中華民國第51屆中小學科學展覽會

作品說明書

高中組　數學科

第三名

040405

你泥中有我，我泥中有你

學校名稱：國立鳳山高級中學

作者：	指導老師：
高二 林東成	張淑娟
高二 蔡宇翔	王啟聰
高二 楊育豪	

關鍵詞：正 n 邊形的外心

你泥中有我，我泥中有你

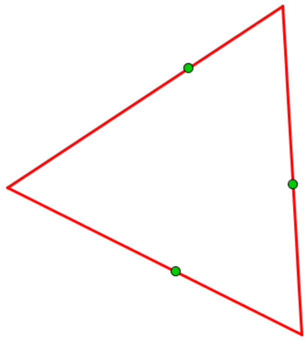
摘要

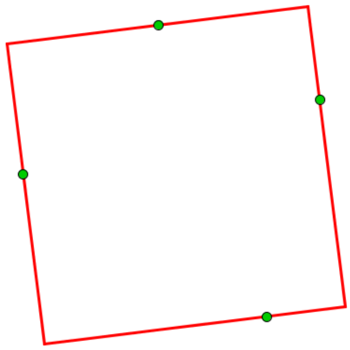
本文主要探索平面上任三點不共線的 n 個點是否存在 n 條線，使其各恰經過一個點，並交出一正 n 邊形。另則探究其對偶命題，任兩條不平行，且任三線不共點的 n 條直線在其所圍成的凸 n 邊形中是否存在各邊恰有一點，並使其成正 n 邊形。

壹、　研究動機

在學習複數的單元中，我們發現圓上三等分點，可形成正三角形；五等分點，可形成正五邊形。那麼，若給定的三個點是平面上不共線相異三點，可否通過一個正三角形呢？（如圖一）不共線相異四點，可否通過一個正方形呢？（如圖二）這個想法引發了我們一連串的探索。

圖一





圖二

貳、　研究目的

一、探討通過平面上不共線相異三點，可否存在使之每邊恰經過一點的正三角形。

二、探討通過平面上任三點不共線的相異四點，可否存在使之每邊恰經過一點的正方形。

三、探討通過平面上任三點不共線的相異五點，可否存在使之每邊恰經過一點的正五邊形。

四、探討通過平面上任三點不共線的相異 n 點，可否存在使之每邊恰經過一點的正 n 邊形。

五、探討平面上三線不共點，任兩條不平行的相異三線圍成三角形，可否存在每邊上恰取一點使之成為一正三角形。

六、探討平面上無三線以上共點，任兩條不平行的相異四線圍成四邊形，可否存在每邊上恰取一點使之成為一正方形。

七、探討平面上無三線以上共點，任兩條不平行的相異五線圍成五邊形，可否存在每邊上恰取一點使之成為一正五邊形。

八、探討平面上無三線以上共點，任兩條不平行的相異 n 條線圍成 n 邊形，可否存在每邊上恰取一點使之成為一正 n 邊形。

九、探討放寬限制，點可在凸多邊形邊的延長線上，其無限多解的外心軌跡

參、　研究設備及器材

Cabri 軟體、*GSP* 軟體、*Geogebra* 軟體

肆、　研究過程及方法

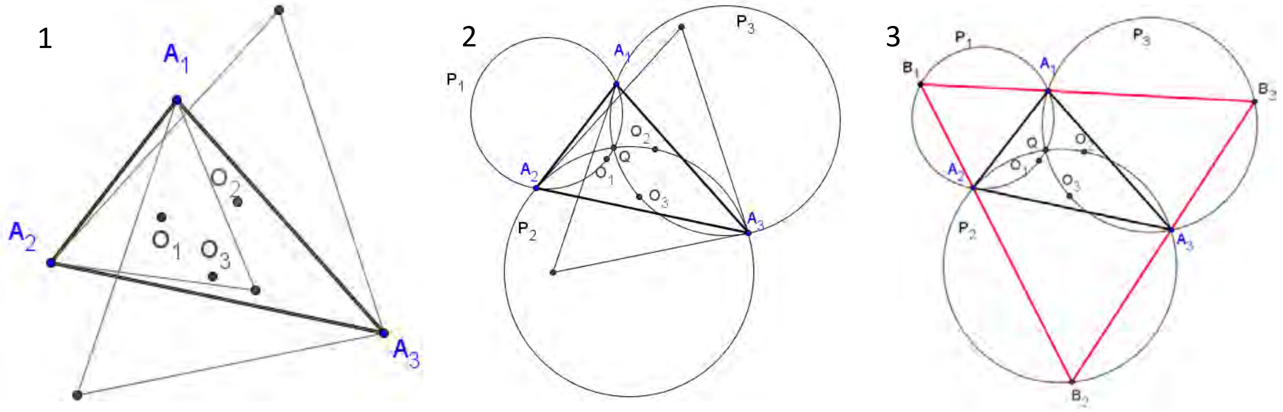
一、通過平面上不共線相異三點，可存在使之每邊恰經過一點的正三角形：

（一）作法：

1.在平面上取相異不共線的三點 A_1、A_2、A_3，分別以 $\overline{A_1A_2}$、$\overline{A_2A_3}$、$\overline{A_3A_1}$ 為邊長，向內作正三角形並求其外心 O_1、O_2、O_3。

2.求出其外心 O_1、O_2、O_3 後，並分別作 $\Delta A_1O_1A_2$、$\Delta A_2O_2A_3$、$\Delta A_3O_3A_1$、的外接圓 P_1、P_2、P_3。則 P_1、P_2、P_3 同交於一點 Q

3.由於 P_1、P_2、P_3 共點，故於 P_1 上任取一點 B_1 作 $\overrightarrow{B_1A_2}$ 交 P_2 於 B_2 再作 $\overrightarrow{B_2A_3}$ 交 P_3 於 B_3。則連 $\overline{B_1B_2}$、$\overline{B_2B_3}$、$\overline{B_3B_1}$，則 $\Delta B_1B_2B_3$ 即為所求之正三角形。則此三角形外心會落在由 $\Delta O_1O_2O_3$ 的外接圓上。



（二）證明：

1.**正三角形的頂點 B_1 會落在 $\Delta A_1O_1A_2$ 的外接圓上**

假設 B_1 不落在 P_1 上

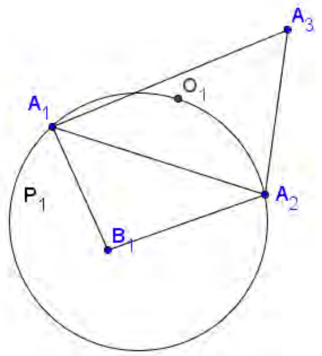
已知 $\angle A_1O_1A_2 = 120°$

又知道 $\angle A_1B_1A_2 = 60°$

矛盾

故得知 B_1 落在 P_1 上，得證。

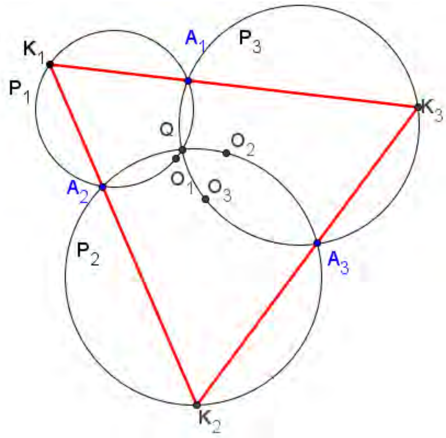
而 B_2、B_3 同理可得



2.**P_i 上的點必能通過 A_i 構造出正三角形**

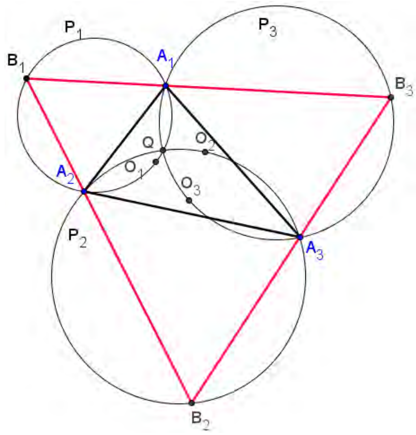
我們發現在不失一般性下，有些東西可以被固定住，所以只要證明會變動的東西是對的，即可完成此證明，於是我們決定用同一法。

在 P_1 上任取一點 K_1，取 $K_2 \in P_2$ 使得 K_1—A_2—K_2；同理，作出 K_3。
而 K_4 則為 $\overrightarrow{K_1A_1}$ 交於 P_3 的點。
由證明１得知：$\angle A_iK_iA_{i+1} = 60°(i = 1,2,3)$
又 $\angle A_3K_3A_1 = 3(60°) - 2(60°) \ = 60° = \angle A_3K_4A_1$
得到 $K_3 = K_4$。



3.三角形 P_1、P_2、P_3 有共同交點

假設 P_1、P_2 所交異於 A_2 的點為 Q
則 $\angle A_1QA_2 = \angle A_2QA_3 = 120°$
則 $\angle A_3QA_1 = 120°$，
故 $Q \in P_3$ 即 P_1、P_2、P_3 共點。

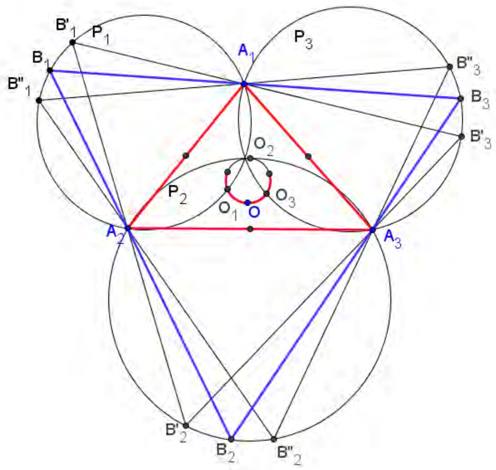


由１、２、３可得：過平面上任意三點，必可作出無限多個正三角形。

（三）存在性探討：

由於 P_1、P_2、P_3 三圓共點，故三角形任意三點必可作出無限多個正三角形通過。而在此我們要證明有無限多個正三角形通過之，需要兩個正三角形當生成元。

當我們畫出兩個正三角形之後，於 $B'_1B''_1$ 弧上取一點 B_1，則作 $\overrightarrow{B_1A_2}$ 必交 $B'_2B''_2$ 弧於 B_2，因為直線 $\overleftrightarrow{B_1B_2}$ 的斜率必介於 $\overleftrightarrow{B'_1B'_2}$ 和 $\overleftrightarrow{B''_1B''_2}$ 之間，同理可在 $B'_3B''_3$ 弧上找到 B_3，而此 $\Delta B_1B_2B_3$ 三內角又為六十度，故必為正三角形，則得知在 $B'_1B''_1$ 弧上，有無限多點可以構造出正三角形，即「只要可以作出兩個正三角形通過，就可以確定存在無限多個正三角形通過」。



二、 通過平面上任三點不共線的相異四點，可存在使之每邊恰經過一點的正方形：

（一）作法：

1.給定平面上相異不共線四個點 A_1、A_2、A_3、A_4，分別以 $\overline{A_1A_2}$、$\overline{A_2A_3}$、$\overline{A_3A_4}$、$\overline{A_4A_1}$ 為邊長，向內作正方形。

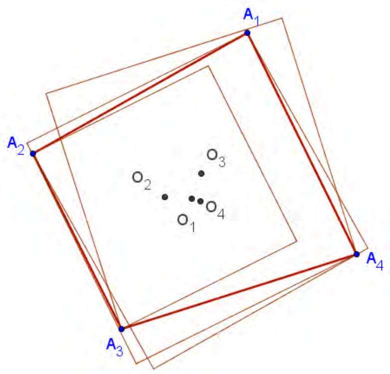
2.求出其外心 O_1、O_2、O_3、O_4，並分別過 $\Delta A_1O_1A_2$、$\Delta A_2O_2A_3$、$\Delta A_3O_3A_4$、$\Delta A_4O_4A_1$ 作外接圓 P_1、P_2、P_3、P_4。

3.連接 $\overleftrightarrow{O_1O_3}$、$\overleftrightarrow{O_2O_4}$，其交點為 O。

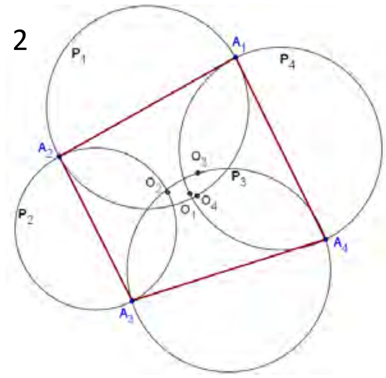
4.而 $\overleftrightarrow{O_1O_3}$ 分別交 P_1、P_3、於 B_1、B_3，且 $\overleftrightarrow{O_2O_4}$ 分別交 P_2、P_4 於 B_2、B_4。

5.連 $\overline{B_1B_2}$、$\overline{B_2B_3}$、$\overline{B_3B_4}$、$\overline{B_4B_1}$，則四邊形 $B_1B_2B_3B_4$ 即為所求之正方形。

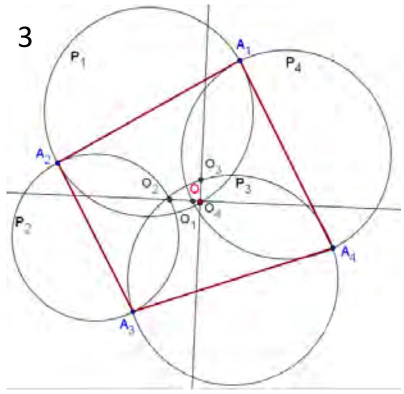
1



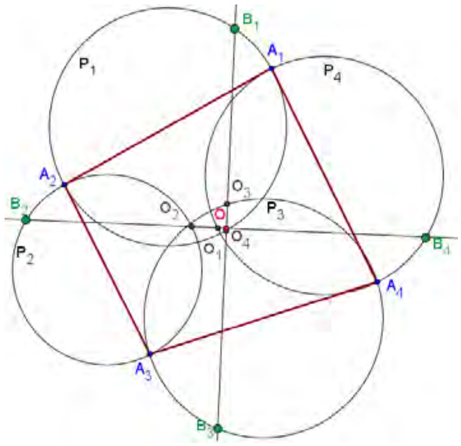
2



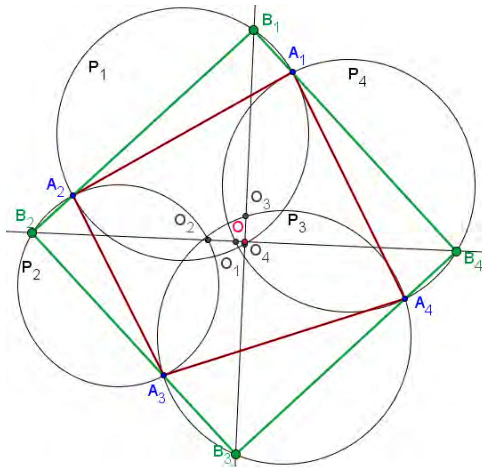
3



4



5



（二）證明

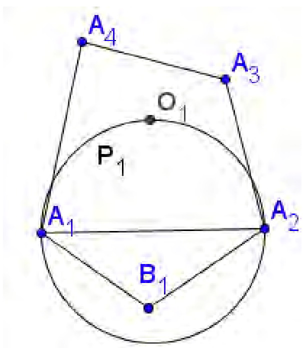
1.正方形的頂點 B_i 會落在 $\Delta A_iO_iA_{i+1}$ 的外接圓上

假設 B_1 不落在 P_1 上

已知 $\angle A_1O_1A_2 = 90°$ 又知道 $\angle A_1B_1A_2 = 90°$ 矛盾

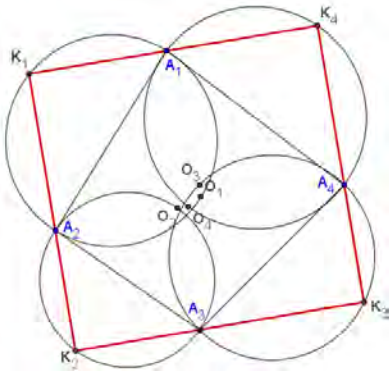
故得知 B_1 落在 P_1 上，得證。

而 B_2、B_3、B_4 同理可得



2. **P_i 上的點必能通過 A_i 構造出矩形**

我們發現在不失一般性下，有些東西可以被固定住，所以只要證明會變動的東西是對的，即可完成此證明，於是我們決定用$\boxed{\text{同一法}}$。



在 P_1 上任取一點 K_1 ，取 $K_2 \in P_2$ 使得 K_1－A_2－K_2；同理，作出K_3、K_4。

而 K_5 則為 $\overrightarrow{K_1A_1}$ 交於 P_4 的點。

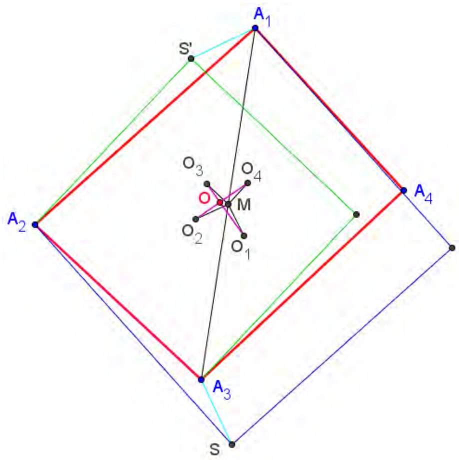
由證明 1 得知：

$\angle A_i K_i A_{i+1} = 90°(i = 1,2,\cdots,4)$

又知道 $\angle A_4 K_4 A_1 = 4(90°) - 3(90°)$

$= 90° = \angle A_4 K_5 A_1$。得到 $K_4 = K_5$。

3. **證明 $\overleftrightarrow{O_1O_3} \perp \overleftrightarrow{O_2O_4}$**



$\Delta A_2SA_3 \cong \Delta A_2A_1S'$ (SAS)

$\therefore \overline{A_1S'} = \overline{SA_3}$ 且 $\overline{A_2A_3} \perp \overline{A_2S'}$ $\therefore \overline{SA_3} \perp \overline{A_1S'}$

又 $\overline{O_1M} = \frac{1}{2}\overline{SA_3}$ 、 $\overline{O_2M} = \frac{1}{2}\overline{S'A_1}$

$\therefore \overline{SA_3} = \overline{A_1S'}$ 且 $\overline{SA_3} \perp \overline{A_1S'}$

再連 $\overleftrightarrow{O_1O_3}$ 、 $\overleftrightarrow{O_2O_4}$ ， $\angle O_4MO_2 = \angle O_1MO_3$

$\therefore \Delta O_4MO_2 \cong \Delta O_3MO_1 (SAS)$

故 $\overline{MO_3} \perp \overline{MO_4}$ ，得知 $\overline{O_1O_3} \perp \overline{O_2O_4}$ 。

所以由 1 、 2 、 3 可得：四邊形 $K_1K_2K_3K_4$ 必為矩形，又因為 $\overleftrightarrow{K_1K_3} \perp \overleftrightarrow{K_2K_4}$ ，故四邊形 $K_1K_2K_3K_4$ 必為正方形。

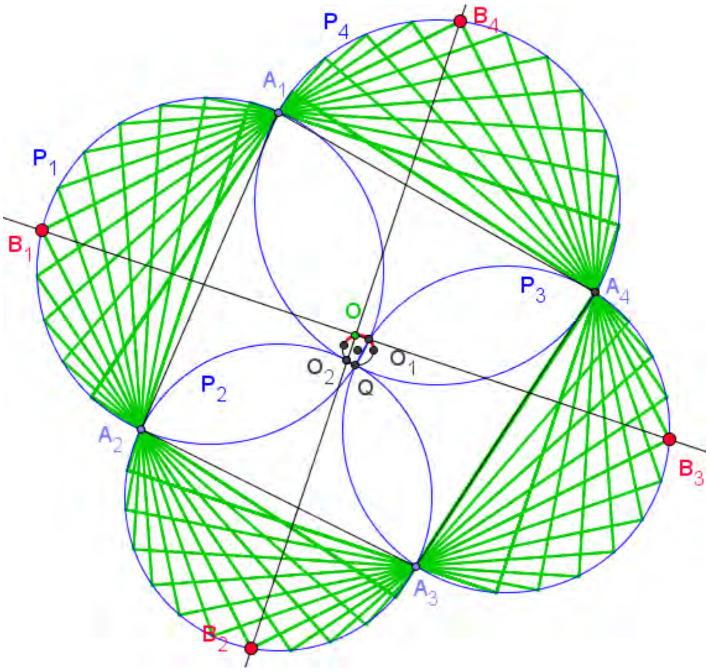
（三）存在性探討

作圖

- $O_1 = O_3$ 且 $O_2 = O_4$
  - 無限多解
- $O_1 \neq O_3$ 或 $O_2 \neq O_4$
  - 直線 O_1O_3 與線段 A_1A_2 和 A_3A_4
直線 O_2O_4 與線段 A_2A_3 和 A_4A_1
    - 皆有交點
      - 恰有一組在線段上的解
    - 至少其一沒有交點
      - 非全在線段上的解

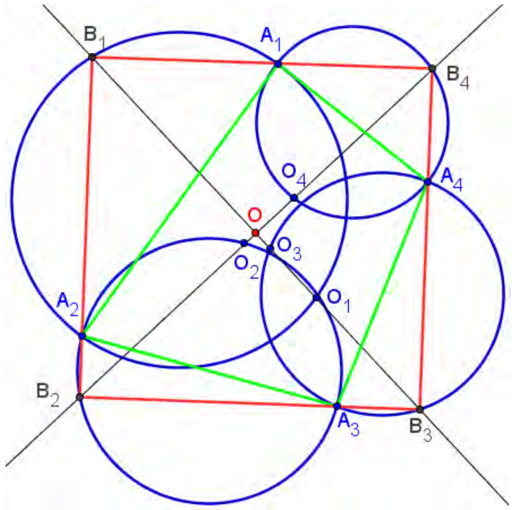
1. $O_1 = O_3 \wedge O_2 = O_4$：

因為$O_1 = O_3$、$O_2 = O_4$，所以$\overleftrightarrow{O_1O_3}$、$\overleftrightarrow{O_2O_4}$有無限多條,即可作出無限多個正方形。

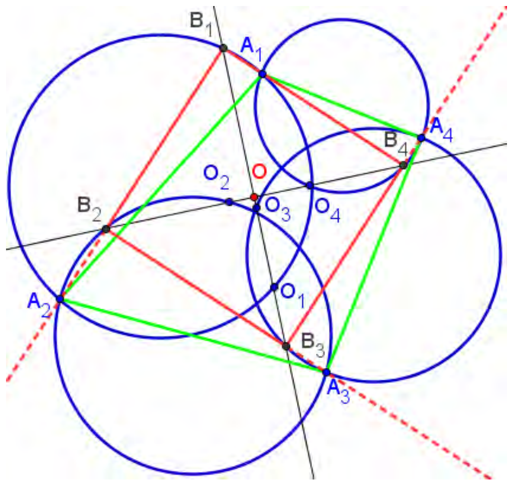


2. $\overleftrightarrow{O_1O_3}$與$\overline{A_1A_2}$和$\overline{A_3A_4}$是否有交點，$\overleftrightarrow{O_2O_4}$與$\overline{A_2A_3}$和$\overline{A_4A_1}$是否有交點：

(1)皆有交點：B_i都會落在原四邊形的外面，作出線段上的解。

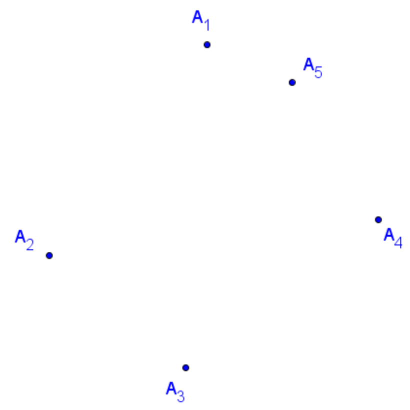


(2)至少其一無交點：B_i會有落在原四邊形內部，作出非全在線段上的解。

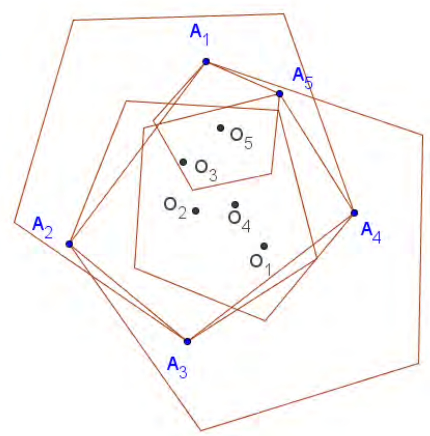


三、通過平面上任三點不共線的相異五點，可存在使之每邊恰經過一點的正五邊形：

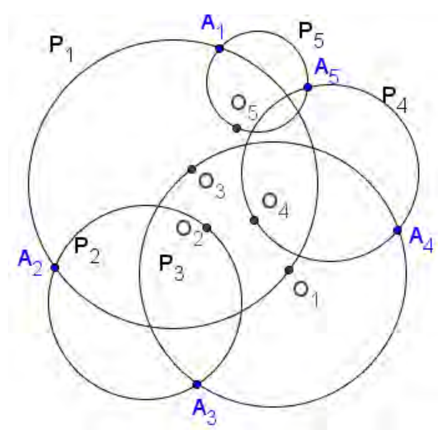
（一）作法：



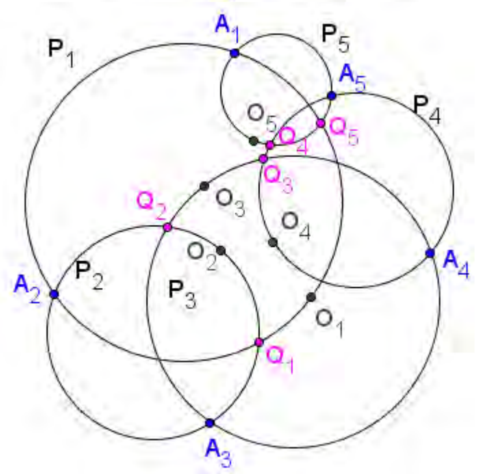
1.在平面上取相異不共線的五點 A_1 、 A_2 、 A_3 、 A_4 、 A_5



2.分別以 $\overline{A_1A_2}$ 、$\overline{A_2A_3}$ 、$\overline{A_3A_4}$ 、$\overline{A_4A_5}$ 、$\overline{A_5A_1}$ 為邊長，向內作正五邊形。

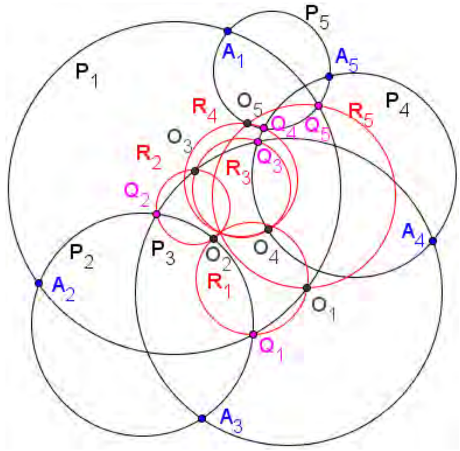


3.求出其外心 O_1 、 O_2 、 O_3 、 O_4 、 O_5 ，並分別作 $\Delta A_1O_1A_2$ 、 $\Delta A_2O_2A_3$ 、 $\Delta A_3O_3A_4$ 、 $\Delta A_4O_4A_5$ 、 $\Delta A_5O_5A_1$ 的外接圓 P_1 、 P_2 、 P_3 、 P_4 、 P_5 。

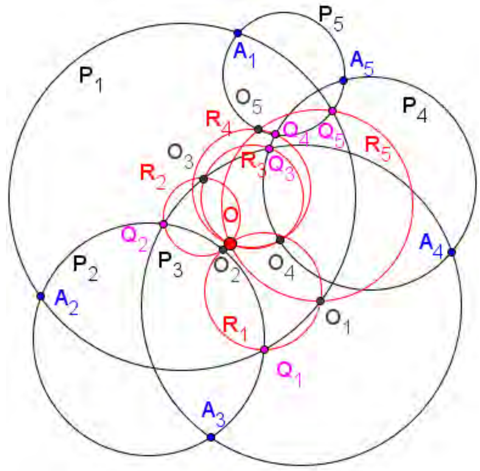


4.進而求出相鄰圓 P 的交點 Q_1 、 Q_2 、 Q_3 、 Q_4 、 Q_5 。

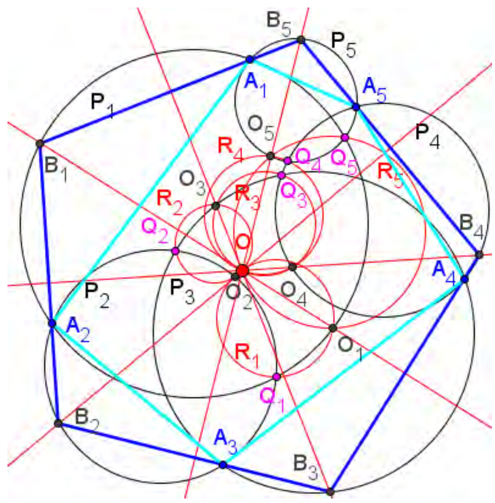
5.分別作 $\Delta O_1Q_1O_2$ 、 $\Delta O_2Q_2O_3$ 、 $\Delta O_3Q_3O_4$ 、 $\Delta O_4Q_4O_5$ 、 $\Delta O_5Q_5O_1$ 的外接圓 R_1 、 R_2 、 R_3 、 R_4 、 R_5 。



6.求出 R_1 、 R_2 、 R_3 、 R_4 、 R_5 的共同交點 O 。



7.分別作 $\overleftrightarrow{OO_1}$ 、 $\overleftrightarrow{OO_2}$ 、 $\overleftrightarrow{OO_3}$ 、 $\overleftrightarrow{OO_4}$ 、 $\overleftrightarrow{OO_5}$ 交圓 P_1 、 P_2 、 P_3 、 P_4 、 P_5 於 B_1 、 B_2 、 B_3 、 B_4 、 B_5 ，則五邊形 $B_1B_2B_3B_4B_5$ 即為所求之正五邊形。



（二）證明：

1.**正五邊形的頂點 B_1 會落在 $\Delta A_1O_1A_2$ 的外接圓上**

假設 B_1 不落在 P_1 上

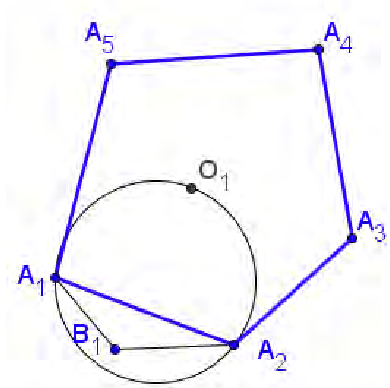
已知 $\angle A_1O_1A_2 = 108°$

又知道 $\angle A_1B_1A_2 = 72°$

矛盾

故得知 B_1 落在 P_1 上，得證。

而 B_2 、 B_3 、 B_4 、 B_5 同理可得



2. P_i 上的點必能通過 A_i 構造出等角五邊形

在 P_1 上任取一點 K_1，取 $K_2 \in P_2$ 使得

$K_1 - A_2 - K_2$；

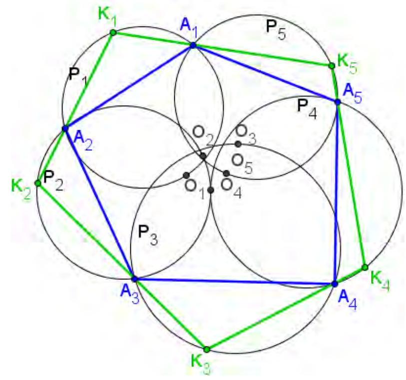
同理，作出 K_3、K_4、K_5。

而 K_6 則為 $\overrightarrow{K_1A_1}$ 交於 P_5 的點。

由證明 1 得知：$\angle A_iK_iA_{i+1} = 72°(i = 1,2,\cdots,4)$

又知道 $\angle A_5K_5A_1 = 5(72°) - 4(72°)$

$= 72° = \angle A_5K_6A_1$ 得到 $K_5 = K_6$。



3. O、O_i、B_i 共線

取 $O_1' = O$ 為縮放中心，

以 $\overline{A_1A_2}$ 為邊作出的正五邊形放大至其頂點

皆在 $B_1B_2B_3B_4B_5$ 上

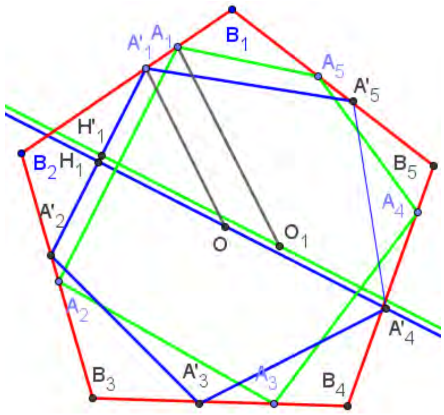
得到 $\Delta A_1H_1O_1 \sim \Delta A_1'H_1'O_1'$

，則 $\Delta A_1B_1O_1 \sim \Delta A_1'B_1O_1'$

即 $\overline{O_1'B_1} // \overline{O_1B_1}$

即可得知 O、O_1、B_1 共線。

而同理可得 O、O_2、B_2，O、O_3、B_3，O、O_4、B_4，O、O_5、B_5 共線



4. O 必落在 R_i 上

(1) O、Q_i 在 $\overleftrightarrow{O_iO_{i+1}}$ 異側

設 O 不在圓 R_i 上，但

$\angle B_1OB_2 = 72°$，即 $\angle O_1OO_2 = 108°$

又

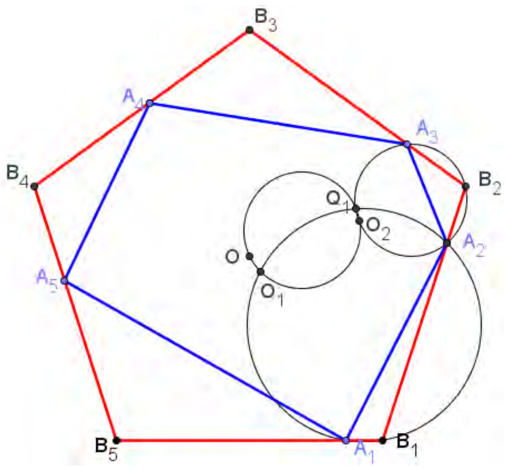
$\angle O_1Q_1O_2$

$= \angle O_1Q_1A_2 - \angle O_2Q_1A_2$

$= (180° - \angle O_1A_1A_2) - \angle O_2A_3A_2$

$= 108°$

矛盾，故得知 O 在圓 R_i 上。



(2) O 、 Q_i 在 $\overleftrightarrow{O_iO_{i+1}}$ 同側

設 O 不在圓 R_i 上，但 $\angle B_1OB_2 = 72°$

又

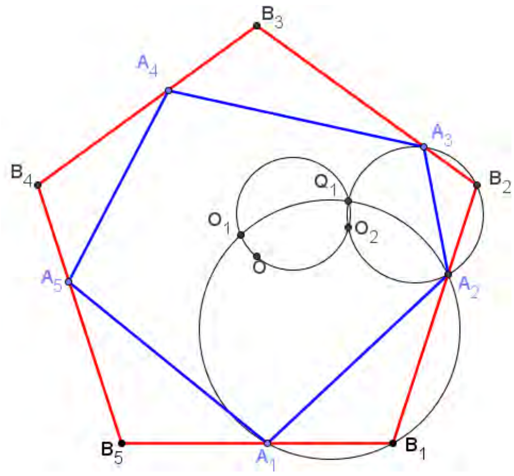
$\angle O_1Q_1O_2$

$= \angle O_1Q_1A_2 - \angle O_2Q_1A_2$

$= (180° - \angle O_1A_1A_2) - \angle O_2A_3A_2$

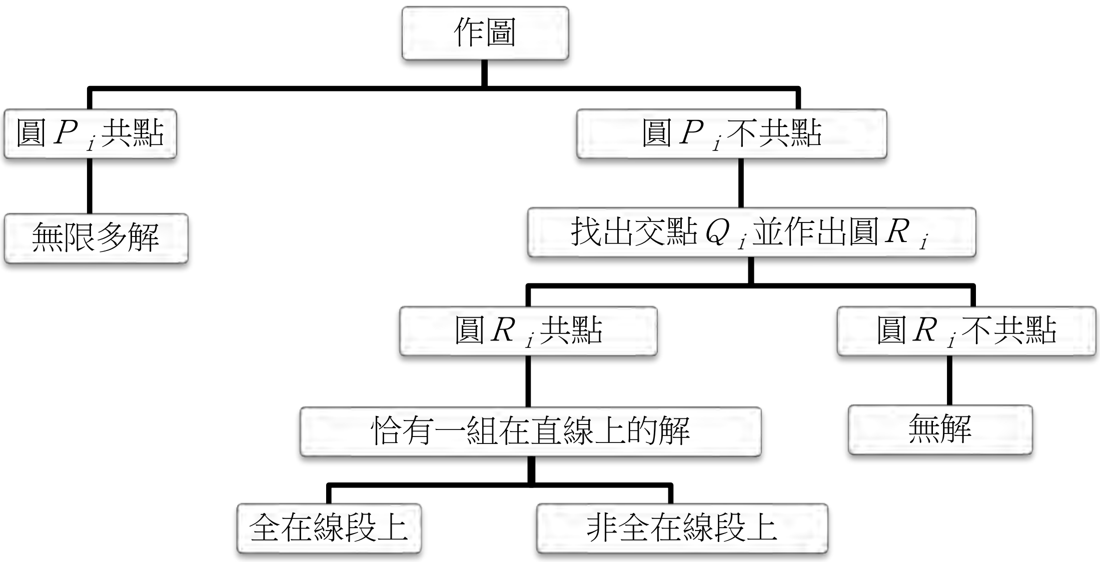
$= 108°$

矛盾，故得知 O 在圓 R_i 上。



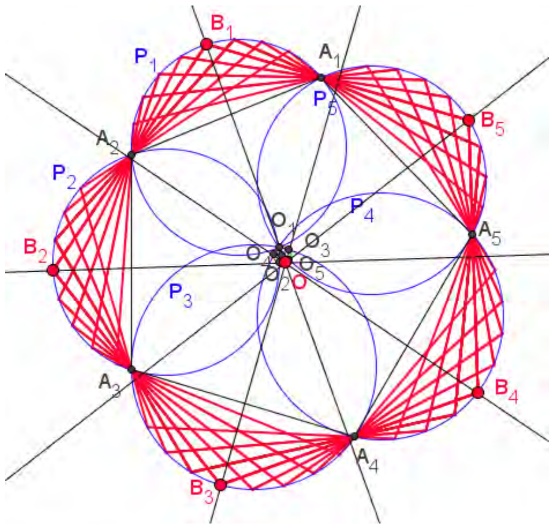
由1、2、3、4得知：有無限個等角五邊形 $K_1K_2K_3K_4K_5$，而當找出 O 之後，以 O 為外心的等角五邊形即為正五邊形。

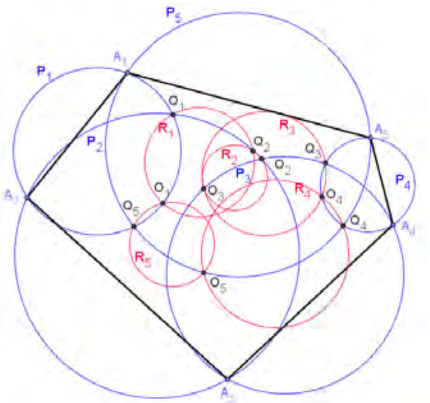
（三）存在性探討



1. 圓 P_i 共點：

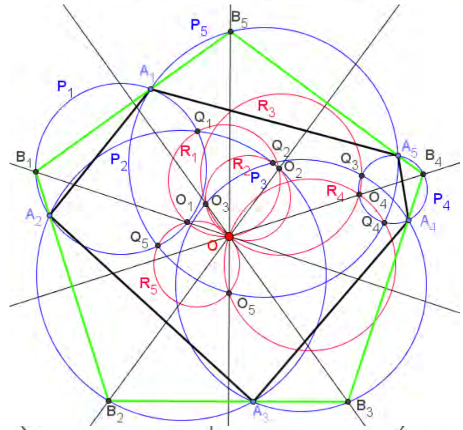
此時，$R_i (i = 1,2,3,4,5)$ 重合，所以此時的 O 有無限多個，必存在無限多個正五邊形。





2. 圓 R_i 不共點：

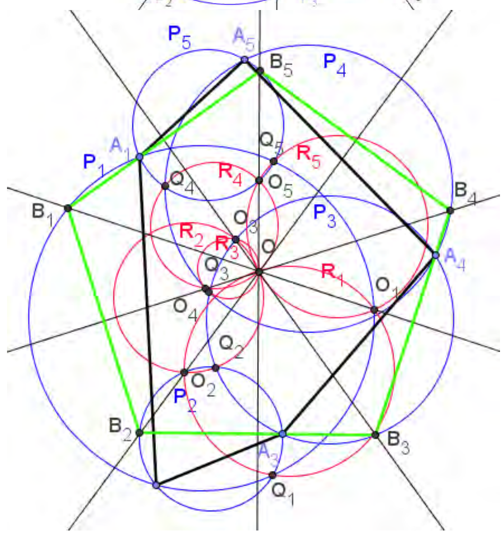
   此時不存在 O ，即不存在正五邊形。



3.圓 R_i 共點

(1)交點全在線段上：

B_i 都會落在原五邊形的外面，作出線段上的解。



(2)交點不全在線段上：

B_i 會有落在原五邊形內部，作出非全在線段上的解。

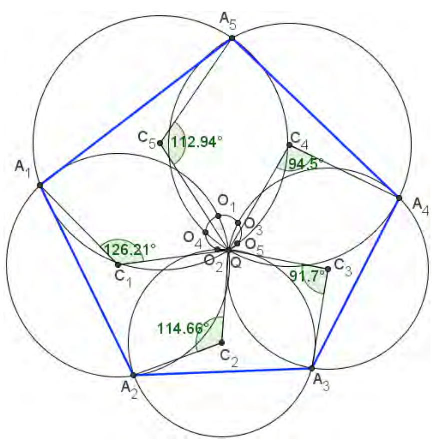
探討在作圖的過程中，我們發現好像多一個點，作圖方法就有所改變；而當我們進一步摸索後，似乎發現奇邊形要透過外心 O 來求得頂點，而偶邊形卻不是，故我們便猜測奇邊形和偶邊形的作圖方法相異。

（四）無限多解時，正五邊形外心軌跡為圓的部分集合

1.找端點的作圖方法

令 C_i 為圓 $\mathrm{P_i}$ 的圓心

(1)比較 $\angle QC_1A_1$ 、 $\angle QC_2A_2$ 、 $\angle QC_3A_3$ 、 $\angle QC_4A_4$ 、 $\angle QC_5A_5$ 的大小



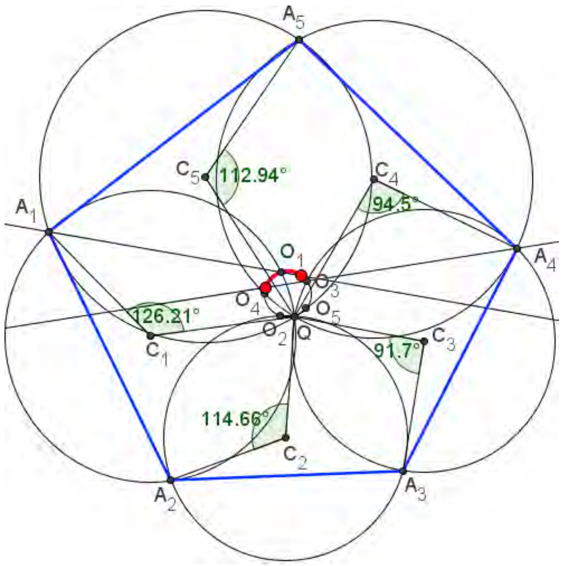
(2)

最大者連 $\overleftrightarrow{A_iO_i}$ 與外心軌跡圓 R 的交點

(3)

最小者連 $\overleftrightarrow{A_{i+1}O_i}$ 與外心軌跡圓 R 的交點

即可得到所求的端點範圍



2.證明

當外心 O 從 Q 轉到 O 時

圓心角 $\angle QC_0O = \theta$

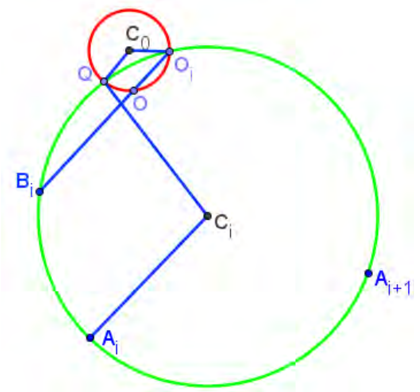
$\angle QC_0O = 2\angle QO_iO = \angle QC_iB_i$

所以當 $\angle QC_iB_i$ 越大時代表越晚成立

連 $\overleftrightarrow{A_iO_i}$ 與外心軌跡圓 R 的交點

所以越小時代表越早不成立

連 $\overleftrightarrow{A_{i+1}O_i}$ 與外心軌跡圓 R 的交點



四、通過平面上任三點不共線的相異奇數個點，可存在使之每邊恰經過一點的正奇邊形：

（一）作法：

1.給定平面上 n 個點 A_1 、 A_2 、 A_3 、$\cdots$ 、 A_{n-1} 、 A_n 。

2.分別以 $\overline{A_1A_2}$ 、 $\overline{A_2A_3}$ 、$\cdots$ 、 $\overline{A_{n-1}A_n}$ 、 $\overline{A_nA_1}$ 為邊長，向內作正 n 邊形，其外心分別為 O_1 、 O_2 、 O_3 、$\cdots$ 、 O_{n-1} 、 O_n 。

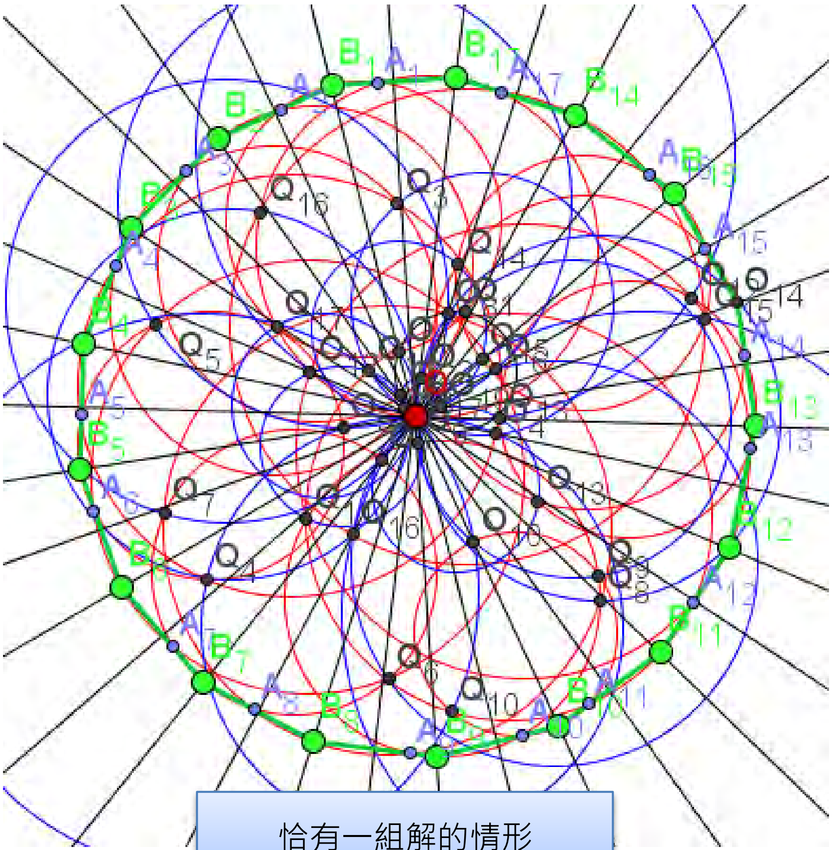
3.作 $\Delta A_1O_1A_2$ 、$\Delta A_2O_2A_3$ 、$\cdots$ 、 $\Delta A_{n-1}O_{n-1}A_n$ 、 $\Delta A_nO_nA_1$ 的外接圓 P_1 、 P_2 、 P_3 、$\cdots$ 、 P_{n-1} 、 P_n 。

4.兩兩相鄰圓 P 異於 A 的交點為 Q_1 、 Q_2 、 Q_3 、$\cdots$ 、 Q_{n-1} 、 Q_n 。

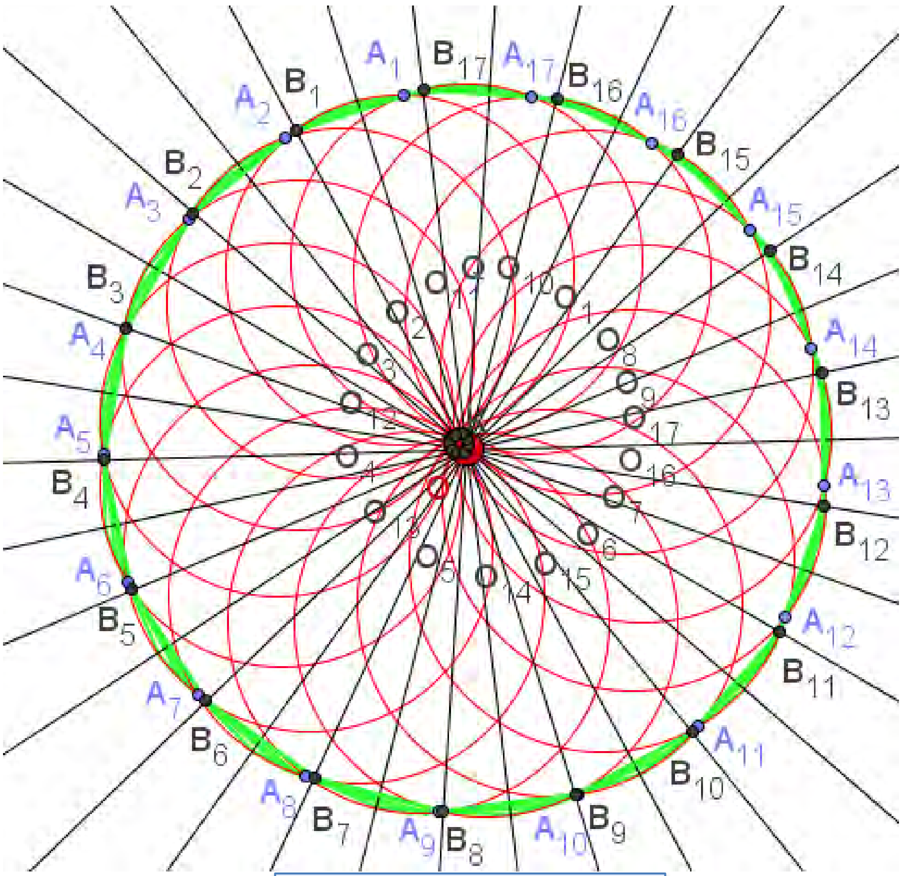
5.作 $\Delta O_1Q_1O_2$ 、$\Delta O_2Q_2O_3$ 、...、$\Delta O_{n-1}Q_{n-1}O_n$ 、$\Delta O_nQ_nO_1$ 的外接圓 R_1 、R_2 、R_3 、$\cdots$ 、 R_{n-1} 、 R_n 。

6.求出 R_1 、 R_2 、 R_3 、$\cdots$ 、 R_{n-1} 、 R_n 的共同交點 O 。

7.分別作 $\overleftrightarrow{OO_1}$ 、 $\overleftrightarrow{OO_2}$ 、$\cdots$ 、 $\overleftrightarrow{OO_{n-1}}$ 、 $\overleftrightarrow{OO_n}$ 交圓 P_1 、 P_2 、 P_3 、$\cdots$ 、 P_{n-1} 、 P_n 於 B_1 、 B_2 、 B_3 、$\cdots$ 、 B_{n-1} 、 B_n 。則 n 邊形 $B_1\ B_2\ B_3 \cdots B_{n-1}\ B_n$ 即為所求之正 n 邊形。



恰有一組解的情形



無限多解的情形

（二）證明

1. 正 n 邊形的頂點 B_i 會落在 $\Delta A_iO_iA_{i+1}$ 的外接圓上

假設 B_i 不落在 P_i 上

已知 $\angle A_iO_iA_{i+1}=\dfrac{360^\circ}{n}$ 又知道 $\angle A_iB_iA_{i+1}=180^\circ-\dfrac{360^\circ}{n}$

與假設矛盾

故得知 B_i 落在 P_i 上，得證。

2. P_i 上的點必能通過 A_i 構造出等角 n 邊形

在 P_1 上任取一點 K_1，取 $K_2\in P_2$ 使得 $K_1—A_2—K_2$；同理作出 $K_i(i=1,2,3,\cdots,n)$。而 K_{n+1} 則為 $\overrightarrow{K_1A_1}$ 交於 P_n 的點。

由證明 1 得知：$\angle A_iK_iA_{i+1}=180^\circ-\dfrac{360^\circ}{n}(i=1,2,3,\cdots,n-1)$

又 $\angle A_nK_nA_1=n\left(180^\circ-\dfrac{360^\circ}{n}\right)-(n-1)\left(180^\circ-\dfrac{360^\circ}{n}\right)$

$=180^\circ-\dfrac{360^\circ}{n}=\angle A_nK_{n+1}A_1$

得到 $K_n=K_{n+1}$，即 P_i 上的任意點必通過 A_i 構造出等角 n 邊形。

3. 證明 O、O_1、B_1 共線

取 $O_i'=O$ 為縮放中心，將 $\overline{A_iA_{i+1}}$ 以為邊作出的正 n 邊形放大至其頂點皆在 $B_1B_2...B_n$ 上得到 $\Delta A_iH_iO_i\sim\Delta A_i'H_i'O_i'$，則 $\Delta A_iB_iO_i\sim\Delta A_i'B_iO_i'$ 即 $\overleftrightarrow{O_i'B_i}\,//\,\overleftrightarrow{O_iB_i}$

即可得知 O、O_1、B_1 共線

4. O 必落在 R_i 上

(1) O、O_i 在 $\overleftrightarrow{O_iO_{i+1}}$ 異側

設 O 不在 R_i 上，但 $\angle B_iOB_{i+1}=\dfrac{360^\circ}{n}$，即 $\angle O_iOO_{i+1}=180^\circ-\dfrac{360^\circ}{n}$

又 $\angle O_iQ_iO_{i+1}=\angle O_iQ_iA_{i+1}-\angle O_{i+1}Q_iA_{i+1}$

$=(180^\circ-\angle O_iA_iA_{i+1})-\angle O_{i+1}A_{i+2}A_{i+1}=\dfrac{360^\circ}{n}$

矛盾，故得知 O 在 R_i 上

(2) O、O_i 在 $\overleftrightarrow{O_iO_{i+1}}$ 同側

設 O 不在 R_i 上，但 $\angle B_iOB_{i+1}=\dfrac{360^\circ}{n}$

又 $\angle O_iQ_iO_{i+1}=\angle O_iQ_iA_{i+1}-\angle O_{i+1}Q_iA_{i+1}$

$=(180^\circ-\angle O_iA_iA_{i+1})-\angle O_{i+1}A_{i+2}A_{i+1}=\dfrac{360^\circ}{n}$

矛盾，故得知 O 在 R_i 上。

（三）存在性探討

- 作圖
  - 圓 P_i 共點
    - 無限多解
  - 圓 P_i 不共點
    - 找出交點 Q_i 並作出圓 R_i
      - 圓 R_i 共點
        - 恰有一組在直線上的解
          - 全在線段上
          - 非全在線段上
      - 圓 R_i 不共點
        - 無解

（四）無限多解時，正 n 邊形外心軌跡為圓的部分集合

作法及證明同五邊形，故在此省略

五、通過平面上任三點不共線的相異偶數個點，可存在使之每邊恰經過一點的正偶邊形：

(一)作法(令 $n=2k$)：

1.給定平面上 n 個點 A_1、A_2、A_3、⋯、A_n

2.分別以 $\overline{A_1A_2}$、$\overline{A_2A_3}$、$\overline{A_3A_4}$、⋯、$\overline{A_nA_1}$ 為邊長，向內作正 n 邊形。

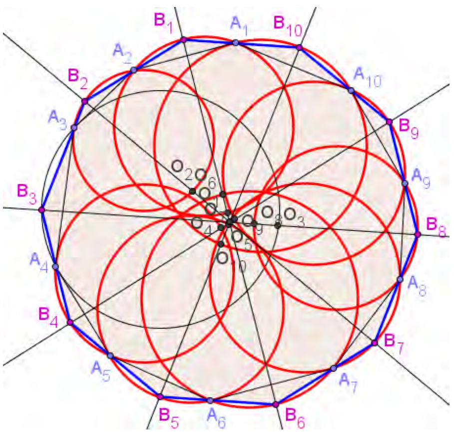
3.求出其外心 O_1、O_2、O_3、⋯、O_n。

4.連接 $\overleftrightarrow{O_1O_{k+1}}$、$\overleftrightarrow{O_2O_{k+2}}$、⋯、$\overleftrightarrow{O_kO_n}$

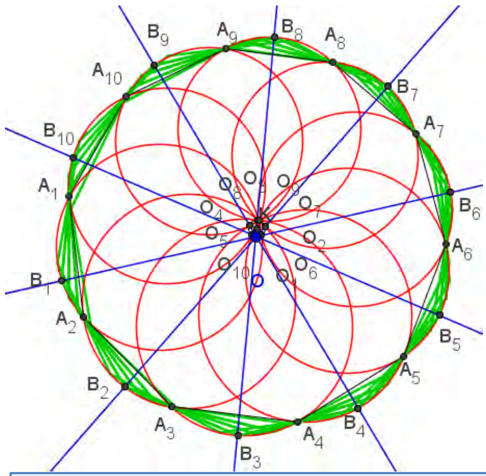
5.$\overleftrightarrow{O_1O_{k+1}}$、$\overleftrightarrow{O_2O_{k+2}}$、⋯、$\overleftrightarrow{O_kO_n}$ 的共同交點為 O

6.$\overleftrightarrow{O_1O_{k+1}}$、$\overleftrightarrow{O_2O_{k+2}}$、⋯、$\overleftrightarrow{O_kO_n}$ 分別交圓 P_1、P_{k+1}、P_2、P_{k+2}、⋯、P_n 於 B_1、B_{k+1}、B_2、B_{k+2}、⋯、B_n。

7.連 $\overline{B_1B_2}$、$\overline{B_2B_3}$、$\overline{B_3B_4}$、⋯、$\overline{B_nB_1}$，則 n 邊形 $B_1B_2B_3\cdots B_n$ 即為所求之正 n 邊形。



恰有一組解的情形



無限多解的情形

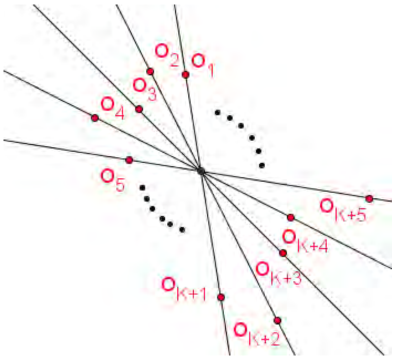
（二）證明：O_i 、O 、O_{k+i} 共線

設 $L_i = \overleftrightarrow{OB_i}\,(i=1,2,\cdots,n)$

L_i 和 L_{i+1} 的夾角為 $\dfrac{360°}{n}$

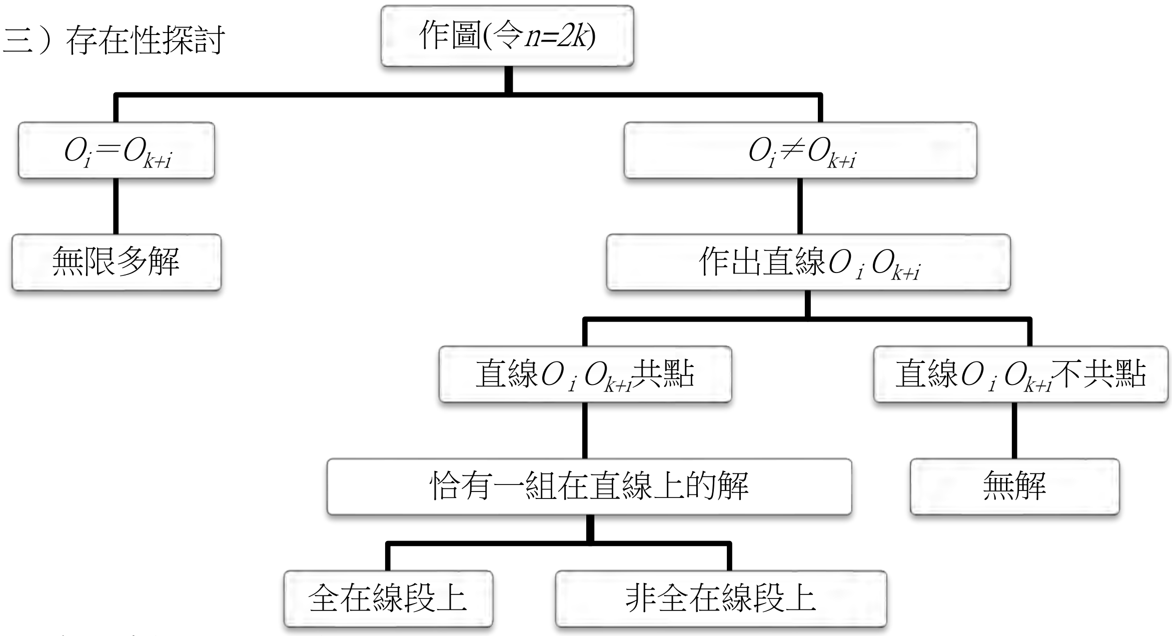
而 L_i 與 L_{k+i} 的夾角為 $\dfrac{n}{2}\left(\dfrac{360°}{n}\right)$ ，

亦即 O_i 、O 、O_{l+i} 共線



由以上得知偶數邊形對邊外心連線交 P_i 即可得到 B_i

（三）存在性探討



（四）無限多解時，正 n 邊形外心軌跡為圓的部分集合

作法及證明同五邊形，故在此省略

六、平面上三線不共點，任兩條不平行的相異三線圍成三角形，可存在每邊上恰取一點使之成為一正三角形：

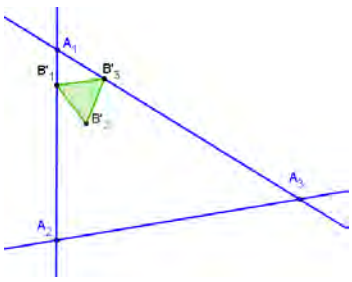
（一）作法：

1.在平面上取相異三線，圍成的三角形頂點為 A_1 、A_2 、A_3 ，在 $\overline{A_1A_2}$ 上取一點 B'_1 ，在 $\overline{A_1A_3}$ 上取一點 B'_3 ，以 $\overline{B'_1B'_3}$ 為邊向內作正三角形 $B'_1B'_2B'_3$ 。

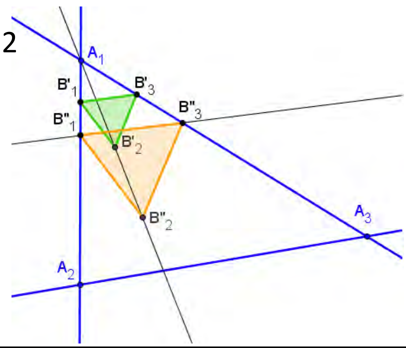
2. $\overline{A_1A_2}$ 上取一點 B'_1 ，取 $\overline{A_1A_3}$ 上一點 B'_3 使得 $\overline{B''_1B''_3} \parallel \overline{B'_1B'_3}$ ，並以 $\overline{B''_1B''_3}$ 為邊向內作正三角形 $B''_1B''_2B''_3$ 。

3.連 $\overleftrightarrow{B'_2B''_2}$ 交 $\overline{A_2A_3}$ 於 B_2 ，則 B_2 即為所求的一個頂點，而可以作出正三角形 $B_1B_2B_3$ 。

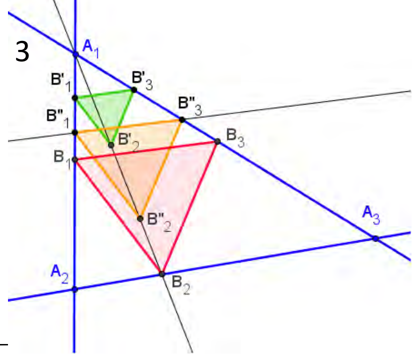
1



2



3

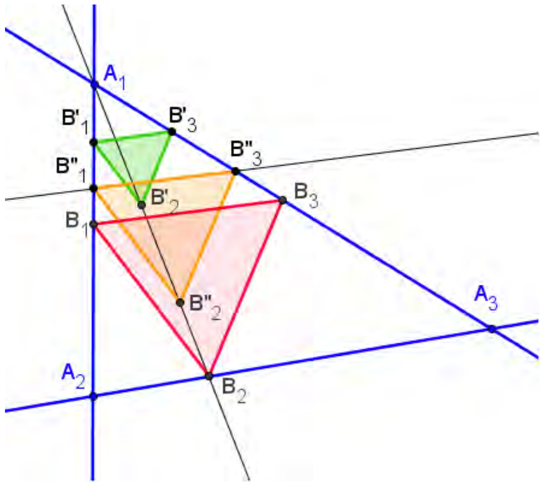


（二）證明：

$\because \overline{B_1B_2} \,//\, \overline{B'_1B'_2}$ 、 $\overline{B_2B_3} \,//\, \overline{B'_2B'_3}$

$\therefore \Delta B_1B_2B_3 \sim \Delta B'_1B'_2B'_3\,(AA)$

故 $\Delta B_1B_2B_3$ 為正三角形

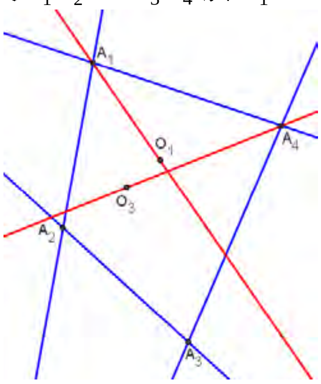


七、平面上無三線以上共點，任兩條不平行的相異四線圍成四邊形，可存在每邊上恰取一點使之成為一正方形：

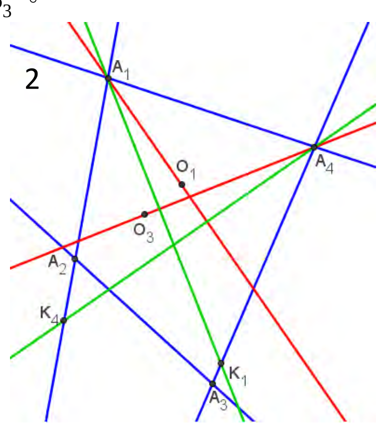
（一）作法：

1. 以 $\overline{A_1A_2}$ 、 $\overline{A_3A_4}$ 為邊長向內作正方形的外心 O_1 、 O_3，連 $\overleftrightarrow{A_1O_1}$ 、 $\overleftrightarrow{A_4O_3}$ 。
2. 過 A_1 作 $\overleftrightarrow{A_4O_3}$ 的垂直線交 $\overleftrightarrow{A_3A_4}$ 於 K_1，過 A_4 作 $\overleftrightarrow{A_1O_1}$ 的垂直線交 $\overleftrightarrow{A_1A_2}$ 於 K_4 。
3. 過 K_1 作 $\overleftrightarrow{A_4O_3}$ 的平行線交 $\overleftrightarrow{A_1O_1}$ 於 I_1，過 K_4 作 $\overleftrightarrow{A_1O_1}$ 的平行線交 $\overleftrightarrow{A_4O_3}$ 於 I_4 。
4. 連 $\overleftrightarrow{I_1I_4}$ 交 $\overleftrightarrow{A_2A_3}$ 於 B_2 。
5. 過 B_2 平行 $\overleftrightarrow{A_1O_1}$ 交 $\overleftrightarrow{A_1A_2}$ 於一點 A，過其交點作 $\overleftrightarrow{AB_2}$ 的垂直線交 $\overleftrightarrow{A_4A_1}$ 於 B_4，作 $\overline{B_2B_4}$ 中垂線交 $\overleftrightarrow{A_1A_2}$ 、 $\overleftrightarrow{A_3A_4}$ 於 B_1 、 B_3 。

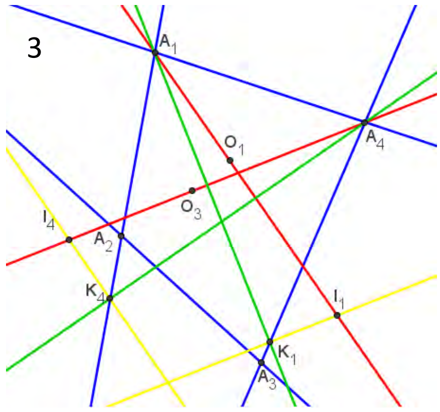
1



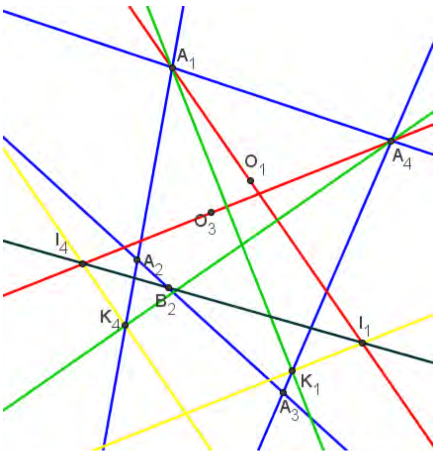
2



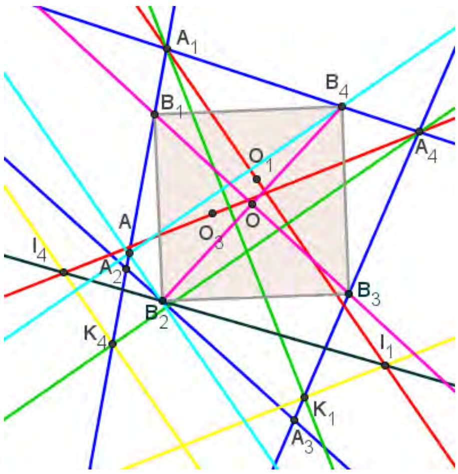
3



4



5



（二）證明

以 $\overline{B_2B_4}$ 為直徑畫圓交 $\overline{A_3A_4}$ 得 B_3 、T

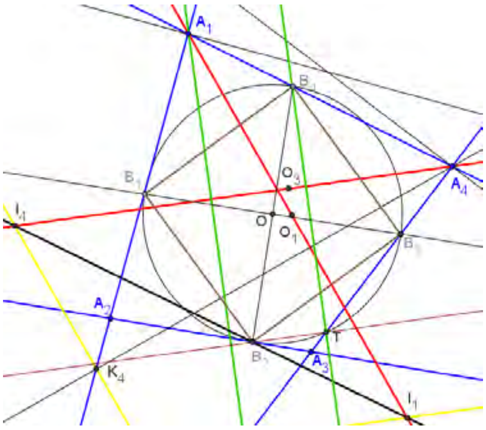
$\overleftrightarrow{TB_2} // \overleftrightarrow{A_4O_3}$ $\therefore \angle B_2TA_3 = 45^\circ$ 得知

$\angle A_4TB_4 = 45^\circ$

敀 $\angle B_4OB_3 = 90^\circ$ 故 $\overline{B_2B_4}$ 的中垂線會交 $\overleftrightarrow{A_3A_4}$ 於 B_3

同理可得 $\overline{B_2B_4}$ 的中垂線亦交 $\overleftrightarrow{A_1A_2}$ 於 B_1

敀四邊形 $B_1B_2B_3B_4$ 為正方形



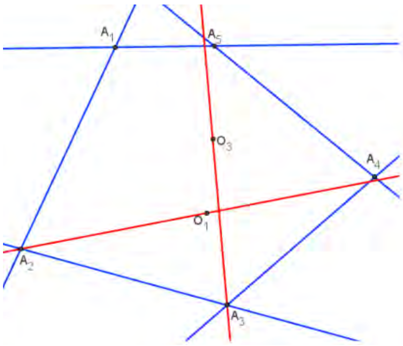
（三）存在性探討

- 作圖($n=2k$)
  - 直線l_il_{i+1}與直線$A_{k+i}A_{k+i+1}$重合
    - 無限多解
  - 直線l_il_{i+1}與直線$A_{k+i}A_{k+i+1}$不重合
    - 直線l_il_{i+1}與直線$A_{k+i}A_{k+i+1}$交一點
      - 恰有一組在直線上的解
        - 全在線段上
        - 非全在線段上
    - 直線l_il_{i+1}與直線$A_{k+i}A_{k+i+1}$平行
      - 無解

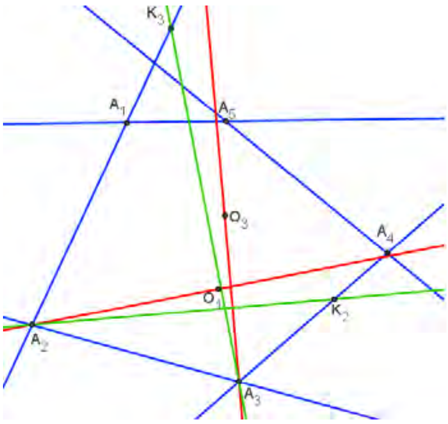
八、平面上無三線以上共點，任兩條不平行的相異五線圍成五邊形，可存在每邊上恰取一點使之成為一正五邊形：

（一）作法

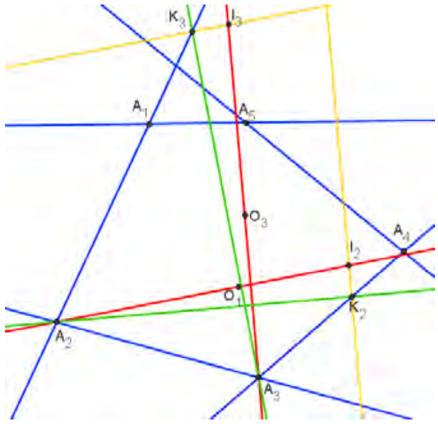
1.以 $\overline{A_1A_2}$ 、$\overline{A_3A_4}$ 為邊長的向內作正五邊形外心 O_1 、O_3 ，連 $\overleftrightarrow{A_2O_1}$ 、$\overleftrightarrow{A_3O_3}$ 。



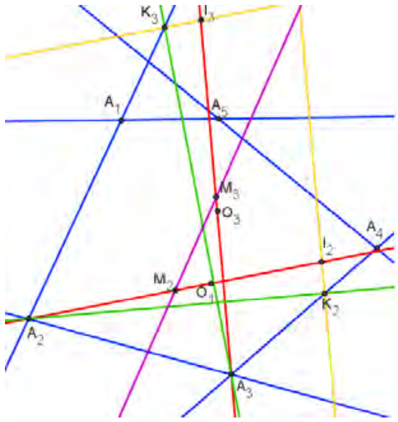
2.過 A_2 作 $\overleftrightarrow{A_3O_3}$ 垂直線交 $\overleftrightarrow{A_3A_4}$ 於 K_2 ，過 A_3 作 $\overleftrightarrow{A_2O_1}$ 垂直線交 $\overleftrightarrow{A_1A_2}$ 於 K_3



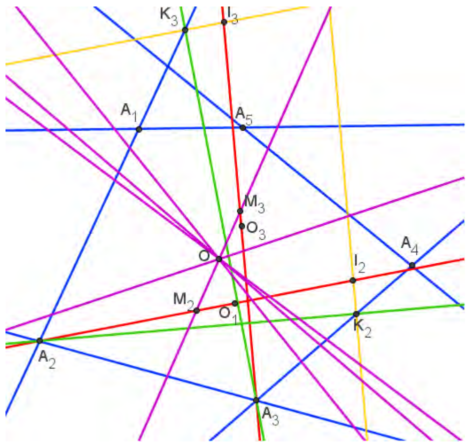
3. 過 K_2 作 $\overleftrightarrow{A_3O_3}$ 平行線交 $\overleftrightarrow{A_2O_1}$ 於 I_2，過 K_3 作 $\overleftrightarrow{A_2O_1}$ 平行線交 $\overleftrightarrow{A_3O_3}$ 於 I_3



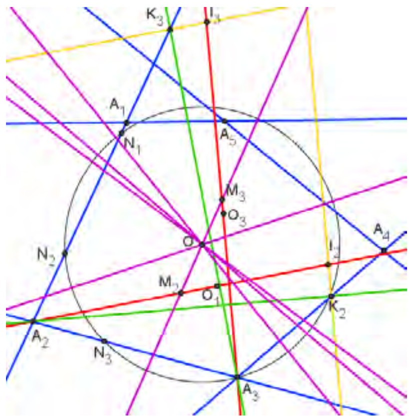
4.作 $\overline{A_2I_2}$ 、 $\overline{A_3I_3}$ 中點 M_2 、 M_3 ，連 $\overleftrightarrow{M_2M_3}$



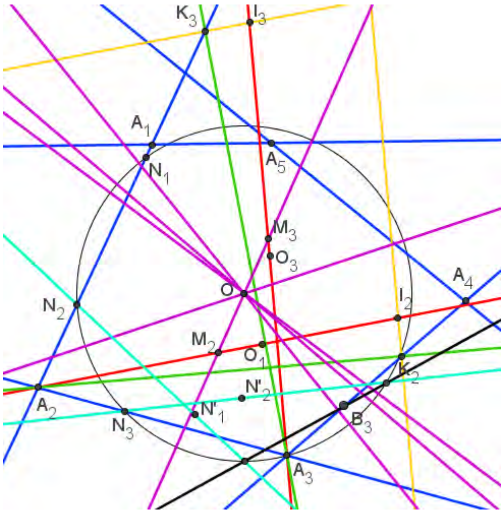
依此作法依序作完，共同交點 O 即為正五邊形的外心



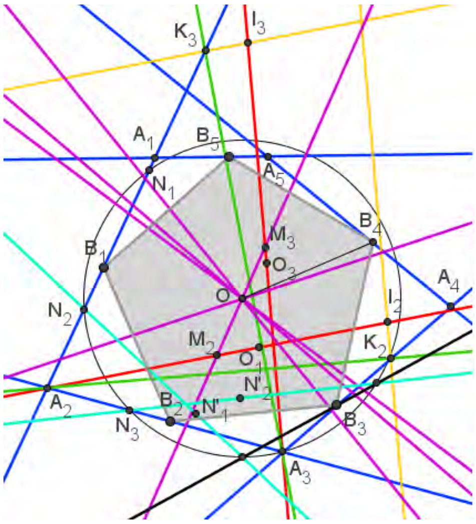
5.取一適當半徑，以 O 為圓心作圓，交 $\overleftrightarrow{A_1A_2}$ 於 N_1 、 N_2 ，交 $\overleftrightarrow{A_2A_3}$ 於 N_3



6. 以 N_3 為旋轉中心，將 $\overleftrightarrow{N_3N_1}$ 、 $\overleftrightarrow{N_3N_2}$ 順時針轉正五邊形的內角，與圓的交點相連，與 $\overleftrightarrow{A_3A_4}$ 交點即為 B_3

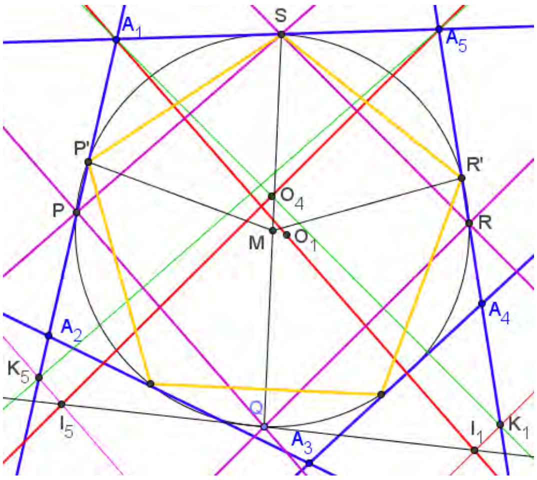


7.再以 O 為中心將 B_3 旋轉，得其他頂點，將各個頂點連接即為正五邊形



（二）證明

1.$\overline{QS}$ 中點為三頂點在三線上的正五邊形的外心



Q 為 $\overleftrightarrow{I_1I_5}$ 上的動點

$\overleftrightarrow{QR}$ // $\overleftrightarrow{I_5A_5}$ $\therefore \angle QRK_1 = 54°$ 得知

$\angle SRA_5 = 36°$ ， $\angle \mathrm{SMR'} = 2\angle \mathrm{SRA}_5 = 72°$

同理可得 $\angle SMP' = 72°$

故 M 為正五邊形三頂點在三線上的外心

2. **該外心軌跡為 $\overleftrightarrow{M_iM_{i+1}}$**

(1)

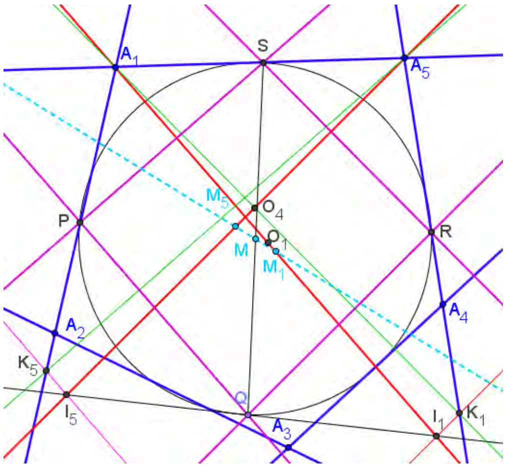
Q 為 $\overleftrightarrow{I_1I_5}$ 上的動點

設 $\overline{I_5Q}$ ： $\overline{QI_1}=m$ ： n

$\because \overleftrightarrow{I_5A_5} // \overleftrightarrow{QR} // \overleftrightarrow{I_1K_1}$

$\therefore \overline{RK_1}$ ： $\overline{RK_5}=n$ ： m

又 $\overleftrightarrow{A_1K_1} // \overleftrightarrow{RS}$ $\therefore \overline{A_5S}$ ： $\overline{SA_1}=m$ ： n



(2) 一開始 $\overline{I_5I_1} // \overline{CA_1}$

且 $\overline{I_5Q}:\overline{QI_1}=\overline{CF}:\overline{A_1F}=m$ ： n

$\overline{I_5C}$ 中點 M_5' ，$\overline{I_1A_1}$ 中點 M_1

則 $\overline{QF}$ 的中點 $M' \in \overline{M_5'M_1}$

今作 $\overline{A_5A_1}$ 且 $A_5 \in \overrightarrow{I_5C}$

使得 $\overline{A_1S}:\overline{SA_5}=n$ ： m

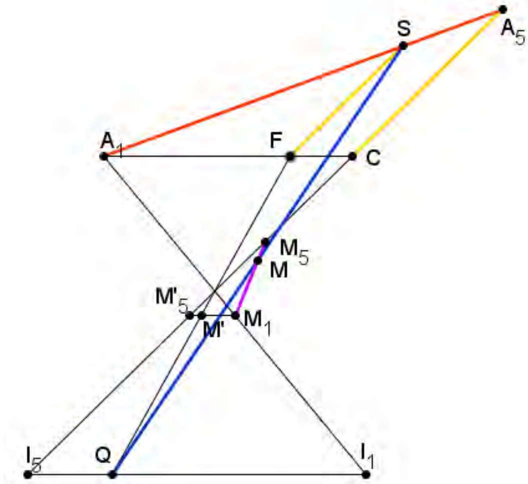
且 $\overline{I_5A_5}$ 中點為 M_5 ，$\overline{QS}$ 中點 M

則得知 $\overline{MM'} // \overline{SF}$

即 $\overline{MM'} // \overline{I_5A_5}$

故 $\overline{MM'}$ 為 $\Delta M_1M_5'M_5$ 的中線

即 M 必落在 $\overline{M_1M_5}$ 上



3. **頂點的軌跡為一直線**

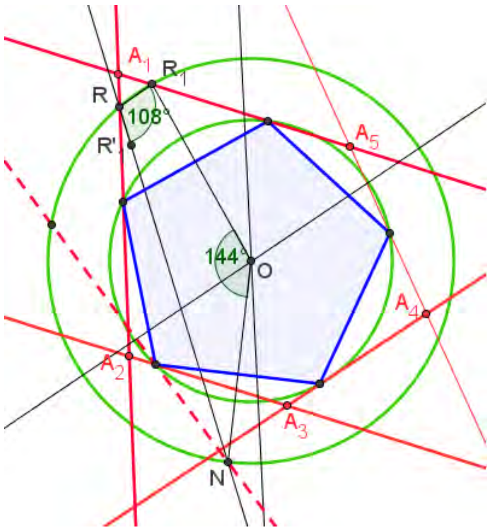
$\because \angle R_1RN=108° \therefore \angle R_1ON=144°$

又 $\overline{R_1O}=\overline{NO}$

$\therefore \overline{R_1O}$ 逆時針旋轉 $144°$ 可得 $\overline{NO}$

且 R_1 的軌跡為一直線

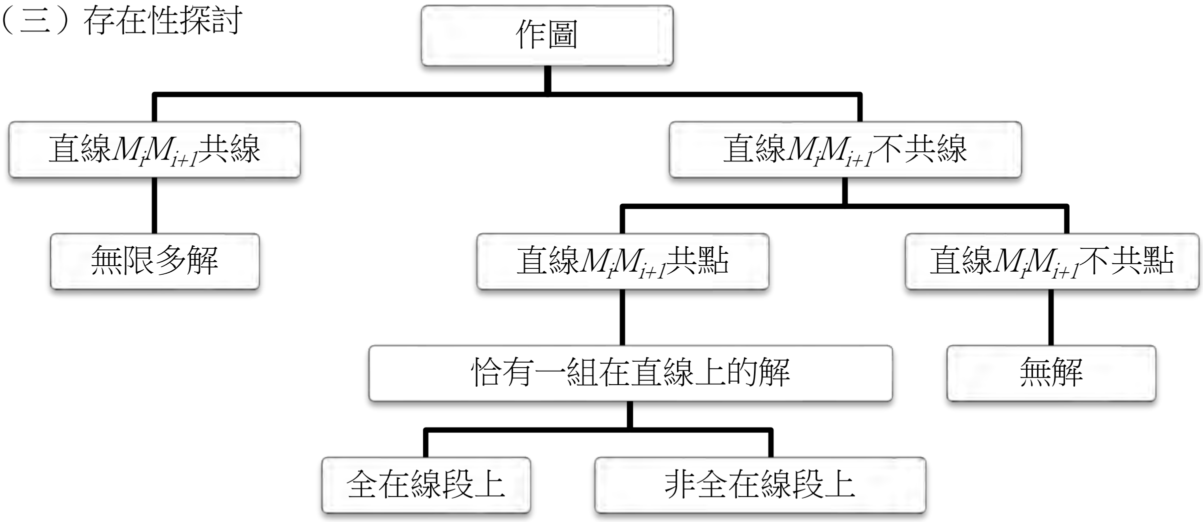
$\therefore$N 的軌跡為一直線



故由 1、2、3 得知，利用軌跡的方法

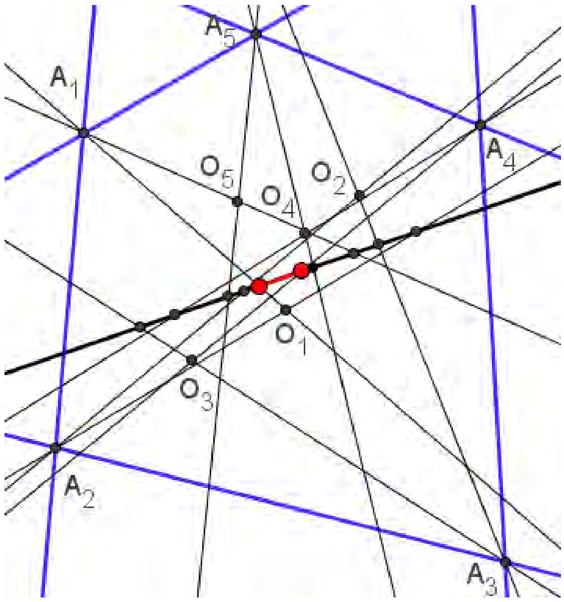
可作出正五邊形 $B_1B_2B_3B_4B_5$

（三）存在性探討



（四）無限多解時，正五邊形外心軌跡為線段

1.找端點的作圖方法



(1)

連 $\overleftrightarrow{A_1O_1}$ 、$\overleftrightarrow{A_2O_2}$ 、$\overleftrightarrow{A_3O_3}$ 、$\overleftrightarrow{A_4O_4}$ 、$\overleftrightarrow{A_5O_5}$ 與外心軌跡的交點

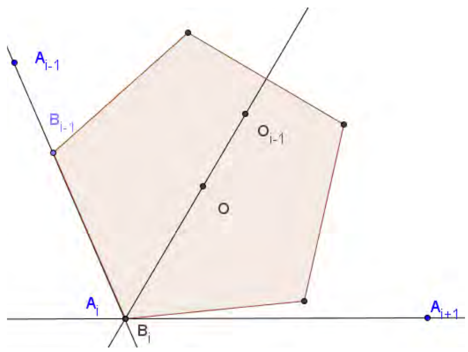
(2)

連 $\overleftrightarrow{A_1O_5}$ 、$\overleftrightarrow{A_2O_1}$ 、$\overleftrightarrow{A_3O_2}$ 、$\overleftrightarrow{A_4O_3}$ 、$\overleftrightarrow{A_5O_4}$ 與外心軌跡的交點

(3)

在(1)及(2)中所作出來的五個點中各取一點，並使此兩點的距離為最小值，則此兩點即為端點，而得以求出端點範圍。

2.證明



當 B_i 順時針移動時，與 A_i 重合

$B_{i-1} \in \overleftrightarrow{A_{i-1}A_i}$

$\therefore \overline{B_iB_{i-1}}$ 跟 $\overleftrightarrow{A_iA_{i-1}}$ 重合

所以

$\angle B_{i-1}B_iO = \angle B_{i-1}B_iO_{i-1} = \angle A_{i-1}A_iO_{i-1}$

$\therefore$ B_i 順時針移動時，O 最先碰到 $\overleftrightarrow{A_iO_{i-1}}$ 與外心軌跡交點即為一端點

逆時針同理。

$\therefore$ B_i 逆時針移動時，O 最先碰到 $\overleftrightarrow{A_iO_i}$ 與外心軌跡交點即為另一端點

所以端點範圍為兩者各取一點，並使兩點間的距離為最小值。

九、平面上無三線以上共點，任兩條不平行的相異奇數條線圍成奇邊形，可存在每邊上恰取一點使之成為一正奇邊形：

（一）作法

1.以 $\overline{A_{i-1}A_i}$ 、 $\overline{A_{i+1}A_{i+2}}$ 為邊長向內作正 n 邊形外心 O_{i-1} 、 O_{i+1} ，連 $\overleftrightarrow{A_iO_{i-1}}$ 、 $\overleftrightarrow{A_{i+1}O_{i+1}}$ 。

2.過 A_i 作 $\overleftrightarrow{A_{i+1}O_{i+1}}$ 垂直線交 $\overleftrightarrow{A_{i+1}A_{i+2}}$ 於 K_i ，過 A_{i+1} 作 $\overleftrightarrow{A_iO_{i-1}}$ 垂直線交 $\overleftrightarrow{A_{i-1}A_i}$ 於 K_{i+1}

3.過 K_i 作 $\overleftrightarrow{A_{i+1}O_{i+1}}$ 平行線交 $\overleftrightarrow{A_iO_{i-1}}$ 於 I_i ，過 K_{i+1} 作 $\overleftrightarrow{A_iO_{i-1}}$ 平行線交 $\overleftrightarrow{A_{i+1}O_{i+1}}$ 於 I_{i+1}

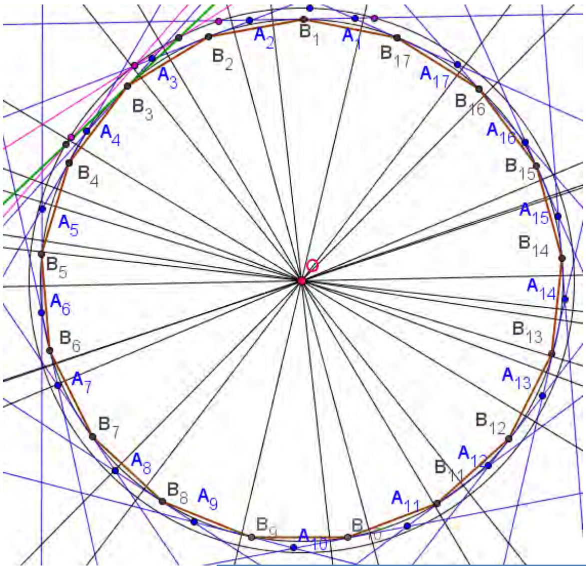
4.作 $\overline{A_iI_i}$ 、 $\overline{A_{i+1}I_{i+1}}$ 中點 M_i 、 M_{i+1} ，連 $\overleftrightarrow{M_iM_{i+1}}$

依此作法依序作完，所共同交點為 O 即為正 n 邊形的外心

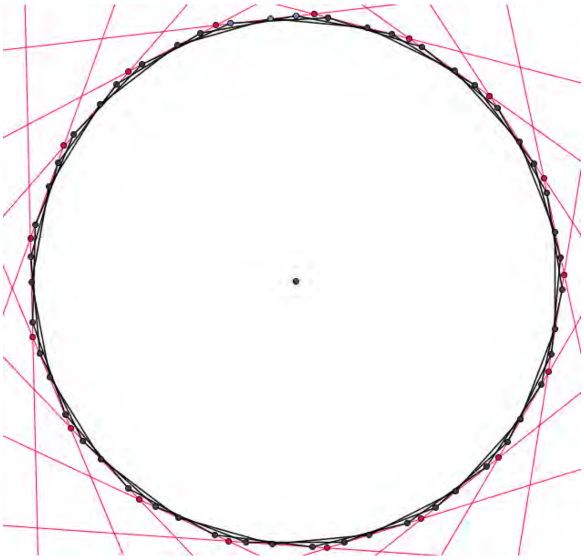
5.取一適當半徑，以 O 為圓心作圓，交 $\overleftrightarrow{A_{i-1}A_i}$ 於 N_{i-1} 、 N_i ，交 $\overleftrightarrow{A_iA_{i+1}}$ 於 N_{i+1}

6.以 N_{i+1} 為旋轉中心，將 $\overleftrightarrow{N_{i+1}N_{i-1}}$ 、 $\overleftrightarrow{N_{i+1}N_i}$ 順時針轉正 n 邊形的內角，與圓的交點，相連，與 $\overleftrightarrow{A_{i+1}A_{i+2}}$ 交點即為 B_{i+1}

7.再以 O 為中心將 B_{i+1} 旋轉，得其他頂點，將各個頂點連接即為正 n 邊形



恰有一組解的情形



無限多解的情形

（二）證明

1. $\overline{QS}$ 中點為正 n 邊形的三頂點在三線上的外心

Q 為 $\overleftrightarrow{I_iI_{i+1}}$ 上的動點， $\overleftrightarrow{QR} // \overleftrightarrow{I_iA_i}$ ∴ $\angle QRK_{i+1}=(90-\dfrac{180}{n})^\circ$ 得知 $\angle SRA_i=\dfrac{180^\circ}{n}$

$\angle SMR'=2\angle SRA_i=\dfrac{360^\circ}{n}$ 。同理可得 $\angle SMP'=\dfrac{360^\circ}{n}$

故 M 為正五邊形三頂點在三線上的外心

2.該外心軌跡為 $\overleftrightarrow{M_iM_{i+1}}$

(1)Q 為 $\overleftrightarrow{I_iI_{i+1}}$ 上的動點，設 $\overline{I_iQ}$ ： $\overline{QI_{i+1}}=m$ ： n

∵ $\overleftrightarrow{I_iA_i} // \overleftrightarrow{QR} // \overleftrightarrow{I_{i+1}K_{i+1}}$ ∴ $\overline{RK_{i+1}}$ ： $\overline{RA_i}=n$ ： m

又 $\overleftrightarrow{A_{i+1}K_{i+1}} // \overleftrightarrow{RS}$ ∴ $\overline{A_iS}$ ： $\overline{SA_{i+1}}=m$ ： n

(2)一開始 $\overline{I_iI_{i+1}} // \overline{CA_{i+1}}$

且 $\overline{I_iQ}:\overline{QI_{i+1}}=\overline{CF}:\overline{A_{i+1}F}=m:n$

$\overline{I_iC}$ 中點 M_i'，$\overline{I_{i+1}A_{i+1}}$ 中點 M_{i+1}

則 $\overline{QF}$ 的中點 $M'\in\overline{M_i'M_{i+1}}$

今作 $\overline{A_iA_{i+1}}$ 且 $A_i\in\overrightarrow{I_iC}$，使得 $\overline{A_{i+1}S}:\overline{SA_i}=n:m$

且 $\overline{I_iA_i}$ 中點為 M_i，$\overline{QS}$ 中點 M

則得知 $\overline{MM'}//\overline{SF}$，即 $\overline{MM'}//\overline{I_iA_i}$

故 $\overline{MM'}$ 為 $\Delta M_{i+1}M_i'M_i$ 的中線，即 M 必落在 $\overline{M_{i+1}M_i}$ 上

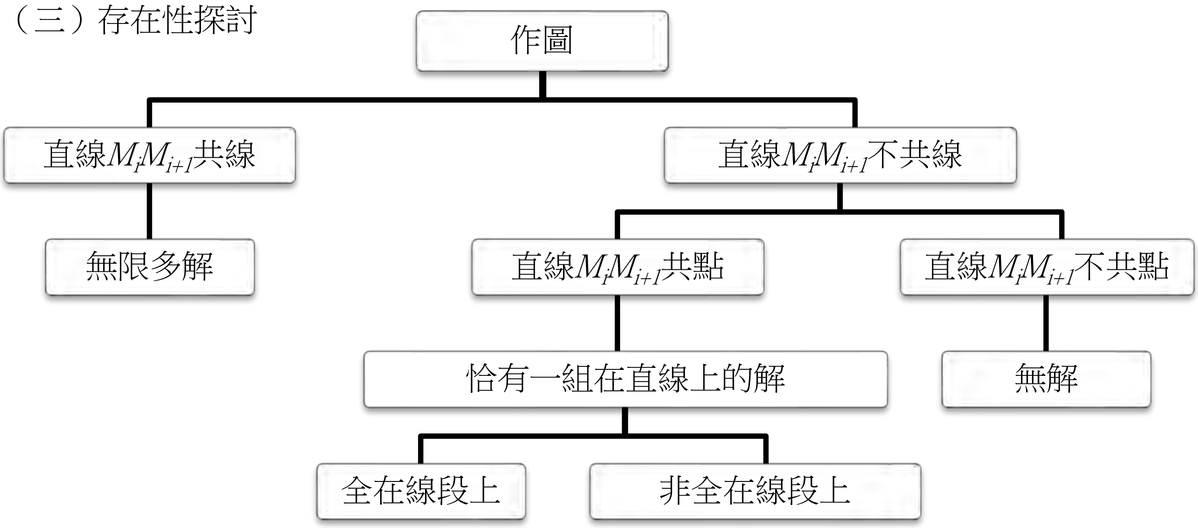
3. 頂點的軌跡為一直線

$\because \angle R_1RN=(180-\frac{360}{n})^\circ \therefore \angle R_1ON=\frac{360^\circ}{n}$ 又 $\overline{R_1O}=\overline{NO}$

$\therefore \overline{R_1O}$ 逆時針旋轉 $\frac{360^\circ}{n}$ 可得 $\overline{NO}$ 且 R_1 的軌跡為一直線

∴N 的軌跡為一直線

（三）存在性探討



（四）無限多解時，正 n 邊形外心軌跡為線段

作法及證明同五邊形，故在此省略

十、平面上無三線以上共點，任兩條不平行的相異偶數條線圍成偶邊形，可存在每邊上恰取一點使之成為一正偶邊形：

（一）作法(令 $n=2k$)

1.以 $\overline{A_{i-1}A_i}$、$\overline{A_{i+1}A_{i+2}}$ 為邊長向內作正 n 邊形外心 O_{i-1}、O_{i+1}，連 $\overleftrightarrow{A_iO_{i-1}}$、$\overleftrightarrow{A_{i+1}O_{i+1}}$。

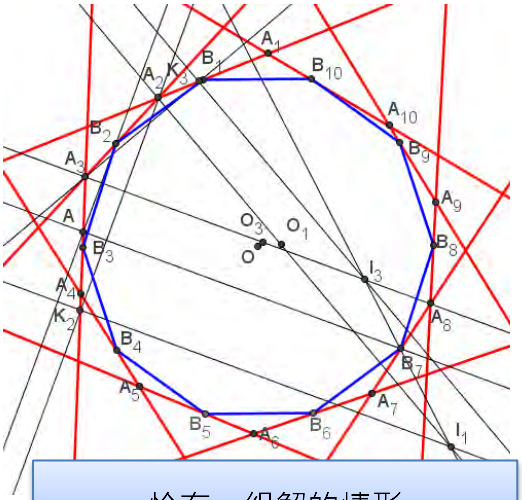
2.過 A_i 作 $\overleftrightarrow{A_{i+1}O_{i+1}}$ 垂直線交 $\overleftrightarrow{A_{i+1}A_{i+2}}$ 於 K_i，過 A_{i+1} 作 $\overleftrightarrow{A_iO_{i-1}}$ 垂直線交 $\overleftrightarrow{A_{i-1}A_i}$ 於 K_{i+1}

3.過 K_i 作 $\overleftrightarrow{A_{i+1}O_{i+1}}$ 平行線交 $\overleftrightarrow{A_iO_{i-1}}$ 於 I_i，過 K_{i+1} 作 $\overleftrightarrow{A_iO_{i-1}}$ 平行線交 $\overleftrightarrow{A_{i+1}O_{i+1}}$ 於 I_{i+1}

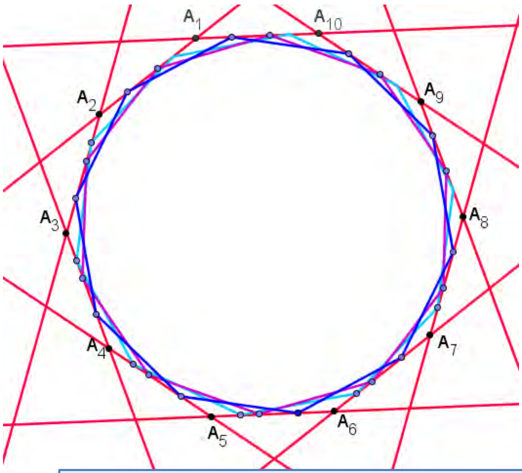
4.連 $\overleftrightarrow{I_iI_{i+1}}$ 交 $\overleftrightarrow{A_{k+i}A_{k+i+1}}$ 於 B_{k+i}

5.過 B_{k+i} 平行 $\overleftrightarrow{A_iO_{i-1}}$ 交 $\overleftrightarrow{A_{i-1}A_i}$ 一點，過其交點作 $\overleftrightarrow{A_iO_{i-1}}$ 垂直線交 $\overleftrightarrow{A_iA_{i+1}}$ 於 B_i

6.以 B_{k+i}、B_i 的中點 O 為中心將 B_{k+i}、B_i 旋轉得其他頂點，將頂點連接即為正 n 邊形



恰有一組解的情形



無限多解的情形

（二）證明

$\overleftrightarrow{I_iI_{i+1}}$ 交 $\overleftrightarrow{A_{k+i}A_{k+i+1}}$ 為頂點

B_i 、 B_{k+i} 對稱於 O

又 $\overline{A_iI_i}$ 、 $\overline{A_{i+1}I_{i+1}}$ 中點 M_i 、 M_{i+1}

又 B_i 的軌跡是 $\overleftrightarrow{A_iA_{i+1}}$ ，O 的軌跡是 $\overleftrightarrow{M_iM_{i+1}}$ ，

$\therefore B_{k+i}$ 的軌跡是 $\overleftrightarrow{I_iI_{i+1}}$ 又在 $\overleftrightarrow{A_{k+i}A_{k+i+1}}$

故 $\overleftrightarrow{I_iI_{i+1}}$ 交 $\overleftrightarrow{A_{k+i}A_{k+i+1}}$ 為端點

（三）存在性探討

- 作圖(令 $n=2k$)
  - 直線 I_iI_{i+1} 與直線 $A_{k+i}A_{k+i+1}$ 重合
    - 無限多解
  - 直線 I_iI_{i+1} 與直線 $A_{k+i}A_{k+i+1}$ 不重合
    - 直線 I_iI_{i+1} 與直線 $A_{k+i}A_{k+i+1}$ 交一點
      - 恰有一組在直線上的解
        - 全在線段上
        - 非全在線段上
    - 直線 I_iI_{i+1} 與直線 $A_{k+i}A_{k+i+1}$ 平行
      - 無解

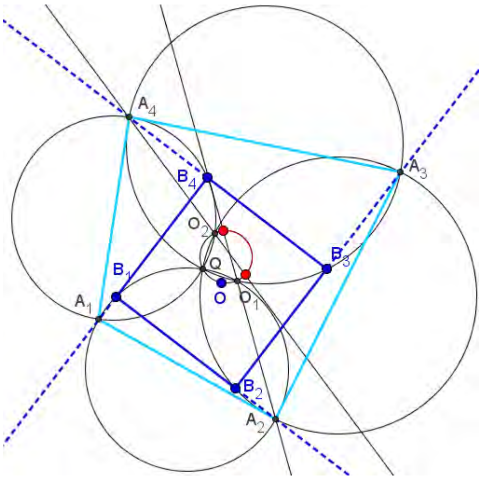
（四）無限多解時，正 n 邊形外心軌跡為線段

作法及證明同五邊形，故在此省略

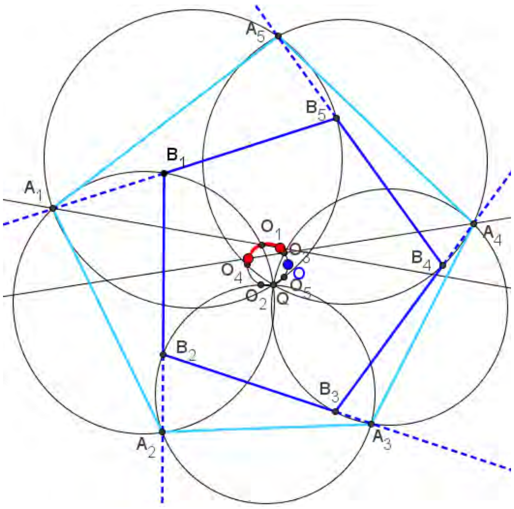
十一、若放寬限制：點 A_i 可以在 $\overleftrightarrow{B_iB_{i+1}}$ 上，對於無限多解的探討：

（一） 無限多解時，外心軌跡為一圓：

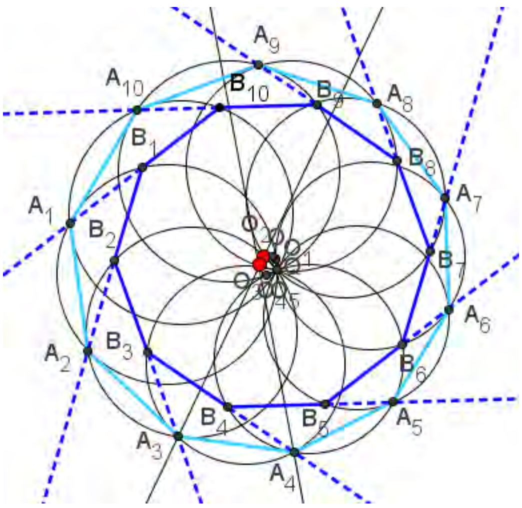
1. 四個點：



2. 五個點：



3. n 個點（舉十邊形為例）：



證明

1. 四個點：

已知 $\overleftrightarrow{O_1O_3} \perp \overleftrightarrow{O_2O_4}$

又 $\angle A_4B_4A_1 = 90° \Rightarrow \angle B_1B_4B_3 = 90°$

同理可得

$\angle B_4B_3B_2 = \angle B_3B_2B_1 = \angle B_2B_1B_4 = 90°$

故四邊形 $B_1B_2B_3B_4$ 為正方形。

2. 五個點：

已知五邊形 $B_1B_2B_3B_4B_5$ 的外心 O 落在 R_i 上

又 $\angle A_5B_5A_1 = 72° \Rightarrow \angle B_1B_5B_4 = 108°$

同理可得

$\angle B_5B_4B_3 = \angle B_4B_3B_2 = \angle B_3B_2B_1 = \angle B_2B_1B_5 = 108°$

故五邊形 $B_1B_2B_3B_4B_5$ 為正五邊形。

3. n 個點：

已知 n 邊形 $B_1B_2B_3B_4B_5 \cdots B_n$ 的外心 O 落在 R_i 上

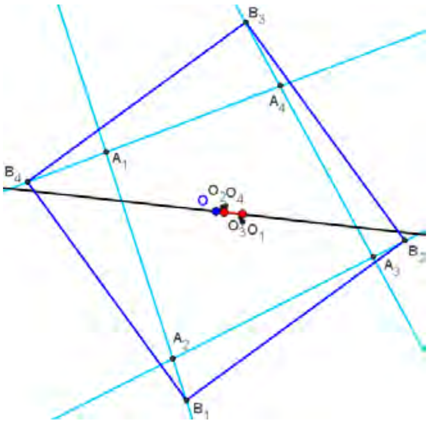
又 $\angle A_nB_nA_1 = \dfrac{360°}{n} \Rightarrow \angle B_1B_nB_{n-1} = 180° - \dfrac{360°}{n}$

同理可得

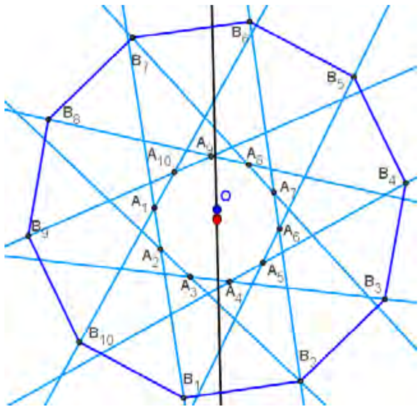
$\angle B_{i+2}B_{i+1}B_i = 180° - \dfrac{360°}{n} (i = 1, 2, \cdots, n)$ 故 n 邊形 $B_1B_2B_3B_4B_5 \cdots B_n$ 為正 n 邊形。

（二）無限多解時，外心軌跡為一直線

1.四條線：

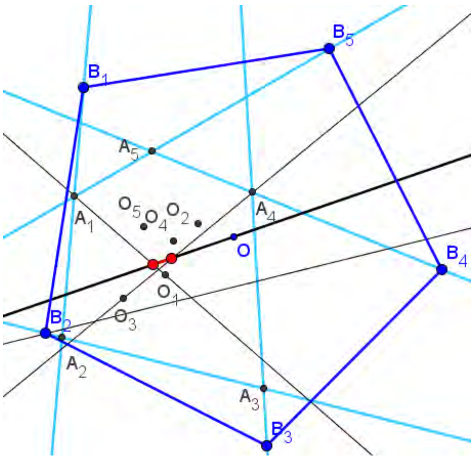


3.n條線（舉十邊形為例）：



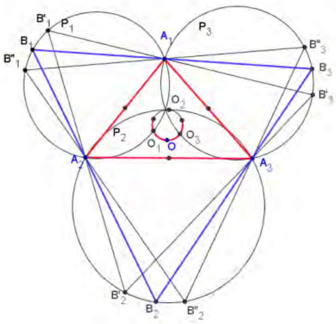
而其證明可以直接參照 p.22

2.五條線：

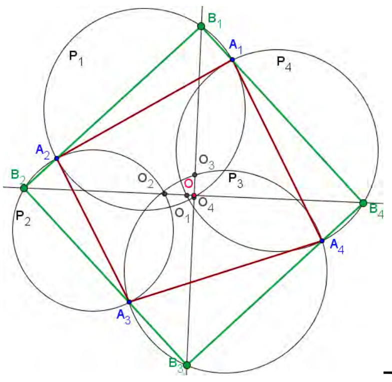


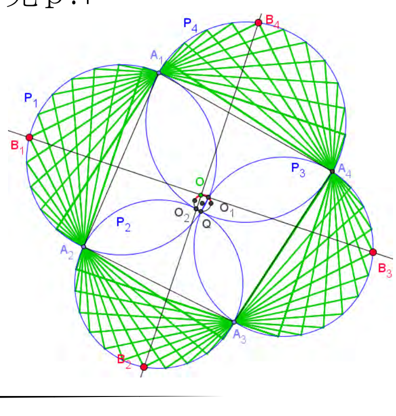
伍、 研究結果

一、通過平面上不共線相異三點，必存在使之每邊恰經過一點的正三角形，但此三角形有無限多個，作法及證明詳見 p.2。

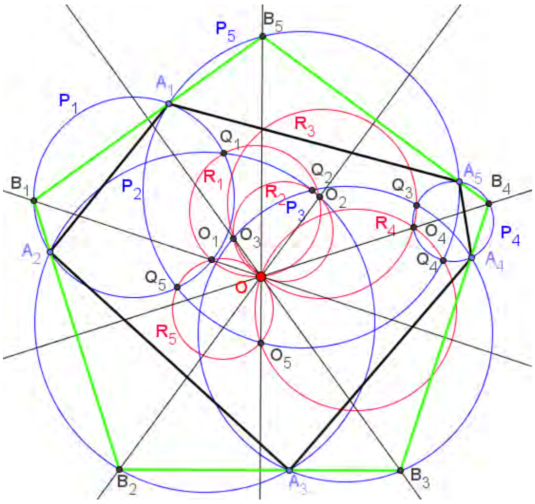


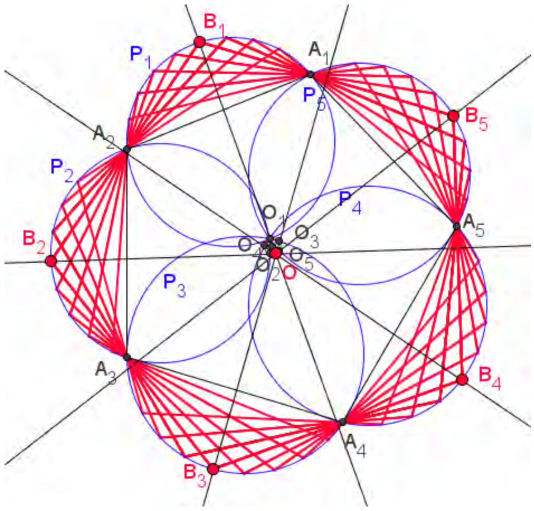
二、通過平面上任三點不共線的相異四點，不一定存在使之每邊恰經過一點的正方形，可分為恰有一解、無解、無限多解三種情形，作法和證明詳見 p.4。



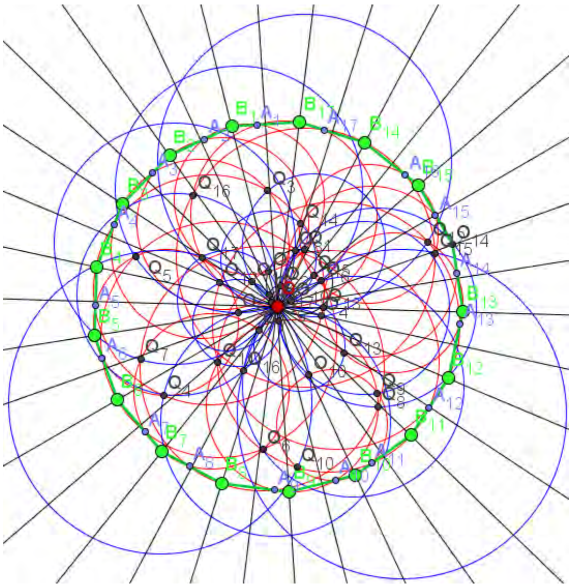


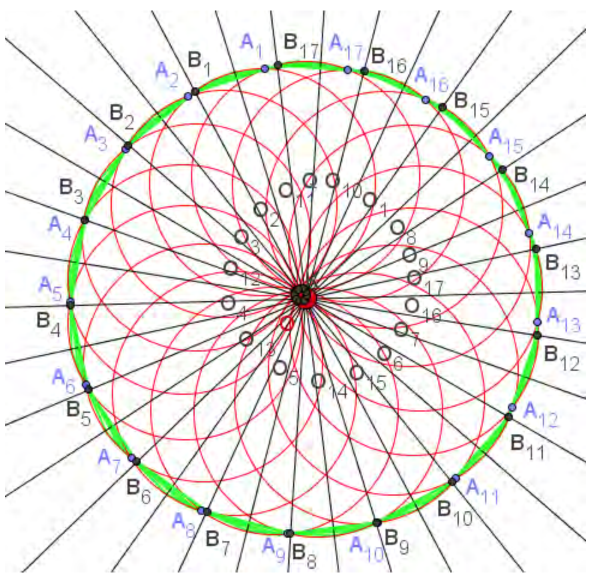
三、通過平面上任三點不共線的相異五點，不一定存在使之每邊恰經過一點的正五邊形，可分為恰有一解、無解、無限多解三種情形，作法和證明詳見 p .7。其中無限多解的外心軌跡為圓的部分集合，作圖方法及證明詳見 p.11



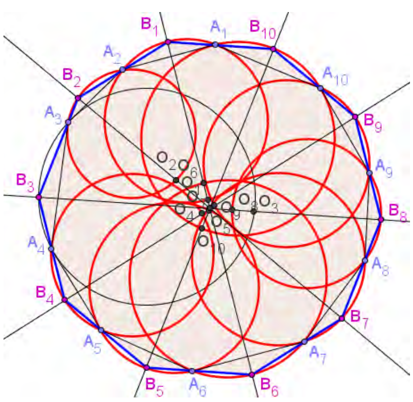


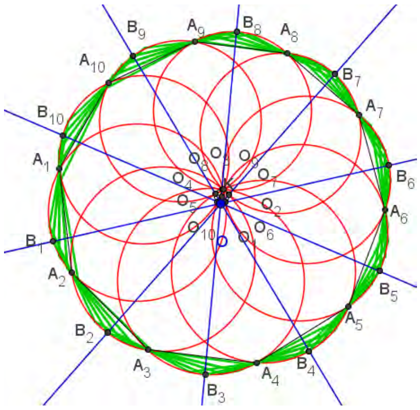
四、通過平面上任三點不共線的相異奇數個點，不一定存在使之每邊恰經過一點的正奇邊形，可分為恰有一解、無解、無限多解三種情形，作法和證明詳見 p .12。



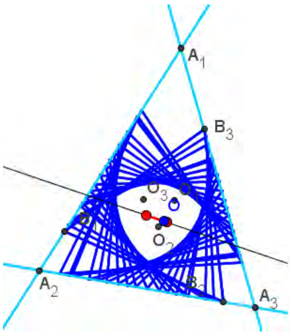


五、通過平面上任三點不共線的相異偶數個點，不一定存在使之每邊恰經過一點的正偶邊形，可分為恰有一解、無解、無限多解三種情形，作法和證明詳見 p .15。

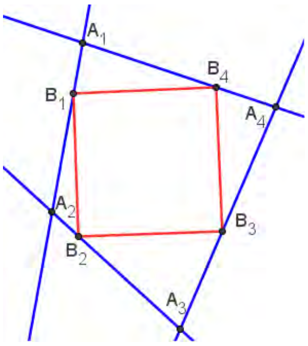


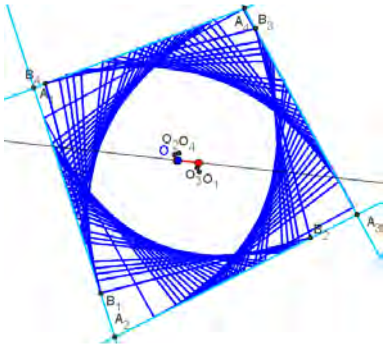


六、平面上三線不共點，任兩條不平行的相異三線圍成三角形，必存在每邊上恰取一點使之成為一正三角形，但此三角形有無限多個，作法及證明詳見 p.16。

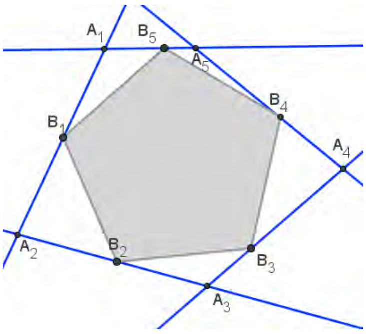


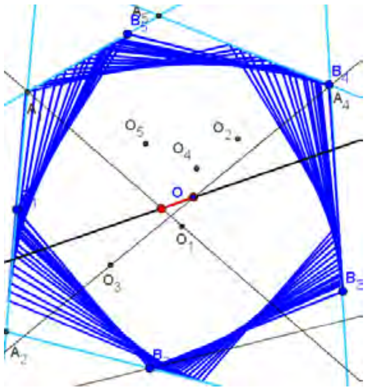
七、平面上無三線以上共點，任兩條不平行的相異四線圍成四邊形，不一定存在每邊上恰取一點使之成為一正方形，可分為無解、無限多解、恰有一解，作法及證明詳見 p.17。



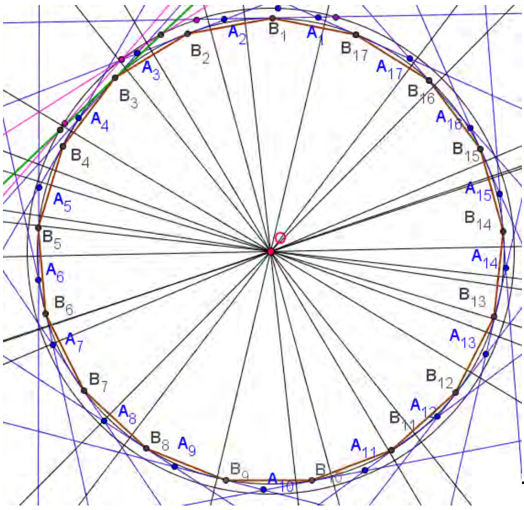


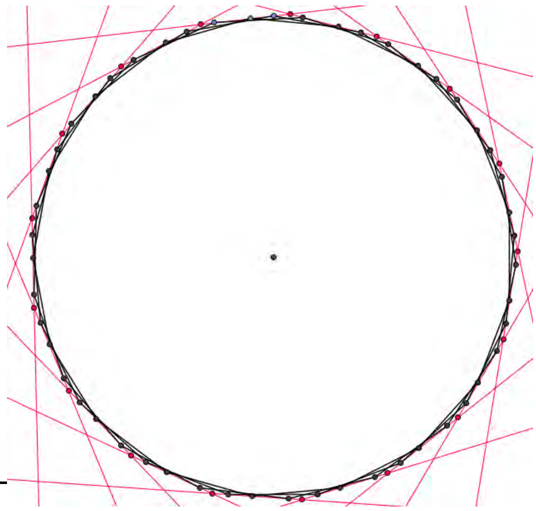
八、平面上無三線以上共點，任兩條不平行的相異五線圍成五邊形，不一定存在每邊上恰取一點使之成為一正五邊形，可分為無解、無限多解、恰有一解，作法及證明詳見 p.18。其無限多解的外心軌跡為一線段，其作圖方法及證明詳見 p.22



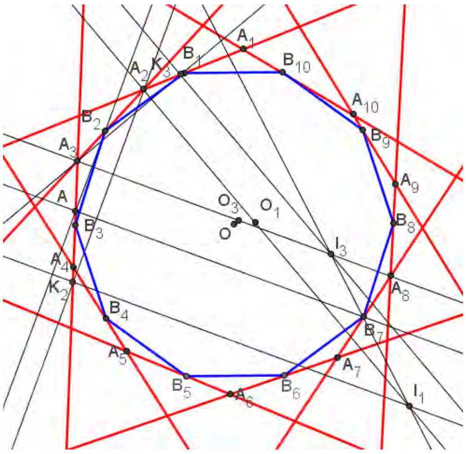


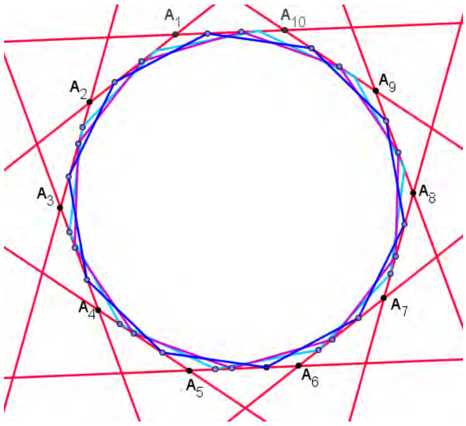
九、平面上無三線以上共點，任兩條不平行的相異奇數條線圍成奇邊形，不一定存在每邊上恰取一點使之成為一正奇邊形，分為無解、無限多解、恰有一解，作法及證明詳見 p.23。



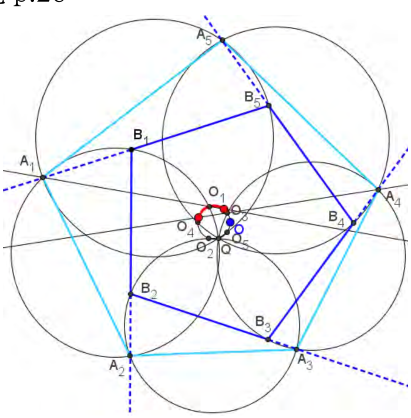


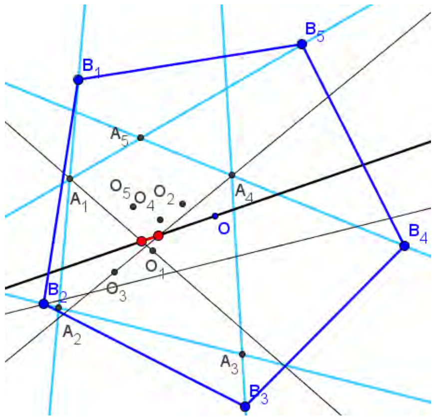
十、平面上無三線以上共點，任兩條不平行的相異偶數條線圍成偶邊形，不一定存在每邊上恰取一點使之成為一正偶邊形，分為無解、無限多解、恰有一解，作法及證明詳見 p .24。





十一、若放寬限制，即點可在邊的延長線上，則無限多解的外心軌跡分別為一圓即一直線，詳見 p.26





陸、 未來研究方向

未來可以把 n 個點從平面上推廣到立體空間，看是否存在任意不共面四點，可以構造出一個正四面體通過之；是否存在任意不共面六點，可以構造出一個正六面體通過之，並找出其通解。

柒、 參考資料

一、趙文敏(民 75) 幾何學概論 台北市 九章出版社

二、許志農 高中數學一～四冊 龍騰出版社

三、Coxeter , H.S.M.(1969). Introduction to Geometry , John Wiley & Sons , New York

四、Howard Eves (1963). A Survey of Geometry , Volume Boston , Allyn and Bacon

五、Tao , Terence (2006). Solving Mathematical problems : A personal porspective oxford , New York , Oxford University Press

六、Zeitz , P.(2007). The Art and Craft of Problem Solving , John Wiley & Sons

【評語】040405

在平面上給定不共線三點，是否存在正三角形，使得每邊各恰過一點？又存在個這樣的正三角形？作者利用綜合幾何與調整法證明此問題，並進一步推廣到過 N 點作正 N 邊形，更再推廣到對偶命題“平面上 N 條線，是否存在正 N 邊形，使得每條線上各有一頂點？”結構完整且充分展現作者對於綜合幾何的掌握，誠為上等之作。