中華民國第51屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組　數學科

040407

由單目標非線性最佳化求解『鋼管訂購和運輸最佳化問題』

學校名稱：國立馬祖高級中學

作者：	指導老師：
高二 陳芊蓉	洪　儒
高一 賴宜聖	胡裕仁
高二 林念錡	

關鍵詞：非線性規劃、最佳化、目標函數

摘要

本文是籍由國中及高中所學的數學知識，來解決一些基本的線性規劃，進而來設計並解決一套複雜的工程問題，本研究透過一些電腦程式來協助我們計算相關的數學限制式，並且成功地算出若干結果，雖然電腦計算時有時算出的結果可能是非最佳的，但是在一般圖論問題及最佳化的 NP-hard 問題中，都存在此種現象，也就是在電腦演算中，可能會掉落到局部最佳解的問題，未來本研究將修改部分限制式，並結合遺傳基因或神經網路演算法來強化相關的限制式，企圖調整並設計出一套新的計算方法，使新方法可以應用到更複雜的加強型線路鋪設示意圖，及更多的工程科學計算問題。

壹、研究動機(Introduction)

在學校的專題課中，老師給了我們了一些問題，希望我們可以自己或是以小組的方式去思考解決，而那些問題好像都要查找很多資料及文獻，我們本身有也很多都看不懂，而為了完成本次的專題報告，我只好挑一個看起來比較簡單的題目來進行研究，在本研究中，我們以**單目標非線性最佳方法**求解『鋼管訂購和運輸最佳化問題』如下圖1。來嘗試利用其他的非線性數學工具來求解，因為非線性規劃常出現的問題是非線性的問題可能具有非凸性(nonconvex)，使得在求解的過程中陷入局部最佳解，試圖建立一套數學模型來解決並探討類似供應鏈之多目標決策問題。

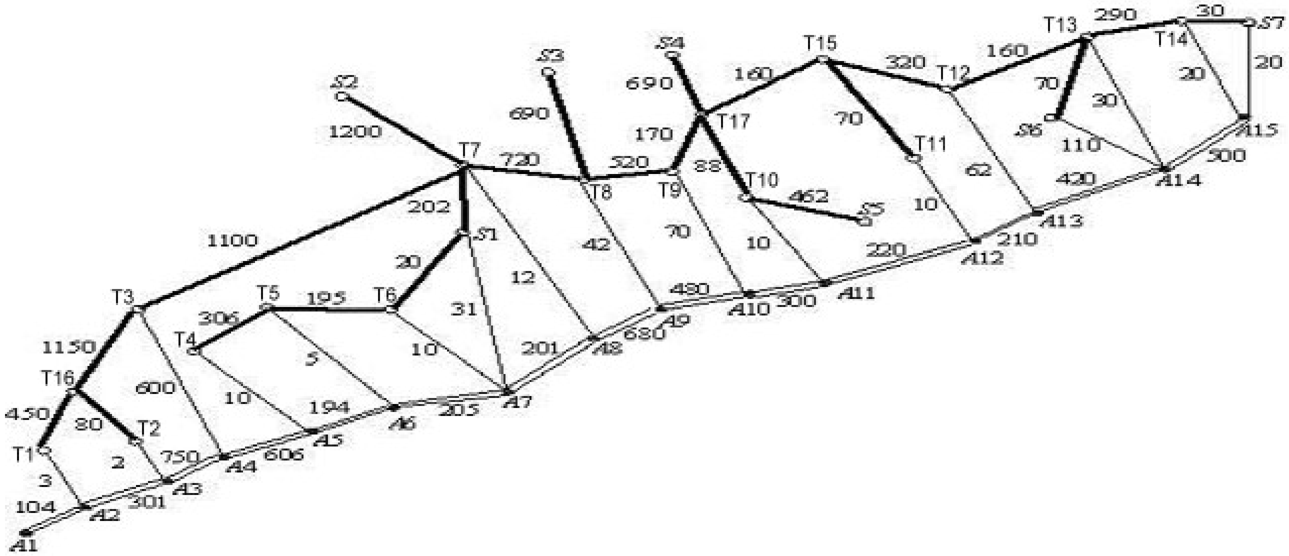

圖 1：線路鋪設示意圖

貳、研究目的(Expected Results)

在圖 1 的線路鋪設示意圖中我們假設：要鋪設一條 $A_1 \to A_2 \to A_3 \to \ldots \to A_{15}$ 的輸送天然氣的主要管線，如(圖 1)所示。經篩選之後可以生產這種主管道的鋼管的的鋼管工廠有 7 家，分別以 S_1、S_2、⋯、S_7 表示。

在圖中單線及粗線表示公路，雙線表示要鋪設的管道(假設沿管道或者原來有公路，或者建有施工公路)，圓圈表示公車站，每段公路和管道旁的阿拉伯數字表示里程(單位 km)。

為方便計，我們假設條件如下：

1. 1km 主管道鋼管稱為 1 單位鋼管。
2. 若一個鋼廠如果承擔製造這種鋼管，至少需要生產 500 個單位。
3. 鋼管工廠在指定期限內能生產出鋼管的最大數量為 s_i 個單位，鋼管出廠銷售價 1 單位鋼管為 p_i 萬元、如(表 1)所示：

表 1：鋼管工廠的銷售單價表							
i	1	2	3	4	5	6	7
s_i	800	800	1000	2000	2000	2000	3000
p_i	160	155	155	160	155	150	160

公路運輸費用為 1 單位鋼管每公里 0.1 萬元（不足整公里部分按整公里計算)，其中鋼管可由公路運往鋪設地點（不只是運到圖 1 中的 A_i 點，而是管道全線)。

因為對某些多目標最佳化問題選出一個適當的解答方法是非常不容易的，沒有存在任何方法在每一個情況之下可以被歸納為最佳的方法，因為有很多的可能性要被考慮而且許多的比較準則具有些許不確定的特徵。一些方法可能適合某些問題，而一些決策者可能比其他的決策者好，所以在一個解決的方法被選出來之前，要被解決的問題的特性、潛在因素和的型態都需要被規劃出來。

本研究中我們將以電腦程式方式探討解決二項問題，說明如下：

（1）製定一個主管道鋼管的訂購和運輸計畫，使總費用最小（給出總費用)。

（2）並就（1）的數學模型分析：那個鋼廠鋼管的銷售價的變化對購運計畫和總費

用影響最大，那個鋼廠鋼管的產量的上限的變化對購運計畫和總費用的影響最大，並給出相應的數字結果。

參、研究過程(Materials and Methods)

一般進行最佳化的線性規劃都以下列 2 項方式進行[7]：一、權重法：這是最古老也是最常用的方式，假設有多目標 f1、f2 及 f3，那麼可以設有三個權重，w1、w2、w3，總合為 1，按問題的觀點，來給予適當的權重，例如：認為 f1 比較重要，f3 次之，f2 較不重要，可設成 f = 0.5*f1+0.4*f3+0.1*f2。如此一來，多目標的形式轉成單目標，同時「線性」不會變成「非線性」。二、限制法：先分別求出各個目標函數的最佳解，接著挑出一個作主要目標函數，其餘目標函數轉成限制條件，並以各自最佳解作參考限制允許量，適當放寬(比最佳解多一點)，多目標問題轉成單目標問題，不改變線性的效果。本研究兼採權重法及限制法來設計相關的問題變數，其假設條件及變數定義如下所示：

一、假設條件

(1) 在決定鋼廠鋼管訂購計劃時，以 0.001 個單位即『公尺』來計算，使本研究在理論上可以獲得更精確的結果。

(2) 在運輸及鋪設鋼管的過程中，鋼管數量不考慮損耗發生。

(3) 除運費之外不考慮其他外在變因的存在。

二、變數定義

(1) 設 A_j 表示樹形圖中的第 j 個（$j=1$，2，…，15）頂點。

(2) 設 S_i 表示樹形圖中的第 i 個（$i=1$，2，…，7）鋼鐵廠。

(3) 設 T_i 表示樹形圖中的第 i 個（$i=1$，2，…，17）公車站。

(4) 設 c_{ij} 表示樹形圖中 S_i 運送一個單位的鋼管到 A_j 的最小運輸費用。

(5) 設 U_i 表示在樹形圖中的鋼廠 S_i（$i=1$，2，…，7）生產這種鋼管的數量。

(6) 設 t_k 表示在樹形圖中的第 k 段（$k=1$，2，…，14）管道的長度。

(7) (y_i) 表示 y_i 的小數部分。

(8) $[y_i]$表示 y_i 的整數部分。

三、問題分析

本研究目標主要在於無論利用那一條運輸路線，最後目標是鋪設到主管道線上的每單位鋼管均要經過與它所在位置相鄰的一個主管道頂點，因此可將管道的鋪設分成兩個過程：

（1） 先將鋼管堆積到主管道頂點 A_j 。

（2） 以主管道頂點 A_j 沿其鄰接的主管道線進行鋪設。

3.1 **運輸費用函數分析-公路**

因為運輸費用最省之地方，即最低運輸點的確定，經濟學家韋伯[2]認為，運輸成本對工業區位的影響是最重要的，總運費最小的地點就是工業生產的最優區位。其中總運費由兩部分組成，一是把原料從原料地運送到工廠的原料運輸費用，二是把產品從工廠運送到市場的產品運輸費用。在本研究中我們利用第一點來分析如下：由於運費是距離和重量的函數，因此對於任何一個工業區位，總運費差異的產生一方面是運輸距離長短的不同，另一方面是由於原料各具特點，以至需要運輸的貨物總重量不同。而運輸費用是運輸物品(原料與產品)之重量與距離的函數，因本研究不考慮重量，故假設運輸費用 Y 與路線長度 d 的函數關係為 $Y(d)$ 、即 Y 為 d 的函數。

3.2 **公路運輸費用計算分析**

在本研究中我們將不足 1 公里的路線部分取整數公里計算，在圖 1 中各段公路因為均為整數，因此，在運輸鋼管到頂點 A_j 的過程中，不存在不足 1 公里的問題，而將鋼管由 A_j 沿主管道鋪設，鋪設的長度等於鋼管的總長度，可能會出現不足 1 公里的情形，因此，需處理從 A_j 鋪設過程中出現非整數公里的問題，假設從頂點 A_j 向右沿主管道線鋪設 y_i 公里的鋼管。

(1) 若 $y_i \in Z$，鋪設費用=$y_j \times 1 \times 0.1 + (y_j - 1) \times 1 \times 0.1 + ... + 1 \times 1 \times 0.1 = \dfrac{y_j(y_j+1)}{20}$。

(2) 若 $y_i \notin Z$ ，鋪設費用 = $y_j \times 1 \times 0.1 + (y_j - 1) \times 1 \times 0.1 + ... + (y_j) \times 1 \times 0.1 =$

$\dfrac{[y_j]([y_j]+1)}{20} + \dfrac{(y_j)([y_j]+1)}{10}$。

在實際計算中，由於對 $y_i \in Z$ 情形不易計算，但我們考慮 $\Delta P_j = |\dfrac{y_j(y_j+1)}{20} - (\dfrac{[y_j]([y_j]+1)}{20} + \dfrac{(y_j)([y_j]+1)}{10})| = \dfrac{(y_j)-(y_j)^2}{20}$ ，$0 \le (y_j) < 1$。

若 $y_j = 0.5$ 時，ΔP_j 最大為 0.0125。同理，若由頂點 A_j 向左沿主管道鋪設 $y_j' = t_{j-1} - y_{j-1}$，

其費用總誤差為 $\sum_{i=2}^{14} \Delta P_i + \sum_{j=2}^{15} \Delta P_i' \le 27 \times \dfrac{0.5 - 0.5^2}{20} = 0.3375$（萬元）。

由於在管道工程的架設花費的資金往往數十億到百億，相比之下其誤差應可忽略，另外為簡化計算，本研究之後將不考慮小數部分的影響，即無論 y_i 是否為整數，都將鋪設費用表示為 $\dfrac{y_j(y_j+1)}{20}$。

3.3 工廠生產費用及是否願意生產分析

本研究中，假設一個工廠願負擔製造這種鋼管，則該工廠至少需要生產 500 個單位，另考慮若工廠 S_i 到各頂點 A_k 的最小費用均比工廠 S_j 的費用低，若該工廠願生產此種鋼管任務，且在 S_i 生產上限允許的條件下，這 500 個單位的鋼管完全由 S_j 來生產，此時總費用會下降，因此為了使費用最少，要考慮應由那些廠負責生產及那些廠不要生產這種鋼管的任務，最後以最佳化的理論中的單一目標非線性規劃法來解決本研究所提的問題，且開始進行電腦數值計算。

3.4 單目標非線性規劃法

在圖 1 中因為鋼管工廠數目少，我們先假設 7 個工廠都負擔生產任務，之後再以高中數學的線性規劃，來分析所有結果，最後再決定那些工廠不要生產，若變數 x_{ij} 表示由工廠 S_i 運往 A_j 點的鋼管數量，變數 y_j（ $j \ge 2$ ）表示由 A_j 點沿主管道向右鋪設的鋼管

數量。

因此每一工廠生產此種鋼管數量上下限範圍區間、(如式1)。

$$500 \le \sum_{j=1}^{15} x_{ij} \le s_i \text{，} i=1\text{，}2\text{，}\cdots\text{，}7\text{---------------(式 1)}$$

對於變數 y_j（ $j \ge 2$ ）的限制區間、(如式2)。

$$0 \le y_j \le t_j \text{，} j=2\text{，}3\text{，}\cdots\text{，}14\text{---------------(式 2)}$$

由於在 A_j 點的鋼管必須全部鋪設到與其鄰接的主管道線上，於是對於節點 A_2 有

$$\sum_{i=1}^{7} x_{i2} = 104 + y_2 \text{------(式 3)}$$

對於其他節點 A_j（ $j=3$，4，…，15）有

$$\sum_{i=1}^{7} x_{ij} = t_{j-1} - y_{j-1} + y_j \text{，} j=3\text{，}4\text{，}\cdots\text{，}14\text{-----(式 4)}$$

對於其他節點 A_{15}（ $j=3$，4，…，15）有

$$\sum_{i=1}^{7} x_{i15} = 500 - y_{14} \text{------(式 5)}$$

在此我們利用韋伯[2]的區位理論來設計變數如下：

$$Q = M + Y + P \text{------(式 6)}$$

$$M = \sum_{i=1}^{7} (p_i \sum_{j=1}^{15} x_{ij}) \text{------(式 7)}$$

$$Y = \sum_{i=1}^{7} \sum_{j=1}^{15} c_{ij} x_{ij} \text{------(式 8)}$$

$$P = \frac{104 \times 105}{20} + \sum_{j=2}^{14} [\frac{y_j(y_j+1)}{20} + \frac{(t_j - y_j)(t_j - y_j + 1)}{20}] \text{------(式 9)}$$

Q：總費用。

M：表示購買鋼管的費用。

Y：表示由鋼廠到主管道線上各節點處的運輸費用。

P：表示由各節點向其鄰接的主管道線鋪設鋼管的費用。

綜合上列結果我們可以得出一組研究結果，即在本研究(圖 1)中的簡易型線路鋪設的單目標非線性規劃目標函數、如(式10)中的 Q。

因為本研究盡可能要找出使 Q 的結果最小，即最小化 Q；以順利解決問題（1）中製定

一個主管道鋼管的訂購和運輸計畫，進而使總費用最小，因此我們設計出的目標函數如下(式 10)所示：

$$Q=\sum_{i=1}^{7}\sum_{j=1}^{15}c_{ij}x_{ij}+\sum_{i=1}^{7}(p_i\sum_{j=1}^{15}x_{ij})+(\frac{104\times105}{20}+\sum_{j=2}^{14}[\frac{y_j(y_j+1)}{20}+\frac{(t_j-y_j)(t_j-y_j+1)}{20}] \quad (式\ 10)$$

其中 Q 必須滿足由(式 1)至(式 5)的五組限制式。

表 3-1：鋼廠 S1~S7 到各節點 A1~15 最短路徑長度(單位公里)

	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7
A1	3009	4007	4217	4907	4767	4927	5177
A2	2905	3903	4113	4803	4663	4823	5073
A3	2534	3532	3742	4432	4292	4452	4702
A4	1902	2900	3110	3800	3660	3820	4070
A5	531	1933	2143	2833	2693	2853	3103
A6	220	1622	1832	2522	2392	2542	2792
A7	31	1433	1643	2333	2193	2353	2603
A8	214	1212	1422	2112	1972	2132	2382
A9	964	1962	732	1422	1282	1442	1692
A10	1512	2510	1280	930	790	950	1200
A11	1710	2708	1478	788	472	808	1058
A12	1852	2850	1620	930	790	630	880
A13	2154	3152	1922	1232	1092	292	542
A14	2432	3430	2200	1510	1220	110	500
A15	2562	3460	2330	1640	1500	380	20

經計算得到各鋼廠 S1~S7 到各節點 A1~A15 最短路徑(公路部分)如表 3-1 代入式 10 中，並滿足式 1 到式 5 的五組限制式，我們在平面上任意兩點間的最小費用路線計算如下是利用列舉法來計算，即將圖中所有的路線費用計算出來，再兩兩比較何者

最小，因列舉法過於繁雜且較無效率，因此未來本研究將考慮延伸並利用非監督的演算法來進行電腦計算。

在本研究的問題（2）中我們對（1）的數學模型分析：那個鋼廠鋼管的銷售價的變化對購運計畫和總費用影響最大，那個鋼廠鋼管的產量的上限的變化對購運計畫和總費用的影響最大。經由分析目標函數Q中的參數型態，我們對此最佳化的目標函數中的銷售價格P_i和工廠生產數量上限s_i進行分析。

表 3-2：鋼廠 S1~S7 到各節點 A1~15 訂購數量與運輸路徑

	訂購數量	運輸路徑	路徑長
S2→A2	179.002	S2→T7→T3→T16→T1→A2	3903
S3→A3	312.7816	S3→T8→T7→T3→T16→T2→A3	3742
S5→A3	495.21	S5→T10→T17→T9→T8→T7→T3→T16→T2→A3	4292
S1→A4	22.889	S1→T6→T5→T4→A5→A4	1137
S2→A4	320.9647	S2→T7→S1→T6→T5→T4→A5→A4	2539
S3→A4	19.3608	S3→T8→T7→S1→T6→T5→T4→T5→A4	2749
S5→A4	104.7868	S5→T10→T17→T9→T8→T7→S1→T6→T5→T4→A5→A4	3299
S1→A5	311.611	S1→T6→T5→T4→A5	531
S1→A6	200.0038	S1→T6→T5→A6	220
S1→A7	265.4961	S1→A7	31
S2→A8	300.0023	S2→T7→A8	1212
S3→A9	664.0011	S3→T8→A9	732
S5→A10	350.9673	S5→T10→T17→T9→A10	790
S5→A11	410.0015	S5→T10→A11	472
S7→A12	96.00341	S7→T14→T13→T12→T15→T11→A12	880
S6→A13	278.9964	S6→T13→T12→A13	292
S7→A13	48.9981	S7→T14→T13→T12→A13	542

	訂購數量	運輸路徑	路徑長
S6→A14	431.0038	S6→A14	110
S7→A15	354.9985	S7→A15	20

在進行計算之前我們先考慮相關名詞定義如下：

繼節點：由一點到另一點的一條路中，最後一個中間節點稱為這條路上的繼節點。我們先考慮圖 1 中任兩點間只經過公路的最短路徑，再考慮圖中任兩點只經過公路的最小費用，之後再將已知不超過 k（$k=1,2,\mathbf{L},n-3$）個繼節點的最小費用路徑的基礎上，求有 $k+1$ 個轉折點的最小費用路徑及其費用值，最後，將全部具有 k（$k=0,1,2,\mathbf{L},n-2$）的最小費用路徑相比較，即可求出任意兩點之間的最小費用路徑及最小費用值。因為此研究是考慮在固定地圖上的結果故我們利用研究全局最短路徑問題，來求圖中所有的最短路徑。本研究利用 Floyd-Warshall 算法（Floyd-Warshall algorithm）是解決任意兩點間的最短路徑的一種算法，因為它可以正確處理有向圖或負權的最短路徑問題[5]。

Floyd-Warshall **演算法的原理**：設 $D_{i,j,k}$ 為從 i 到 j 的只以 $(1..k)$ 集合中的節點為中間節點的最短路徑的長度。若最短路徑經過點 k，則 $D_{i,j,k} = D_{i,k,k-1} + D_{k,j,k-1}$；若最短路徑不經過點 k，則 $D_{i,j,k} = D_{i,j,k-1}$。因此，$D_{i,j,k} = \min(D_{i,k,k-1} + D_{k,j,k-1}, D_{i,j,k-1})$。

3.5 **演算法步驟**

(1) 將公路視為一組圖 $G=(V,E)$，$|V|=n$，並針對公路分別定義矩陣 $B=(b_{ij})_{n\times n}$ 如下

$$b_{ij}=\begin{cases}\text{點}v_i\text{和點}v_j\text{之間的鐵路長度}, & \text{若}v_i\text{和}v_j\text{之間有公路直接相連接}\\ \infty & ,\ \text{若}v_i\text{和}v_j\text{之間無公路直接相連接}\\ 0 & ,\ \text{若}i=j\end{cases}$$

(2) 由 Floyd-Warshall 算法[6]求出任兩點之間只經過公路的最短距離矩陣 B_1 及前繼節點矩陣 $\widetilde{B}_1$。

(3) 由矩陣 B_1 求出任意兩點之間只經過公路的最短距離矩陣 $B^{(1)}$ 及前繼節點矩

陣 $\widetilde{B}^{(1)}$ 。

(4) 對於任意v_i，$v_j \in V$ 以 $b_{ij}^{(2)} = \min_{v_t \in V}(b_{it}^{(1)} + b_{tj}^{(1)})$，$\widetilde{b}_{ij}^{(1)}$ 為取最小值時候的t，並生成 $B^{(2)}$ 及 $\widetilde{B}^{(2)}$ ，即為從點v_i先經過公路再經過左或向右往公路到點v_j的最小費用矩陣和前繼節點矩陣。

(5) Floyd-Warshall 演算法的描述如下：

```
for k ← 1 to n do
  for i ← 1 to n do
    for j ← 1 to n do
      if (D_{i,k} + D_{k,j} < D_{i,j}) then
        D_{i,j} ← D_{i,k} + D_{k,j};
```

其中 $D_{i,j}$ 表示由點 i 到點 j 的代價，當 $D_{i,j}$ 為 ∞ 表示兩點之間沒有任何連接。

3.6 程式模擬及設備說明

1. 本研究在模擬計算時，要注意注意初始化條件，因為不同的初始值影響的差異極大：具有良好的效果。
2. 演算法虛擬碼：

```
/* Assume a function edgeCost(i,j) which returns the cost of the edge from i to j
  (infinity if there is none).
  Also assume that n is the number of vertices and edgeCost(i,i) = 0 */
int path[][];
/* A 2-dimensional matrix. At each step in the algorithm, path[i][j] is the shortest path
  from i to j using intermediate vertices (1..k−1).  Each path[i][j] is initialized to
  edgeCost(i,j) or infinity if there is no edge between i and j. */
procedure FloydWarshall ()
  for k := 1 to n
     for i := 1 to n
        for j := 1 to n
           path[i][j] = min ( path[i][j], path[i][k]+path[k][j] );
```

3. 軟體部分：Ultra Edit 中文 9.0 版。

   gcc version 3.4.4

   Office2003 (Excel 2003/Word 2003)。

肆、　結論與討論(Results and Discussion)

本研究的目標函數是非線性的，所得結果-問題(1)的最小費用為 1535420.832 萬元，問題（2）中 S5 鋼廠鋼管的銷售價的變化對購運計畫和總費用影響最大，S1 鋼廠鋼管的產量的上限的變化對購運計畫和總費用的影響最大。

一般多目標求解目前仍無完美的作法，一般都是自己把多目標轉成單目標，然後再用單目標的方式求解，由於不存在完全滿足每個目標的最優解，因此多目標的解往往是折衷的最佳解。經電腦計算之後我們發現若要鋪設的管道不是一條線，而是一個樹形圖，且由公路和管道所構成網路圖(如圖 2)，就這種情形而言，本研究可以找出一般化的解決

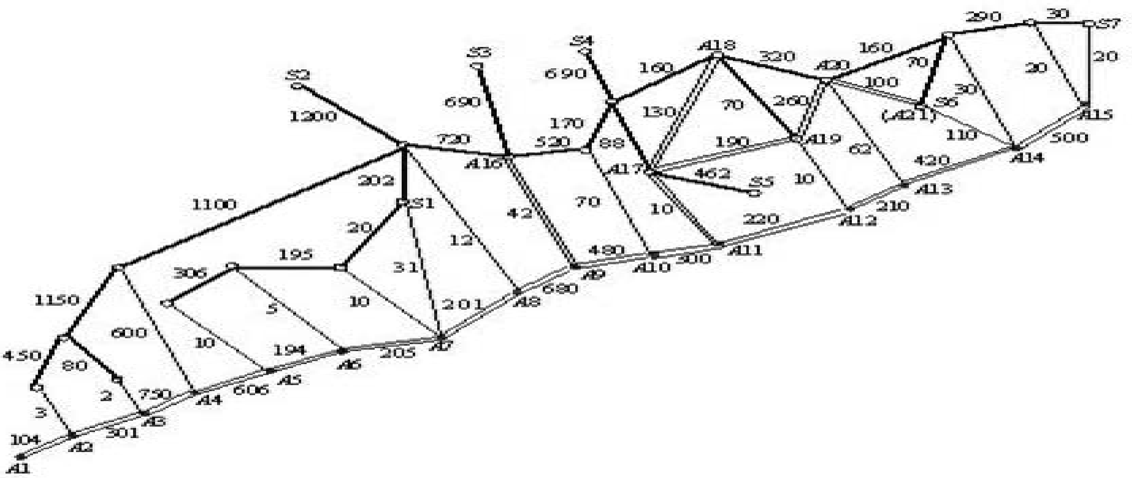

圖 2：加強型線路鋪設示意圖

方案，雖然其結果可能是非最小成本，但那是受限制於一般圖形及最佳化的 NP-hard 問題都容易落入計算時，或電腦演算法中的局部最佳解的問題，未來本研究將修改部分限制式，並結合遺傳基因或神經網路演算法來強化相關的限制式，企圖調整並設計出一套新的計算方法，使新方法可以應用到如圖 2 的加強型線路鋪設示意圖，及更多的工程科學計算問題。

伍、參考資料(References)

[1] 韓中庚、宋明武、邵廣紀，數學建模競賽，北京科學出版社，2007。

[2] 韋伯工業區位元模式的本質，http://nkm85.com/~kawai/geog/c1.pdf。

[3] 循環流 Circulation，http://www.csie.ntnu.edu.tw/~u91029/Circulation.html。

[4] 吳建陸，求解多目標混合整數非線性規劃之啟發式演算法，逢甲大學工業工程研究所碩士論文，2003。

[5] 最短路問題，維琪百科，http://zh.wikipedia.org/zh-hk/%E5%9B%BE%E8%AE%BA%E6%9C%80%E7%9F%AD%E8%B7%AF。

[6] 佛洛德演算法，維琪百科，http://zh.wikipedia.org/zh-hk/Floyd-Warshall%E7%AE%97%E 6%B3%95。

[7] 用 matlab 解線性規劃，http://tw.knowledge.yahoo.com/question/question?qid=1405112314285。

【評語】040407

此作品唯一非線性規劃最佳化問題，作者從此問題求其數學模式，進而求其解，在整個解題過程中看不出有新的解法，特殊解法或比較簡單的解，整個作品欠缺創意，此作品作為科展作品並不太適合。