中華民國第51屆中小學科學展覽會

作品說明書

高中組　數學科

最佳創意獎

040406

點線之間—一個從點掃略到線掃略的問題探討

學校名稱：臺北市立建國高級中學

作者：	指導老師：
高二 李宇凡	李宗熹
高二 沈威銓	

關鍵詞：軌跡、圓錐曲線、包絡線

作品名稱：點線之間—一個從點掃略到線掃略的問題探討

摘要

有一三角形 ABC，一點 M 在三角形邊 AC 上，一圓以 BM 為直徑，交 AB、AC 分別於 P、Q，找出圓經 P、Q 作切線之交點 R，當 M 在 AC 上做變動時動點 R 之軌跡為何？首先從特殊三角形的軌跡問題開始著手。再將原問題延伸，使原本的軌跡再對另一動點進行掃略，如使三角形頂點 B 於一平行邊 AC 的直線上、任意給定的直線上、過 A 及 C 之圓上(不含以 AC 為直徑的圓)等三種情形移動並利用幾何軟體「顯示軌跡」功能觀察其掃略圖形邊界，並試假設其為何種特殊圖形，並嘗試證明猜測的結論。最後嘗試研究此種特殊圖形的特殊性質並推廣之。

壹、研究動機

在 Crux Mathematicorum with Mathematical Mayhem 31:No 1 February 2005 這本雜誌上的一個有趣題目：證明一點 M 若在銳角三角形邊 AC 上，以 BM 為直徑座圓，交 AB、AC 分別於 P、Q，找出圓經 P、Q 作切線之交點 R，當 M 在 AC 上做變動時之軌跡為一線段。由於參考文獻中僅討論銳角三角形的情況，並未處理任意三角形的情形，因其在銳角三角形時所呈現的軌跡特性相當特殊，故欲研究並推廣之。

貳、研究目的

一、　研究任意三角形根據定義作出之軌跡及其性質，並予以證明。

二、　使頂點在特定的條件下移動，研究線掃略軌跡特性

三、　研究線掃略包絡線性質

參、研究設備及器材

一、　電腦軟體：GSP4.07、Microsoft Office Word 2003、Maple12。

二、　其他：紙、筆、圓規、尺。

肆、研究過程或方法

一、　軌跡問題：一點M若在三角形邊AC上，一圓以BM為直徑，交AB、BC分別於P、Q，圓經P、Q作切線之交點R，當M在AC上做變動時之軌跡為一線段且存在特定比例關係

利用GSP中「顯示軌跡」的功能畫出R點的軌跡，可發現其為一線段。特別地，觀察到線段兩

端點恰爲M和A重合和M與C重合時分別以AB邊與AC邊爲直徑圓，過其與兩邊交點做切線得到的點，這裡我們先稱他們分別爲T與S。又可知所有以BM爲直徑的圓恆過AC邊上一定點H(這裡的H即爲B在AC上的投影點)

這給予我們一個證明的想法：如果能證明恆有∠HRT+∠HRS=180° ，那就表明了T、R、S 恆三點共線，即R點軌跡即爲TS線段

先證明銳角三角形的情形

我們來看看端點動點R之間的一些關係

令AB直徑圓交BC於A'，BC直徑圓交AC於C'

由 B A'HA 及 BQHP 兩組四點共圓

可得∠AA'H =∠ABH=∠PQH 以及∠HAA'=∠A'BH=∠HPQ

所以△HAA'～△HPQ…(1)

又∠PRQ =180° －2∠ABC=∠ATA'，即等腰△TAA'～等腰△RPQ…(2)

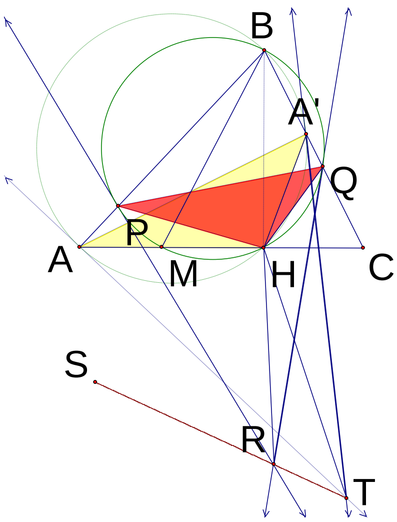
綜合(1)(2)兩組相似形運用SAS相似可得△TA'H～△RQH…(3)

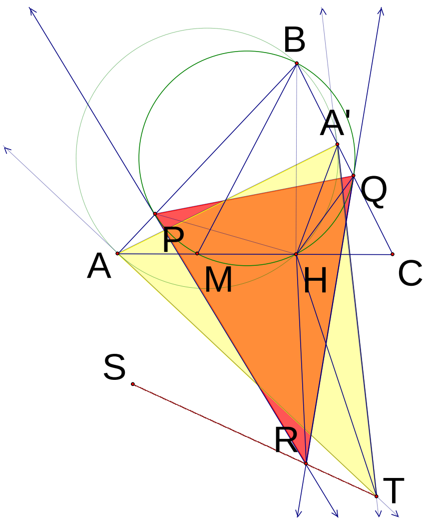
進一步可由(3)在得到△A'HQ～△THR…(4)

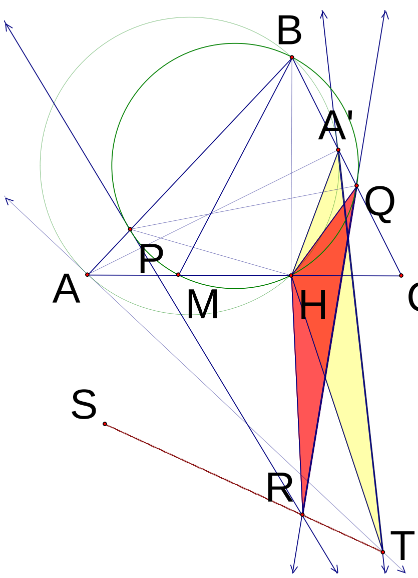
即可知∠HRT=∠HQB…(5)

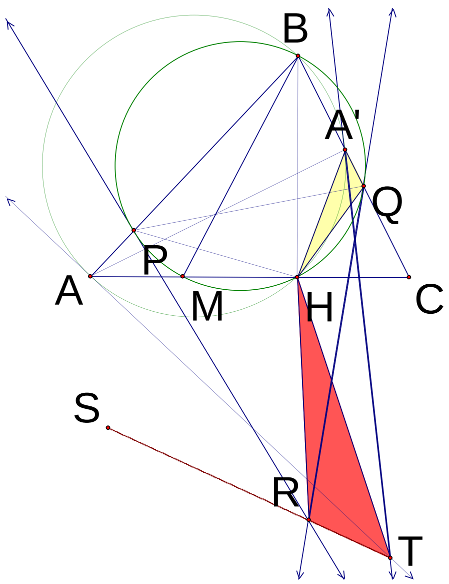
同樣的方法，我們也可以得到∠HRS=∠HQC…(6)

由(5)(6)便可得到恆有∠HRS+∠HRT=180°







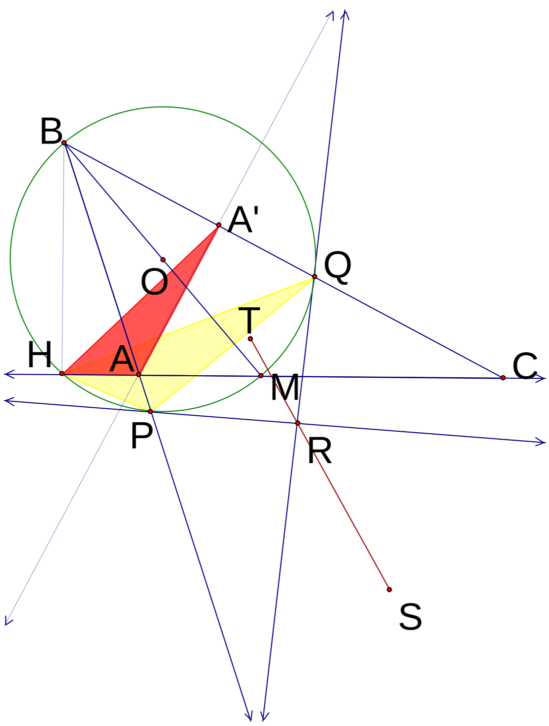


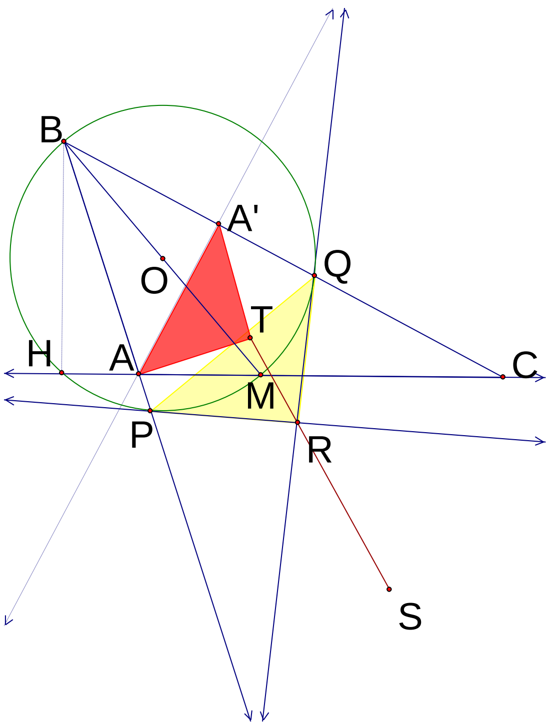
這也證明了我們所要的結論

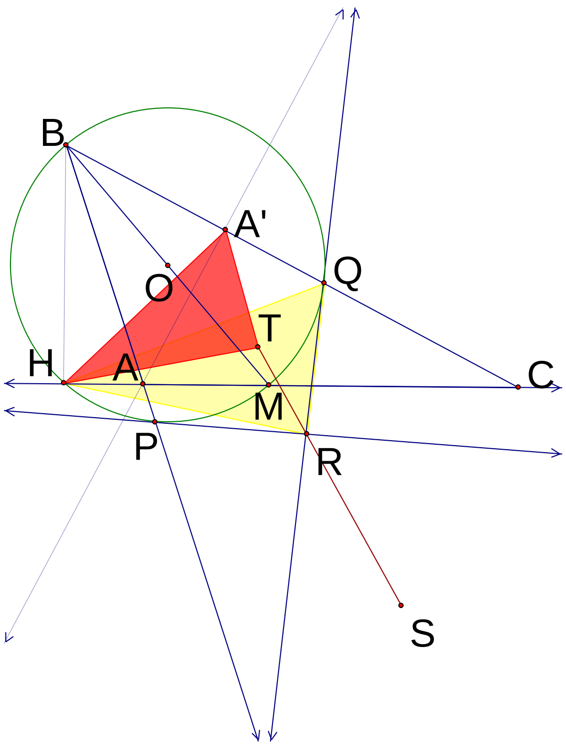
接下來考慮另外四種情形，及鈍角三角形以銳角爲頂點、鈍角爲頂點以及直角三角形以銳角爲頂點、直角爲頂點的情形

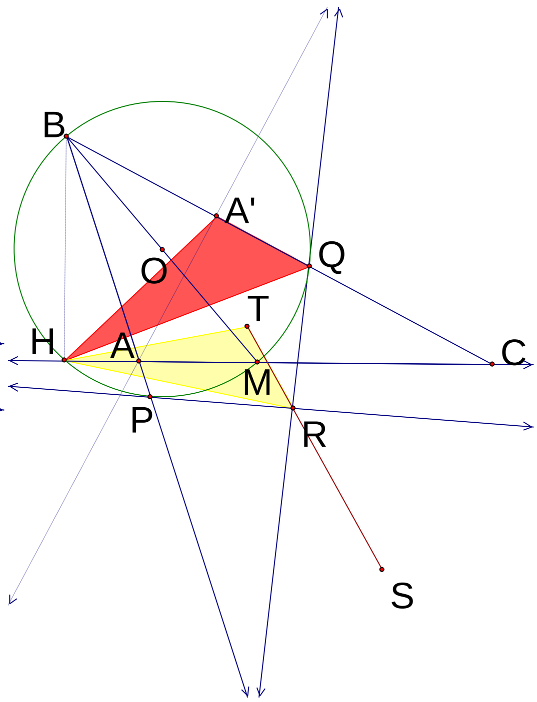
由於 GSP 顯示的結果仍爲一線段(除了直角三角形以直角爲頂點的情形之外)，這不禁讓我們認爲有可能許多銳角三角形中的相似及四點共圓性質是保持不變的，以下我們來檢驗這些事

首先是鈍角三角形以銳角爲頂點的情形



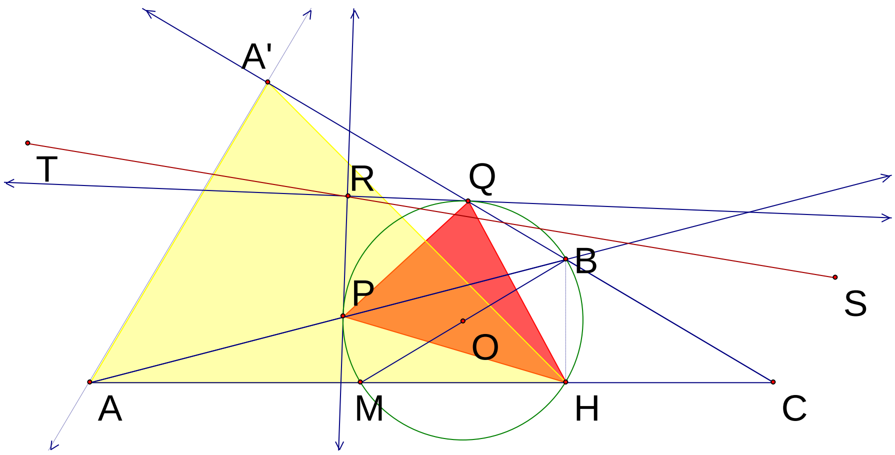


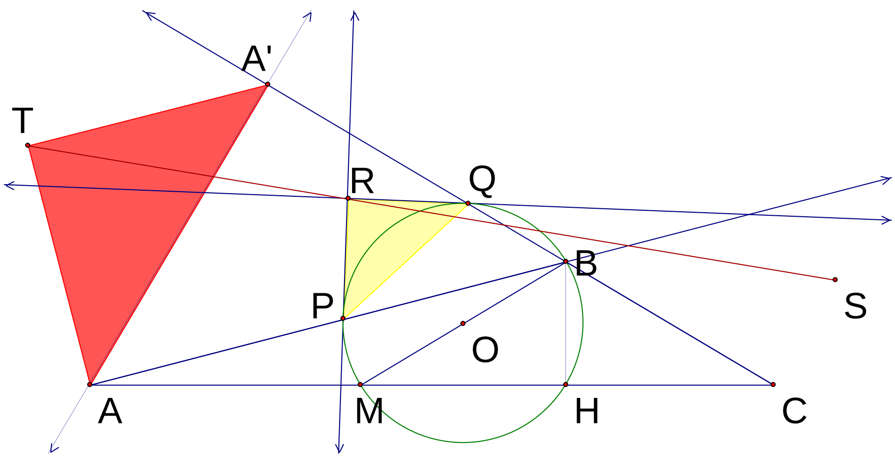


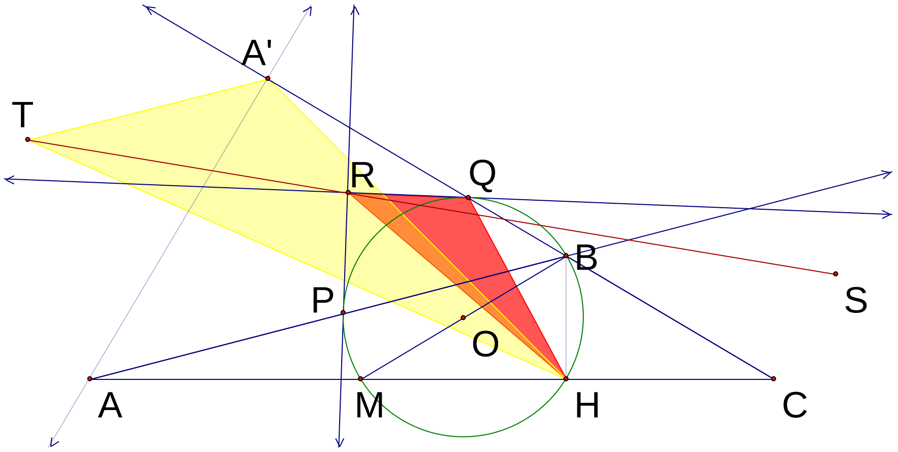


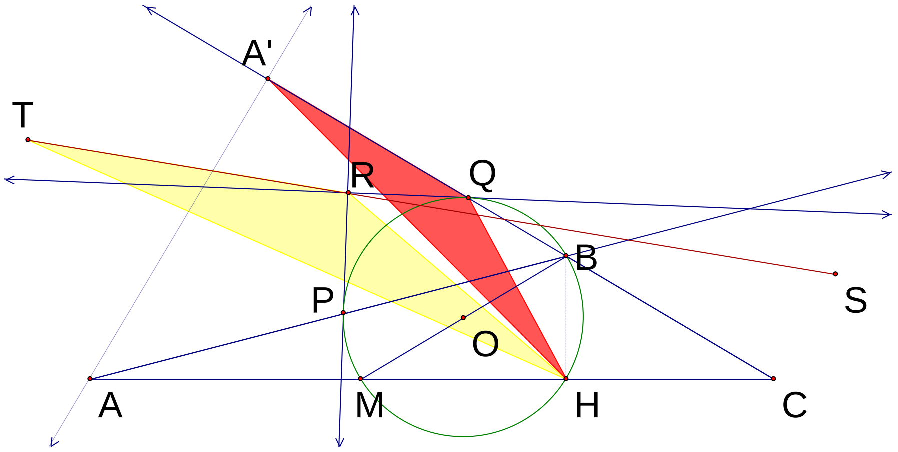
經檢驗，發現除了$\angle HAA' = 180^\circ - \angle PBH = \angle HPQ$這道式子不同之外，其他性質均保持一致

再來是鈍角三角形以鈍角爲頂點的情形









經檢驗發現性質完全與銳角三角形一致

直角三角形以銳角爲頂點的情形

這個情形中 H、P 將會與 A 重合，以下均直接以 A 做表示

取 AB 直徑圓圓心 O'及 BM 直徑圓圓心 O 來看

由圓心角圓周角的性質，得$\angle AO'T = \angle ABC = \angle AOR$，又$\angle BAC = \angle OAR = 90^\circ$

便可得到$Rt\triangle AO'T \sim Rt\triangle AOS \cdots (1)$

由(1)可進一步得到$\angle MAR = \angle OAB = \angle OBA \cdots (2)$

注意到$Rt\triangle OO'A \sim Rt\triangle MBA \cdots (3)$

結合(1)(2)(3)運用 SAS 相似可知有$\triangle ATR \sim \triangle BAM$，即$\angle ARM = \angle AMB \cdots (4)$

另外一邊取 BC 直徑圓圓心 O"

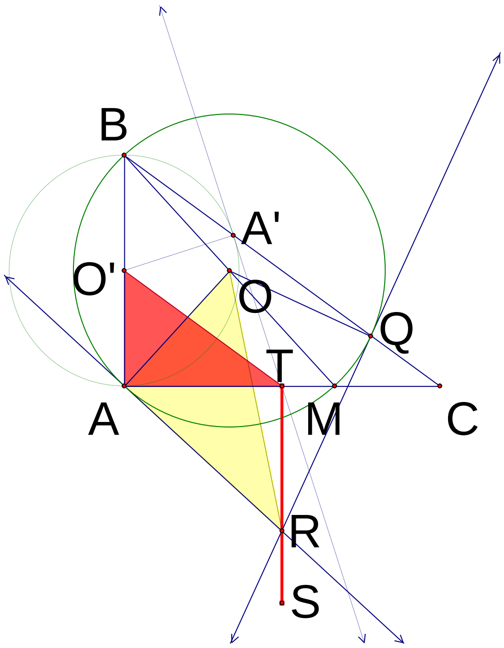
其實由$\angle AO'T = \angle ABC$及 O'爲 AB 中點可知 T 亦爲 AC 中點

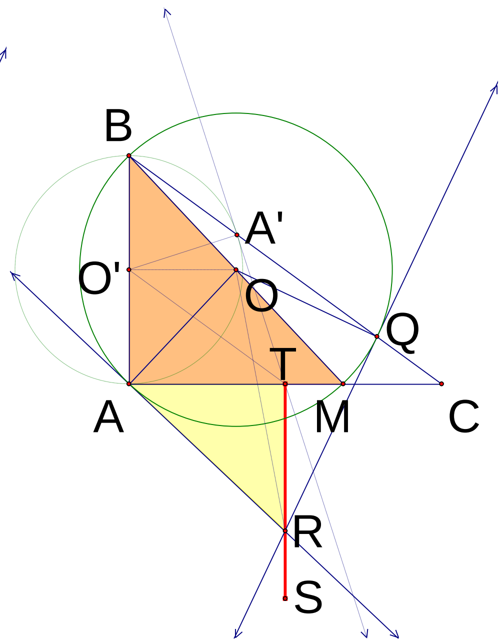
又顯然 O"S 爲 AC 之中垂線，於是有 TS 垂直平分 AC(或說 O、T、S 共線)

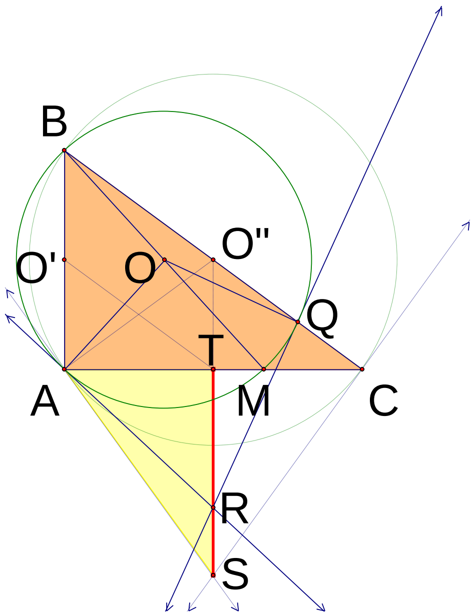
而可得到$\triangle ATS \sim \triangle AO''S \sim \triangle ABC \cdots (5)$

再由$\triangle ATR \sim \triangle BAM$與(4)便可知$\angle ARS = \angle BMC$…(6)

結合(4)(6)便有$\angle ARM + \angle ARS = 180^\circ$，這也證明了我們所要的結論







這揭露出著一個有趣的小性質：

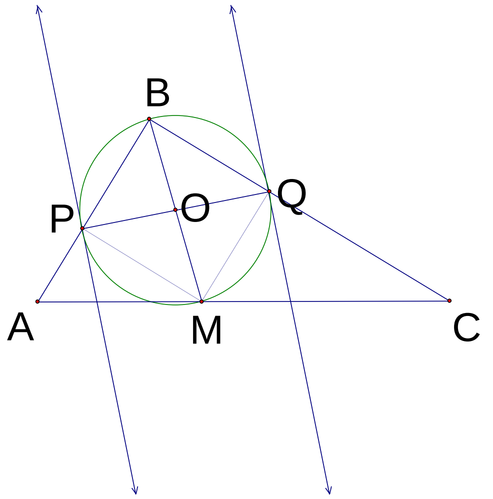
直角三角形以銳角爲頂點對應到的 TS 恰爲底邊 AC 中垂線的一部份

最後來看看爲什麼直角三角形以直角爲頂點的情形下軌跡不存在

由於 BM 爲直徑又$\angle ABC = 90^\circ$，可知 PBQM 爲矩形

又 O 爲其對角線 BM 之中點，這表明 O 在對角線 PQ 上，及 P、O、Q 共線

於是兩切線平行，及交點 R 不存在!



事實上，若將M改定義爲AC直線上的動點，上述性質仍然成立

而R點軌跡將變爲TS直線

二、 對軌跡的線掃略

(一) 軌跡邊界研究方法：先利用 GSP「顯示軌跡」功能觀察其掃略圖形邊界。直觀來看，邊界應該是由部分的圓錐曲線與包絡線所構成的。利用軌跡爲一線段的特性，部分圓錐曲線部分可直接使用端點來作探討，其他包絡線部分則使用偏微分來證明。

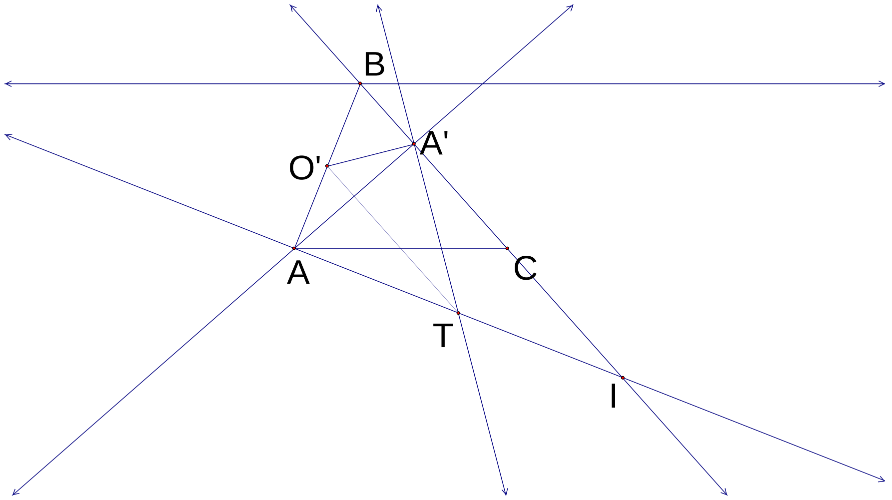
(二) 線段軌跡端點的特性：過 A 作直線垂直 AB，再作直線 BC，交於點 I，則線段 AI 中點即爲 T，同理，過 C 作直線垂直 BC，再作直線 BA，交於點 J。則線段 AJ 中點即爲 S

證明：

由作圖定義知，作 A 於 BC 的垂足 A'，取 AB 中點 O'，連接 O'A' 並過 A' 做其垂直線並與過 A 之 AB 垂直線交點即爲 T

考慮點 I(這裡 I 指的是直線 BC 與過 A 與 AB 垂直之交點)

由做圖定義可易得 A、T、I 三點共線



同樣由作圖定義可知

有 $\angle AO'A' = 2\angle ABC$

又 $O'T$ 爲 $\angle AO'A'$ 之角平分線

於是有 $\angle AO'T = \angle$ ABC，即 $O'T \parallel BI$

又 O' 爲 AB 中點

即表明線段 AI 中點即爲 T

(三)　若使三角形頂點 B 於一平行邊 AC 的直線 L_1(等高)上移動，則軌跡 TS 對 B 之線掃略邊界必由部分二次曲線與包絡線構成。

證明：

先處理二次曲線的部分

根據前面簡化作圖的基礎上，定義座標系就容易得多

先取 T 點來看

令 A:(0,0)　B:(2t,2b)　C:(2a,0)

再令 AB、AC 中點分別爲 O':(t,b)、 B'':(a,0)

其中 a , b 爲定値，$t \in [-\infty, \infty]$

作 AB 過 A 點之垂直線，再延長 $B'C'$，兩線交於 T 點

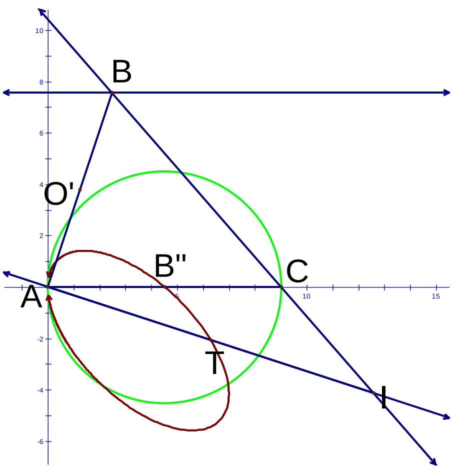
而　$AT: tx + by = 0 \Rightarrow t = \dfrac{-by}{x}$

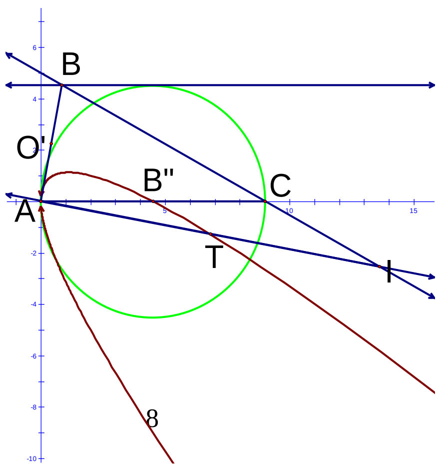
又 B'C':y= $\dfrac{b}{t-a}x - \dfrac{ab}{t-a}$

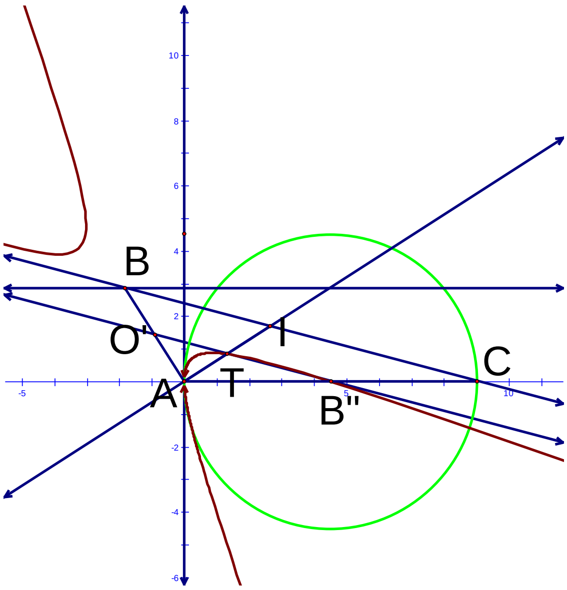
將 t 帶入下式，得 $bx^2+axy+by^2-abx=0$ 爲二次曲線，故得證

S 點證法相同，這裡不加以贅述

下面幾張圖紅色線的部分即爲 T 點軌跡







我們還發現此圓錐曲線具有以下特性

1. 此圓錐曲線之軸與坐標軸夾角爲 45°(135°)

證明：

同樣的我們舉 T 的軌跡方程式來看

不妨令其兩軸與兩軸長平方之商分別爲 $mx+ny+k=0$ 與 $nx-my+l=0$

可設圓錐曲線爲$(mx+ny+k)^2+(nx-my+l)^2=u$

展開後發現 xy 係數爲 0，但已知 xy 項係數爲 a

但 $a\neq0$(否則△ABC 不存在)，導致矛盾

於是得到圓錐曲線必爲$(mx+my+k)^2+(nx-ny+l)^2=t$ 的形式 $(m\neq n)$，即證明了這個結論

2. 利用圓錐曲線的小判別式此圓錐曲線可藉由 a：2b 的比值決定其分類

$(\frac{a}{2b}<1$ 即爲橢圓，$\frac{a}{2b}=1$ 爲拋物線，$\frac{a}{2b}>1$ 爲雙曲線$)$

3. 此圓錐曲線必過 A、B'' 兩點，且過這兩點之切線交點即爲(0,b)

證明：

還是舉 T 爲例

有 T 點軌跡方程式：$bx^2+axy+by^2-abx=0$

代入(0,b)求其極線

得極線爲 $y=0$

其交 T 點軌跡方程式於 A、B'' 兩點

即過 A、 B'' 兩點之切線交點即爲(0,b)

(事實上 A 點之切線即爲 x=0，恰與(0,b)之極線垂直)

至於包絡線的部分

先求出TS通式如下

$$y+\frac{a\,b\,t}{b^2+t^2-a\,t}-\frac{\left(x-\frac{a\,b^2}{b^2+t^2-a\,t}\right)(-a\,b\,t+a\,b\,(a-t))}{2\,a^2\,t-2\,a\,t^2}=0$$

對其以 t 進行偏微分可得

$$\frac{a\,b}{b^2+t^2-a\,t}-\frac{a\,b\,t\,(2\,t-a)}{\left(b^2+t^2-a\,t\right)^2}-\frac{a\,b^2\,(2\,t-a)\,(-a\,b\,t+a\,b\,(a-t))}{\left(b^2+t^2-a\,t\right)^2\left(2\,a^2\,t-2\,a\,t^2\right)}+\frac{2\left(x-\frac{a\,b^2}{b^2+t^2-a\,t}\right)a\,b}{2\,a^2\,t-2\,a\,t^2}$$
$$+\frac{\left(x-\frac{a\,b^2}{b^2+t^2-a\,t}\right)(-a\,b\,t+a\,b\,(a-t))\left(2\,a^2-4\,a\,t\right)}{\left(2\,a^2\,t-2\,a\,t^2\right)^2}=0$$

將兩式聯立消去 t 即得包絡線方程式如下

$$\begin{aligned}
&a\,b\,(-x+a)\big(64\,a^2\,y^4\,b^8-x^4\,a^8\,y^2-44\,a^6\,x^4\,y\,b^3-408\,a^6\,x^2\,y^2\,b^4+1112\,a^6\,x^2\,y\,b^5+128\,y^2\,x^4\,b^8+288\,a^3\,x^5\,b^6+8\,a^6\,y^4\,x^2\,b^2\\
&-320\,a^7\,x^3\,b^4+768\,a^2\,y^2\,x^2\,b^8-160\,a^6\,y\,b^7+48\,a^6\,y^2\,b^6+96\,a^2\,y^3\,x^2\,b^7+64\,x^6\,b^8-48\,a^7\,x^3\,y^2\,b^2+496\,a^7\,y^2\,x\,b^4\\
&+4\,x^3\,a^9\,y^2+960\,a^2\,x^4\,b^8+112\,a^2\,y^4\,x^2\,b^6-960\,a^4\,x^2\,y\,b^7-48\,a^2\,x^6\,b^6+176\,a^7\,x^3\,y\,b^3-208\,a^8\,y^2\,b^4+64\,a^2\,y^6\,b^6\\
&-4\,x^2\,a^{10}\,y^2-128\,a\,y^4\,x\,b^8-16\,a^7\,y^4\,x\,b^2-384\,a^5\,x\,b^8+192\,a^8\,y^3\,b^3-64\,a^4\,y^4\,x^2\,b^4+184\,a^4\,y\,x^4\,b^5+112\,a^6\,y^3\,x^2\,b^3\\
&-a^6\,x^6\,b^2-752\,a^7\,x\,y\,b^5+128\,a^4\,y^2\,b^8+96\,a^4\,y^3\,b^7+136\,a^8\,x^2\,y^2\,b^2-224\,a^7\,y^3\,x\,b^3-80\,a^6\,y^3\,b^5+96\,a^6\,y^4\,b^4+200\,a^6\,x^4\,b^4\\
&-744\,a^6\,x^2\,b^6+300\,a^8\,x^2\,b^4-316\,a^8\,x^2\,y\,b^3+64\,a^6\,b^8-96\,a^{10}\,y\,b^3-52\,a^8\,b^6-224\,a^3\,y^4\,x\,b^6-40\,a^4\,y^2\,x^4\,b^4+96\,a^{10}\,y^2\,b^2\\
&-24\,a^8\,x^2\,y^3\,b+64\,y^4\,x^2\,b^8+2\,a^8\,x^4\,y\,b+160\,a^5\,x\,y^3\,b^5-176\,a^9\,x\,y^2\,b^2+128\,a^5\,y^4\,x\,b^4+48\,a^9\,x\,y^3\,b-736\,a^5\,y\,x^3\,b^5\\
&+960\,a^4\,x^2\,b^8-16\,a^4\,y^6\,b^4-4\,a^{10}\,x^2\,b^2+280\,a^9\,x\,y\,b^3+640\,a^3\,x^3\,y\,b^7+12\,a^9\,x^3\,b^2-32\,a^6\,y^5\,b^3-1280\,a^3\,x^3\,b^8\\
&-96\,a^5\,x\,y^2\,b^6-384\,a\,x^5\,b^8-72\,a^5\,x^5\,b^4-8\,a^9\,x^3\,y\,b+32\,a^{10}\,b^4-724\,a^4\,x^4\,b^6+304\,a^7\,x\,b^6+6\,a^7\,x^5\,b^2+12\,a^4\,x^6\,b^4\\
&+976\,a^5\,x^3\,b^6-512\,a^3\,y^2\,x\,b^8+48\,a^4\,x^2\,y^2\,b^6+160\,a^4\,y^5\,b^5-13\,a^8\,x^4\,b^2+8\,a^{10}\,x^2\,y\,b-192\,a^3\,y^3\,x\,b^7-160\,a^2\,x^4\,y\,b^7\\
&+640\,a^5\,x\,y\,b^7+112\,a^4\,y^4\,b^6-80\,a^4\,y^3\,x^2\,b^5-152\,a^9\,x\,b^4+12\,a^6\,x^4\,y^2\,b^2+160\,a^5\,y^2\,x^3\,b^4-512\,a\,y^2\,x^3\,b^8+192\,a^8\,y\,b^5\\
&-16\,a^8\,y^4\,b^2-32\,a^{10}\,y^3\,b\big)=0
\end{aligned}$$

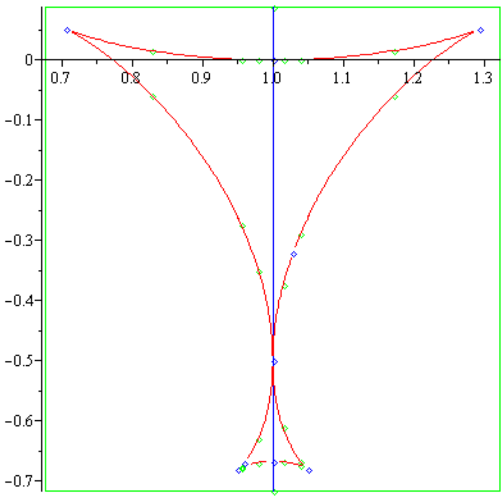
由於此方程式過於龐大，難以清楚看清其性質

下面我們將 a,b 兩定値帶特定値處理並畫出其包絡線

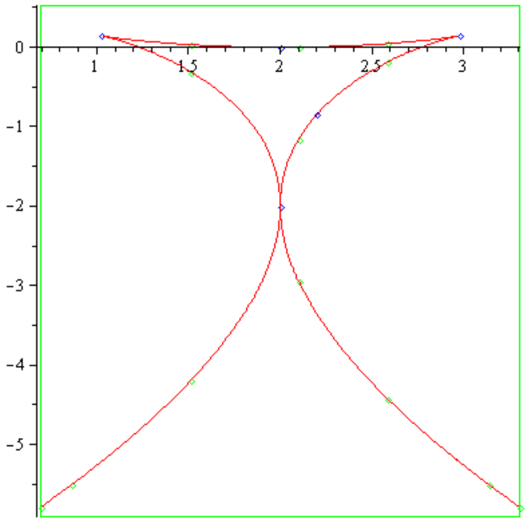
由於前面有 $\frac{a}{2b}$ 將會決定圓錐曲線種類的性質，我們認爲這也影響包絡線的形狀

於是我們分別帶入三組數字 (1,1), (2,1) , (4,1) 並畫出包絡線，結果如下

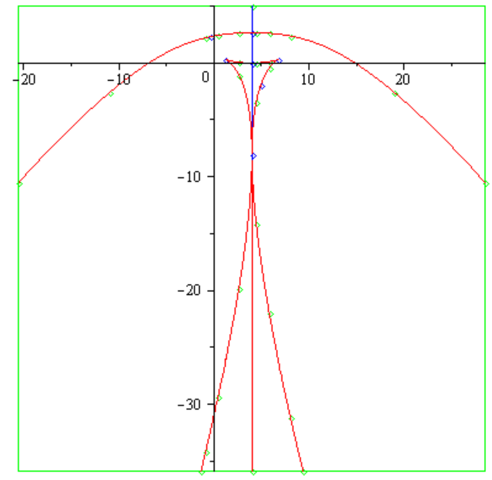
$$(x-1)\left(44+423x^4+128y^5-64y+48y^6+512x^2+256y^4-232x+64y^2+99x^4y^2+120x^2y^4+168yx-156x^2y-208y^3x+540x^2y^2+72x^3y+104x^2y^3-396x^3y^2-240y^4x-18yx^4-288y^2x+27x^6+176y^3-612x^3-162x^5\right)=0$$



$$27x^4-216x^3+2x^2y^3+132x^2y^2-264x^2y+632x^2-8y^3x-800x+1056yx-528y^2x+784y^2+368+200y^3+8y^5+64y^4-928y=0$$



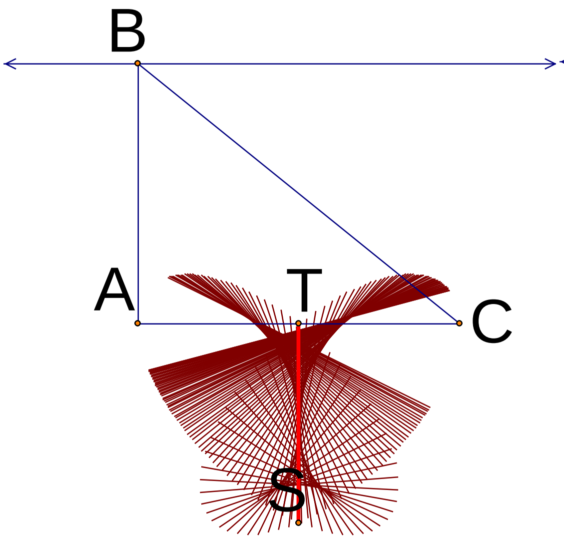
$$(x-4)\left(-475136+3168x^4+1408y^5+1386496y+48y^6-197888x^2+9776y^4+550912x-1363456y^2+414x^4y^2-285x^2y^4-964608yx+125184x^2y-141632y^3x-48000x^2y^2-1152x^3y+17704x^2y^3-6624x^3y^2+2280y^4x+72yx^4+595968y^2x+27x^6+332416y^3+18432x^3-648x^5\right)=0$$

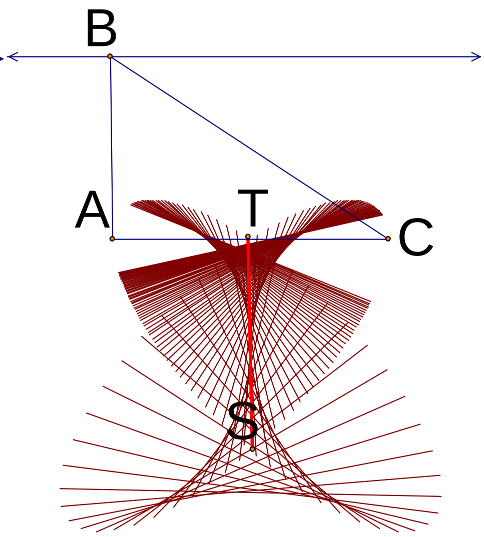


有了這些結果，再與前面的圓錐曲線配合，我們大致上可以確定軌跡邊界是跟圓錐曲線與包絡線有關的，但是有些是由圓錐曲線與包絡線共同組成，有些是全部由圓錐曲線構成軌跡邊界。這仍然與 B 到 AC 的距離有關

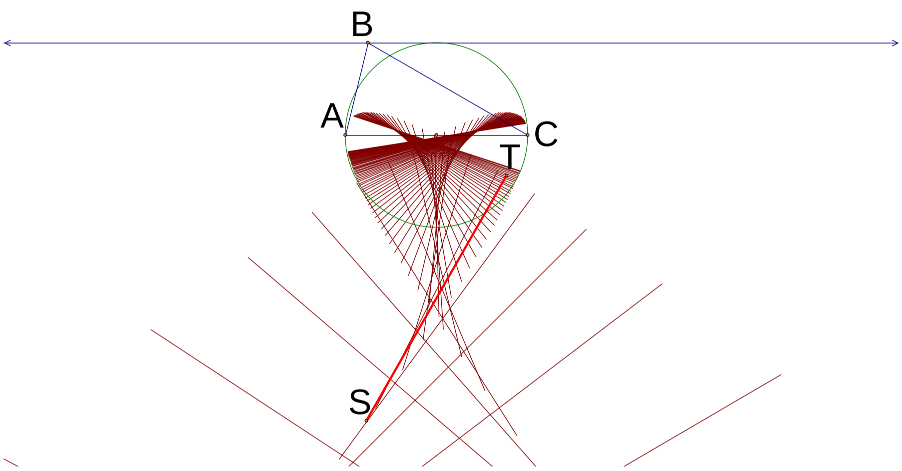
先看 $\frac{a}{2b}$<1 的情形，軌跡邊界有兩種，其一是全部由橢圓構成，另外則是橢圓與包絡線共形成。造成差別的原因在於∠BAC 或∠BCA=90° 垂直平分 AC 的軌跡 TS 其最低點若比包絡線最下部曲線的最高點還要再低了話就會出現第一種情形，反之則是第二種

(因作圖之動點值域延伸至無限，程式機械作圖難以使其完備，故有部分缺損)

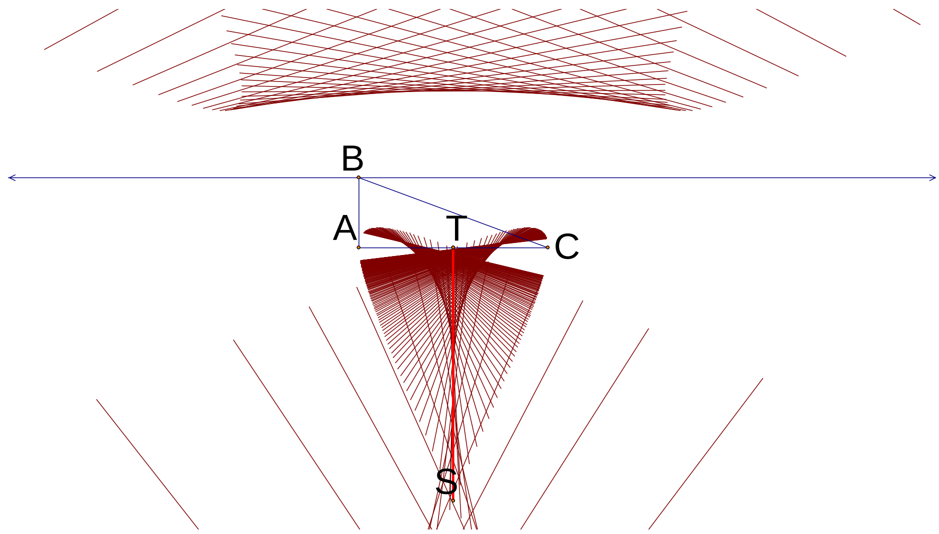




$\frac{a}{2b}$=1 時，軌跡邊界全是由拋物線所組成



$\frac{a}{2b}$>1 時，軌跡邊界全是由雙曲線與包絡線所組成



(四)　若使三角形頂點 B 在任意給定的直線上，軌跡掃略邊界亦滿足爲二次曲線與包絡線。

我們可由解析法來證明，其中二次曲線證明如下

證明：

同樣地，令 A(0 , 0)　C:(2a , 0)　B∈L: $y = mx + 2b$ ，即 B:(2t , 2mt+2b)

再令 AB、AC 中點分別爲 B':(t , mt+b)、C':(a , 0)

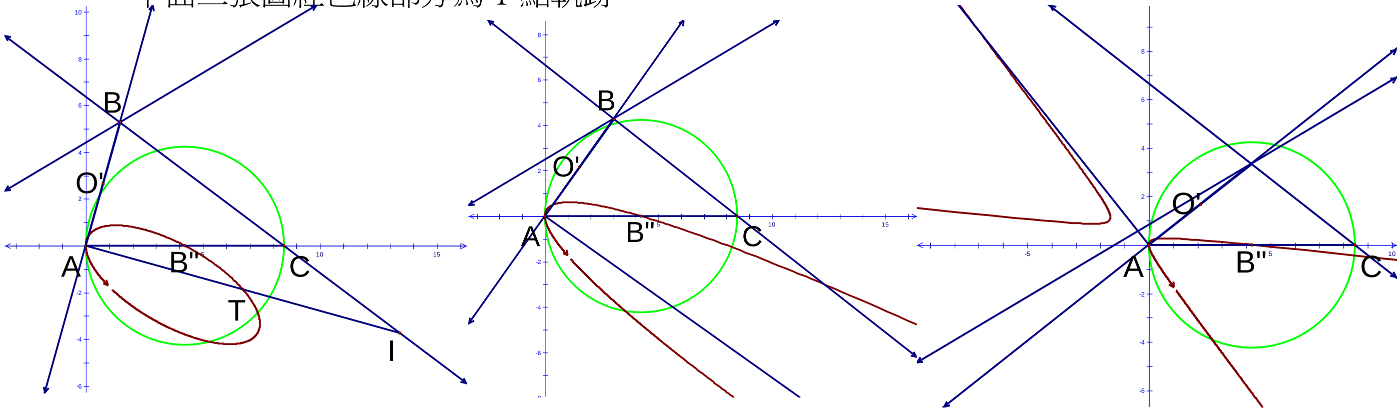
其中 a,m,n 爲定值，$t \in [-\infty, \infty]$

有 $\begin{cases} tx + (mt+b)y = 0 \\ \dfrac{mt+\mathrm{b}}{t-a} = \dfrac{y}{x-a} \end{cases}$

整理得 $t = \dfrac{-by}{x+my}$ ，將其帶回得 $\dfrac{\dfrac{-mby}{x+my}+b}{\dfrac{-by}{x+my}-a} = \dfrac{y}{x-a}$

移項整理得 bx^2 +axy+by^2-abx +amy^2=0 爲二次曲線，證畢

下面三張圖紅色線部分爲 T 點軌跡



此圓錐曲線可視爲等高作圖的推廣，具有很接近的特性

1. 同樣利用圓錐曲線的判別式，可知以 AC 爲直徑作直徑圓，此圓錐曲線可藉由該圓與 B 點移動軌跡線之關係決定其分類

   (兩者無交點即爲橢圓，恰切於一點爲拋物線，交於兩點爲雙曲線，

   即爲等高作圖的一般特性)

2. 此圓錐曲線必過 A、C'兩點，且過這兩點之切線交點即爲(0,b)

   而 B'移動軌跡爲 $y = mx + b$ ，即三線共點

   證明：

   有 T 點軌跡方程式：$bx^2+axy+by^2-abx+amy^2=0$

   代入(0,b)求其極線

   得極線爲 y=0

   其交 T 點軌跡方程式於 A、C'兩點

   過 A、C'兩點之切線交點即爲(0,b)

   (可發現過 A 點之切線即爲 x=0，恰與(0,b)之極線垂直)

(五) 若使若使三角形頂點 B 於任意過 A、C 之圓上(等角)，則軌跡 TS 對 B 之線掃略邊界必爲兩等圓

以下舉端點 T 爲例，S 如法炮製即可

1. 引理 1：B 於圓上任何一處所構成的 $\triangle ABI$ ，這些三角形都相似

證明：

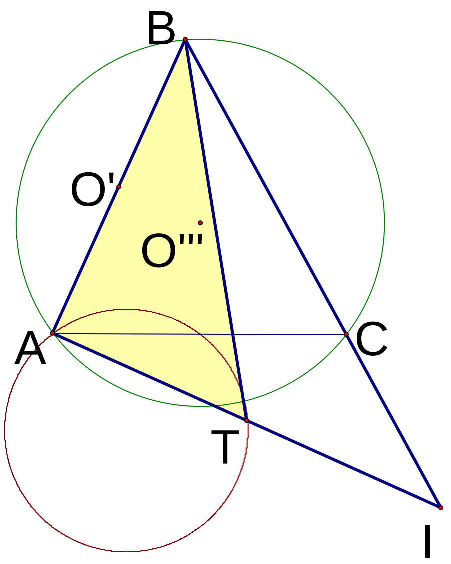
若 B 於優弧 $\overset{\frown}{AC}$ 時，顯然恆有 $\angle BAI = \dfrac{\pi}{2}$ 且 $\angle ABI = \dfrac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$ (劣弧)爲一定值

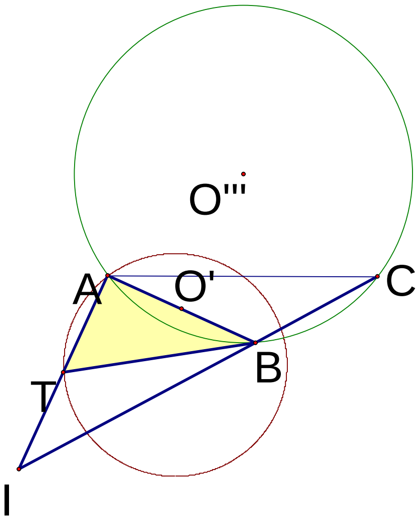
所以結論是成立的

若 B 於劣弧 $\overset{\frown}{AC}$ 時，顯然恆有 $\angle BAD = \dfrac{\pi}{2}$

且 $\angle ABI = \pi - \angle ABC = \pi - \dfrac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$ (優弧)$= \dfrac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$ (劣弧)爲一定值

所以結論亦也成立





2. 引理 2：B 於圓上任何一處所構成的$\triangle ABT$，這些三角形都相似

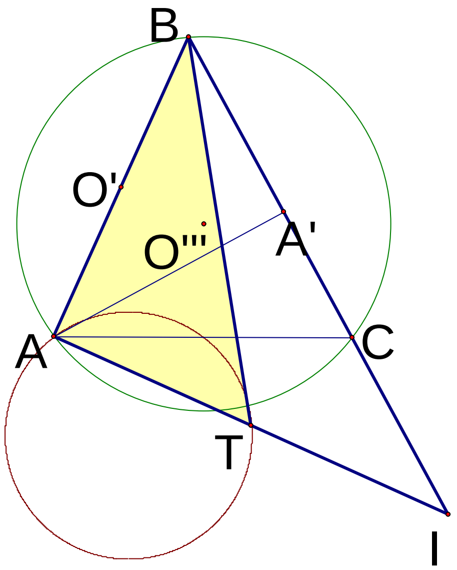
證明：

顯然恆有$\angle BAT=\dfrac{\pi}{2}$

由前面熟悉的結論可知 T 爲AI中點

運用引理 1 可知對所有三角形中的兩股比例必相等

利用 SAS 相似即可證明這個結論



3. 分幾個部份來討論，首先先討論 BT 與圓O'''交點在 BT 線段內部的情況

令BT交圓O於K，作AK中垂線並於其上取一點X使$AO\perp AX$

下面證明T在以X爲圓心且以R爲半徑的圓上

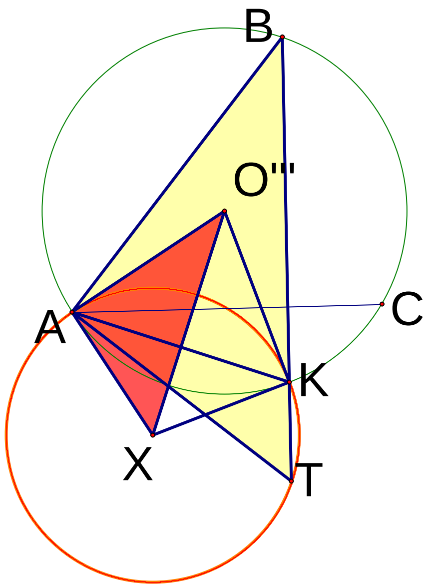
$\because \angle ABT = \angle AO'''X = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AK}$ 且 $\angle BAT = \angle O'''AX = \frac{\pi}{2}$

$\therefore \triangle ABT \sim \triangle AOX$

又 $\triangle AOX \cong \triangle AOK$

$\therefore \angle AXK = 2\angle ATK$，這表明 X 爲 $\triangle APK$ 之外心

令 $AX = KX = R$，則對於此處所有的 T 都在以 X 爲圓心且以 R 爲半徑的圓上



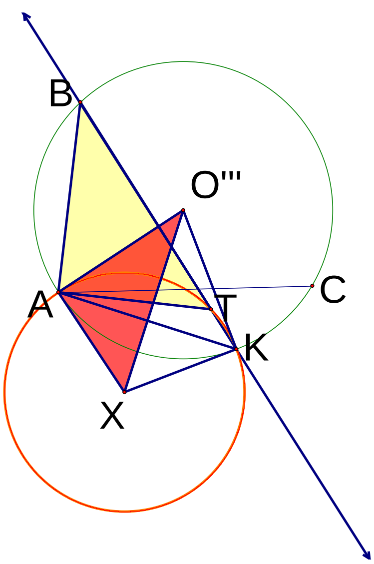
若交點於BT線段外部

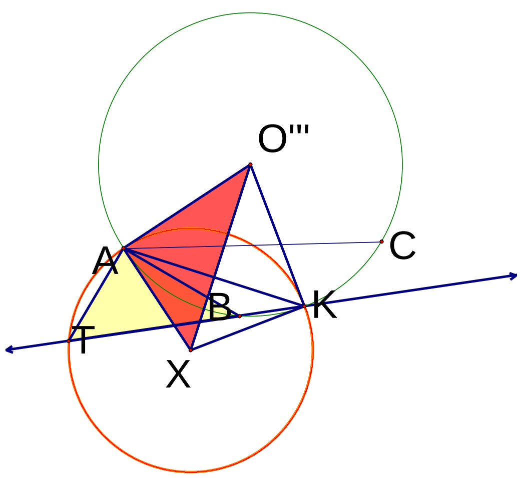
基本上證明方法不變

只是變成 $\angle ATK = \pi - \frac{1}{2}\angle AXK$ 或 $\angle ATK = \frac{1}{2}\angle AXK$ 兩種可能

但仍然可導致此處所有的 T 都在以 X 爲圓心且以 R 爲半徑的圓上

並不影響結果



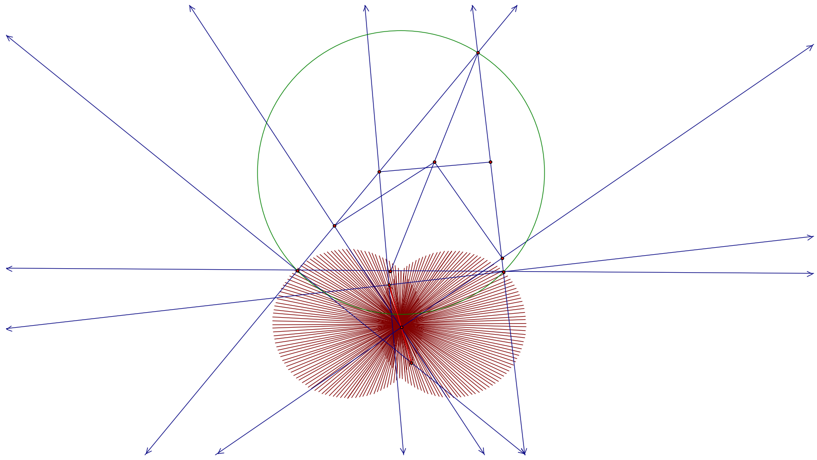


所以T的軌跡必爲一圓

由於當三角形頂點 B 於任意過 A、C 之圓上(等角)，軌跡 TS 對 B 之線掃略邊界

完全是由端點組成，也就是說邊界爲兩等圓之結論也就完成了

透過上述引理，可得其線掃略圖形：



伍、研究結果

一、　軌跡問題

(一) 對任意三角形，R 點軌跡恆爲 TS 線段

二、　軌跡的線掃略性質

(一) 若使三角形頂點 B 於一平行邊 AC 的直線 L_1(等高)上移動，則軌跡 TS 對 B 之線掃略邊界爲部分二次曲線或部分二次曲線與包絡線構成。

(二) 使三角形頂點 B 在任意給定的直線上，軌跡掃略邊界亦滿足爲部分二次曲線或部分二次曲線與包絡線構成。

(三) 若使若使三角形頂點 B 於任意過 A、C 之圓上(等角)，則軌跡 TS 對 B 之線掃略邊界爲兩等圓。

陸、討論

在以上的研究中，我們由點掃略探討至線掃略的問題中，發現了一些特殊性質，而我們認爲這個研究還有許多值得探討的空間，以下是我們對未來研究方向的一些發想：

一、　是否可推廣軌跡問題至多邊形？如何設定作圖定義？

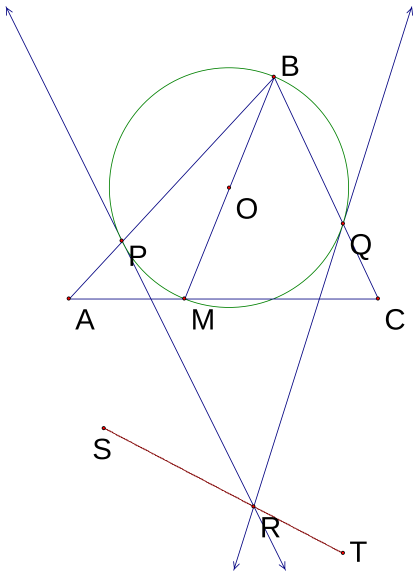
二、　可否找出其他讓頂點變動的方法使其產生不同且特殊的線掃略圖形？

三、　是否可推廣軌跡問題至三維的情況？如何設定作圖定義？

柒、結論

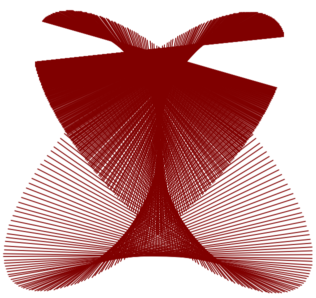
一、　軌跡問題

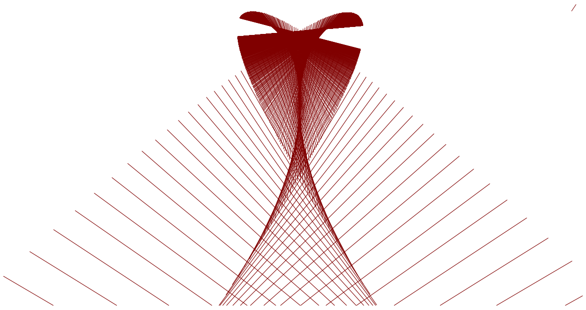
(一) 一點 M 若在三角形邊 AC 上，一圓以 BM 爲直徑，交 AB、BC 分別於 P、Q，圓經 P、Q 作切線之交點 R，當 M 在 AC 上做變動時 R 點軌跡恆爲 TS 線段

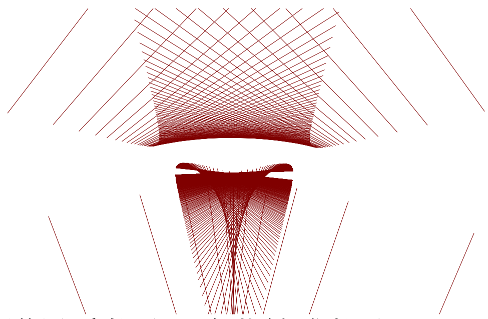


二、　軌跡的線掃略性質

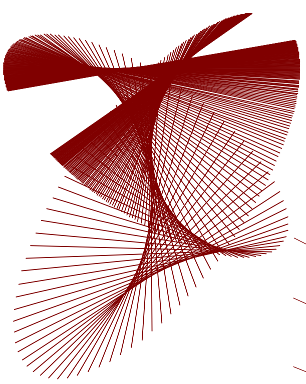
(一) 若使三角形頂點 B 於一平行邊 AC 的直線 L_1(等高)上移動，則軌跡 TS 對 B 之線掃略邊界必爲部分二次曲線或部分二次曲線與包絡線構成。

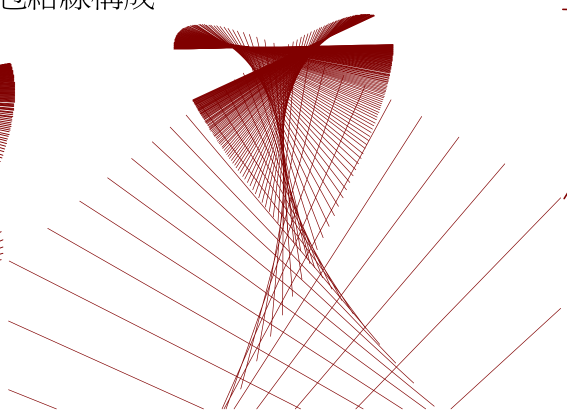


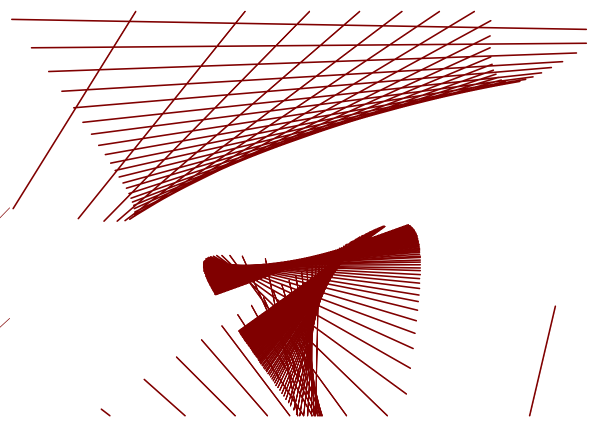




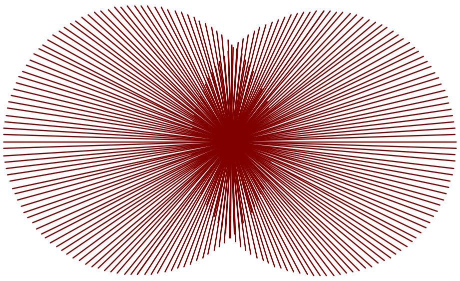
(二) 使三角形頂點 B 在任意給定的直線上，軌跡掃略邊界亦滿足爲部分二次曲線或部分二次曲線與包絡線構成。







(三)若使若使三角形頂點 B 於任意過 A、C 之圓上(等角)，則軌跡 TS 對 B 之線掃略邊界必為兩等圓。



捌、參考資料及其他

一、　　Crux Mathematicorum with Mathematical Mayhem 31:No 1 February 2005

二、　　高中數學課本，南一版第四冊第一章 圓錐曲線

一、	試引理

2020202020202020202020202020202020202020202020202020202020202020202020202020
2020202020202020202020202020202020202020202020202020202020202020202020202020
2020202020202020202020202020202020202020202020202020202020202020202020202020
20202020202020202020

【評語】040406

在三角形 ABC 的 AC 邊上取一動點 M，以 BM 為直徑作圓，交另兩邊於 P、Q，再對 P、Q 兩點作圓切線交於 R，問 R 之軌跡？作者以綜合幾何方式證明此軌跡為一直線，並進一步探討在追加動點之情況下，此直線所“掃略”出的圖形(也就是包絡線)。作品呈現出作者對於幾何的熟稔程度，相信作者未來可以挑戰格局更大的題目。