中華民國第51屆中小學科學展覽會

作品說明書

高中組　數學科

040404

尋尋「冪」「冪」

—連續整數冪次和公式解之簡潔表示法

學校名稱：國立金門高級中學

作者：	指導老師：
高一　李根瑞 高一　楊子衡 高一　林蕙馨	楊玉星

關鍵詞：連續整數冪次和、伯努利數、差分

摘要

首先定義：對任意自然數k，$\binom{x}{k}=\dfrac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-k+1)}{k!}$。

並證明對任意的多項式$f(x)$，

若它對所有整數m取整數值$f(m)$，則$f(x)=A_0+A_1\binom{x}{1}+A_2\binom{x}{2}+\cdots+A_n\binom{x}{n}$，

其中$A_0,A_1,A_2,\cdots,A_n$都是特定的整數值。

接著證明：若$f(x)=x^k$，則$x^k=A_1\binom{x}{1}+A_2\binom{x}{2}+\cdots+A_m\binom{x}{m}+\cdots+A_k\binom{x}{k}$，

$$\text{其中 } A_m=\sum_{j=0}^{m-1}(-1)^j\binom{m}{m-j}(m-j)^k \text{，} m=1,2,\cdots,k \text{。}$$

在此公式中依次取$x=1,2,3,\cdots,n$，

得$S_k(n)=1^k+2^k+3^k+\cdots+n^k$

$$=A_1\binom{n+1}{2}+A_2\binom{n+1}{3}+\cdots+A_m\binom{n+1}{m+1}+\cdots A_k\binom{n+1}{k+1}$$為n的$k+1$次多項式。

且$A_m=\sum_{j=0}^{m}(-1)^j\binom{m}{m-j}f(m-j)=\Delta^m f(0)$，其中$\Delta^m f(0)$，表示$f(x)$的第$m$次差分在$x=0$的值。

若將其化成多項式的形式，可得

$S_k(n)=1^k+2^k+3^k+\cdots+n^k=\dfrac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k}\binom{k+1}{i}P_i n^{k+1-i}$，$P_i=B_i(i\neq 1)$，$P_1=B_1+1$。

或$S_k(n)=\dfrac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k}\binom{k+1}{i}B_i(n+1)^{k+1-i}$，

其中$\langle B_n\rangle$為<u>伯努利</u>數列，滿足遞迴式：$\sum_{i=0}^{k}\binom{k+1}{i}B_i=0$且$B_0=1$。

進一步將B_i的下標改成上標，可得

$S_k(n)=1^k+2^k+3^k+\cdots+n^k=\dfrac{1}{k+1}[(n+1+B)^{k+1}-B^{k+1}]$，滿足$(1+B)^{k+1}-B^{k+1}=0$，

但必須將每個B^i視為相對獨立的數。

壹、研究動機

在高一下數學 1-2 有介紹：級數和公式「$(1)1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$；

$(2)1^2+2^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$；$(3)1^3+2^3+\cdots+n^3=\left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$」，課本內只用數學

歸納法證明，並沒有提到它的直接證明方法，而且我曾懷疑這些公式，果真是先從實驗猜測得來的嗎？於是我很困惑地去請教老師，老師回答說：「數學傳播有些關於連續整數冪次和 $S_k(n)=1^k+2^k+\cdots+n^k$ 之公式解探討，你可以試著直接去證明這些公式，或許你會有不同的想法。」，後來我決定在這次科展裡研究這個主題，於是我召集幾位好友一起展開這趟研究之旅！

貳、研究目的

求出連續整數冪次和 $S_k(n)=1^k+2^k+\cdots+n^k$ 公式解之簡潔表示法。

參、研究設備及器材

紙、筆、Excel、網路

肆、研究過程或方法

一、預備引理

(一) $\sum_{k=m}^{m+n} C_m^k = C_m^m + C_m^{m+1} + C_m^{m+2} + \cdots + C_m^{m+n} = C_{m+1}^{m+n+1}$ 。

【證明】

比較恆等式 $(1+x)^m+(1+x)^{m+1}+(1+x)^{m+2}+\cdots+(1+x)^{m+n}$

$$=\frac{(1+x)^m\left[(1+x)^{n+1}-1\right]}{(1+x)-1}=\frac{(1+x)^{m+n+1}-(1+x)^m}{x} ,$$

兩邊 x^m 項的係數可得 $C_m^m + C_m^{m+1} + C_m^{m+2} + \cdots + C_m^{m+n} = C_{m+1}^{m+n+1}$ 。

(二)（多項式恆等定理）設 $f(x)$ 與 $g(x)$ 為多項式，其次數均不大於 n ，
若存在有 $n+1$ 個相異數 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\alpha_{n+1}$ ，使 $f(\alpha_i)=g(\alpha_i)$ ， $i=1,2,\cdots,n,n+1$ ，
則 $f(x)$ 與 $g(x)$ 恆等。

【證明】

1. 設 $h(x)=f(x)-g(x)$ ，
$\because f(\alpha_i)=g(\alpha_i)$ ， $i=1,2,\cdots,n,n+1$ ，
$\therefore f(\alpha_i)-g(\alpha_i)=0$ ， $i=1,2,\cdots,n,n+1$ ，即 $h(\alpha_i)=0$ ， $i=1,2,\cdots,n,n+1$ 。

2. 又 $\deg f(x)$ 和 $\deg f(x)$ 均不大於 n ， $\therefore \deg h(x)$ 不大於 n 。
不妨設 $h(x)=p(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)$ ，
由 $h(\alpha_{n+1})=0 \Rightarrow p(\alpha_{n+1}-\alpha_1)(\alpha_{n+1}-\alpha_2)\cdots(\alpha_{n+1}-\alpha_n)=0$

$\because \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\alpha_{n+1}$均相異，

$\therefore \alpha_{n+1}-\alpha_1\neq 0$，$\alpha_{n+1}-\alpha_2\neq 0$，⋯，$\alpha_{n+1}-\alpha_n\neq 0$，推得 $p=0$，

故 $h(x)=f(x)-g(x)=0$ 恆成立，即 $f(x)$ 與 $g(x)$ 恆等。

(三)設對任意自然數 k，$\binom{x}{k}=\dfrac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-k+1)}{k!}$。

則對任意整數值 x，$\binom{x}{k}$ 恆為整數。其中

1. 當 $x\geq k$ 時，$\binom{x}{k}=C_k^x$； 2. 當 $0\leq x\leq k-1$ 時，$\binom{x}{k}=0$；

3. 當 $x<0$ 時，$\binom{x}{k}=(-1)^k C_k^{-x+k-1}$。

【證明】

1. 當 $x\geq k$ 時，$\binom{x}{k}=\dfrac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-k+1)}{k!}=\dfrac{x!}{k!\times(x-k)!}=C_k^x$ 為整數。

2. 當 $0\leq x\leq k-1$ 時，$\binom{x}{k}=\dfrac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-k+1)}{k!}$，

$\because$分子連乘積中的第 $(x+1)$ 個必為 0，$\therefore \binom{x}{k}=0$ 為整數。

3. 當 $x<0$ 時，$\binom{x}{k}=\dfrac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-k+1)}{k!}$

$$=(-1)^k\,\frac{(-x)(-x+1)(-x+2)\cdots(-x+k-1)}{k!}$$

$=(-1)^k C_k^{-x+k-1}$ 也是整數。

(四)對任意的多項式 $f(x)$，若它對所有整數 m 取整數值 $f(m)$，

則 $f(x)=A_0+A_1\binom{x}{1}+A_2\binom{x}{2}+\cdots+A_n\binom{x}{n}$，其中 $A_0,A_1,A_2,\cdots,A_n$ 都是特定的整數值。

【證明】

1. $\because A_0,A_1,A_2,\cdots,A_n$ 都是整數，且對任意整數值 x，$\binom{x}{k}$ 恆為整數，

$\therefore f(x)=A_0+A_1\binom{x}{1}+A_2\binom{x}{2}+\cdots+A_n\binom{x}{n}$ 對所有整數 m 取整數值 $f(m)$。

2. 反過來，

設 $f(x)=B_0+B_1\binom{x}{1}+B_2\binom{x}{2}+\cdots+B_n\binom{x}{n}$，其中 $\deg f(x)\leq n$，

$B_0,B_1,B_2,\cdots,B_n$ 都是待定係數。

假如這種表達式可能，則在表達式兩邊依次取 $x=0,1,2,\cdots,n$ ，

得 $f(0)=B_0$ ， $f(1)=B_0+B_1$ ， $f(2)=B_0+B_1\binom{2}{1}+B_2$ ，$\cdots$，

$$f(n)=B_0+B_1\binom{n}{1}+B_2\binom{n}{2}+\cdots+B_{n-1}\binom{n}{n-1}+B_n\text{，}$$

從而可由 $f(0),f(1),f(2),\cdots,f(n)$ ，

依次求出 $B_0=f(0)$ ， $B_1=f(1)-B_0$ ， $B_2=f(2)-B_0-B_1\binom{2}{1}$ ，$\cdots$，

$$B_n=f(n)-B_0-B_1\binom{n}{1}-B_2\binom{n}{2}-\cdots-B_{n-1}\binom{n}{n-1}\text{。}$$

將求得的 $B_0,B_1,B_2,\cdots,B_n$ 代入表達式

$$f(x)=B_0+B_1\binom{x}{1}+B_2\binom{x}{2}+\cdots+B_n\binom{x}{n}\text{，}$$

則這個表達式，當 x 取 $0,1,2,\cdots,n$ 等 $n+1$ 個不同的值時都是等式，

而表達式兩邊的多項式的次數均不大於 n ，由恆等定理知它應為恆等式。

3. 若 x 取整數值 m 時， $f(m)$ 的值都是整數，則 $f(0),f(1),f(2),\cdots,f(n)$ 也都是整數，由它們算出的係數 $B_0,B_1,B_2,\cdots,B_n$ 也都是整數，

這就證明了符合本題要求的多項式 $f(x)$ ，可表示成

$$f(x)=A_0+A_1\binom{x}{1}+A_2\binom{x}{2}+\cdots+A_n\binom{x}{n}\text{，}$$

其中 $A_0=B_0$ ， $A_1=B_1$ ， $A_2=B_2$ ，$\cdots$， $A_n=B_n$ ，都是特定的整數值。

(五)考慮一個對於所有實數 x 都有定義的函數 $f(x)$ ，

定義 $\Delta f(x)=f(x+1)-f(x)$ ，叫做 $f(x)$ 的第一次差分。

$$\begin{aligned}\Delta^2 f(x)&=\Delta(\Delta f(x))=\Delta f(x+1)-\Delta f(x)\\&=f(x+2)-f(x+1)-\left[f(x+1)-f(x)\right]\\&=f(x+2)-2f(x+1)+f(x)\end{aligned}$$
，叫做 $f(x)$ 的第二次差分。

$\Delta^k f(x)=\Delta(\Delta^{k-1}f(x))=\Delta^{k-1}f(x+1)-\Delta^{k-1}f(x)$ ，叫做 $f(x)$ 的第 k 次差分。

其中 $\Delta^0 f(x)=f(x)$ ， $k=1,2,3,\cdots$

則 $$\Delta^n f(x)=\binom{n}{n}f(x+n)-\binom{n}{n-1}f(x+n-1)+\binom{n}{n-2}f(x+n-2)-\cdots+(-1)^m\binom{n}{n-m}f(x+n-m)+\cdots(-1)^n\binom{n}{0}f(x)\text{。}$$

即 $$\Delta^n f(x)=\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{n-j}f(x+n-j)\text{。}$$

【證明】

1. $n=1$時，$\Delta f(x)=f(x+1)-f(x)=\binom{1}{1}f(x+1)-\binom{1}{0}f(x)$，原式成立。

$n=2$時，$\Delta^2 f(x)=f(x+2)-2f(x+1)+f(x)$

$$=\binom{2}{2}f(x+2)-\binom{2}{1}f(x+1)+\binom{2}{0}f(x)$$ ，原式成立。

2. 設$n=k$時，原式成立，

即 $\Delta^k f(x)=\binom{k}{k}f(x+k)-\binom{k}{k-1}f(x+k-1)+\binom{k}{k-2}f(x+k-2)-\cdots$

$$+(-1)^m\binom{k}{k-m}f(x+k-m)+\cdots(-1)^k\binom{k}{0}f(x)$$ 。

則$n=k+1$時，

$$\Delta^{k+1}f(x)=\Delta(\Delta^k f(x))=\Delta^k f(x+1)-\Delta^k f(x)$$

$$=\binom{k}{k}f(x+k+1)-\binom{k}{k-1}f(x+k)+\binom{k}{k-2}f(x+k-1)-\cdots$$

$$+(-1)^m\binom{k}{k-m}f(x+k+1-m)+\cdots(-1)^k\binom{k}{0}f(x+1)$$

$$-[\binom{k}{k}f(x+k)-\binom{k}{k-1}f(x+k-1)+\binom{k}{k-2}f(x+k-2)-\cdots$$

$$+(-1)^m\binom{k}{k-m}f(x+k-m)+\cdots(-1)^k\binom{k}{0}f(x)]$$

$$=\binom{k+1}{k+1}f(x+k+1)-[\binom{k}{k-1}+\binom{k}{k}]f(x+k)$$

$$+[\binom{k}{k-2}+\binom{k}{k-1}]f(x+k-1)-\cdots$$

$$+(-1)^m[\binom{k}{k-m}+\binom{k}{k+1-m}]f(x+k+1-m)+\cdots$$

$$+(-1)^k[\binom{k}{0}+\binom{k}{1}]f(x+1)+(-1)^{k+1}\binom{k+1}{0}f(x)$$

$$\therefore \Delta^{k+1}f(x)=\binom{k+1}{k+1}f(x+k+1)-\binom{k+1}{k}f(x+k)+\binom{k+1}{k-1}f(x+k-1)-\cdots$$

$$+(-1)^m\binom{k+1}{k+1-m}f(x+k+1-m)+\cdots+(-1)^k\binom{k+1}{1}f(x+1)+(-1)^{k+1}\binom{k+1}{0}f(x)$$

故原式也成立。

由數學歸納法可知：對任意自然數 n

$$\Delta^n f(x)=\binom{n}{n}f(x+n)-\binom{n}{n-1}f(x+n-1)+\binom{n}{n-2}f(x+n-2)-\cdots$$

$$+(-1)^m\binom{n}{n-m}f(x+n-m)+\cdots(-1)^n\binom{n}{0}f(x)$$ 恆成立。

二、探索過程

接著利用上述的引理，我們試著去求下列的級數和。

(一)求 $S_1(n)=1+2+3+\cdots+n=$ ？

【解】先將 x 表示成 $x=A_0+A_1\binom{x}{1}$ 的形式。

取 $x=0$，得 $A_0=0$；

取 $x=1$，得 $A_1=1$，於是得 $x=\binom{x}{1}$。

在此公式中依次取 $x=1,2,3,\cdots,n$，

得 $1+2+3+\cdots+n=\binom{1}{1}+\binom{2}{1}+\binom{3}{1}+\cdots+\binom{n}{1}=\binom{n+1}{2}=\frac{n(n+1)}{2}$ 。

(二) 求 $S_2(n)=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=$ ？

【解】先將 x^2 表示成 $x^2=A_0+A_1\binom{x}{1}+A_2\binom{x}{2}$ 的形式。

取 $x=0$，得 $A_0=0$；

取 $x=1$，得 $A_1=1$；

取 $x=2$ ，得 $4=\binom{2}{1}+A_2$ ， $A_2=4-2=2$ ，於是得 $x^2=\binom{x}{1}+2\binom{x}{2}$ 。

在此公式中依次取 $x=1,2,3,\cdots,n$ ，

得 $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$

$$=\binom{1}{1}+(\binom{2}{1}+2\binom{2}{2})+(\binom{3}{1}+2\binom{3}{2})+\cdots+(\binom{n}{1}+2\binom{n}{2})$$

$$=(\binom{1}{1}+\binom{2}{1}+\binom{3}{1}+\cdots+\binom{n}{1})+2(\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\cdots+\binom{n}{2})$$

$$=\binom{n+1}{2}+2\binom{n+1}{3}$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}+2\times\frac{(n+1)n(n-1)}{6}$$

$$=\frac{n(n+1)[3+2(n-1)]}{6}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$ 。

(三)求 $S_3(n)=1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=$ ？

【解】 先將 x^3 表示成 $x^3=A_0+A_1\binom{x}{1}+A_2\binom{x}{2}+A_3\binom{x}{3}$ 的形式。

取 $x=0$，得 $A_0=0$；

取 $x=1$，得 $A_1=1$；

取 $x=2$，得 $8=\binom{2}{1}+A_2$， $A_2=8-2=6$；

取 $x=3$，得 $27=\binom{3}{1}+6\binom{3}{2}+A_3$， $A_3=27-3-18=6$，

於是得 $x^3=\binom{x}{1}+6\binom{x}{2}+6\binom{x}{3}$。

在此公式中依次取 $x=1,2,3,\cdots,n$，

得 $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$

$$=\binom{1}{1}+(\binom{2}{1}+6\binom{2}{2})+(\binom{3}{1}+6\binom{3}{2}+6\binom{3}{3})+\cdots+(\binom{n}{1}+6\binom{n}{2}+6\binom{n}{3})$$

$$=(\binom{1}{1}+\binom{2}{1}+\binom{3}{1}+\cdots+\binom{n}{1})+6(\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\cdots+\binom{n}{2})+6(\binom{3}{3}+\binom{4}{3}+\cdots+\binom{n}{3})$$

$$=\binom{n+1}{2}+6\binom{n+1}{3}+6\binom{n+1}{4}$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}+6\times\frac{(n+1)n(n-1)}{6}+6\times\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{24}$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}+\frac{(n+1)n(n-1)\left[4+(n-2)\right]}{4}$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}+\frac{(n+1)n(n-1)(n+2)}{4}$$

$$=\frac{n(n+1)\left[2+(n-1)(n+2)\right]}{4}$$

$$=\frac{n(n+1)(n^2+n)}{4}=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$ 。

(四)求 $S_4(n)=1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4=$ ？

【解】 先將 x^4 表示成 $x^4=A_0+A_1\binom{x}{1}+A_2\binom{x}{2}+A_3\binom{x}{3}+A_4\binom{x}{4}$ 的形式。

取 $x=0$，得 $A_0=0$；

取 $x=1$，得 $A_1=1$；

取 $x=2$，得 $16=\binom{2}{1}+A_2$， $A_2=16-2=14$；

取 $x=3$，得 $81=\binom{3}{1}+14\binom{3}{2}+A_3$， $A_3=81-3-42=36$；

取 $x=4$，得 $256=\binom{4}{1}+14\binom{4}{2}+36\binom{4}{3}+A_4$， $A_4=256-4-84-144=24$，

於是得 $x^4=\binom{x}{1}+14\binom{x}{2}+36\binom{x}{3}+24\binom{x}{4}$。

在此公式中依次取 $x=1,2,3,\cdots,n$，同理可得

$$
\begin{aligned}
&1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4\\
&=\binom{n+1}{2}+14\binom{n+1}{3}+36\binom{n+1}{4}+24\binom{n+1}{5}\\
&=\frac{n(n+1)}{2}+14\times\frac{(n+1)n(n-1)}{6}+36\times\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{24}\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad+24\times\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)}{120}\\
&=\frac{n(n+1)}{2}+\frac{7(n+1)n(n-1)}{3}+\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)[15+2(n-3)]}{10}\\
&=\frac{n(n+1)}{2}+\frac{7(n+1)n(n-1)}{3}+\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)(2n+9)}{10}\\
&=\frac{n(n+1)}{2}+\frac{(n+1)n(n-1)[70+3(n-2)(2n+9)]}{30}\\
&=\frac{n(n+1)}{2}+\frac{(n+1)n(n-1)(6n^2+15n+16)}{30}\\
&=\frac{n(n+1)[15+(n-1)(6n^2+15n+16)]}{30}\\
&=\frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}\\
&=\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}\ 。
\end{aligned}
$$

仿照上述求 $S_1(n),S_2(n),S_3(n),S_4(n)$ 公式之推導過程，我們似乎找到求 $S_k(n)$ 公式的方向。

(五) 求 $S_k(n)=1^k+2^k+3^k+\cdots+n^k=$？

【解】先將 x^k 表示成

$$x^k=A_0+A_1\binom{x}{1}+A_2\binom{x}{2}+A_3\binom{x}{3}+A_4\binom{x}{4}+A_5\binom{x}{5}+\cdots+A_m\binom{x}{m}+\cdots+A_k\binom{x}{k}$$

的形式。

1. 取 $x=0$，得 $0^k=A_0$，即 $A_0=0$。

2. 取 $x=1$，得 $1^k=A_1$，即 $A_1=1=\binom{1}{1}1^k$。

3. 取 $x=2$，得 $2^k=\binom{2}{1}+A_2$，即 $A_2=2^k-\binom{2}{1}=\binom{2}{2}2^k-\binom{2}{1}1^k$。

4. 取 $x=3$，得 $3^k=\binom{3}{1}+(2^k-\binom{2}{1})\binom{3}{2}+A_3 \Rightarrow A_3=3^k-\binom{3}{2}2^k+\binom{2}{1}\binom{3}{2}-\binom{3}{1}$

即 $A_3=3^k-\binom{3}{2}2^k+\binom{3}{1}=\binom{3}{3}3^k-\binom{3}{2}2^k+\binom{3}{1}1^k$。

5. 取 $x=4$，得 $4^k=\binom{4}{1}+(2^k-\binom{2}{1})\binom{4}{2}+(3^k-\binom{3}{2}2^k+\binom{3}{1})\binom{4}{3}+A_4$，

$$\Rightarrow A_4=4^k-\binom{4}{3}3^k+(\binom{3}{2}\binom{4}{3}-\binom{4}{2})2^k+\binom{2}{1}\binom{4}{2}-\binom{3}{1}\binom{4}{3}-\binom{4}{1}$$

即 $A_4=4^k-\binom{4}{3}3^k+\binom{4}{2}2^k-\binom{4}{1}=\binom{4}{4}4^k-\binom{4}{3}3^k+\binom{4}{2}2^k-\binom{4}{1}1^k$。

6. 取 $x=5$，

得 $5^k=\binom{5}{1}+(2^k-\binom{2}{1})\binom{5}{2}+(3^k-\binom{3}{2}2^k+\binom{3}{1})\binom{5}{3}$

$+(4^k-\binom{4}{3}3^k+\binom{4}{2}2^k-\binom{4}{1})\binom{5}{4}+A_4$，

$$\Rightarrow A_5=5^k-\binom{5}{4}4^k+(\binom{4}{3}\binom{5}{4}-\binom{5}{3})3^k+(\binom{3}{2}\binom{5}{3}-\binom{4}{2}\binom{5}{4}-\binom{5}{2})2^k$$

$$+\binom{2}{1}\binom{5}{2}-\binom{3}{1}\binom{5}{3}+\binom{4}{1}\binom{5}{4}-\binom{5}{1}$$，

即 $A_5=5^k-\binom{5}{4}4^k+\binom{5}{3}3^k-\binom{5}{2}2^k+\binom{5}{1}$

$=\binom{5}{5}5^k-\binom{5}{4}4^k+\binom{5}{3}3^k-\binom{5}{2}2^k+\binom{5}{1}1^k$。

由上述的推導過程，我們發現了下列現象：

對任意自然數 m，

(1) $\binom{m-1}{m-2}\binom{m}{m-1}-\binom{m}{m-2}=\binom{m}{m-2}\ (m\geq 3)$。

(2) $\binom{m-2}{m-3}\binom{m}{m-2}-\binom{m-1}{m-3}\binom{m}{m-1}-\binom{m}{m-3}=-\binom{m}{m-3}\ (m\geq 4)$。

$$(3)\binom{m-3}{m-4}\binom{m}{m-3}-\binom{m-2}{m-4}\binom{m}{m-2}+\binom{m-1}{m-4}\binom{m}{m-1}-\binom{m}{m-4}=\binom{m}{m-4}\ (m\geq 5)\text{ 。}$$

我們試著證明如下：

(1) $m\geq 3$時，

$$\binom{m-1}{m-2}\binom{m}{m-1}-\binom{m}{m-2}=\frac{m!}{(m-2)!}-\binom{m}{m-2}=2\binom{m}{m-2}-\binom{m}{m-2}=\binom{m}{m-2}\text{ 。}$$

(2) $m\geq 4$時，

$$\binom{m-2}{m-3}\binom{m}{m-2}-\binom{m-1}{m-3}\binom{m}{m-1}-\binom{m}{m-3}$$

$$=\frac{m!}{2!(m-3)!}-\frac{m!}{2!(m-3)!}-\binom{m}{m-3}=-\binom{m}{m-3}\text{ 。}$$

(3) $m\geq 5$時，

$$\binom{m-3}{m-4}\binom{m}{m-3}-\binom{m-2}{m-4}\binom{m}{m-2}+\binom{m-1}{m-4}\binom{m}{m-1}-\binom{m}{m-4}$$

$$=\frac{m!}{1!3!(m-4)!}-\frac{m!}{2!2!(m-4)!}+\frac{m!}{3!(m-4)!}-\binom{m}{m-4}$$

$$=\binom{m}{m-4}\left[\frac{4!}{1!3!}-\frac{4!}{2!2!}+\frac{4!}{3!1!}\right]-\binom{m}{m-4}$$

$$=\binom{m}{m-4}\left[C_1^4-C_2^4+C_3^4\right]-\binom{m}{m-4}$$

$$=\binom{m}{m-4}\left[C_0^4+C_4^4\right]-\binom{m}{m-4}=2\binom{m}{m-4}-\binom{m}{m-4}=\binom{m}{m-4}\text{ 。}$$

接著我們試著證明下列的式子也是對的：

$$(4)\binom{2}{1}\binom{m}{2}-\binom{3}{1}\binom{m}{3}+\binom{4}{1}\binom{m}{4}-\cdots+(-1)^{m-1}\binom{m-1}{1}\binom{m}{m-1}-\binom{m}{1}=(-1)^{m-1}\binom{m}{1}\text{ 。}$$

$$(5)\binom{3}{2}\binom{m}{3}-\binom{4}{2}\binom{m}{4}+\binom{5}{2}\binom{m}{5}-\cdots+(-1)^{m-2}\binom{m-1}{2}\binom{m}{m-1}-\binom{m}{2}=(-1)^{m-2}\binom{m}{2}\text{ 。}$$

$$(6)\binom{4}{3}\binom{m}{4}-\binom{5}{3}\binom{m}{5}+\binom{6}{3}\binom{m}{6}-\cdots+(-1)^{m-3}\binom{m-1}{3}\binom{m}{m-1}-\binom{m}{3}=(-1)^{m-3}\binom{m}{3}\text{ 。}$$

我們證明如下：

(4) $$\binom{2}{1}\binom{m}{2}-\binom{3}{1}\binom{m}{3}+\binom{4}{1}\binom{m}{4}-\cdots+(-1)^{m-1}\binom{m-1}{1}\binom{m}{m-1}-\binom{m}{1}$$
$$=\frac{m!}{1!(m-2)!}-\frac{m!}{2!(m-3)!}+\frac{m!}{3!(m-4)!}-\cdots+(-1)^{m-1}\frac{m!}{(m-2)!1!}-\binom{m}{1}$$
$$=\binom{m}{1}\left[\frac{(m-1)!}{1!(m-2)!}-\frac{(m-1)!}{2!(m-3)!}+\frac{(m-1)!}{3!(m-4)!}-\cdots+(-1)^{m-1}\frac{(m-1)!}{(m-2)!1!}\right]-\binom{m}{1}$$
$$=\binom{m}{1}\left[C_1^{m-1}-C_2^{m-1}+C_3^{m-1}-\cdots+(-1)^{m-1}C_{m-2}^{m-1}\right]-\binom{m}{1}$$
$$=\binom{m}{1}\left[C_0^{m-1}+(-1)^{m-1}C_{m-1}^{m-1}\right]-\binom{m}{1}$$
$$=\binom{m}{1}\left[1+(-1)^{m-1}\right]-\binom{m}{1}=(-1)^{m-1}\binom{m}{1}\ 。$$

(5) $$\binom{3}{2}\binom{m}{3}-\binom{4}{2}\binom{m}{4}+\binom{5}{2}\binom{m}{5}-\cdots+(-1)^{m-2}\binom{m-1}{2}\binom{m}{m-1}-\binom{m}{2}$$
$$=\frac{m!}{2!1!(m-3)!}-\frac{m!}{2!2!(m-4)!}+\frac{m!}{2!3!(m-5)!}-\cdots+(-1)^{m-2}\frac{m!}{2!(m-3)!1!}-\binom{m}{2}$$
$$=\binom{m}{2}\left[\frac{(m-2)!}{1!(m-3)!}-\frac{(m-2)!}{2!(m-4)!}+\frac{(m-2)!}{3!(m-5)!}-\cdots+(-1)^{m-2}\frac{(m-2)!}{(m-3)!1!}\right]-\binom{m}{2}$$
$$=\binom{m}{2}\left[C_1^{m-2}-C_2^{m-2}+C_3^{m-2}-\cdots+(-1)^{m-2}C_{m-3}^{m-2}\right]-\binom{m}{2}$$
$$=\binom{m}{2}\left[C_0^{m-2}+(-1)^{m-2}C_{m-2}^{m-2}\right]-\binom{m}{2}$$
$$=\binom{m}{2}\left[1+(-1)^{m-2}\right]-\binom{m}{2}=(-1)^{m-2}\binom{m}{2}\ 。$$

(6) $$\binom{4}{3}\binom{m}{4}-\binom{5}{3}\binom{m}{5}+\binom{6}{3}\binom{m}{6}-\cdots+(-1)^{m-3}\binom{m-1}{3}\binom{m}{m-1}-\binom{m}{3}$$
$$=\frac{m!}{3!1!(m-4)!}-\frac{m!}{3!2!(m-5)!}+\frac{m!}{3!3!(m-6)!}-\cdots+(-1)^{m-3}\frac{m!}{3!(m-4)!1!}-\binom{m}{3}$$
$$=\binom{m}{3}\left[\frac{(m-3)!}{1!(m-4)!}-\frac{(m-3)!}{2!(m-5)!}+\frac{(m-3)!}{3!(m-6)!}-\cdots+(-1)^{m-3}\frac{(m-3)!}{(m-4)!1!}\right]-\binom{m}{3}$$
$$=\binom{m}{3}\left[C_1^{m-3}-C_2^{m-3}+C_3^{m-3}-\cdots+(-1)^{m-3}C_{m-4}^{m-3}\right]-\binom{m}{3}$$
$$=\binom{m}{3}\left[C_0^{m-3}+(-1)^{m-3}C_{m-3}^{m-3}\right]-\binom{m}{3}$$
$$=\binom{m}{3}\left[1+(-1)^{m-3}\right]-\binom{m}{3}=(-1)^{m-3}\binom{m}{3}\ 。$$

最後證明下列的式子恆真：

若 $j=1,2,3,\cdots,m-2$，

則$\binom{j+1}{j}\binom{m}{j+1}-\binom{j+2}{j}\binom{m}{j+2}+\binom{j+3}{j}\binom{m}{j+3}-\cdots$

$$+(-1)^{m-j}\binom{m-1}{j}\binom{m}{m-1}-\binom{m}{j}=(-1)^{m-j}\binom{m}{j}\text{。}$$

【證明】

$$\binom{j+1}{j}\binom{m}{j+1}-\binom{j+2}{j}\binom{m}{j+2}+\binom{j+3}{j}\binom{m}{j+3}-\cdots+(-1)^{m-j}\binom{m-1}{j}\binom{m}{m-1}-\binom{m}{j}$$

$$=\frac{m!}{j!1!(m-j-1)!}-\frac{m!}{j!2!(m-j-2)!}+\frac{m!}{j!3!(m-j-3)!}-\cdots+(-1)^{m-j}\frac{m!}{j!(m-j-1)!1!}-\binom{m}{j}$$

$$=\binom{m}{j}\left[\frac{(m-j)!}{1!(m-j-1)!}-\frac{(m-j)!}{2!(m-j-2)!}+\frac{(m-j)!}{3!(m-j-3)!}-\cdots+(-1)^{m-j}\frac{(m-j)!}{(m-j-1)!1!}\right]-\binom{m}{j}$$

$$=\binom{m}{j}\left[C_1^{m-j}-C_2^{m-j}+C_3^{m-j}-\cdots+(-1)^{m-j}C_{m-j-1}^{m-j}\right]-\binom{m}{j}$$

$$=\binom{m}{j}\left[C_0^{m-j}+(-1)^{m-j}C_{m-j}^{m-j}\right]-\binom{m}{j}$$

$$=\binom{m}{j}\left[1+(-1)^{m-j}\right]-\binom{m}{j}=(-1)^{m-j}\binom{m}{j}\text{。}$$

7. 同理，取 $x=m$，

得 $A_m=m^k-\binom{m}{m-1}(m-1)^k+\left[\binom{m-1}{m-2}\binom{m}{m-1}-\binom{m}{m-2}\right](m-2)^k$

$$+\left[\binom{m-2}{m-3}\binom{m}{m-2}-\binom{m-1}{m-3}\binom{m}{m-1}-\binom{m}{m-3}\right](m-3)^k$$

$$+\left[\binom{m-3}{m-4}\binom{m}{m-3}-\binom{m-2}{m-4}\binom{m}{m-2}+\binom{m-1}{m-4}\binom{m}{m-1}-\binom{m}{m-4}\right](m-4)^k$$

$+\cdots$

$$+\left[\binom{4}{3}\binom{m}{4}-\binom{5}{3}\binom{m}{5}+\binom{6}{3}\binom{m}{6}-\cdots+(-1)^{m-3}\binom{m-1}{3}\binom{m}{m-1}-\binom{m}{3}\right]3^k$$

$$+\left[\binom{3}{2}\binom{m}{3}-\binom{4}{2}\binom{m}{4}+\binom{5}{2}\binom{m}{5}-\cdots+(-1)^{m-2}\binom{m-1}{2}\binom{m}{m-1}-\binom{m}{2}\right]2^k$$

$$+\left[\binom{2}{1}\binom{m}{2}-\binom{3}{1}\binom{m}{3}+\binom{4}{1}\binom{m}{4}-\cdots+(-1)^{m-1}\binom{m-1}{1}\binom{m}{m-1}-\binom{m}{1}\right]1^k \text{ 。}$$

$$\Rightarrow A_m=\binom{m}{m}m^k-\binom{m}{m-1}(m-1)^k+\binom{m}{m-2}(m-2)^k-\binom{m}{m-3}(m-3)^k+\cdots$$
$$+(-1)^{m-3}\binom{m}{3}3^k+(-1)^{m-2}\binom{m}{2}2^k+(-1)^{m-1}\binom{m}{1}1^k \text{ 。}$$

即 $A_m=\sum_{j=0}^{m-1}(-1)^j\binom{m}{m-j}(m-j)^k$ 。

故 $x^k = A_1\binom{x}{1}+A_2\binom{x}{2}+A_3\binom{x}{3}+A_4\binom{x}{4}+A_5\binom{x}{5}+\cdots+A_m\binom{x}{m}+\cdots+A_k\binom{x}{k}$ ，

在此公式中依次取 $x=1,2,3,\cdots,n$ ，同理可得

$$S_k(n)=1^k+2^k+3^k+\cdots+n^k$$
$$=A_1\binom{n+1}{2}+A_2\binom{n+1}{3}+A_3\binom{n+1}{4}+A_4\binom{n+1}{5}+A_5\binom{n+1}{6}+\cdots$$
$$+A_m\binom{n+1}{m+1}+\cdots+A_k\binom{n+1}{k+1}$$

其中 $A_m=\sum_{j=0}^{m-1}(-1)^j\binom{m}{m-j}(m-j)^k$ ， $m=1,2,\cdots,k$ 。

又 $\Delta^m f(x)=\sum_{j=0}^{m}(-1)^j\binom{m}{m-j}f(x+m-j)$ ，

令 $f(x)=x^k$ ，

則 $\Delta^m f(0)=\sum_{j=0}^{m}(-1)^j\binom{m}{m-j}f(m-j)=\sum_{j=0}^{m-1}(-1)^j\binom{m}{m-j}(m-j)^k=A_m$ 。

因此我們可以利用以下的差分表，快速地算出 A_m 值，

並求出 $S_k(n)=1^k+2^k+3^k+\cdots+n^k$ 的公式，以 $k=1,2,\cdots,10$ 為例說明之。

(1) $x=A_0+A_1\binom{x}{1}=\binom{x}{1}$ ，$\therefore S_1(n)=1+2+3+\cdots+n=\binom{n+1}{2}$ 。

	$f(x)=x$	$x=0$	$x=1$	$x=2$	$x=3$
A_0	$f(0)$	0	1	2	3
A_1	$\Delta f(0)$	1	1	1	
A_2	$\Delta^2 f(0)$	0	0		

(2) $x^2 = A_0 + A_1\binom{x}{1} + A_2\binom{x}{2} = \binom{x}{1} + 2\binom{x}{2}$,

$\therefore S_2(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \binom{n+1}{2} + 2\binom{n+1}{3}$ 。

	$f(x)=x^2$	$x=0$	$x=1$	$x=2$	$x=3$	$x=4$
A_0	$f(0)$	0	1	4	9	16
A_1	$\Delta f(0)$	1	3	5	7	
A_2	$\Delta^2 f(0)$	2	2	2		
A_3	$\Delta^3 f(0)$	0	0			

(3) $x^3 = A_0 + A_1\binom{x}{1} + A_2\binom{x}{2} + A_3\binom{x}{3} = \binom{x}{1} + 6\binom{x}{2} + 6\binom{x}{3}$,

$\therefore S_3(n) = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \binom{n+1}{2} + 6\binom{n+1}{3} + 6\binom{n+1}{4}$ 。

	$f(x)=x^3$	$x=0$	$x=1$	$x=2$	$x=3$	$x=4$	$x=5$
A_0	$f(0)$	0	1	8	27	64	125
A_1	$\Delta f(0)$	1	7	19	37	61	
A_2	$\Delta^2 f(0)$	6	12	18	24		
A_3	$\Delta^3 f(0)$	6	6	6			
A_4	$\Delta^4 f(0)$	0	0				

(4) $x^4 = A_0 + A_1\binom{x}{1} + A_2\binom{x}{2} + A_3\binom{x}{3} + A_4\binom{x}{4} = \binom{x}{1} + 14\binom{x}{2} + 36\binom{x}{3} + 24\binom{x}{4}$,

$\therefore S_4(n) = 1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + n^4 = \binom{n+1}{2} + 14\binom{n+1}{3} + 36\binom{n+1}{4} + 24\binom{n+1}{5}$ 。

	$f(x)=x^4$	$x=0$	$x=1$	$x=2$	$x=3$	$x=4$	$x=5$	$x=6$
A_0	$f(0)$	0	1	16	81	256	625	1296
A_1	$\Delta f(0)$	1	15	65	175	369	671	
A_2	$\Delta^2 f(0)$	14	50	110	194	302		
A_3	$\Delta^3 f(0)$	36	60	84	108			
A_4	$\Delta^4 f(0)$	24	24	24				
A_5	$\Delta^5 f(0)$	0	0					

(5) $x^5 = A_0 + A_1\binom{x}{1} + A_2\binom{x}{2} + A_3\binom{x}{3} + A_4\binom{x}{4} + A_5\binom{x}{5}$

$= \binom{x}{1} + 30\binom{x}{2} + 150\binom{x}{3} + 240\binom{x}{4} + 120\binom{x}{5}$,

$$\therefore S_5(n)=1^5+2^5+3^5+\cdots+n^5$$

$$=\binom{n+1}{2}+30\binom{n+1}{3}+150\binom{n+1}{4}+240\binom{n+1}{5}+120\binom{n+1}{6}\text{。}$$

	$f(x)=x^5$	$x=0$	$x=1$	$x=2$	$x=3$	$x=4$	$x=5$	$x=6$	$x=7$
A_0	$f(0)$	0	1	32	243	1024	3125	7776	16807
A_1	$\Delta f(0)$	1	31	211	781	2101	4651	9031	
A_2	$\Delta^2 f(0)$	30	180	570	1320	2550	4380		
A_3	$\Delta^3 f(0)$	150	390	750	1230	1830			
A_4	$\Delta^4 f(0)$	240	360	480	600				
A_5	$\Delta^5 f(0)$	120	120	120					
A_6	$\Delta^6 f(0)$	0	0						

(6) $x^6=A_0+A_1\binom{x}{1}+A_2\binom{x}{2}+A_3\binom{x}{3}+A_4\binom{x}{4}+A_5\binom{x}{5}+A_6\binom{x}{6}$

$$=\binom{x}{1}+62\binom{x}{2}+540\binom{x}{3}+1560\binom{x}{4}+1800\binom{x}{5}+720\binom{x}{6}\text{，}$$

$$\therefore S_6(n)=1^6+2^6+3^6+\cdots+n^6$$

$$=\binom{n+1}{2}+62\binom{n+1}{3}+540\binom{n+1}{4}+1560\binom{n+1}{5}+1800\binom{n+1}{6}+720\binom{n+1}{7}\text{。}$$

	$f(x)=x^6$	$x=0$	$x=1$	$x=2$	$x=3$	$x=4$	$x=5$	$x=6$	$x=7$	$x=8$
A_0	$f(0)$	0	1	64	729	4096	15625	46656	117649	262144
A_1	$\Delta f(0)$	1	63	665	3367	11529	31031	70993	144495	
A_2	$\Delta^2 f(0)$	62	602	2702	8162	19502	39962	73502		
A_3	$\Delta^3 f(0)$	540	2100	5460	11340	20460	33540			
A_4	$\Delta^4 f(0)$	1560	3360	5880	9120	13080				
A_5	$\Delta^5 f(0)$	1800	2520	3240	3960					
A_6	$\Delta^6 f(0)$	720	720	720						
A_7	$\Delta^7 f(0)$	0	0							

(7) $x^7=A_0+A_1\binom{x}{1}+A_2\binom{x}{2}+A_3\binom{x}{3}+A_4\binom{x}{4}+A_5\binom{x}{5}+A_6\binom{x}{6}+A_7\binom{x}{7}$

$$=\binom{x}{1}+126\binom{x}{2}+1806\binom{x}{3}+8400\binom{x}{4}+16800\binom{x}{5}+15120\binom{x}{6}+5040\binom{x}{7}\text{，}$$

$$\therefore S_7(n)=1^7+2^7+3^7+\cdots+n^7$$

$$=\binom{n+1}{2}+126\binom{n+1}{3}+1806\binom{n+1}{4}+8400\binom{n+1}{5}+16800\binom{n+1}{6}$$

$$+15120\binom{n+1}{7}+5040\binom{n+1}{8}\text{。}$$

	$f(x)=x^7$	$x=0$	$x=1$	$x=2$	$x=3$	$x=4$	$x=5$	$x=6$	$x=7$	$x=8$
A_0	$f(0)$	0	1	128	2187	16384	78125	279936	823543	2097152
A_1	$\Delta f(0)$	1	127	2059	14197	61741	201811	543607	1273609	
A_2	$\Delta^2 f(0)$	126	1932	12138	47544	140070	341796	730002		
A_3	$\Delta^3 f(0)$	1806	10206	35406	92526	201726	388206			
A_4	$\Delta^4 f(0)$	8400	25200	57120	109200	186480				
A_5	$\Delta^5 f(0)$	16800	31920	52080	77280					
A_6	$\Delta^6 f(0)$	15120	20160	25200						
A_7	$\Delta^7 f(0)$	5040	5040							
A_8	$\Delta^8 f(0)$	0								

$$(8)\ x^8=A_0+A_1\binom{x}{1}+A_2\binom{x}{2}+A_3\binom{x}{3}+A_4\binom{x}{4}+A_5\binom{x}{5}+A_6\binom{x}{6}+A_7\binom{x}{7}+A_8\binom{x}{8}$$

$$=\binom{x}{1}+254\binom{x}{2}+5796\binom{x}{3}+40824\binom{x}{4}+126000\binom{x}{5}+191520\binom{x}{6}$$

$$+141120\binom{x}{7}+40320\binom{x}{8}\text{，}$$

$$\therefore S_8(n)=1^8+2^8+3^8+\cdots+n^8$$

$$=\binom{n+1}{2}+254\binom{n+1}{3}+5796\binom{n+1}{4}+40824\binom{n+1}{5}+126000\binom{n+1}{6}$$

$$+191520\binom{n+1}{7}+141120\binom{n+1}{8}+40320\binom{n+1}{9}\text{。}$$

	$f(x)=x^8$	$x=0$	$x=1$	$x=2$	$x=3$	$x=4$	$x=5$	$x=6$	$x=7$	$x=8$	$x=9$
A_0	$f(0)$	0	1	256	6561	65536	390625	1679616	5764801	16777216	43046721
A_1	$\Delta f(0)$	1	255	6305	58975	325089	1288991	4085185	11012415	26269505	
A_2	$\Delta^2 f(0)$	254	6050	52670	266114	963902	2796194	6927230	15257090		
A_3	$\Delta^3 f(0)$	5796	46620	213444	697788	1832292	4131036	8329860			
A_4	$\Delta^4 f(0)$	40824	166824	484344	1134504	2298744	4198824				
A_5	$\Delta^5 f(0)$	126000	317520	650160	1164240	1900080					
A_6	$\Delta^6 f(0)$	191520	332640	514080	735840						
A_7	$\Delta^7 f(0)$	141120	181440	221760							
A_8	$\Delta^8 f(0)$	40320	40320								
A_9	$\Delta^9 f(0)$	0									

$$(9)\ x^9 = A_0 + A_1\binom{x}{1} + A_2\binom{x}{2} + A_3\binom{x}{3} + A_4\binom{x}{4} + A_5\binom{x}{5} + A_6\binom{x}{6} + A_7\binom{x}{7} + A_8\binom{x}{8} + A_9\binom{x}{9}$$

$$= \binom{x}{1} + 510\binom{x}{2} + 18150\binom{x}{3} + 186480\binom{x}{4} + 834120\binom{x}{5} + 1905120\binom{x}{6}$$

$$+ 2328480\binom{x}{7} + 1451520\binom{x}{8} + 362880\binom{x}{9}\ ,$$

$$\therefore S_9(n) = 1^9 + 2^9 + 3^9 + \cdots + n^9$$

$$= \binom{n+1}{2} + 510\binom{n+1}{3} + 18150\binom{n+1}{4} + 186480\binom{n+1}{5} + 834120\binom{n+1}{6}$$

$$+ 1905120\binom{n+1}{7} + 2328480\binom{n+1}{8} + 1451520\binom{n+1}{9} + 362880\binom{n+1}{10}\ 。$$

	$f(x)=x^9$	$x=0$	$x=1$	$x=2$	$x=3$	$x=4$	$x=5$
A_0	$f(0)$	0	1	512	19683	262144	1953125
A_1	$\Delta f(0)$	1	511	19171	242461	1690981	8124571
A_2	$\Delta^2 f(0)$	510	18660	223290	1448520	6433590	22151340
A_3	$\Delta^3 f(0)$	18150	204630	1225230	4985070	15717750	41436870
A_4	$\Delta^4 f(0)$	186480	1020600	3759840	10732680	25719120	54313560
A_5	$\Delta^5 f(0)$	834120	2739240	6972840	14986440	28594440	49974120
A_6	$\Delta^6 f(0)$	1905120	4233600	8013600	13608000	21379680	
A_7	$\Delta^7 f(0)$	2328480	3780000	5594400	7771680		
A_8	$\Delta^8 f(0)$	1451520	1814400	2177280			
A_9	$\Delta^9 f(0)$	362880	362880				
A_{10}	$\Delta^{10} f(0)$	0					

$x=6$	$x=7$	$x=8$	$x=9$	$x=10$	$x=11$
10077696	40353607	134217728	387420489	1000000000	2357947691
30275911	93864121	253202761	612579511	1357947691	
63588210	159338640	359376750	745368180		
95750430	200038110	385991430			
104287680	185953320				
81665640					

$$(10)\ x^{10}=A_0+A_1\binom{x}{1}+A_2\binom{x}{2}+A_3\binom{x}{3}+A_4\binom{x}{4}+A_5\binom{x}{5}+A_6\binom{x}{6}+A_7\binom{x}{7}+A_8\binom{x}{8}+A_9\binom{x}{9}+A_{10}\binom{x}{10}$$

$$=\binom{x}{1}+1022\binom{x}{2}+55980\binom{x}{3}+818520\binom{x}{4}+5103000\binom{x}{5}+16435440\binom{x}{6}$$

$$+29635200\binom{x}{7}+30240000\binom{x}{8}+16329600\binom{x}{9}+3628800\binom{x}{10},$$

$$\therefore S_{10}(n)=1^{10}+2^{10}+3^{10}+\cdots+n^{10}$$

$$=\binom{n+1}{2}+1022\binom{n+1}{3}+55980\binom{n+1}{4}+818520\binom{n+1}{5}+5103000\binom{n+1}{6}$$

$$+16435440\binom{n+1}{7}+29635200\binom{n+1}{8}+30240000\binom{n+1}{9}$$

$$+16329600\binom{n+1}{10}+3628800\binom{n+1}{11}\text{。}$$

	$f(x)=x^{10}$	$x=0$	$x=1$	$x=2$	$x=3$	$x=4$	$x=5$
A_0	$f(0)$	0	1	1024	59049	1048576	9765625
A_1	$\Delta f(0)$	1	1023	58025	989527	8717049	50700551
A_2	$\Delta^2 f(0)$	1022	57002	931502	7727522	41983502	171308522
A_3	$\Delta^3 f(0)$	55980	874500	6796020	34255980	129325020	397948980
A_4	$\Delta^4 f(0)$	818520	5921520	27459960	95069040	268623960	654569520
A_5	$\Delta^5 f(0)$	5103000	21538440	67609080	173554920	385945560	771309000
A_6	$\Delta^6 f(0)$	16435440	46070640	105945840	212390640	385363440	648451440
A_7	$\Delta^7 f(0)$	29635200	59875200	106444800	172972800	263088000	
A_8	$\Delta^8 f(0)$	30240000	46569600	66528000	90115200		
A_9	$\Delta^9 f(0)$	16329600	19958400	23587200			
A_{10}	$\Delta^{10} f(0)$	3628800	3628800				
A_{11}	$\Delta^{11} f(0)$	0					

$x=6$	$x=7$	$x=8$	$x=9$	$x=10$	$x=11$
60466176	282475249	1073741824	3486784401	10000000000	25937424601
222009073	791266575	2413042577	6513215599	15937424601	
569257502	1621776002	4100173022	9424209002		
1052518500	2478397020	5324035980			
1425878520	2845638960				
1419760440					

伍、研究結果

$$S_1(n)=1+2+3+\cdots+n=\binom{n+1}{2}\text{。}$$

$$S_2(n)=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\binom{n+1}{2}+2\binom{n+1}{3}\text{。}$$

$$S_3(n)=1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\binom{n+1}{2}+6\binom{n+1}{3}+6\binom{n+1}{4}\text{。}$$

$$S_4(n)=1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4=\binom{n+1}{2}+14\binom{n+1}{3}+36\binom{n+1}{4}+24\binom{n+1}{5}\text{。}$$

$$S_5(n) = 1^5 + 2^5 + 3^5 + \cdots + n^5$$

$$= \binom{n+1}{2} + 30\binom{n+1}{3} + 150\binom{n+1}{4} + 240\binom{n+1}{5} + 120\binom{n+1}{6} 。$$

$$S_6(n) = 1^6 + 2^6 + 3^6 + \cdots + n^6$$

$$= \binom{n+1}{2} + 62\binom{n+1}{3} + 540\binom{n+1}{4} + 1560\binom{n+1}{5} + 1800\binom{n+1}{6} + 720\binom{n+1}{7} 。$$

$$S_7(n) = 1^7 + 2^7 + 3^7 + \cdots + n^7$$

$$= \binom{n+1}{2} + 126\binom{n+1}{3} + 1806\binom{n+1}{4} + 8400\binom{n+1}{5} + 16800\binom{n+1}{6}$$

$$+ 15120\binom{n+1}{7} + 5040\binom{n+1}{8} 。$$

$$S_8(n) = 1^8 + 2^8 + 3^8 + \cdots + n^8$$

$$= \binom{n+1}{2} + 254\binom{n+1}{3} + 5796\binom{n+1}{4} + 40824\binom{n+1}{5} + 126000\binom{n+1}{6}$$

$$+ 191520\binom{n+1}{7} + 141120\binom{n+1}{8} + 40320\binom{n+1}{9} 。$$

$$S_9(n) = 1^9 + 2^9 + 3^9 + \cdots + n^9$$

$$= \binom{n+1}{2} + 510\binom{n+1}{3} + 18150\binom{n+1}{4} + 186480\binom{n+1}{5} + 834120\binom{n+1}{6}$$

$$+ 1905120\binom{n+1}{7} + 2328480\binom{n+1}{8} + 1451520\binom{n+1}{9} + 362880\binom{n+1}{10} 。$$

$$S_{10}(n) = 1^{10} + 2^{10} + 3^{10} + \cdots + n^{10}$$

$$= \binom{n+1}{2} + 1022\binom{n+1}{3} + 55980\binom{n+1}{4} + 818520\binom{n+1}{5} + 5103000\binom{n+1}{6}$$

$$+ 16435440\binom{n+1}{7} + 29635200\binom{n+1}{8} + 30240000\binom{n+1}{9}$$

$$+ 16329600\binom{n+1}{10} + 3628800\binom{n+1}{11} 。$$

陸、討論

我們可以將$S_k(n)=1^k+2^k+3^k+\cdots+n^k$

表示成$A_1\binom{n+1}{2}+A_2\binom{n+1}{3}+\cdots+A_m\binom{n+1}{m+1}+\cdots A_k\binom{n+1}{k+1}$的形式，

其中$A_m=\sum_{j=0}^{m-1}(-1)^j\binom{m}{m-j}(m-j)^k$ ，$m=1,2,\cdots,k$。

一、以下我們試著將其化成課本級數和公式的形式，得到

$$S_1(n)=1+2+3+\cdots+n=\binom{n+1}{2}=\frac{n(n+1)}{2}\text{ 。}$$

$$\begin{aligned}S_2(n)&=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\binom{n+1}{2}+2\binom{n+1}{3}\\&=\frac{n(n+1)}{2}+2\times\frac{(n+1)n(n-1)}{6}\\&=\frac{n(n+1)\left[3+2(n-1)\right]}{6}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\text{ 。}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S_3(n)&=1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\binom{n+1}{2}+6\binom{n+1}{3}+6\binom{n+1}{4}\\&=\frac{n(n+1)}{2}+6\times\frac{(n+1)n(n-1)}{6}+6\times\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{24}\\&=\frac{n(n+1)}{2}+\frac{(n+1)n(n-1)\left[4+(n-2)\right]}{4}\\&=\frac{n(n+1)}{2}+\frac{(n+1)n(n-1)(n+2)}{4}\\&=\frac{n(n+1)\left[2+(n-1)(n+2)\right]}{4}=\frac{n(n+1)(n^2+n)}{4}=\frac{n^2(n+1)^2}{4}\text{ 。}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S_4(n)&=1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4=\binom{n+1}{2}+14\binom{n+1}{3}+36\binom{n+1}{4}+24\binom{n+1}{5}\\&=\frac{n(n+1)}{2}+14\times\frac{(n+1)n(n-1)}{6}+36\times\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{24}\\&\qquad+24\times\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)}{120}\end{aligned}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{7(n+1)n(n-1)}{3} + \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)[15+2(n-3)]}{10}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{7(n+1)n(n-1)}{3} + \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)(2n+9)}{10}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n+1)n(n-1)[70+3(n-2)(2n+9)]}{30}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n+1)n(n-1)(6n^2+15n+16)}{30}$$

$$= \frac{n(n+1)[15+(n-1)(6n^2+15n+16)]}{30}$$

$$= \frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30} = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30} 。$$

$$S_5(n) = 1^5+2^5+3^5+\cdots+n^5 = \binom{n+1}{2} + 30\binom{n+1}{3} + 150\binom{n+1}{4} + 240\binom{n+1}{5} + 120\binom{n+1}{6}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + 30\times\frac{(n+1)n(n-1)}{6} + 150\times\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{24}$$

$$+ 240\times\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)}{120} + 120\times\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{720}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + 5\times(n+1)n(n-1) + 25\times\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{4}$$

$$+ \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)[12+(n-4)]}{6}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + 5\times(n+1)n(n-1) + 25\times\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{4}$$

$$+ \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)(n+8)}{6}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + 5\times(n+1)n(n-1) + \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)[75+2(n-3)(n+8)]}{12}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + 5\times(n+1)n(n-1) + \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)(2n^2+10n+27)}{12}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n+1)n(n-1)[60+(n-2)(2n^2+10n+27)]}{12}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n+1)n(n-1)(2n^3+6n^2+7n+6)}{12}$$

$$= \frac{n(n+1)[6+(n-1)(2n^3+6n^2+7n+6)]}{12}$$

$$= \frac{n(n+1)(2n^4+4n^3+n^2-n)}{12} = \frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12} 。$$

隨著級數和次方的加大，我們發現計算量也越來越大，為了節省篇幅，我們只寫出最後的式子如下：

$$S_6(n) = 1^6 + 2^6 + 3^6 + \cdots + n^6$$

$$= \binom{n+1}{2} + 62\binom{n+1}{3} + 540\binom{n+1}{4} + 1560\binom{n+1}{5} + 1800\binom{n+1}{6} + 720\binom{n+1}{7}$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^4+6n^3-3n+1)}{42} \text{。}$$

$$S_7(n) = 1^7 + 2^7 + 3^7 + \cdots + n^7$$

$$= \binom{n+1}{2} + 126\binom{n+1}{3} + 1806\binom{n+1}{4} + 8400\binom{n+1}{5} + 16800\binom{n+1}{6}$$

$$+ 15120\binom{n+1}{7} + 5040\binom{n+1}{8}$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2(3n^4+6n^3-n^2-4n+2)}{24} \text{。}$$

$$S_8(n) = 1^8 + 2^8 + 3^8 + \cdots + n^8$$

$$= \binom{n+1}{2} + 254\binom{n+1}{3} + 5796\binom{n+1}{4} + 40824\binom{n+1}{5} + 126000\binom{n+1}{6}$$

$$+ 191520\binom{n+1}{7} + 141120\binom{n+1}{8} + 40320\binom{n+1}{9}$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)(5n^6+15n^5+5n^4-15n^3-n^2+9n-3)}{90} \text{。}$$

$$S_9(n) = 1^9 + 2^9 + 3^9 + \cdots + n^9$$

$$= \binom{n+1}{2} + 510\binom{n+1}{3} + 18150\binom{n+1}{4} + 186480\binom{n+1}{5} + 834120\binom{n+1}{6}$$

$$+ 1905120\binom{n+1}{7} + 2328480\binom{n+1}{8} + 1451520\binom{n+1}{9} + 362880\binom{n+1}{10}$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2(2n^6+6n^5+n^4-8n^3+n^2+6n-3)}{20} \text{。}$$

$$S_{10}(n)=1^{10}+2^{10}+3^{10}+\cdots+n^{10}$$

$$=\binom{n+1}{2}+1022\binom{n+1}{3}+55980\binom{n+1}{4}+818520\binom{n+1}{5}+5103000\binom{n+1}{6}$$

$$+16435440\binom{n+1}{7}+29635200\binom{n+1}{8}+30240000\binom{n+1}{9}$$

$$+16329600\binom{n+1}{10}+3628800\binom{n+1}{11}$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^8+12n^7+8n^6-18n^5-10n^4+24n^3+2n^2-15n+5)}{66}\text{。}$$

因此將 $S_k(n)=1^k+2^k+3^k+\cdots+n^k$

表示成 $A_1\binom{n+1}{2}+A_2\binom{n+1}{3}+\cdots+A_m\binom{n+1}{m+1}+\cdots A_k\binom{n+1}{k+1}$ 的形式，是有其方便性。

二、以下我們試著將其化成多項式的形式，得到

$$S_1(n)=1+2+3+\cdots+n$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n=\frac{1}{2}(n^2+n)=\frac{1}{2}[n^2+\frac{1}{2}\binom{2}{1}n]\text{。}$$

$$S_2(n)=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n$$

$$=\frac{1}{3}(n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n)=\frac{1}{3}[n^3+\frac{1}{2}\binom{3}{1}n^2+\frac{1}{6}\binom{3}{2}n]\text{。}$$

$$S_3(n)=1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$$

$$=\frac{n^2(n+1)^2}{4}=\frac{1}{4}n^4+\frac{1}{2}n^3+\frac{1}{4}n^2$$

$$=\frac{1}{4}(n^4+2n^3+n^2)=\frac{1}{4}[n^4+\frac{1}{2}\binom{4}{1}n^3+\frac{1}{6}\binom{4}{2}n^2+0\binom{4}{3}n]\text{。}$$

$$S_4(n)=1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$$

$$=\frac{1}{5}n^5+\frac{1}{2}n^4+\frac{1}{3}n^3-\frac{1}{30}n=\frac{1}{5}(n^5+\frac{5}{2}n^4+\frac{5}{3}n^3-\frac{1}{6}n)$$

$$=\frac{1}{5}[n^5+\frac{1}{2}\binom{5}{1}n^4+\frac{1}{6}\binom{5}{2}n^3+0\binom{5}{3}n^2-\frac{1}{30}\binom{5}{4}n]\text{。}$$

$$S_5(n) = 1^5 + 2^5 + 3^5 + \cdots + n^5$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12}$$

$$= \frac{1}{6}n^6 + \frac{1}{2}n^5 + \frac{5}{12}n^4 - \frac{1}{12}n^2 = \frac{1}{6}(n^6 + 3n^5 + \frac{5}{2}n^4 - \frac{1}{2}n^2)$$

$$= \frac{1}{6}[n^6 + \frac{1}{2}\binom{6}{1}n^5 + \frac{1}{6}\binom{6}{2}n^4 + 0\binom{6}{3}n^3 - \frac{1}{30}\binom{6}{4}n^2 + 0\binom{6}{5}n] \text{。}$$

$$S_6(n) = 1^6 + 2^6 + 3^6 + \cdots + n^6$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^4+6n^3-3n+1)}{42}$$

$$= \frac{1}{7}n^7 + \frac{1}{2}n^6 + \frac{1}{2}n^5 - \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{42}n = \frac{1}{7}(n^7 + \frac{7}{2}n^6 + \frac{7}{2}n^5 - \frac{7}{6}n^3 + \frac{1}{6}n)$$

$$= \frac{1}{7}[n^7 + \frac{1}{2}\binom{7}{1}n^6 + \frac{1}{6}\binom{7}{2}n^5 + 0\binom{7}{3}n^4 - \frac{1}{30}\binom{7}{4}n^3 + 0\binom{7}{5}n^2 + \frac{1}{42}\binom{7}{6}n] \text{。}$$

$$S_7(n) = 1^7 + 2^7 + 3^7 + \cdots + n^7$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2(3n^4+6n^3-n^2-4n+2)}{24}$$

$$= \frac{1}{8}n^8 + \frac{1}{2}n^7 + \frac{7}{12}n^6 - \frac{7}{24}n^4 + \frac{1}{12}n^2$$

$$= \frac{1}{8}(n^8 + 4n^7 + \frac{14}{3}n^6 - \frac{7}{3}n^4 + \frac{2}{3}n^2)$$

$$= \frac{1}{8}[n^8 + \frac{1}{2}\binom{8}{1}n^7 + \frac{1}{6}\binom{8}{2}n^6 + 0\binom{8}{3}n^5 - \frac{1}{30}\binom{8}{4}n^4 + 0\binom{8}{5}n^3 + \frac{1}{42}\binom{8}{6}n^2 + 0\binom{8}{7}n] \text{。}$$

$$S_8(n) = 1^8 + 2^8 + 3^8 + \cdots + n^8$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)(5n^6+15n^5+5n^4-15n^3-n^2+9n-3)}{90}$$

$$= \frac{1}{9}n^9 + \frac{1}{2}n^8 + \frac{2}{3}n^7 - \frac{7}{15}n^5 + \frac{2}{9}n^3 - \frac{1}{30}n$$

$$= \frac{1}{9}(n^9 + \frac{9}{2}n^8 + 6n^7 - \frac{21}{5}n^5 + 2n^3 - \frac{3}{10}n)$$

$$= \frac{1}{9}[n^9 + \frac{1}{2}\binom{9}{1}n^8 + \frac{1}{6}\binom{9}{2}n^7 + 0\binom{9}{3}n^6 - \frac{1}{30}\binom{9}{4}n^5 + 0\binom{9}{5}n^4$$

$$+ \frac{1}{42}\binom{9}{6}n^3 + 0\binom{9}{7}n^2 - \frac{1}{30}\binom{9}{8}n] \text{。}$$

$S_9(n)=1^9+2^9+3^9+\cdots+n^9$

$$=\frac{n^2(n+1)^2(2n^6+6n^5+n^4-8n^3+n^2+6n-3)}{20}$$

$$=\frac{1}{10}n^{10}+\frac{1}{2}n^9+\frac{3}{4}n^8-\frac{7}{10}n^6+\frac{1}{2}n^4-\frac{3}{20}n^2$$

$$=\frac{1}{10}(n^{10}+5n^9+\frac{15}{2}n^8-7n^6+5n^4-\frac{3}{2}n^2)$$

$$=\frac{1}{10}[n^{10}+\frac{1}{2}\binom{10}{1}n^9+\frac{1}{6}\binom{10}{2}n^8+0\binom{10}{3}n^7-\frac{1}{30}\binom{10}{4}n^6$$

$$+0\binom{10}{5}n^5+\frac{1}{42}\binom{10}{6}n^4+0\binom{10}{7}n^3-\frac{1}{30}\binom{10}{8}n^2+0\binom{10}{9}n]\text{。}$$

$S_{10}(n)=1^{10}+2^{10}+3^{10}+\cdots+n^{10}$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^8+12n^7+8n^6-18n^5-10n^4+24n^3+2n^2-15n+5)}{66}$$

$$=\frac{1}{11}n^{11}+\frac{1}{2}n^{10}+\frac{5}{6}n^9-n^7+n^5-\frac{1}{2}n^3+\frac{5}{66}n$$

$$=\frac{1}{11}(n^{11}+\frac{11}{2}n^{10}+\frac{55}{6}n^9-11n^7+11n^5-\frac{11}{2}n^3+\frac{5}{6}n)$$

$$=\frac{1}{11}[n^{11}+\frac{1}{2}\binom{11}{1}n^{10}+\frac{1}{6}\binom{11}{2}n^9+0\binom{11}{3}n^8-\frac{1}{30}\binom{11}{4}n^7$$

$$+0\binom{11}{5}n^6+\frac{1}{42}\binom{11}{6}n^5+0\binom{11}{7}n^4-\frac{1}{30}\binom{11}{8}n^3+0\binom{11}{9}n^2+\frac{5}{66}\binom{11}{10}n]\text{。}$$

由上可猜測 $S_k(n)=1^k+2^k+3^k+\cdots+n^k=\dfrac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k}\binom{k+1}{i}P_i n^{k+1-i}$ ，

其中 $P_0=1$ ， $P_1=\frac{1}{2}$ ， $P_2=\frac{1}{6}$ ， $P_3=0$ ， $P_4=-\frac{1}{30}$ ， $P_5=0$ ， $P_6=\frac{1}{42}$ ，

$P_7=0$ ， $P_8=-\frac{1}{30}$ ， $P_9=0$ ， $P_{10}=\frac{5}{66}$ ，⋯

後來，我們上維基百科搜尋發現：此數列和伯努利數列比較，僅有 P_1 不同，

伯努利數列 $<B_n>$：$B_0=1$，$B_1=-\frac{1}{2}$，$B_2=\frac{1}{6}$，$B_3=0$，$B_4=-\frac{1}{30}$，$B_5=0$，$B_6=\frac{1}{42}$，

$B_7=0$ ， $B_8=-\frac{1}{30}$ ， $B_9=0$ ， $B_{10}=\frac{5}{66}$ ，⋯

其中 $\sum_{i=0}^{n}\binom{n+1}{i}B_i=0$ 且 $B_0=1$ 。

數學上，<u>伯努利</u>數 B_n 的第一次發現是與下列級數和的公式有關：

$S_k(n-1)=1^k+2^k+3^k+\cdots+(n-1)^k$ ，其中 n 為固定的任意正整數。

這級數和的公式必定是變數為 n ，次數為 $k+1$ 的多項式，稱為<u>伯努利多項式</u>。

伯努利多項式的<u>係數</u>與伯努利數有密切關係如下：

$$S_k(n-1)=1^k+2^k+3^k+\cdots+(n-1)^k=\frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k}\binom{k+1}{i}B_i n^{k+1-i}$$ 。

而兩者不同的原因在於：

$$
\begin{aligned}
S_k(n)&=S_k(n-1)+n^k\\
&=\frac{1}{k+1}[\binom{k+1}{1}n^k+\sum_{i=0}^{k}\binom{k+1}{i}B_i n^{k+1-i}]\\
&=\frac{1}{k+1}[\binom{k+1}{1}n^k+\binom{k+1}{0}B_0 n^{k+1}+\binom{k+1}{1}B_1 n^k+\sum_{i=2}^{k}\binom{k+1}{i}B_i n^{k+1-i}]\\
&=\frac{1}{k+1}[\binom{k+1}{0}B_0 n^{k+1}+\binom{k+1}{1}(B_1+1)n^k+\sum_{i=2}^{k}\binom{k+1}{i}B_i n^{k+1-i}]\text{，}
\end{aligned}
$$

故 $S_k(n)=\frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k}\binom{k+1}{i}P_i n^{k+1-i}$ ，其中 $P_i=B_i(i\neq 1)$ ， $P_1=B_1+1$ 。

若設 $P_i=P^i$ ，且將每個 P^i 視為相對獨立的數，

又 $P_i=B_i(i\neq 1)$ ， $P_1=B_1+1$ ， $\therefore P^i=B^i(i\neq 1)$ ， $P^1=B^1+1$ ，

$$
\begin{aligned}
\text{故 } S_k(n)&=1^k+2^k+3^k+\cdots+n^k\\
&=\frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k}\binom{k+1}{i}P_i n^{k+1-i}=\frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k}\binom{k+1}{i}P^i n^{k+1-i}\\
&=\frac{1}{k+1}[\binom{k+1}{0}B^0 n^{k+1}+\binom{k+1}{1}(B^1+1)n^k+\sum_{i=2}^{k}\binom{k+1}{i}B^i n^{k+1-i}]\\
&=\frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k}\binom{k+1}{i}B^i n^{k+1-i}+n^k\\
&=\frac{1}{k+1}[\sum_{i=0}^{k+1}\binom{k+1}{i}B^i n^{k+1-i}-B^{k+1}]+n^k\\
&=\frac{1}{k+1}[(n+B)^{k+1}-B^{k+1}]+n^k
\end{aligned}
$$

因此 $S_k(n-1)=\frac{1}{k+1}[(n+B)^{k+1}-B^{k+1}]$

$\Rightarrow S_k(n)=\dfrac{1}{k+1}[(n+1+B)^{k+1}-B^{k+1}]$。

但 $S_k(n)$ 為 n 的 $k+1$ 次多項式且沒有常數項，

$\therefore (1+B)^{k+1}-B^{k+1}=0 \Rightarrow \sum_{i=0}^{k}\binom{k+1}{i}B^i=0$，且每個 B^i 也是相對獨立的數，

反設 $B^i=B_i$，則 $\sum_{i=0}^{k}\binom{k+1}{i}B_i=0$ 且 $B^0=B_0=1$。

故 $S_k(n)=\dfrac{1}{k+1}[(n+1+B)^{k+1}-B^{k+1}]$

$$=\frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k}\binom{k+1}{i}B^i(n+1)^{k+1-i}=\frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k}\binom{k+1}{i}B_i(n+1)^{k+1-i}$$ 。

即 $S_k(n)=\dfrac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k}\binom{k+1}{i}B_i(n+1)^{k+1-i}$，其中 $\sum_{i=0}^{k}\binom{k+1}{i}B_i=0$ 且 $B_0=1$。

以下我們就 $k=1,2,3$ 為例，說明如下：

$S_k(n)=1^k+2^k+3^k+\cdots+n^k=\dfrac{1}{k+1}[(n+1+B)^{k+1}-B^{k+1}]$

滿足 $(1+B)^{k+1}-B^{k+1}=0$，且將每個 B^i 視為相對獨立的數。

(一) $k=1$ 時，$(1+B)^2-B^2=0 \Rightarrow 1+2B=0$，$B=-\dfrac{1}{2}$。

$k=2$ 時，$(1+B)^3-B^3=0 \Rightarrow 1+3B+3B^2=0 \Rightarrow 1-\dfrac{3}{2}+3B^2=0$

$$\Rightarrow 3B^2=\frac{1}{2}，B^2=\frac{1}{6}$$ 。

$k=3$ 時，$(1+B)^4-B^4=0 \Rightarrow 1+4B+6B^2+4B^3=0 \Rightarrow 1-2+1+4B^3=0$

$$\Rightarrow 4B^3=0，B^3=0$$ 。

(二) $S_1(n)=1+2+3+\cdots+n$

$$=\frac{1}{2}[(n+1+B)^2-B^2]=\frac{1}{2}[(n+1)^2+2B(n+1)]$$

$$=\frac{1}{2}[(n+1)^2-(n+1)]=\frac{1}{2}n(n+1)$$ 。

$S_2(n)=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$

$$=\frac{1}{3}[(n+1+B)^3-B^3]=\frac{1}{3}[(n+1)^3+3B(n+1)^2+3B^2(n+1)]$$

$$=\frac{1}{3}[(n+1)^3-\frac{3}{2}(n+1)^2+\frac{1}{2}(n+1)]=\frac{(n+1)}{6}[2(n+1)^2-3(n+1)+1]$$

$$=\frac{(n+1)}{6}(2n^2+n)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$ 。

$$S_3(n)=1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$$

$$=\frac{1}{4}[(n+1+B)^4-B^4]=\frac{1}{4}[(n+1)^4+4B(n+1)^3+6B^2(n+1)^2+4B^3(n+1)]$$

$$=\frac{1}{4}[(n+1)^4-2(n+1)^3+(n+1)^2]$$

$$=\frac{(n+1)^2}{4}[(n+1)^2-2(n+1)+1]=\frac{n^2(n+1)^2}{4}\text{ 。}$$

柒、結論

一、若 $j=1,2,3,\cdots,m-2$ ，

則 $\binom{j+1}{j}\binom{m}{j+1}-\binom{j+2}{j}\binom{m}{j+2}+\binom{j+3}{j}\binom{m}{j+3}-\cdots$

$$+(-1)^{m-j}\binom{m-1}{j}\binom{m}{m-1}-\binom{m}{j}=(-1)^{m-j}\binom{m}{j}\text{ 。}$$

二、 $S_k(n)=1^k+2^k+3^k+\cdots+n^k$

$=A_1\binom{n+1}{2}+A_2\binom{n+1}{3}+\cdots+A_m\binom{n+1}{m+1}+\cdots A_k\binom{n+1}{k+1}$ 為 n 的 $k+1$ 次多項式。

其中 $A_m=\sum_{j=0}^{m-1}(-1)^j\binom{m}{m-j}(m-j)^k$ ， $m=1,2,\cdots,k$

$$=\binom{m}{m}m^k-\binom{m}{m-1}(m-1)^k+\binom{m}{m-2}(m-2)^k-\binom{m}{m-3}(m-3)^k+\cdots$$

$$+(-1)^{m-3}\binom{m}{3}3^k+(-1)^{m-2}\binom{m}{2}2^k+(-1)^{m-1}\binom{m}{1}1^k\text{ 。}$$

三、令 $f(x)=x^k$ ，

則 $A_m=\sum_{j=0}^{m-1}(-1)^j\binom{m}{m-j}(m-j)^k=\sum_{j=0}^{m}(-1)^j\binom{m}{m-j}f(m-j)=\Delta^m f(0)$ 。

四、 $S_k(n)=1^k+2^k+3^k+\cdots+n^k=\frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k}\binom{k+1}{i}P_i n^{k+1-i}$ ， $P_i=B_i\,(i\neq 1)$ ， $P_1=B_1+1$ 。

或 $S_k(n)=\frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k}\binom{k+1}{i}B_i(n+1)^{k+1-i}$ ，

其中 $<B_n>$ 為伯努利數列，滿足遞迴式： $\sum_{i=0}^{k}\binom{k+1}{i}B_i=0$ 且 $B_0=1$ 。

五、$S_k(n)=1^k+2^k+3^k+\cdots+n^k=\dfrac{1}{k+1}[(n+1+B)^{k+1}-B^{k+1}]$，滿足 $(1+B)^{k+1}-B^{k+1}=0$，且將每個 B^i 視為相對獨立的數。

六、$S_1(n)=1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}=\dfrac{1}{2}n^2+\dfrac{1}{2}n$。

$$S_2(n)=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n \text{。}$$

$$S_3(n)=1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}=\frac{1}{4}n^4+\frac{1}{2}n^3+\frac{1}{4}n^2 \text{。}$$

$$S_4(n)=1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4=\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$$
$$=\frac{1}{5}n^5+\frac{1}{2}n^4+\frac{1}{3}n^3-\frac{1}{30}n \text{。}$$

$$S_5(n)=1^5+2^5+3^5+\cdots+n^5=\frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12}$$
$$=\frac{1}{6}n^6+\frac{1}{2}n^5+\frac{5}{12}n^4-\frac{1}{12}n^2 \text{。}$$

$$S_6(n)=1^6+2^6+3^6+\cdots+n^6=\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^4+6n^3-3n+1)}{42}$$
$$=\frac{1}{7}n^7+\frac{1}{2}n^6+\frac{1}{2}n^5-\frac{1}{6}n^3+\frac{1}{42}n \text{。}$$

$$S_7(n)=1^7+2^7+3^7+\cdots+n^7=\frac{n^2(n+1)^2(3n^4+6n^3-n^2-4n+2)}{24}$$
$$=\frac{1}{8}n^8+\frac{1}{2}n^7+\frac{7}{12}n^6-\frac{7}{24}n^4+\frac{1}{12}n^2 \text{。}$$

$$S_8(n)=1^8+2^8+3^8+\cdots+n^8$$
$$=\frac{n(n+1)(2n+1)(5n^6+15n^5+5n^4-15n^3-n^2+9n-3)}{90}$$
$$=\frac{1}{9}n^9+\frac{1}{2}n^8+\frac{2}{3}n^7-\frac{7}{15}n^5+\frac{2}{9}n^3-\frac{1}{30}n \text{。}$$

$$S_9(n) = 1^9 + 2^9 + 3^9 + \cdots + n^9$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2(2n^6+6n^5+n^4-8n^3+n^2+6n-3)}{20}$$

$$= \frac{1}{10}n^{10} + \frac{1}{2}n^9 + \frac{3}{4}n^8 - \frac{7}{10}n^6 + \frac{1}{2}n^4 - \frac{3}{20}n^2 \text{ 。}$$

$$S_{10}(n) = 1^{10} + 2^{10} + 3^{10} + \cdots + n^{10}$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^8+12n^7+8n^6-18n^5-10n^4+24n^3+2n^2-15n+5)}{66}$$

$$= \frac{1}{11}n^{11} + \frac{1}{2}n^{10} + \frac{5}{6}n^9 - n^7 + n^5 - \frac{1}{2}n^3 + \frac{5}{66}n \text{ 。}$$

捌、參考資料及其他

1. 許志農主編，高中數學課本第二冊，初版，台北，龍騰文化事業股份有限公司，P18~32，P88~109，99 年出版。
2. 嚴鎮軍主編，高中數學競賽教程，初版，台北，九章出版社，P345-349，82 年出版。
3. 編輯部編，組合數學—算法與分析，初版，台北，九章出版社，P97-154，78 年出版。
4. 何景國著，求 $\sum_{i=1}^{n} i^k\ (k=1,2,3)$ 的幾種方法，數學傳播 6 卷 4 期，中央研究院數學研究所，P93~97，71 年 12 月。
5. 余文卿著，一些發散級數的求和法，數學傳播 22 卷 4 期，中央研究院數學研究所，P43~49，87 年 12 月。
6. 李政豐著，連續整數冪次和公式的另類思考，數學傳播 26 卷 2 期，中央研究院數學研究所，P73~82，91 年 6 月。
7. 蘇益弘．胡豐榮．許天維著，從連續整數冪次和公式引發之擴充想法，數學傳播 29 卷 2 期，中央研究院數學研究所，P30~33，94 年 6 月。

#【評語】040404

1. 數學科展重視實驗探討。本文所出現的數字圖案可以利用(如 Excel)試算表進行數學實驗。
2. 作品主要是探討 $S_k(n) = 1^k + 2^k + \dots + n^k$ 之簡潔表示法，惟在數學上此公式之表示法非常多，類似的題材出現頗為頻繁。