 C, C 射 B
$f_2 > 0 \wedge f_3 < 0 \wedge f_4 > 0$	$f_{11} > 0$	策略(6) - B 射 C, C 不射
	$f_{11} < 0$	策略(2) - B 射 A, C 射 B
$f_1 < 0 \wedge f_2 < 0$	$f_8 > 0$	策略(3) - B 射 A, C 不射
	$f_8 < 0$	策略(6) - B 射 C, C 不射

2.2 A 射 C 的前提下 (策略(10)~(18)):

命中率滿足下列不等式的解		B, C 的最佳策略
$f_{12} > 0$	$f_{13} < 0$	策略(13) - B 射 C, C 射 A
	$f_{13} > 0 \wedge f_{14} > 0$	策略(16) - B 不射, C 射 A
	$f_{14} < 0$	策略(10) - B 射 A, C 射 A
$f_1 > 0 \wedge f_{12} < 0$	$f_{13} > 0 \wedge f_{16} > 0$	策略(16) - B 不射, C 射 A
	$f_{16} < 0 \wedge f_{15} > 0$	策略(12) - B 射 A, C 不射
	$f_{15} < 0 \wedge f_{13} < 0$	策略(13) - B 射 C, C 射 A
$f_1 < 0$	$f_{18} > 0$	策略(12) - B 射 A, C 不射
	$f_{18} < 0$	策略(14) - B 射 C, C 射 B

2.3 A 不射的前提下 (策略(19)~(27)):

命中率滿足下列不等式的解		B, C 的最佳策略
$f_1 > 0$	$f_{20} > 0$	策略(22) - B 射 C, C 射 A
	$f_{20} < 0$	策略(25) - B 不射, C 射 A
$f_1 < 0 \wedge f_{23} < 0$	$f_{20} > 0$	策略(21) - B 射 A, C 不射
	$f_{20} < 0$	策略(23) - B 射 C, C 射 B
$f_{23} > 0$	$f_8 > 0$	策略(20) - B 射 A, C 射 B
	$f_8 < 0$	策略(23) - B 射 C, C 射 B

Step3　找出 A 的最佳策略:

1.研究方法:

我們藉由轉移矩陣的運算,分別計算出 A 選擇三種策略的勝率(須利用 *Step1,2* 之結果),兩兩相減比較其值,找出勝率大小關係的充要條件。最後建構三人槍手賽局的全決策盒,呈現不同範圍下的命中率所對應到槍手們的最佳策略組合。

2.結果: 此表格即為主要研究目的,由於版面過長,故在 陸、研究結果 中呈現。

Step4　計算槍手們的勝率一般式:

依據 *Step*1,2,3,三人槍手賽局中,槍手們不同策略組合所對應到的勝率一般式

策略	槍手 A 勝率	槍手 B 勝率	槍手 C 勝率
(1)	$\frac{a^2\bar{c}}{(1-\bar{a}\bar{c})(1-\bar{a}\bar{b}\bar{c})}+\frac{a\bar{a}b}{(1-\bar{a}\bar{b})(1-\bar{a}\bar{b}\bar{c})}$	$\frac{\bar{a}^2b^2}{(1-\bar{a}\bar{b})(1-\bar{a}\bar{b}\bar{c})}+\frac{\bar{a}b\bar{b}c}{(1-\bar{b}\bar{c})(1-\bar{a}\bar{b}\bar{c})}$	$\frac{\bar{a}\bar{b}^2c^2}{(1-\bar{b}\bar{c})(1-\bar{a}\bar{b}\bar{c})}$
(2)	$\frac{a\bar{a}b}{(1-\bar{a}\bar{b})(1-\bar{a}\bar{b}\bar{c})}+\frac{a(a\bar{c}+\bar{a}\bar{b}c)}{(1-\bar{a}\bar{c})(1-\bar{a}\bar{b}\bar{c})}$	$\frac{\bar{a}^2b^2}{(1-\bar{a}\bar{b})(1-\bar{a}\bar{b}\bar{c})}$	$\frac{ac}{(1-\bar{a}\bar{b}\bar{c})}+\frac{\bar{a}c(a\bar{c}+\bar{a}\bar{b}c)}{(1-\bar{a}\bar{c})(1-\bar{a}\bar{b}\bar{c})}$
(3)	$\frac{a^2\bar{c}}{(1-\bar{a}\bar{b})(1-\bar{a}\bar{c})}+\frac{a\bar{a}b}{(1-\bar{a}\bar{b})^2}$	$\frac{\bar{a}^2b^2}{(1-\bar{a}\bar{b})^2}$	$\frac{a\bar{a}c\bar{c}}{(1-\bar{a}\bar{b})(1-\bar{a}\bar{c})}+\frac{ac}{(1-\bar{a}\bar{b})}$
(4)	$\frac{a^2\bar{c}}{(1-\bar{a}\bar{c})(1-\bar{a}\bar{b}\bar{c})}$	$\frac{\bar{a}b(b\bar{c}+\bar{b}c)}{(1-\bar{b}\bar{c})(1-\bar{a}\bar{b}\bar{c})}$	$\frac{\bar{a}\bar{b}c(b\bar{c}+\bar{b}c)}{(1-\bar{b}\bar{c})(1-\bar{a}\bar{b}\bar{c})}+\frac{a\bar{a}c\bar{c}}{(1-\bar{a}\bar{c})(1-\bar{a}\bar{b}\bar{c})}+\frac{(1-\bar{a}\bar{b})c}{(1-\bar{a}\bar{b}\bar{c})}$
(5)	$\frac{a(a\bar{c}+\bar{a}\bar{b}c)}{(1-\bar{a}\bar{c})(1-\bar{a}\bar{b}\bar{c})}$	$\frac{\bar{a}b^2\bar{c}}{(1-\bar{b}\bar{c})(1-\bar{a}\bar{b}\bar{c})}$	$\frac{\bar{a}b\bar{b}c\bar{c}}{(1-\bar{b}\bar{c})(1-\bar{a}\bar{b}\bar{c})}+\frac{\bar{a}c(a\bar{c}+\bar{a}\bar{b}c)}{(1-\bar{a}\bar{c})(1-\bar{a}\bar{b}\bar{c})}+\frac{(1-\bar{a}\bar{b})c}{(1-\bar{a}\bar{b}\bar{c})}$
(6)	$\frac{a^2\bar{c}}{(1-\bar{a}\bar{b})(1-\bar{a}\bar{c})}$	$\frac{\bar{a}b^2\bar{c}}{(1-\bar{a}\bar{b})(1-\bar{b}\bar{c})}$	$\frac{\bar{a}b\bar{b}c\bar{c}}{(1-\bar{a}\bar{b})(1-\bar{b}\bar{c})}+\frac{a\bar{a}c\bar{c}}{(1-\bar{a}\bar{b})(1-\bar{a}\bar{c})}+c$
(7)	$\frac{a^2\bar{c}}{(1-\bar{a}\bar{c})^2}$	$\frac{\bar{a}bc}{(1-\bar{a}\bar{c})(1-\bar{b}\bar{c})}$	$\frac{\bar{a}\bar{b}c^2}{(1-\bar{a}\bar{c})(1-\bar{b}\bar{c})}+\frac{a\bar{a}c\bar{c}}{(1-\bar{a}\bar{c})^2}+\frac{ac}{(1-\bar{a}\bar{c})}$
(8)	$\frac{a(a\bar{c}+c\bar{a})}{(1-\bar{a}\bar{c})^2}$	0	$\frac{ac}{(1-\bar{a}\bar{c})}+\frac{\bar{a}c(a\bar{c}+c\bar{a})}{(1-\bar{a}\bar{c})^2}$

(9)	$\frac{a\bar{c}}{(1-\bar{a}\bar{c})}$	0	$\frac{c}{(1-\bar{a}\bar{c})}$
(10)	$\frac{a^2\bar{b}}{(1-\bar{a}\bar{b})(1-\bar{a}\bar{b}\bar{c})}$	$\frac{\bar{a}b(b\bar{c}+c\bar{b})}{(1-\bar{b}\bar{c})(1-\bar{a}\bar{b}\bar{c})}+\frac{a\bar{a}b\bar{b}}{(1-\bar{a}\bar{b})(1-\bar{a}\bar{b}\bar{c})}+\frac{ab}{(1-\bar{a}\bar{b}\bar{c})}$	$\frac{\bar{a}bc}{(1-\bar{a}\bar{b}\bar{c})}+\frac{\bar{a}\bar{b}c(b\bar{c}+c\bar{b})}{(1-\bar{b}\bar{c})(1-\bar{a}\bar{b}\bar{c})}$
(11)	$\frac{a^2\bar{b}}{(1-\bar{a}\bar{b})(1-\bar{a}\bar{b}\bar{c})}+\frac{a\bar{a}\bar{b}c}{(1-\bar{a}\bar{c})(1-\bar{a}\bar{b}\bar{c})}$	$\frac{\bar{a}b^2\bar{c}}{(1-\bar{b}\bar{c})(1-\bar{a}\bar{b}\bar{c})}+\frac{a\bar{a}b\bar{b}}{(1-\bar{a}\bar{b})(1-\bar{a}\bar{b}\bar{c})}+\frac{ab}{(1-\bar{a}\bar{b}\bar{c})}$	$\frac{\bar{a}b\bar{b}c\bar{c}}{(1-\bar{b}\bar{c})(1-\bar{a}\bar{b}\bar{c})}+\frac{\bar{a}^2\bar{b}c^2}{(1-\bar{a}\bar{c})(1-\bar{a}\bar{b}\bar{c})}+\frac{\bar{a}bc}{(1-\bar{a}\bar{b}\bar{c})}$
(12)	$\frac{a^2\bar{b}}{(1-\bar{a}\bar{b})^2}$	$\frac{\bar{a}b^2\bar{c}}{(1-\bar{a}\bar{b})(1-\bar{b}\bar{c})}+\frac{a\bar{a}b\bar{b}}{(1-\bar{a}\bar{b})^2}+\frac{ab}{(1-\bar{a}\bar{b})}$	$\frac{\bar{a}bc}{(1-\bar{a}\bar{b})}$
(13)	$\frac{a(a\bar{b}+b\bar{a})}{(1-\bar{a}\bar{b})(1-\bar{a}\bar{b}\bar{c})}$	$\frac{\bar{a}b\bar{b}c}{(1-\bar{b}\bar{c})(1-\bar{a}\bar{b}\bar{c})}+\frac{\bar{a}b(a\bar{b}+b\bar{a})}{(1-\bar{b}\bar{c})(1-\bar{a}\bar{b}\bar{c})}+\frac{ab}{(1-\bar{a}\bar{b}\bar{c})}$	$\frac{\bar{a}\bar{b}^2c^2}{(1-\bar{b}\bar{c})(1-\bar{a}\bar{b}\bar{c})}$
(14)	$\frac{a(a\bar{b}+b\bar{a})}{(1-\bar{a}\bar{b})(1-\bar{a}\bar{b}\bar{c})}+\frac{a\bar{a}\bar{b}c}{(1-\bar{a}\bar{c})(1-\bar{a}\bar{b}\bar{c})}$	$\frac{\bar{a}b(a\bar{b}+b\bar{a})}{(1-\bar{a}\bar{b})(1-\bar{a}\bar{b}\bar{c})}+\frac{ab}{(1-\bar{a}\bar{b}\bar{c})}$	$\frac{\bar{a}^2\bar{b}c^2}{(1-\bar{a}\bar{c})(1-\bar{a}\bar{b}\bar{c})}$
(15)	$\frac{a(a\bar{b}+b\bar{a})}{(1-\bar{a}\bar{b})^2}$	$\frac{\bar{a}b(a\bar{b}+b\bar{a})}{(1-\bar{a}\bar{b})^2}-\frac{ab}{(1-\bar{a}\bar{b})}$	0
(16)	$\frac{a^2\bar{b}}{(1-\bar{a}\bar{b})(1-\bar{a}\bar{c})}$	$\frac{\bar{a}bc}{(1-\bar{a}\bar{c})(1-\bar{b}\bar{c})}+\frac{a\bar{a}b\bar{b}}{(1-\bar{a}\bar{b})(1-\bar{a}\bar{c})}+\frac{ab}{(1-\bar{a}\bar{c})}$	$\frac{\bar{a}\bar{b}c^2}{(1-\bar{a}\bar{c})(1-\bar{b}\bar{c})}$
(17)	$\frac{a\bar{a}c}{(1-\bar{a}\bar{c})^2}+\frac{a^2\bar{b}}{(1-\bar{a}\bar{b})(1-\bar{a}\bar{c})}$	$\frac{a\bar{a}b\bar{b}}{(1-\bar{a}\bar{b})(1-\bar{a}\bar{c})}+\frac{ab}{(1-\bar{a}\bar{c})}$	$\frac{\bar{a}^2c^2}{(1-\bar{a}\bar{c})^2}$
(18)	$\frac{a\bar{b}}{(1-\bar{a}\bar{b})}$	$\frac{b}{(1-\bar{a}\bar{b})}$	0
(19)	0	$\frac{b(b\bar{c}+c\bar{b})}{(1-\bar{b}\bar{c})^2}$	$\frac{\bar{b}c(b\bar{c}+c\bar{b})}{(1-\bar{b}\bar{c})^2}+\frac{bc}{(1-\bar{b}\bar{c})}$
(20)	$\frac{a\bar{b}c}{(1-\bar{a}\bar{c})(1-\bar{b}\bar{c})}$	$\frac{b^2\bar{c}}{(1-\bar{b}\bar{c})^2}$	$\frac{b\bar{b}c\bar{c}}{(1-\bar{b}\bar{c})^2}+\frac{\bar{a}\bar{b}c^2}{(1-\bar{a}\bar{c})(1-\bar{b}\bar{c})}+\frac{bc}{(1-\bar{b}\bar{c})}$
(21)	0	$\frac{b\bar{c}}{(1-\bar{b}\bar{c})}$	$\frac{c}{(1-\bar{b}\bar{c})}$
(22)	$\frac{ab}{(1-\bar{a}\bar{b})(1-\bar{b}\bar{c})}$	$\frac{\bar{a}b^2}{(1-\bar{a}\bar{b})(1-\bar{b}\bar{c})}+\frac{b\bar{b}c}{(1-\bar{b}\bar{c})^2}$	$\frac{\bar{b}^2c^2}{(1-\bar{b}\bar{c})^2}$
(23)	$\frac{ab}{(1-\bar{a}\bar{b})(1-\bar{b}\bar{c})}+\frac{a\bar{b}c}{(1-\bar{a}\bar{c})(1-\bar{b}\bar{c})}$	$\frac{\bar{a}b^2}{(1-\bar{a}\bar{b})(1-\bar{b}\bar{c})}$	$\frac{\bar{a}\bar{b}c^2}{(1-\bar{a}\bar{c})(1-\bar{b}\bar{c})}$
(24)	$\frac{a}{(1-\bar{a}\bar{b})}$	$\frac{\bar{a}b}{(1-\bar{a}\bar{b})}$	0
(25)	0	$\frac{b}{(1-\bar{b}\bar{c})}$	$\frac{\bar{b}c}{(1-\bar{b}\bar{c})}$
(26)	$\frac{a}{(1-\bar{a}\bar{c})}$	0	$\frac{\bar{a}c}{(1-\bar{a}\bar{c})}$
(27)	0	0	0

(三) 延伸討論:

到此，我們建構出三人槍手賽局的全決策盒(參見 陸、研究結果)。

接下來我們想問:當任意三人對決時，最容易出現哪一個最佳策略組合呢?

因為，策略所占區域體積代表了該策略成為最佳策略的機率，我們將每個策略成為最佳策略的機率運算如下表:

策略編碼	所占區域體積	策略編碼	所占區域體積
策略(1)	**0.05**7119224638361	策略(10)	**0.02**3719739041486
策略(2)	**0.01**6487942215704	策略(12)	**0.00**1522864257022
策略(3)	**0.05**7440764008768	策略(13)	**0.07**6956343929858
策略(4)	**0.03**2149623412009	策略(14)	**0.02**3345313667146
策略(5)	**0.04**5052403613979	策略(16)	**0.27**8914742533626
策略(6)	**0.04**7367967955782	策略(22)	**0.00**0653031303548
策略(7)	**0.01**8118813557110	策略(23)	**0.36**8526397205173

我們發現**策略(23)** - A 不射、B 射 C、C 射 B，是最容易出現的最佳策略組合。第二則是**策略(16)** -A 射 C, B 不射, C 射 A。

陸、研究結果

一、 (策略Ⅰ，策略Ⅰ)為兩人槍手賽局的 Nash 平衡解，其勝率為：

$$P_{Awin} = \frac{a}{1-(1-a)(1-b)} = \frac{a}{1-\bar{a}\times\bar{b}} \qquad P_{Bwin} = \frac{(1-a)b}{1-(1-a)(1-b)} = \frac{\bar{a}\times b}{1-\bar{a}\times\bar{b}}$$

二、由 P(Awin|A 先射)= $\frac{a}{1-\bar{a}\bar{b}}$ **>** **P(Awin|B 先射)=** $\frac{\bar{a}b}{1-\bar{a}\bar{b}}$ **知當兩槍手對決時，若槍手 A 可以選擇先射或後射時，選擇先射的勝率會大於選擇後射得勝率。**

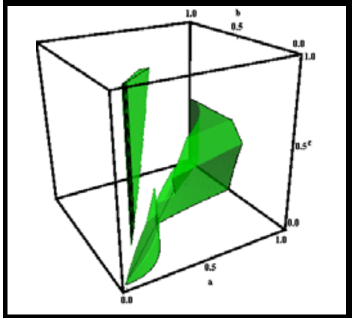
三、三人對射時，在不同命中率的條件下，槍手們會有不同的最佳策略，然而策略(8),(9),(11),(15), (17)~(21),(24)~(27)不可能成為最佳策略組合。

四、三人對射時，槍手 A, B, C 在不同命中率條件下的最佳策略組合如下頁。

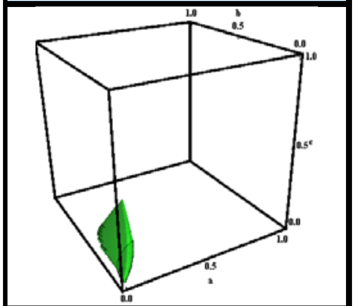
(我們舉**策略(2)**為例來說明：當命中率為勝率函數 $f_3>0 \wedge f_4<0$ 且 $f_8>0$ 的解或 $f_2>0 \wedge f_3<0 \wedge f_4>0$ 且 $f_{11}<0 \wedge f_{23}>0$ 的解時，**策略(2)**為最佳策略組合；我們將其描在決策盒中，可得知槍手命中率在決策盒中綠色部分圖形時**策略(2)**為最佳策略組合。)

策略(1): A 射 B, B 射 A, C 射 A		
$f_2>0\wedge f_5<0$	$f_{14}<0$	$f_{21}>0$
$f_2>0\wedge f_5>0\wedge f_6<0$	$f_{14}<0$	
$f_1>0\wedge f_2>0\wedge f_6>0$	$f_8>0\wedge f_{14}>0$	$f_{26}>0$
	$f_{14}<0$	
$f_1>0\wedge f_3>0$	$f_{12}>0\wedge f_9>0\wedge f_{14}>0$	$f_{26}>0$
	$f_{12}>0\wedge f_{14}<0$	
	$f_{12}<0\wedge f_{16}<0$	
	$f_{12}<0\wedge f_{15}>0$ $\wedge f_9>0\wedge f_{16}>0$	$f_{28}<0$
策略(2): A 射 B, B 射 A, C 射 B		
$f_3>0\wedge f_4<0$	$f_8>0$	
$f_2>0\wedge f_3<0\wedge f_4>0$	$f_{11}<0\wedge f_{23}>0$	
策略(3): A 射 B, B 射 A, C 不射		
$f_2<0\wedge f_5<0$	$f_{14}<0$	$f_{22}<0$
$f_2<0\wedge f_5>0\wedge f_6<0$	$f_7<0$	
$f_2<0\wedge f_3<0\wedge f_6>0$	$f_7<0\wedge f_{10}>0\wedge f_{14}>0$	
	$f_7<0\wedge f_{14}<0$	
	$f_{12}<0\wedge f_{20}<0\wedge f_{27}<0\wedge f_7>0$	
	$f_{12}<0\wedge f_7<0\wedge f_{10}>0$	
策略(4): A 射 B, B 射 C, C 射 A		
$f_2<0\wedge f_5>0\wedge f_6<0$	$f_{20}<0\wedge f_{14}>0\wedge f_7>0$	$f_{23}>0$
	$f_{14}<0\wedge f_7>0$	
$f_2>0\wedge f_5>0\wedge f_6<0$	$f_{13}>0\wedge f_{20}>0$	$f_{23}>0$
	$f_{20}<0\wedge f_8<0$	$f_{23}>0$
$f_1>0\wedge f_2>0\wedge f_6>0$	$f_{13}<0$	$f_{24}<0$
	$f_{13}>0\wedge f_{20}>0$	$f_{23}>0\wedge f_{24}<0$
	$f_{20}<0\wedge f_8<0$	$f_{23}>0$
$f_2<0\wedge f_3<0\wedge f_6>0$	$f_{14}>0\wedge f_{20}<0$ $\wedge f_{27}<0\wedge f_7>0$	$f_{23}>0$
	$f_7>0\wedge f_{14}<0$	
策略(5): A 射 B, B 射 C, C 射 B		
$f_3>0\wedge f_4<0$	$f_8<0\wedge f_{18}<0$	$f_{31}<0$
	$f_8<0\wedge f_{18}>0$	$f_{31}<0$
$f_3<0\wedge f_4<0$	$f_8>0$	

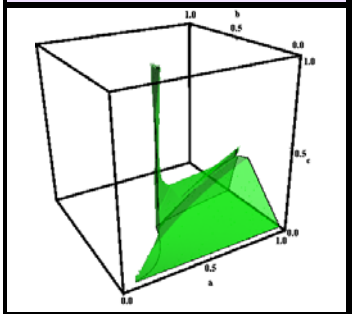
策略(1)



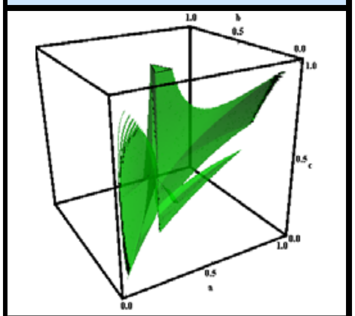
策略(2)



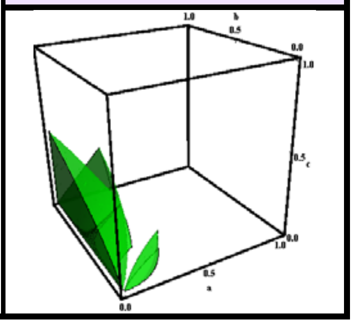
策略(3)



策略(4)



策略(5)



策略(6): A 射 B, B 射 C, C 不射		
$f_1<0\wedge f_2>0 \wedge f_3>0\wedge f_4>0$	$f_{20}>0\wedge f_{18}>0$	
	$f_{20}<0\wedge f_{18}>0\wedge f_{11}>0$	$f_{28}<0$
	$f_{20}>0\wedge f_{18}<0$	$f_{29}>0$
$f_2>0\wedge f_3<0\wedge f_4>0$	$f_{18}<0$	$f_{29}>0\wedge f_{28}<0$
	$f_{11}>0\wedge f_{18}>0\wedge f_{23}<0$	$f_{28}<0$
	$f_8>0\wedge f_{11}>0\wedge f_{23}>0$	

策略(7): A 射 B, B 不射, C 射 A		
$f_2<0\wedge f_3<0\wedge f_6>0$	$f_{10}<0\wedge f_{27}>0$	$f_{21}>0$
	$f_{12}<0\wedge f_{27}>0\wedge f_{10}<0$	$f_{21}>0$
$f_1>0\wedge f_3>0$	$f_{12}>0\wedge f_9<0$	$f_{21}>0$
	$f_{12}<0\wedge f_{15}<0\wedge f_9<0$	$f_{21}>0$
	$f_{12}<0\wedge f_{15}>0\wedge f_9<0$	$f_{36}>0$

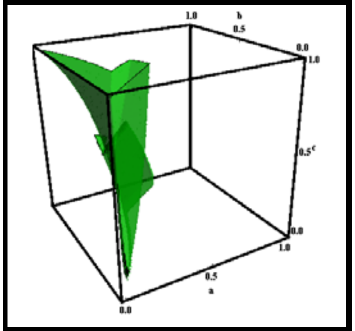
策略(10): A 射 C, B 射 A, C 射 A		
$f_2<0\wedge f_5<0$	$f_{14}<0$	$f_{22}>0$
$f_2>0\wedge f_5<0$	$f_{14}<0$	$f_{21}<0$

策略(12): A 射 C, B 射 A, C 不射		
$f_2<0\wedge f_5<0$	$f_{13}>0\wedge f_{20}>0$	
$f_3>0\wedge f_4<0$	$f_8<0\wedge f_{18}>0$	$f_{33}<0$

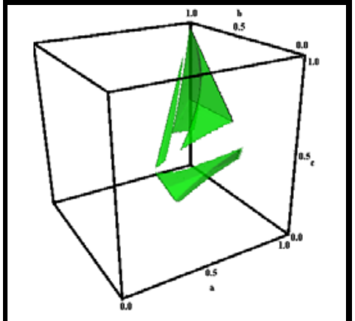
策略(13): A 射 C, B 射 C, C 射 A		
$f_2<0\wedge f_5<0$	$f_{13}<0$	
	$f_{20}<0\wedge f_{14}>0$	$f_{21}>0$
$f_2>0\wedge f_5<0$	$f_{13}<0$	
$f_2<0\wedge f_5>0\wedge f_6<0$	$f_{13}<0$	
$f_2>0\wedge f_5>0\wedge f_6<0$	$f_{13}<0$	
$f_1>0\wedge f_2>0\wedge f_6>0$	$f_{13}<0$	$f_{24}>0$
$f_2<0\wedge f_3<0\wedge f_6>0$	$f_{13}<0\wedge f_{12}>0$	
	$f_{12}<0\wedge f_{13}<0$	
$f_1>0\wedge f_3>0$	$f_{12}<0\wedge f_{15}>0\wedge f_9<0$	$f_{36}<0$
	$f_{12}<0\wedge f_{15}>0 \wedge f_9>0\wedge f_{16}>0$	$f_{28}>0$

策略(14): A 射 C, B 射 C, C 射 B		
$f_2>0\wedge f_5<0$	$f_{20}<0\wedge f_{14}>0$	
$f_1<0\wedge f_2>0\wedge f_3>0\wedge f_4>0$	$f_{20}>0\wedge f_{18}<0$	$f_{29}<0$
$f_3>0\wedge f_4<0$	$f_8<0\wedge f_{18}<0$	$f_{30}<0$

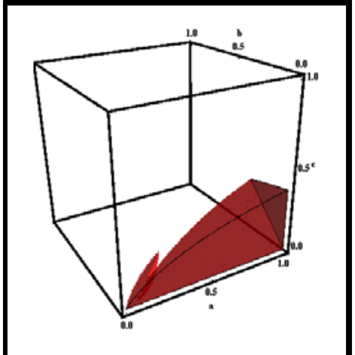
策略(6)



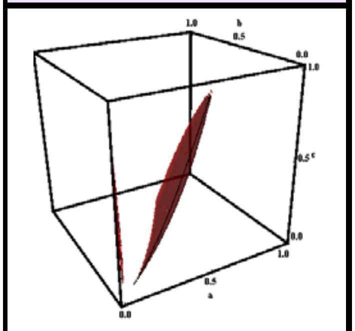
策略(7)



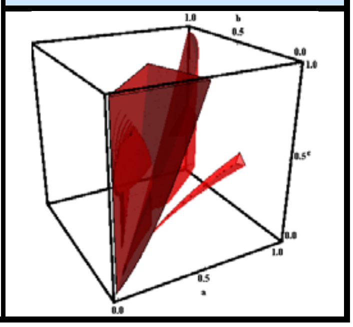
策略(10)



策略(12)



策略(13)

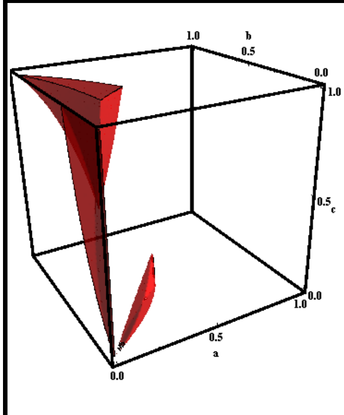


策略(16): A 射 C, B 不射, C 射 A		
$f_2<0\wedge f_5<0$	$f_{20}<0\wedge f_{14}>0$	$f_{21}<0$
$f_2>0\wedge f_5<0$	$f_{13}>0\wedge f_{20}>0$	
$f_2<0\wedge f_5>0\wedge f_6<0$	$f_{13}>0\wedge f_{20}>0$	
	$f_{20}<0\wedge f_{14}>0\wedge f_7>0$	$f_{23}<0$
$f_2>0\wedge f_5>0\wedge f_6<0$	$f_{13}>0\wedge f_{20}>0$	$f_{23}<0$
	$f_{20}<0\wedge f_8<0$	$f_{23}<0$
	$f_8>0\wedge f_{14}>0$	
$f_1>0\wedge f_2>0\wedge f_6>0$	$f_{13}>0\wedge f_{20}>0$	$f_{23}<0\wedge f_{25}>0$
	$f_{20}<0\wedge f_8<0$	$f_{23}<0$
	$f_8>0\wedge f_{14}>0$	$f_{26}<0$
$f_2<0\wedge f_3<0\wedge f_6>0$	$f_{13}>0\wedge f_{20}>0$	$f_{25}>0$
	$f_{14}>0\wedge f_{20}<0$ $\wedge f_{27}<0\wedge f_7>0$	$f_{23}<0$
	$f_{10}<0\wedge f_{27}>0$	$f_{21}<0$
	$f_{12}<0\wedge f_{27}>0\wedge f_{10}<0$	$f_{21}<0$
$f_1>0\wedge f_3>0$	$f_{12}>0\wedge f_9<0$	$f_{21}<0$
	$f_{12}>0\wedge f_9>0\wedge f_{14}>0$	$f_{26}<0$
	$f_{12}<0\wedge f_{15}<0\wedge f_9>0$	
	$f_{12}<0\wedge f_{15}<0\wedge f_9<0$	$f_{21}<0$

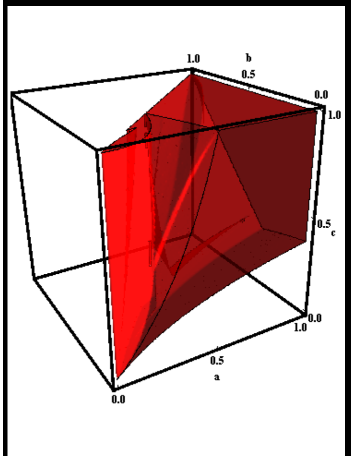
策略(22): A 不射, B 射 C, C 射 A		
$f_1>0\wedge f_2>0\wedge f_6>0$	$f_{13}>0\wedge f_{20}>0$	$f_{24}>0\wedge f_{25}<0$
$f_2<0\wedge f_3<0\wedge f_6>0$	$f_{13}>0\wedge f_{20}>0$	$f_{25}<0$
	$f_{12}<0\wedge f_{13}>0\wedge f_{20}>0$	

策略(23): A 不射, B 射 C, C 射 B		
$f_1<0\wedge f_2>0$ $\wedge f_3>0\wedge f_4>0$	$f_{20}<0\wedge f_{18}<0\wedge f_{11}>0$	
	$f_{20}<0\wedge f_{18}>0\wedge f_{11}>0$	$f_{28}>0$
	$f_{11}<0$	
$f_3>0\wedge f_4<0$	$f_8<0\wedge f_{18}<0$	$f_{30}>0\wedge f_{31}>0$
	$f_8<0\wedge f_{18}>0$	$f_{33}>0\wedge f_{31}>0$
$f_3<0\wedge f_4<0$	$f_8<0$	
$f_2>0\wedge f_3<0\wedge f_4>0$	$f_{18}<0$	$f_{28}>0$
	$f_{11}>0\wedge f_{18}>0\wedge f_{23}<0$	$f_{28}>0$
	$f_8<0\wedge f_{18}>0\wedge f_{23}>0$	
	$f_{11}<0\wedge f_{23}<0$	
$f_1<0\wedge f_2<0$		

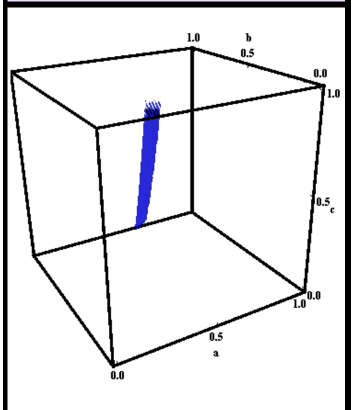
策略(14)



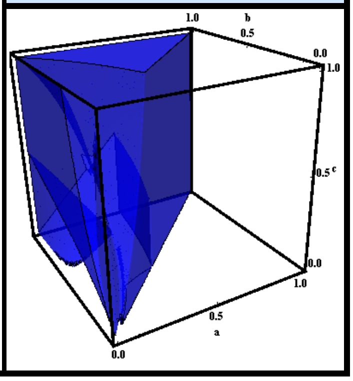
策略(16)



策略(22)



策略(23)



*以上決策盒圖形之聯集即為全決策盒

柒、討論

一、不完全訊息槍手賽局:

以上研究我們皆假設槍手們都知道彼此的命中率，藉此找出最佳策略。然而在現實生活中，槍手們可能不清楚其他槍手們的命中率，所以我們希望能藉由先前研究所建構的全決策盒，討論以下不同情形時，槍手們的**不完美最佳策略**:

***Case* 1: 不知道槍手們的命中率，但知道槍手們過去所選擇的策略。**

***Case* 2: 不知道槍手們的命中率，也不知道槍手們過去所選擇的策略。**

其中未知命中率的討論分為包括自己與不包括自己兩個部分。(此處討論假設除了目標槍手外，其餘槍手皆擁有完全訊息，並選擇了最佳策略)

(一)不知道槍手們的命中率，但知道槍手們過去所選擇的策略:

1.未知命中率(包括自己)，但已知槍手們過去所選擇的策略(第一回合時):

<u>1.1</u> 槍手 C 的不完美最佳策略及最佳混合策略

在全決策盒中，一個決策組合成為最佳策略組合的機率就是其**所占區域體積**。而**槍手 C 在第一回合時，可以知道槍手 A, B 所選的策略**，因此如果我們已知 A 射 B, B 射 A 時，我們有 **P(A射B, B射A)=全決策盒中策略(1),(2),(3)所佔體積和**，我們可以用**條件機率**的方式計算槍手 C 選擇三種策略成為最佳策略的機率得:

$$P(\text{C射A}|\text{A射B, B射A})=\frac{P(\text{C射A, A射B, B射A})}{P(\text{A射B, B射A})}=\frac{\text{全決策盒中策略(1)所佔體積}}{\text{全決策盒中策略(1),(2),(3)所佔體積和}}=0.435865$$

$$P(\text{C射B}|\text{A射B, B射A})=\frac{P(\text{C射B, A射B, B射A})}{P(\text{A射B, B射A})}=\frac{\text{全決策盒中策略(2)所佔體積}}{\text{全決策盒中策略(1),(2),(3)所佔體積和}}=0.125816$$

$$P(\text{C不射}|\text{A射B, B射A})=\frac{P(\text{C不射, A射B, B射A})}{P(\text{A射B, B射A})}=\frac{\text{全決策盒中策略(3)所佔體積}}{\text{全決策盒中策略(1),(2),(3)所佔體積和}}=0.438319$$

故槍手 C 的不完美最佳策略就是<u>**不射擊**</u>。而槍手 C 的不完美最佳混合策略為:

<u>44% - C 射 A</u>　<u>13% - C 射 B</u>　<u>44% - C 不射</u>

以此類推，我們將槍手 A, B 不同策略組合下，槍手 C 的不完美最佳策略及最佳混合策略整理如下(前提 <u>A 不射,B 射 A</u> 和 <u>A 不射,B 不射</u>不發生，故未列出):

槍手 A 的策略	槍手 B 的策略	槍手 C 的不完美最佳策略：純策略	混合策略(%)：C 射 A	C 射 B	C 不射
A 射 B	B 射 A	**C 不射**	43	13	**44**
A 射 B	B 射 C	**C 不射**	26	36	**38**
A 射 B	B 不射	**C 射 A**	**100**	0	0
A 射 C	B 射 A	**C 射 A**	**94**	0	6
A 射 C	B 射 C	**C 射 A**	**77**	23	0
A 射 C	B 不射	**C 射 A**	**100**	0	0
A 不射	B 射 C	**C 射 B**	0	**100**	0

1.2 槍手 B 的不完美最佳策略及最佳混合策略

仿照 1.1 的討論方式，計算槍手 B 選擇三種策略成為最佳策略的機率，便能找出已知槍手 A 策略**(第一回合時，槍手 B 只知道槍手 A 的策略)**的情況下，槍手 B 的不完美最佳策略及最佳混合策略如下:

槍手 A 的策略	槍手 B 的不完美最佳策略			
	純策略	混合策略(%)		
		B 射 A	B 射 C	B 不射
A 射 B	**B 射 A**	**40**	22	38
A 射 C	**B 射 A**	**94**	6	0
A 不射	**B 射 C**	0	**100**	0

1.3 槍手 A 的不完美最佳策略及最佳混合策略

仿照前述方法，但此時**槍手 A 其實是沒有任何資訊的(第一回合)**，計算槍手 A 選擇三種策略成為最佳策略的機率，比較後得:

槍手 A 的不完美最佳策略為: **A 射 C**

槍手 A 的不完美最佳混合策略為: 26% - A 射 B, 38% - A 射 C, 36% - A 不射

2. 未知命中率(包括自己)，但知道槍手們過去所選擇的策略(第一回合後):

2.1 槍手 C 的不完美最佳策略及最佳混合策略

槍手 C 在第一回合後，**所得到的資訊沒有比第一回合多**，因此此部分和 1.1 相同。

2.2 槍手 B 的不完美最佳策略及最佳混合策略

槍手 B 在第一回合後，**比第一回合多得到了槍手 C 的策略**(槍手 C 在槍手 B 之後射擊)。仿照前述方式討論，槍手 B 的**不完美最佳策略**及最佳混合策略如下：

槍手 A 的策略	槍手 C 的策略	槍手 B 的不完美最佳策略			
		純策略	混合策略(%)		
			B 射 A	B 射 C	B 不射
A 射 B	C 射 A	**B 射 A**	**53**	30	17
A 射 B	C 射 B	**B 射 C**	27	**73**	0
A 射 B	C 不射	**B 射 A**	**55**	45	0
A 射 C	C 射 A	**B 不射**	7	20	**73**
A 射 C	C 射 B	**B 射 C**	0	**100**	0
A 射 C	C 不射	**B 射 A**	**100**	0	0
A 不射	C 射 A	**B 射 C**	0	**100**	0
A 不射	C 射 B	**B 射 C**	0	**100**	0

2.3 **槍手 A 的不完美最佳策略及最佳混合策略**

槍手 A 在第一回合後，**比第一回合多得到了槍手 B, C 的策略**。仿照前述方法討論，將槍手 A 的不完美最佳策略及最佳混合策略整理如下:

槍手 B 的策略	槍手 C 的策略	槍手 A 的不完美最佳策略			
		純策略	混合策略(%)		
			A 射 B	A 射 C	A 不射
B 射 A	C 射 A	**A 射 B**	**71**	29	0
B 射 A	C 射 B	**A 射 B**	**100**	0	0
B 射 A	C 不射	**A 射 B**	**97**	3	0
B 射 C	C 射 A	**A 射 C**	29	**70**	1
B 射 C	C 射 B	**A 不射**	10	5	**85**
B 射 C	C 不射	**A 射 B**	**100**	0	0
B 不射	C 射 A	**A 射 C**	6	**94**	0

3. 未知命中率(不包括自己)，但知道槍手們過去選擇的策略(第一回合時):

3.1 **槍手 C 的不完美最佳策略及最佳混合策略**

類似於 1.1 的討論，但我們多了槍手 C 命中率的條件，設已知 $c = p$，則所求為:

$$\mathrm{P}(\mathrm{C射A}\,|\,c = p \wedge \mathrm{A射B,\ B射A}) = \frac{\mathrm{P}(c = p \wedge \mathrm{C射A,\ A射B,\ B射A})}{\mathrm{P}(c = p \wedge \mathrm{A射B,\ B射A})}$$

為了將討論限制在已知槍手 C 的命中率 $c = p$ 的條件下，我們在**全決策盒與平面: $z = p$ 的截面**上進行討論，則一決策成為最佳策略的機率就是**所占區域的面積**。舉例來說，如果我們已知 A 射 B, B 射 A(存在於策略(1),(2),(3)當中)時:

$$\mathrm{P}(c = p \wedge \mathrm{A射B,\ B射A}) = \text{截面上策略(1),(2),(3)所占區域面積}$$

當 p 值不同時，我們將不同策略所占區域面積整理如下:

命中率 c	C 射 A	C 射 B	C 不射	命中率 c	C 射 A	C 射 B	C 不射
0.0	0.321086	0.129618	**0.549296**	0.6	**0.761132**	0.000000	0.238868
0.1	0.361960	0.136100	**0.501940**	0.7	**0.746629**	0.000000	0.253371
0.2	0.315839	0.145857	**0.538304**	0.8	**0.754502**	0.000000	0.245498
0.3	**0.782237**	0.116965	0.100798	0.9	**0.843808**	0.000000	0.156192
0.4	**0.986798**	0.000000	0.013202	1.0	**1.000000**	0.000000	0.000000
0.5	**0.726563**	0.000000	0.273437				

以此類推，我們將槍手 A, B 不同策略組合下，槍手 C 的不完美最佳策略整理如下： (此時沒有混合策略，因為機率的比例並非固定)

槍手 A 的策略	槍手 B 的策略	c 的範圍	槍手 C 的不完美最佳策略
A 射 B	B 射 A	$c < 0.24$	**C 不射**
		$c > 0.24$	**C 射 A**

A 射 B	B 射 C	$c < 0.30$	**C 射 B**
		$0.30 < c < 0.65$	**C 射 A**
		$0.65 < c$	**C 不射**
A 射 B	B 不射	$c < 0.21$	**無**
		$c > 0.21$	**C 射 A**
A 射 C	B 射 A	$c < 0.37$	**C 射 A**
		$c > 0.37$	**C 不射**
A 射 C	B 射 C	無限制	**C 射 A**
A 射 C	B 不射	無限制	**C 射 A**
A 不射	B 射 A	無限制	**無**
A 不射	B 射 C	無限制	**C 射 B**
A 不射	B 不射	無限制	**無**

3.2 槍手 B 的不完美最佳策略及最佳混合策略

仿照 3.1 的方法，但我們有的資訊為槍手 B 的命中率，因此要**在全決策盒與平面: $y = p$ 的截面**上進行討論，因為第一回合時，槍手 B 只知道槍手 A 的決策，因此將槍手 A 不同策略下，槍手 B 的**不完美最佳策略**整理如下：

槍手 A 的策略	b 的範圍	槍手 B 的不完美最佳策略
A 射 B	$b < 0.17$	**B 射 A**
	$0.17 < b < 0.37$	**B 射 C**
	$0.37 < b < 0.79$	**B 射 A**
	$0.79 < b$	**B 射 C**
A 射 C	無限制	**B 射 C**
A 不射	無限制	**B 射 C**

3.3 槍手 A 的不完美最佳策略及最佳混合策略

仿照上述方式討論，但此時槍手 A 其實是沒有任何資訊的(第一回合)，計算槍手 A 選擇三種策略成為最佳策略的機率，比較後得槍手 A 的不完美最佳策略為:

當 $a < 0.56$ => **A 不射**　　　當 $a > 0.56$ => **A 射 C**

4.未知命中率(不含自己)，但知道槍手們過去所選策略(第一回合後):

4.1 槍手 C 的不完美最佳策略及最佳混合策略

槍手 C 在第一回合後，**所得到的資訊沒有比第一回合多**，因此此部分和 3.1 相同。

4.2 槍手 B 的不完美最佳策略及最佳混合策略

槍手 B 在第一回合後，**比第一回合多得到槍手 C 的策略**(槍手 C 在槍手 B 之後射擊)。仿照前述方式討論，槍手 B 的**不完美最佳策略**及最佳混合策略如下:

槍手 A 的策略	槍手 C 的策略	b 的範圍	槍手 B 的不完美最佳策略
A 射 B	C 射 A	$b < 0.38$	**B 射 C**
		$0.38 < b < 0.79$	**B 射 A**
		$0.79 < b$	**B 不射**

A 射 B	C 射 B	無限制	**B 射 C**
A 射 B	C 不射	$b < 0.42$	**B 射 A**
		$b > 0.42$	**B 射 C**
A 射 C	C 射 A	$b < 0.67$	**B 不射**
		$b > 0.67$	**B 射 C**
		$b = 1$	無
A 射 C	C 射 B	$b < 1$	**B 射 C**
		$b = 1$	無
A 射 C	C 不射	$b < 0.12$	**B 射 A**
		$b > 0.12$	無
A 不射	C 射 A	$b < 0.20$	無
		$0.20 < b < 0.33$	**B 射 C**
		$0.34 < b < 0.35$	無
		$0.35 < b < 0.38$	**B 射 C**
		$0.38 < b$	無
A 不射	C 射 B	無限制	**B 射 C**
A 不射	C 不射	無限制	無

4.3 槍手 A 的不完美最佳策略及最佳混合策略

在第一回合後，**槍手 A 比第一回合多得到了槍手 B, C 的策略**(槍手 B, C 都在槍手 A 之後射擊)。仿照前述方法討論，將槍手 A 的不完美最佳策略及最佳混合策略整理如下:

槍手 B 的策略	槍手 C 的策略	a 的範圍	槍手 A 的不完美最佳策略
B 射 A	C 射 A	$a < 0.36$	A 射 B
		$0.36 < a < 0.52$	A 射 C
		$0.52 < a$	A 射 B
B 射 A	C 射 B	$a < 0.50$	A 射 B
		$0.50 < a$	無
B 射 A	C 不射	無限制	A 射 B
B 射 C	C 射 A	$a < 0.35$	A 射 C
		$0.35 < a < 0.54$	A 射 B
		$0.54 < a < 1$	A 射 C
		$a = 1$	無
B 射 C	C 射 B	無限制	A 不射
B 射 C	C 不射	$a < 0.38$	A 射 B
		$a > 0.38$	無
B 不射	C 射 A	無限制	A 射 C
B 不射	C 射 B	無限制	無
B 不射	C 不射	無限制	無

(二)不知道槍手們的命中率，也不知道槍手們過去所選擇的策略:

1.若某槍手不知道槍手 A, B, C 的命中率及另外兩人的策略，問其不完美最佳策略:

同樣地，我們只要在全決策盒中，找出所占區域體積最大的槍手策略，就能找出其不完美最佳策略。依據這三塊區域體積的大小比例，亦能找出 C 的不完美最佳混合策略(分配機率到三個策略上)如下：

	不完美最佳策略	不完美最佳混合策略
槍手 A	**A 射 C**	26% - A 射 B, 38% - A 射 C, 36% - A 不射
槍手 B	**B 射 C**	14% - B 射 A, 58% - B 射 C, 28% - B 不射
槍手 C	**C 射 A**	47% - C 射 A, 44% - C 射 B, 9% - C 不射

2.若某槍手不知道其他槍手們的命中率及另外兩人的策略，問其不完美最佳策略:

2.1 槍手 C 的不完美最佳策略

首先為了將討論限制在已知槍手 C 的命中率 $c = p$ 的條件下，我們在全決策盒與平面: $z = p$ 的截面上進行討論，找出所占區域的面積最大的槍手策略，對於不同地 c 值，我們將結果整理得:

當 $c < 0.29$ => C 射 B　　**當 $c > 0.29$ => C 射 A**

2.2 槍手 B 的不完美最佳策略

仿照 2.1 的方法，但我們有的資訊為槍手 B 的命中率，因此要在全決策盒與平面: $y = p$ 的截面上進行討論。其不完美最佳策略為: **B 射 C**

2.3 槍手 A 的不完美最佳策略

仿照上述方法，但我們有的資訊為槍手 A 的命中率，因此要在全決策盒與平面: $x = p$ 的截面上進行討論，將槍手 A 的不完美最佳策略整理如下表:

當 $a < 0.56$ => A 不射　　**當 $a > 0.56$ => A 射 C**

此部分地結果，我們可以清楚的看出順序所造成的影響，例如槍手 C 選擇射 A 或射 B 的臨界值為 0.29，槍手 A 選擇不射或射 C 的臨界值為 0.56。而這些臨界值是因為**槍手的射擊順序**所造成的。

二、決策盒及決策空間所提供的訊息:

(一)槍手賽局:

從以上的研究及討論，我們將全決策盒能提供的訊息整理如下:

1.三人的最佳策略(純策略):　所有訊息(三位槍手的命中率及過去之行動)公開。

2.不知道槍手們(不包括自己)的命中率，但知道槍手們過去所選擇的策略

3.不知道槍手們(包括自己)的命中率，但知道槍手們過去所選擇的策略

4.若某槍手不知道其他槍手們的命中率及另外兩人的策略，其不完美最佳策略

5.若某槍手不知道槍手 A, B, C 的命中率及另外兩人的策略，其不完美最佳策略

(二)一般化賽局(推廣至依序賽局):

我們先約定一些代號於下頁。

1.玩家: n 位，$\Omega_1,\Omega_2,\ldots,\Omega_n$，遊戲順序為 $\Omega_1,\Omega_2,\ldots,\Omega_n$。

2.變數(影響玩家策略選擇): m 個，$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$。

3.策略集: 玩家 Ω_i 的策略記為 $\{\sigma_{\Omega_i}\}$。

4.最佳策略組合: $(\overline{\sigma_{\Omega_1}},\overline{\sigma_{\Omega_2}},\ldots,\overline{\sigma_{\Omega_n}})$

5.訊息集: (1)行動訊息集 $\{\overline{\sigma}\}$: 過去槍手們的行動(所選策略)。

(2)變數訊息集 $\{\overline{\alpha}\}$: 數個已知變數所成之集合，為 $\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m\}$ 之子集。

6.全決策空間: 全決策盒之推廣，在 m 維(每一變數皆視為在軸上移動之便量)直角座標系中，將每一點$(x_1, x_2, x_3,\ldots)$對應到 $\alpha_1 = x_1, \alpha_2 = x_2,\ldots, \alpha_n = x_n$ 時，玩家 $\Omega_1,\ldots,\Omega_n$ 的最佳策略組合$(\overline{\sigma_{\Omega_1}},\overline{\sigma_{\Omega_2}},\ldots,\overline{\sigma_{\Omega_n}})$。

<u>全決策空間提供之訊息</u>:

- 對於**任意**玩家，若所有變數及過去玩家策略皆為已知(也就是完全訊息賽局)，則藉由全決策空間與最佳策略組合的對應關係，我們能知道每位玩家的最佳策略。
- 對於**任意**玩家，在缺乏**任意變數值**或**其他玩家過去的行動**資訊的賽局時，我們亦可以找出其不完美最佳策略及不完美最佳混合策略。

<u>我們舉一例說明</u>:

設有三位**業者** $\Omega_1,\Omega_2,\Omega_3$，其中 Ω_1 販賣商品甲及乙、Ω_2 販賣商品乙及丙、Ω_3 販賣商品丙及甲；今三位業者欲**與他人競爭**，而依其調整價格之影響力輪流出招(因調價候影響力低者對他人不易造成傷害，故會因影響力高者調價後的結果而變動價格。設其影響力(即為出招順序)為 $\Omega_1,\Omega_2,\Omega_3,\Omega_1\ldots$)，例如：$\Omega_1$ 可選擇**調降**甲之**價格**(**即為攻擊** Ω_3)，調降乙之價格(即為攻擊 Ω_2)或選擇不調整價格，記為其策略集 $\{\sigma_{\Omega_1}\}$ (而 Ω_2 有策略集 $\{\sigma_{\Omega 2}\}$、Ω_3 有策略集 $\{\sigma_{\Omega 3}\}$)；當 Ω_1 選擇一策略時，具**使他人倒閉之機率** α_1(則未使他人倒閉之機率為 $1-\alpha_1$)，而自己存在著**倒閉之風險** α_2(自己未倒閉之機率為 $1-\alpha_2$。Ω_2 則有 α_3 α_4、Ω_5 則有 α_5 α_6)。總結以上規則，經討論後可得出一全決策空間，即可由一組機率值 $[(\alpha_1,\alpha_2),(\alpha_3,\alpha_4),(\alpha_5,\alpha_6)]$ 對應到一組三業者之最佳策略組合$(\overline{\sigma_{\Omega_1}},\overline{\sigma_{\Omega_2}},\overline{\sigma_{\Omega_{n3}}})$。如應用此全決策空間與行動訊息集 $\{\overline{\sigma}\}$ 及變數訊息集 $\{\overline{\alpha}\}$ 加以討論後，更能得出當不知道業者如何出招或他人之攻擊率與風險值時(若**業者**第一次與他人競爭，**未知此市場情況時**)，其不完美最佳策略！

然而，現實生活中的市場競爭，並非會是場你死我活的零合遊戲，也不一定出招後就會有使他人退出的機率、或只承擔一定風險；有時可能是兩業者同時攻擊一方或經幾次的攻擊後對方才退出……等，更多不確定且複雜的因素影響著我們的決策；因此，未來**我們想以三人槍手遊戲的設計方法為藍圖，加入<u>自由式賽局</u>中多變的概念，進行更深入的探討！**

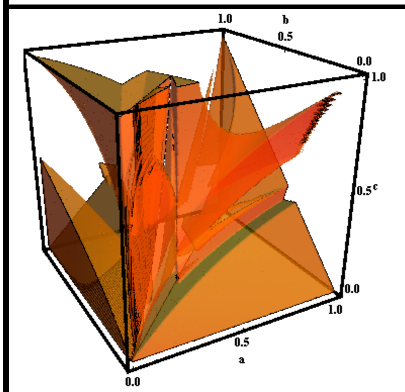
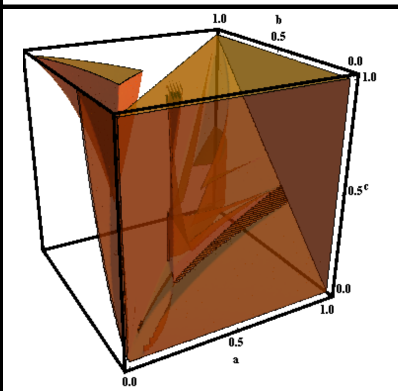
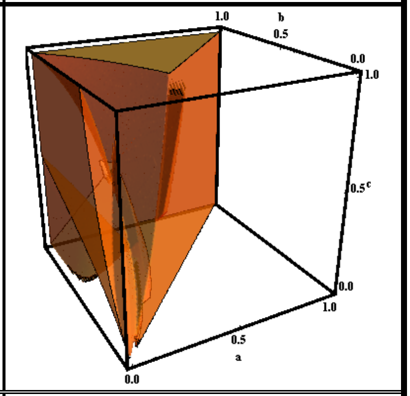
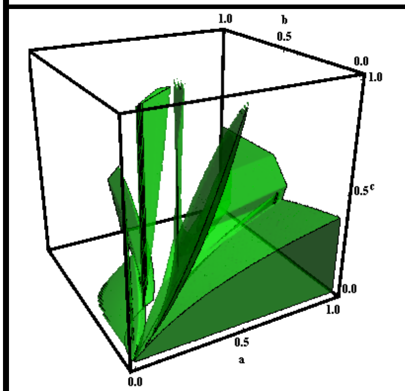
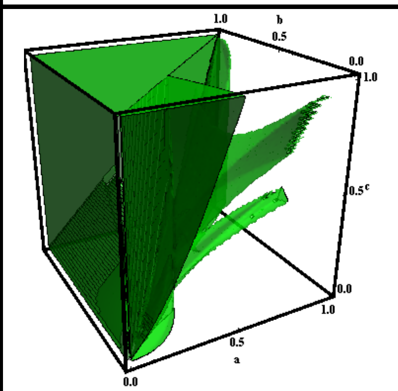
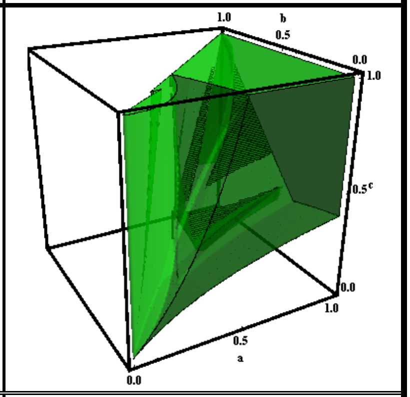
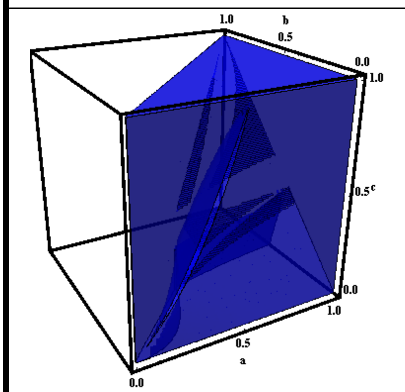
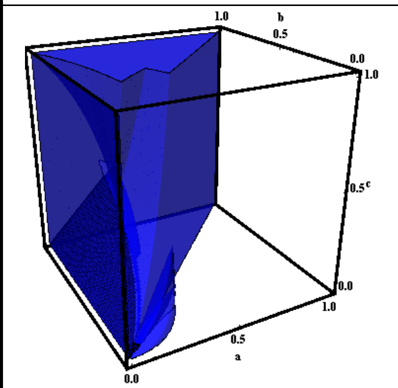
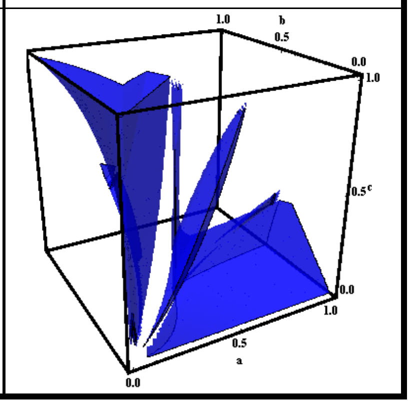
捌、研究結論

一、兩人槍手賽局中，我們利用馬可夫性質或幾何的方式，計算出兩人策略選擇的 Nash 平衡解，及其選擇最佳策略時的勝率:

1.槍手選擇射擊的勝率較不射擊的勝率大。且槍手 A, B (A 先射擊)的勝率值如下: $P_{Awin} = \dfrac{a}{1-(1-a)(1-b)}$ $P_{Bwin} = \dfrac{(1-a)b}{1-(1-a)(1-b)}$

2.假使可以選擇射擊順序，則選擇先射的勝率較選擇後射的勝率大。

二、三人槍手賽局中，我們利用轉移矩陣計算勝率值，比較後建構出三人槍手賽局的全決策盒。而下表為三槍手選擇該策略的區域圖形:

A 射擊 B	A 射擊 C	A 不射擊
		
B 射擊 A	B 射擊 C	B 不射擊
		
C 射擊 A	C 射擊 B	C 不射擊
		

三、引進全決策盒的概念後，將三人槍手賽局的結果推演到不完全資訊賽局的策略選擇如下:

1.缺乏所有槍手(含自身)命中率訊息

		槍手 A				槍手 B				槍手 C			
策略訊息公開	第一回合	**A 射 C**				A 射 B 或 A 射 C: **B 射 A** A 不射: **B 射 C**				已知 A,B 策略組合， 同第一回合後之情形			
	第一回合後		C 射 A	C 射 B	C 不射		C 射 A	C 射 B	C 不射		B 射 A	B 射 C	B 不射
		B 射 A	**射 B**	**射 B**	**射 B**	A 射 B	**射 A**	**射 C**	**射 A**	A 射 B	**不射**	**不射**	**射 A**
		B 射 C	**射 C**	**不射**	**射 B**	A 射 C	**不射**	**射 C**	**射 A**	A 射 C	**射 A**	**射 A**	**射 A**
		B 不射	**射 C**	**無**	**無**	A 不射	**射 C**	**射 C**	**無**	A 不射	**無**	**射 B**	**無**
策略訊息不公開		**A 射 C**				**B 射 C**				**C 射 A**			

2.缺乏其他槍手(不含自身) 命中率資訊

		槍手 A				槍手 B				槍手 C			
策略訊息公開	第一回合	(0.00,0.56)- **A 不射** (0.56,1.00)- **A 射 C**				A 射 B	**(.00, .17):B 射A　(.17, .37):B射C (.37, .79):B 射A　(. 79, 1]:B射C**			已知 A, B 策略組合， 同第一回合後之情形			
						A 射 C	**B 射 C**						
						A 不射	**B 射 C**						
	第一回合後	B \ C	射A	射B	不射	A \ C	射A	射B	不射	A \ B	射A	射C	不射
		射A	**(.00, .36):射B (.36, .52):射 C (.52, 1]:射 B**	**(.00, .50):射B (.50, 1]-射 C**	**A 射 B**	射B	**(.00, .38):射C (.38, .79):射 A (.79, 1]:不射**	**射C**	**(.00,.42):射A (.42, 1]:射 C**	射B	**(.00, .24):不射 (.24, 1]:射 A**	**(.00, .30):射B (.30, .65):射 A (.65, 1]:不射**	**(.00, .21):不發生 (.21, 1]:射 A**
		射C	**(.00, .35):射C (.35, .54):射B (.54, 1):射C *a*=1:不發生**	**A 不射**	**(.00, .38):射B (.38, 1]:不發生**	射C	**(.00, .67):不射 (.67, 1):射C *b*=1:不發生**	**(.00, 1):射C *b*=1:不發生**	**(.00,.12):射A (.12, 1]:無**	射C	**(.00, .37):射A (.37, 1]:不射**	**射A**	**射A**
		不射	**射C**	**不發生**	**不發生**	不射	**(.00, .20):不發生 (.20, .33):射C (.33, .35):不發生 (.35, 38):射C (.38, 1]:不發生**	**射C**	**不發生**	不射	**不發生**	**射B**	**不發生**
策略訊息不公開		**a < 0.56:　A 不射 a > 0.56:　A 射 C**				**B 射 C**				**c < 0.29:　C 射 B c > 0.29:　C 射 A**			

四、將全決策盒推廣到一般賽局的全決策空間，提供了賽局理論一種新的討論方式，將可同時完成完全信息賽局及不完全信息賽局的分析。

玖、應用

一、賽局的問題，在生活上俯拾皆是，決策盒提供一種選擇策略的方法，不是盲目的孤注一擲，而是根據部份或是完全的訊息做決定。主要可以用在經濟行為的判斷上，因為行為是複雜的，需要訊息的支持來做決定。現在的世界各國經濟行為與訊息流動紊亂，正好可以利用研究結果分析訊息，並提供決策參考選擇。我們不是專家，但我們可以利用槍手問題中，輪流射擊出招的概念去分析並知悉事情的本質，避免盲從或徬徨，理性的思考分析各種行動。

二、近幾年全球暖化的問題十分嚴重，日本的災難，資源的耗竭，讓大家不得不重視環境問題。如何演化出和自然界的合作關係，這是賽局理論的另一個層面。我們可以用「槍手問題」的概念，去剖析這些現象出現的成因，尋找線索，解決或改善這樣的困境，建立合作的機智。

拾、未來展望

一、我們希望能討論當槍手人數增加時，槍手們的選擇有哪些共通性或規律。

二、實際將決策空間的概念應用在形形色色的賽局中。試著尋找更多隱藏在決策空間中尚未發現的資訊。

三、改變槍手賽局的遊戲規則(例如:增加槍手們的射擊次數、改變槍手承受重槍次數等等)，對於更複雜的賽局進行分析。

拾壹、參考資料

一、Len Fisher(2009)。剪刀、石頭、布：生活中的賽局理論。天下文化。

二、Roger A. McCain(2008)。Game Theory, a Non-Technical Introduction to the Analysis of Strategy。智勝文化。

三、姚景星、劉睦雄。1976。賽局淺說。數學傳播。第一卷第三期

四、董志強(2008)。大師不在的聖經.永遠舉其篤定的智慧。御書房。

【評語】040409

本作品探討一結合機率之序列賽局問題。此實以超出中學數學範圍，但作者勇於挑戰，並掌握決策空間的概念，誠屬不易。