中華民國第51屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組　數學科

佳作

040408

共邊三角形的內切圓

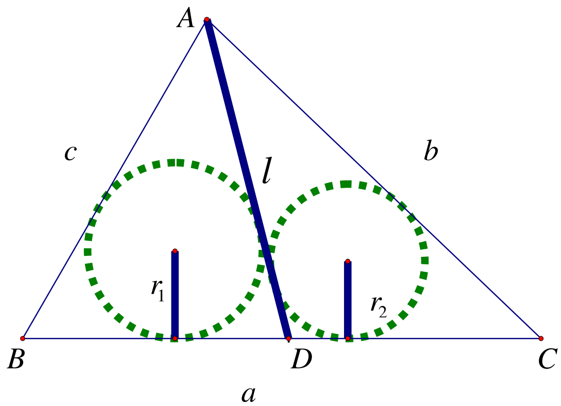
學校名稱：臺北市立中山女子高級中學

作者：	指導老師：
高二 陳俐安 高二 陳品璇	柯明錦

關鍵詞：三角形、內切圓半徑、最大值

共邊三角形的內切圓！

摘要



本文主要研究共邊三角形的內切圓半徑，如圖，給定任意$\triangle ABC$，D爲$\overline{BC}$邊上的任一動點，分別用r_1, r_2表示$\triangle ABD, \triangle ACD$內切圓的半徑，則$r_1 = r_2$時，$r_1 + r_2$有最大值。若將此圖看成在一個公園裡有四條路$\overline{AB}, \overline{AD}, \overline{AC}, \overline{BC}$，今興建圓形湖泊並利用木棧道連接湖的中心與馬路，若要求湖的中心到路的距離和$3(r_1 + r_2)$最大使遊客們能充分欣賞美景以促進光觀效益，則此時$r_1 = r_2$。最後也將此性質推廣到多圓的情形。

壹、研究動機

2009 年中華人民共和全國初中數學競賽四川省初賽的題目：「在直角三角形中，AD爲斜邊BC上的高，$\overline{AC} = 3$，$\overline{AB} = 4$分別用r_1, r_2, r_3表示$\triangle ABD, \triangle ACD, \triangle ABC$內切圓的半徑，則$r_1 + r_2 + r_3 = \dfrac{12}{5}$。」我們發現$\dfrac{12}{5}$剛好就是斜邊上的高，若放寬條件爲：一、$\overline{AD}$不爲高，二、$\angle A \neq 90°$，三、多個圓的情形，那共邊三角形的內切圓半徑有何特殊關係性質呢？

貳、研究目的

如上圖，

一、$\triangle ABC$爲直角三角形，$\angle A = 90°$，$\overline{AD}$爲$\overline{BC}$邊上的高，分別用r_1, r_2, r_3表示$\triangle ABD, \triangle ACD, \triangle ABC$內切圓的半徑，則$r_1, r_2, r_3$的關係爲何？

二、$\triangle ABC$爲直角三角形，$\angle A = 90°$，D爲$\overline{BC}$邊上的任一動點，分別用r_1, r_2表示$\triangle ABD, \triangle ACD$內切圓的半徑，則何時$r_1 + r_2$有最大值？

三、$\triangle ABC$ 爲直角三角形，$\angle A=90°$，D 爲 $\overline{BC}$ 邊上的任一動點，分別用 r_1,r_2 表示 $\triangle ABD,\triangle ACD$ 內切圓的半徑，則何時 $r_1^2+r_2^2$ 有最大值？

四、給定任意 $\triangle ABC$，D 爲 $\overline{BC}$ 邊上的任一動點，分別用 r_1,r_2 表示 $\triangle ABD,\triangle ACD$ 內切圓的半徑，則何時 r_1+r_2 有最大值？

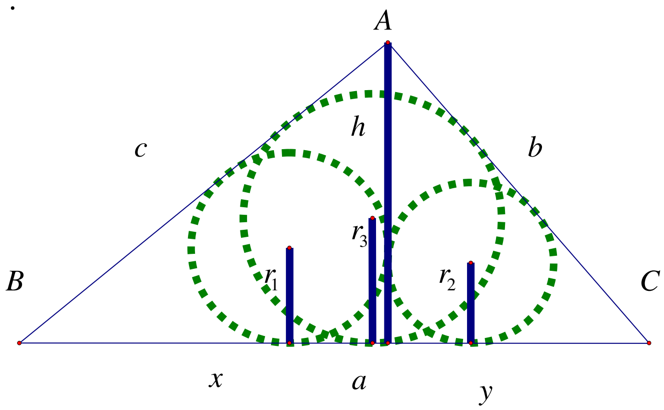
參、研究設備及器材

Maple、*GSP*

肆、研究過程或方法

一、$\triangle ABC$ 爲直角三角形，$\angle A=90°$，$\overline{AD}(=h)$ 爲 $\overline{BC}$ 邊上的高，分別用 r_1,r_2,r_3 表示 $\triangle ABD,\triangle ACD,\triangle ABC$ 內切圓的半徑，則 $r_1+r_2+r_3=h$。

證明：

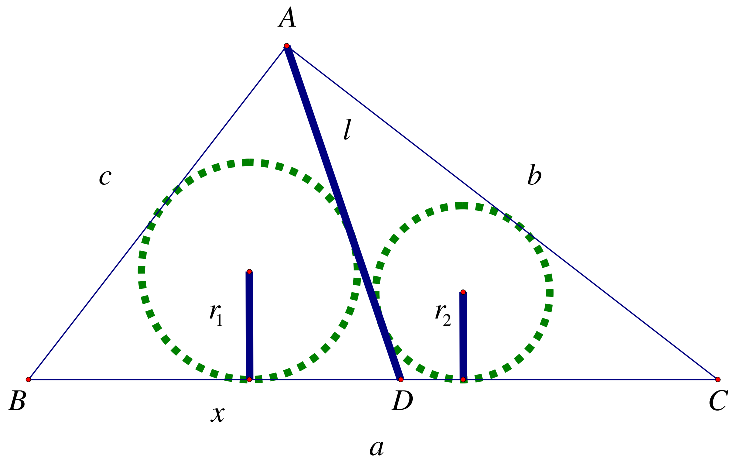


因爲 $c^2=ax,b^2=ay,cb=ah$，故 $r_1+r_2+r_3=\dfrac{xh}{c+h+x}+\dfrac{yh}{b+h+y}+\dfrac{ah}{a+b+c}$

$$=h(\frac{x}{c+h+x}+\frac{y}{b+h+y}+\frac{a}{a+b+c})=h(\frac{\frac{c^2}{a}}{c+\frac{bc}{a}+\frac{c^2}{a}}+\frac{\frac{b^2}{a}}{b+\frac{bc}{a}+\frac{b^2}{a}}+\frac{a}{a+b+c})$$

$$=h(\frac{c^2}{ac+bc+c^2}+\frac{b^2}{ab+bc+b^2}+\frac{a}{a+b+c})=h(\frac{c}{a+b+c}+\frac{b}{a+b+c}+\frac{a}{a+b+c})=h\cdot 1$$

二、$\triangle ABC$ 爲直角三角形，$\angle A = 90°$，D 爲 $\overline{BC}$ 邊上的任一動點，分別用 r_1, r_2 表示 $\triangle ABD, \triangle ACD$ 內切圓的半徑，則何時 $r_1 + r_2$ 有最大值？



首先先用特殊直角三角形，
例如：$3,4,5$ ，$5,12,13$ ，$7,24,25$ 先猜測出上述答案後，再證明猜測爲真。

證明(一)：

設 $\overline{BD} = x$ ，則由餘弦定理可得 $\overline{AD} = l = \sqrt{c^2 + x^2 - 2cx \times \frac{c}{a}}$

$\triangle ABD = \frac{1}{2} x \frac{bc}{a} = \frac{1}{2}(c + x + l) r_1 \Rightarrow r_1 = \frac{bcx}{a(c + x + l)}$

$\triangle ACD = \frac{1}{2}(a - x)\frac{bc}{a} = \frac{1}{2}(b + a - x + l) r_2 \Rightarrow r_2 = \frac{(a - x)bc}{a(b + a - x + l)}$

令 $f(x) = r_1 + r_2$

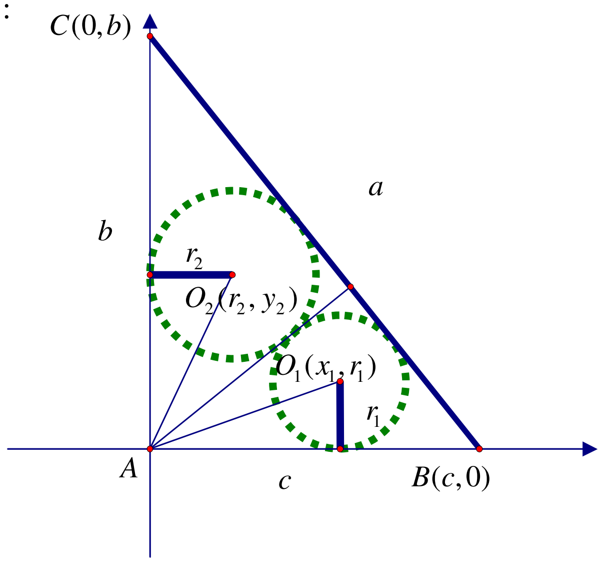
解 $f'(x) = 0$ 可得 $x = \dfrac{c^2 + (b - c)\sqrt{\frac{bc}{2}}}{a}$(可利用 $Maple$)

代入 $\overline{AD}$ ，可得 $\overline{AD} = l = \sqrt{\frac{bc}{2}}$

代入 r_1 ，可得 $r_1 = \frac{bc}{2a} \cdot (1 - \frac{\sqrt{2bc}}{a + b + c})$

另外利用 GSP 發現當 $r_1 = r_2$ 時，$f(x) = r_1 + r_2$ 有最大值，故我們嘗試以算幾不等式來證明此一性質成立。

證明(二)：



利用點線距公式知

$$r_1=\frac{|bx_1+cr_1-bc|}{\sqrt{b^2+c^2}}=\frac{-(bx_1+cr_1-bc)}{a}\ldots(1)$$

$$r_2=\frac{|br_2+cy_2-bc|}{\sqrt{b^2+c^2}}=\frac{-(br_2+cy_2-bc)}{a}\ldots.(2)$$

又 $\angle O_1AO_2=45°$

故 $x_1r_2+r_1y_2=\sqrt{x_1^2+r_1^2}\sqrt{r_2^2+y_2^2}\cos 45°$

$$=\sqrt{x_1^2+r_1^2}\sqrt{r_2^2+y_2^2}\sin 45°=|\begin{vmatrix}x_1 & r_1\\ r_2 & y_2\end{vmatrix}|=x_1y_2-r_1r_2\ldots(3)$$

將(1)(2)代入(3)

$$\frac{ar_1+cr_1-bc}{-b}r_2+r_1\frac{ar_2+br_2-bc}{-c}=\frac{ar_1+cr_1-bc}{-b}\cdot\frac{ar_2+br_2-bc}{-c}-r_1r_2$$

$$\Rightarrow -cr_2(ar_1+cr_1-bc)-br_1(ar_2+br_2-bc)=(ar_1+cr_1-bc)(ar_2+br_2-bc)-bcr_1r_2$$

$$\Rightarrow 2a(a+b+c)r_1r_2-bc(a+b+c)(r_1+r_2)+b^2c^2=0$$

$$\Rightarrow r_1r_2-\frac{bc(a+b+c)}{2a(a+b+c)}(r_1+r_2)+\frac{b^2c^2}{2a(a+b+c)}=0$$

$$\Rightarrow r_1r_2-\frac{bc}{2a}(r_1+r_2)+\frac{b^2c^2}{2a(a+b+c)}=0$$

又 $\frac{r_1+r_2}{2}\geq\sqrt{r_1r_2}$

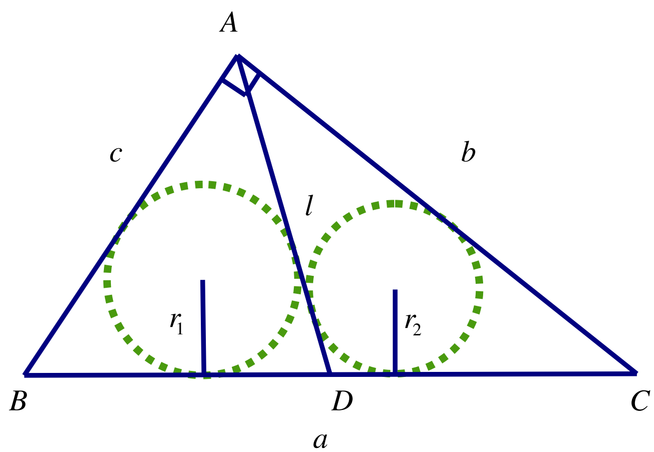
$$\Rightarrow \frac{r_1+r_2}{2} \ge \sqrt{\frac{bc(r_1+r_2)}{2a} - \frac{b^2c^2}{2a(a+b+c)}}$$

$$\Rightarrow r_1+r_2 \le \frac{bc}{a}\cdot(1-\frac{\sqrt{b+c-a}}{\sqrt{b+c+a}}) = \frac{bc}{a}\cdot(1-\frac{\sqrt{2bc}}{a+b+c})$$

等號成立時 $r_1 = r_2 = \frac{bc}{2a}\cdot(1-\frac{\sqrt{2bc}}{a+b+c})$

此解與用 *Maple* 微分算出的結果一致，當 $r_1 = r_2$ 時， r_1+r_2 有最大值。

三、$\triangle ABC$ 爲直角三角形，$\angle A = 90°$，D 爲 $\overline{BC}$ 邊上的任一動點，分別用 r_1, r_2 表示 $\triangle ABD, \triangle ACD$ 內切圓的半徑，則何時 $r_1^2 + r_2^2$ 有最大值？



由先前的證明可知 $r_1r_2 - \frac{bc}{2a}(r_1+r_2) + \frac{b^2c^2}{2a(a+b+c)} = 0$ ，

且 $r_1+r_2 \le \frac{bc}{a}\cdot(1-\frac{\sqrt{b+c-a}}{\sqrt{b+c+a}}) = \frac{bc}{a}\cdot(1-\frac{\sqrt{2bc}}{a+b+c})$ 。

故 $r_1^2+r_2^2 = (r_1+r_2)^2 - 2r_1r_2 = (r_1+r_2)^2 - 2[\frac{bc}{2a}(r_1+r_2) - \frac{b^2c^2}{2a(a+b+c)}]$

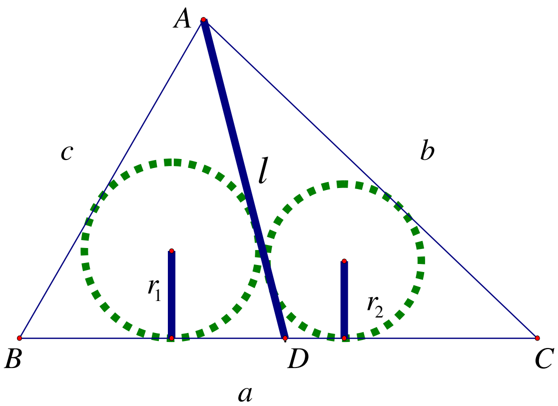
$$= (r_1+r_2)^2 - \frac{bc}{a}(r_1+r_2) + \frac{b^2c^2}{a(a+b+c)}$$

$$= [(r_1+r_2) - \frac{bc}{2a}]^2 + \frac{b^2c^2}{a(a+b+c)} - \frac{b^2c^2}{4a^2}$$

又 $\frac{bc}{2a} \le \frac{bc}{a}\cdot(1-\frac{\sqrt{2bc}}{a+b+c})$ ，故當 $r_1+r_2 = \frac{bc}{a}\cdot(1-\frac{\sqrt{2bc}}{a+b+c})$ 時， $r_1^2+r_2^2$ 有最大值。

此時 $r_1 = r_2 = \frac{bc}{2a}\cdot(1-\frac{\sqrt{2bc}}{a+b+c})$ 。

四、放寬限制，給定任意$\triangle ABC$，D 爲$\overline{BC}$邊上的任一動點，分別用r_1, r_2表示$\triangle ABD, \triangle ACD$內切圓的半徑，則$r_1+r_2$何時有最大值？



證明(一)：

設$\overline{BD}=x$，則由餘弦定理可得$\overline{AD}=l=\sqrt{c^2+x^2-2cx\cos B}$，

其中$\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$，

$$\triangle ABD=\frac{1}{2}cx\sin B=\frac{1}{2}(c+x+l)r_1 \Rightarrow r_1=\frac{bx\sin B}{(c+x+l)}$$

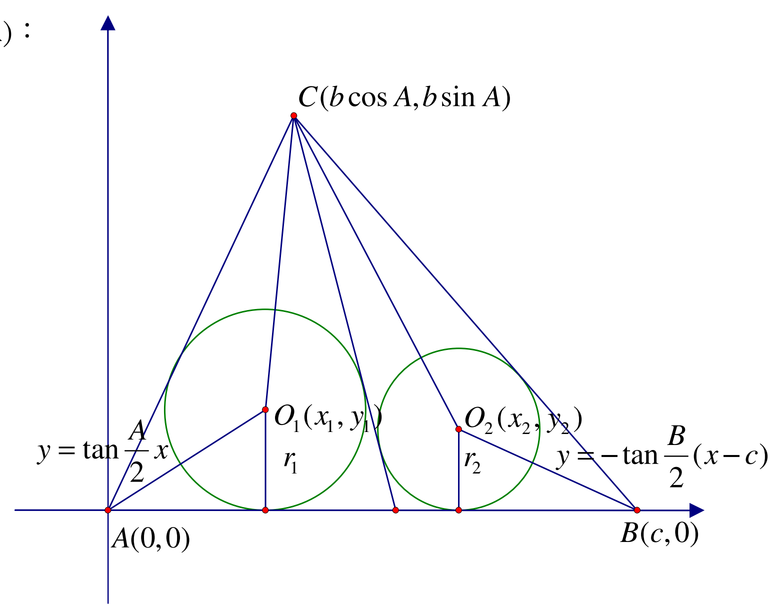
$$\triangle ACD=\frac{1}{2}(a-x)b\sin B=\frac{1}{2}(b+a-x+l)r_2 \Rightarrow r_2=\frac{(a-x)b\sin B}{(b+a-x+l)}$$

令$f(x)=r_1+r_2$

解$f'(x)=0$可得$x=??$

此微分式子並不好解，故使用座標化。

證明(二)：



已知： $y_1 = \tan\frac{A}{2}\cdot x_1$ …….①

$y_2 = -\tan\frac{B}{2}\cdot(x_2 - c)$ …….②

$$\frac{m_{CO_2} - m_{CO1}}{1 + m_{CO_2}\cdot m_{CO1}} = \frac{\frac{y_2 - b\sin A}{x_2 - b\cos A} - \frac{y_1 - b\sin A}{x_1 - b\cos A}}{1 + \frac{y_2 - b\sin A}{x_2 - b\cos A}\cdot\frac{y_1 - b\sin A}{x_1 - b\cos A}}$$

$$= \frac{(x_1 - b\cos A)(y_2 - b\sin A) - (x_2 - b\cos A)(y_1 - b\sin A)}{(x_2 - b\cos A)(x_1 - b\cos A) + (y_2 - b\sin A)(y_1 - b\sin A)} = \tan\frac{C}{2} \text{ …….③}$$

求 $r_1 + r_2 = y_1 + y_2$ 之最大値

因爲 $\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}} = \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$ ，

由①得 $x_1 = \frac{\sin A}{1-\cos A} y_1 = \frac{1+\cos A}{\sin A} y_1$ ，

由②得 $x_2 = c - \frac{\sin B}{1-\cos B} y_2 = c - \frac{1+\cos B}{\sin B} y_2$ ，

代入③得

$$\frac{(\frac{1+\cos A}{\sin A} y_1 - b\cos A)(y_2 - b\sin A) - (c - \frac{1+\cos B}{\sin B} y_2 - b\cos A)(y_1 - b\sin A)}{(c - \frac{1+\cos B}{\sin B} y_2 - b\cos A)(\frac{1+\cos A}{\sin A} y_1 - b\cos A) + (y_2 - b\sin A)(y_1 - b\sin A)} = \tan\frac{C}{2}$$

$$\frac{(\frac{1+\cos A}{\sin A} y_1 - b\cos A)(y_2 - b\sin A) - (a\cos B - \frac{1+\cos B}{\sin B} y_2)(y_1 - b\sin A)}{(a\cos B - \frac{1+\cos B}{\sin B} y_2)(\frac{1+\cos A}{\sin A} y_1 - b\cos A) + (y_2 - b\sin A)(y_1 - b\sin A)} = \frac{1-\cos C}{\sin C}$$

比較 y_1 及 y_2的係數

y_1 係數爲 $(-b - b\cos A - a\cos B)\sin C - (1-\cos C)(a\cos B\cdot\frac{1+\cos A}{\sin A} - b\sin A)$ ，

$$= (-b-c)\sin C - (1-\cos C)(\frac{a\cos B + a\cos B\cos A - b\sin^2 A}{\sin A})$$

$$= (-b-c)\sin C - (1-\cos C)(\frac{a\cos B + a\cos B\cos A - b(1-\cos^2 A)}{\sin A})$$

$$= (-b-c)\sin C - (1-\cos C)(\frac{a\cos B - b + c\cos A}{\sin A})$$

$$=(-b-c)\sin C-(1-\cos C)(\frac{a\cos B-a\cos C}{\sin A})$$

$$=(-b-c)\sin C-(1-\cos C)a(\frac{\cos B-\cos C}{\sin A})$$

y_2 係數為 $(-b\cos A-b\sin A\cdot\frac{1+\cos B}{\sin B})\sin C-(1-\cos C)(b\cos A\cdot\frac{1+\cos B}{\sin B}-b\sin A)$

$$=\frac{-b\cos A\sin B-b\sin A-b\sin A\cos B}{\sin B}\sin C-(1-\cos C)\frac{b\cos A+b\cos A\cos B-b\sin A\sin B}{\sin B}$$

$$=\frac{-b\sin C-b\sin A}{\sin B}\sin C-(1-\cos C)\frac{b\cos A+b\cos(A+B)}{\sin B}$$

$$=\frac{-c\sin B-a\sin B}{\sin B}\sin C-(1-\cos C)\frac{b\cos A-b\cos C}{\sin B}$$

$$=(-a-c)\sin C-(1-\cos C)a\frac{(\cos A-\cos C)}{\sin A}$$

又 $(2R\sin B-2R\sin A)(2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2})=2\sin^2\frac{C}{2}\cdot 2R\cdot(\cos A-\cos B)$

$$\Leftrightarrow(\sin B-\sin A)\cdot\cos\frac{C}{2}=\sin\frac{C}{2}\cdot(\cos A-\cos B)$$

$$\Leftrightarrow\frac{(\sin B-\sin A)}{(\cos A-\cos B)}=\frac{\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{C}{2}}$$

$$\Leftrightarrow\frac{2\cos\frac{B+A}{2}\sin\frac{B-A}{2}}{-2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}}=\tan\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow\cot\frac{B+A}{2}=\tan\frac{C}{2}$$

故 $(b-a)\sin C=(1-\cos C)\frac{a}{\sin A}(\cos A-\cos B)$

因此可知當 $r_1=r_2\,(y_1=y_2)$ 時，$r_1+r_2=y_1+y_2$ 有最大值。

伍、研究結果

一、 $\triangle ABC$ 爲直角三角形， $\angle A = 90°$ ， $\overline{AD}(=h)$ 爲 $\overline{BC}$ 邊上的高，分別用 r_1, r_2, r_3 表示 $\triangle ABD, \triangle ACD, \triangle ABC$ 內切圓的半徑，則 $r_1 + r_2 + r_3 = h$ 。

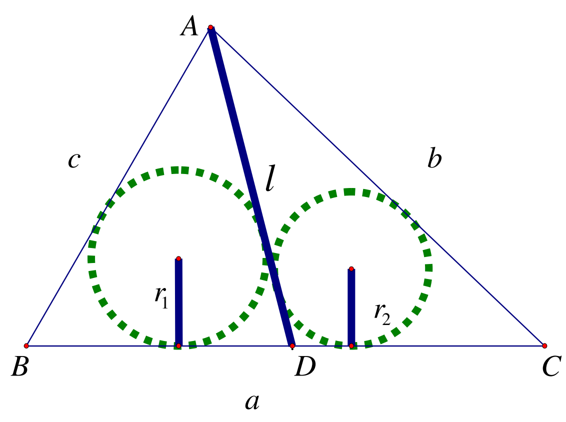
二、直角 $\triangle ABC$ ， $\angle A = 90°$ ，D 爲 $\overline{BC}$ 邊上任一動點，分別用 r_1, r_2 表示 $\triangle ABD, \triangle ACD$ 內切圓的半徑，則當 $r_1 = r_2$ 時， $r_1 + r_2$ 有最大值 $\frac{bc}{a} \cdot (1 - \frac{\sqrt{2bc}}{a+b+c})$ ，而此時 $\overline{AD} = \sqrt{\frac{bc}{2}}$ 。

三、 $\triangle ABC$ 爲直角三角形， $\angle A = 90°$ ，D 爲 $\overline{BC}$ 邊上的任一動點，分別用 r_1, r_2 表示 $\triangle ABD, \triangle ACD$ 內切圓的半徑，則當 $r_1 = r_2$ 時，時 $r_1^2 + r_2^2$ 有最大值。

四、給定任意 $\triangle ABC$ ，D 爲 $\overline{BC}$ 邊上的任一動點，分別用 r_1, r_2 表示 $\triangle ABD, \triangle ACD$ 內切圓的半徑，則當 $r_1 = r_2$ 時， $r_1 + r_2$ 有最大值。

陸、討論

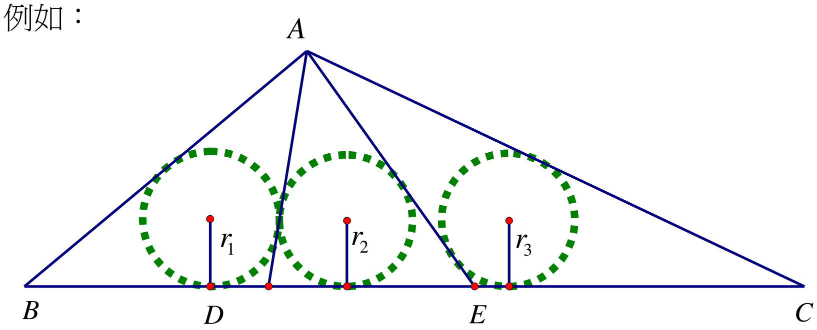
一、實用性



若將此圖看成在一個公園裡有四條路 $\overline{AB}, \overline{AD}, \overline{AC}, \overline{BC}$，今興建圓形湖泊並利用木棧道連接湖的中心與馬路，若要求湖的中心到路的距離和 $3(r_1 + r_2)$ 最大使遊客們能充分欣賞美景，則此時 $r_1 = r_2$ 。

二、任意三角形中的多個內切圓的情況：

例如：



$\triangle ABC$ 為直角三角形，D, E 為 $\overline{BC}$ 邊上的動點，分別用 r_1, r_2, r_3 表示 $\triangle ABD, \triangle ADE, \triangle ACE$ 內切圓的半徑，則 $r_1+r_2+r_3$ 何時有最大值？

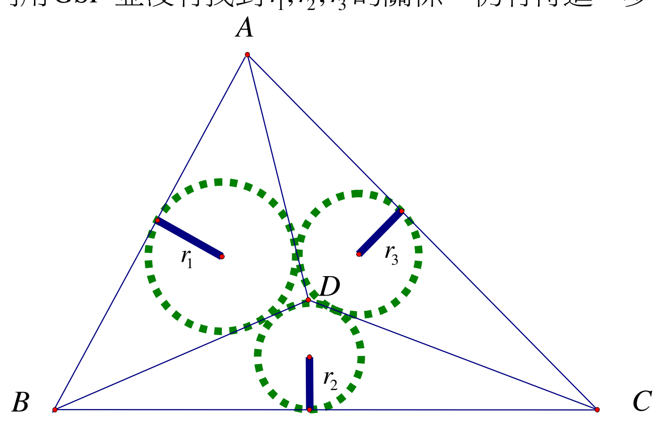
利用 GSP 可知當 $r_1=r_2=r_3$ 時，$r_1+r_2+r_3$ 有最大值。

固定 r_1，假設 $r_2 \neq r_3$，則 r_2+r_3 不為最大值，故此時 $r_1+r_2+r_3$ 不可能為最大值，若要最大值則需 $r_2=r_3$。若有更多的內切圓，其半徑的和的最大值，亦是在所有半徑相等時。

三、若將點移到三角形內部，形成如下的命題：

給定任意 $\triangle ABC$，D 為 $\triangle ABC$ 內部的任一動點，分別用 r_1, r_2, r_3 表示 $\triangle ABD, \triangle BCD, \triangle CAD$ 內切圓的半徑，則 $r_1+r_2+r_3$ 的最大值為何？

目前利用 GSP 並沒有找到 r_1, r_2, r_3 的關係，仍有待進一步研究。



柒、參考資料及其他

一、2009 年中華人民共和全國初中數學競賽四川省初賽

二、高中數學第二冊課本：第二章三角函數(一)、第三章三角函數(二)

【評語】040408

此作品主要是探討三角形內部圓半徑和或半徑平方和在什麼情況下最大，探討過程以簡御繁、有趣，並有些有趣應用，適合高中程度作品。