中華民國第 51 屆中小學科學展覽會

作品說明書

高中組　數學科

最佳團隊合作獎

040402

萬"重"一"心"

—Echois 三角形之探討與推廣

學校名稱：臺北市立麗山高級中學

作者：	指導老師：
高二 謝書豪	林永發
高二 洪瑞儀	徐鈞明

關鍵詞：重心、幾何中心

摘要

本研究試圖從三個正三角形所產生 Echois 三角形的特性，推廣至任意多個正多邊形與相似多邊形所產生的 Echois 圖形的特性。我們利用電腦進行動態幾何實驗，發現 Echois 圖形與原圖形之間的關係，並進一步驗證，同時在圖形變換過程中，觀察圖形退化的一些有趣現象，從而對一個三角形的三頂點與其重心的關係，擴增到 Echois 圖形與其一群圖形之間的關係，對重心的概念產生更深一層的認識。

壹、研究動機

在數學專題研究課中，我們在一本書”數學的魅力”中看到一有趣的問題，如下：

「在平面上將任意三個正三角形之頂點依順時針或逆時針標上 A、B、C，那麼 $\triangle A_1A_2A_3$、 $\triangle B_1B_2B_3$、 $\triangle C_1C_2C_3$的三個重心 G_A、G_B、G_C爲另一正三角形的三頂點」

我們稱$\triangle G_AG_BG_C$爲「Echois 三角形」。

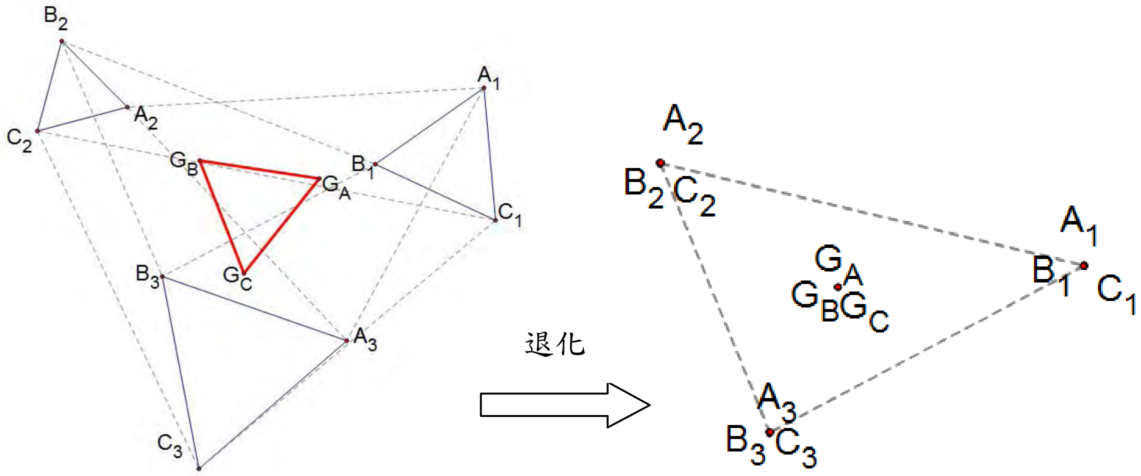


圖 1-1

有趣的是我們利用動態幾何 GSP 進行實驗時，發現當三個正三角形逐漸退化成一點時，此時 Echois 三角形也會退化成一點，同時也似乎是三點所形成的三角形的重心，因此引發了我們一連串的探討與推廣。

貳、研究目的與問題

本研究試圖從 Echois 三角形的特性，探討其形成的原因、變換過程中與原圖形的重心位置、形狀大小關係，並試圖推廣至多邊形。研究問題如下：

一、 探討「給定任意三個正三角形所產生的 Echois 三角形，為什麼會形成一個正三角形？有什麼特別的關係？」

二、 仿照上述作法，探討「給定任意四個或五個正三角形所產生的 Echois 三角形，仍會是一個正三角形嗎？有什麼特別的關係？」，並以此推廣到 m 個。

三、 仿照上述一、二探討「若給定任意若干個正方形或正五邊形，所能產生的 Echois 四邊形、五邊形會是一個正方形或正五邊形嗎？有什麼特別的關係？」，並以此推廣到 m 個。

四、 根據上述，試圖探討「給定任意 m 個正 n 邊形是否也能產生 Echois n 邊形，它會是一個正 n 邊形嗎？它們之間又有什麼特別的關係？」

五、 如果是相似多邊形，其 Echois 多邊形也會相似嗎？如果不是相似多邊形，而是任意多邊形呢？

參、器材與方法

研究器材：筆、紙、電腦 GSP 軟體。

研究方法：利用電腦軟體 GSP 進行實驗觀察圖形變換的規律 。

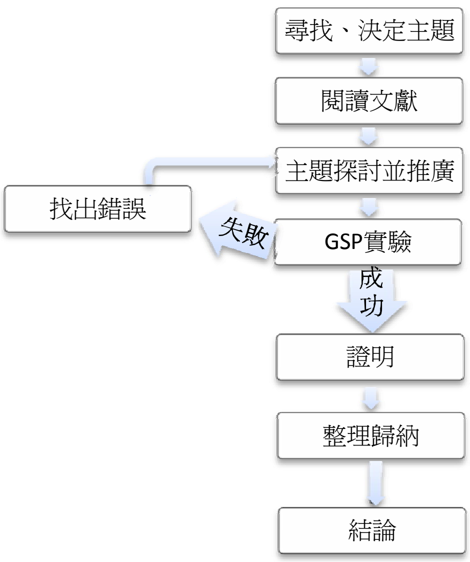


表 3-1

研究架構：

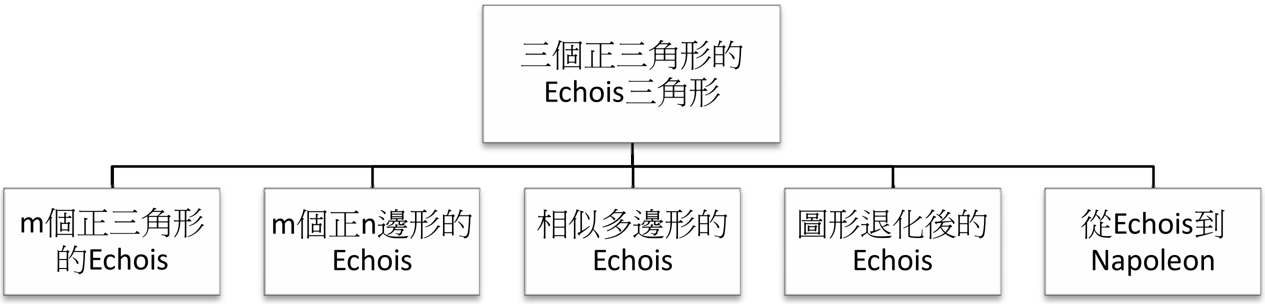


表 3-2

肆、研究過程與結果

爲了方便對問題的描述，在平面上我們給定任意三個正三角形，並將頂點依順時針或逆時針標上 A、B、C，將三個正三角形的 A、B、C 點看成三個正三角形之間的對應點，那麼將對應點連接所形成的圖形的重心G_1、G_2、G_3連線，得到一個三角形 $\Delta G_1G_2G_3$，此過程我們稱它爲「Echois」，而此三角形就稱爲「Echois 三角形」。爾後，對四邊形或五邊形的推廣，我們也依此稱之。

接下來，我們從三個正三角形來探討 Echois 三角形。

一、 三個正三角形的 Echois 三角形

爲了說明 Echois 三角形是一個正三角形，首先我們先利用文獻的一些引理來說明複數證法。

【引理一】

如果 A、B、C、D、E、F 在複數平面上的坐標依次是Z_1、Z_2、Z_3、U_1、U_2、U_3

則 $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ 的充要條件爲 $\begin{vmatrix} Z_1 & U_1 & 1 \\ Z_2 & U_2 & 1 \\ Z_3 & U_3 & 1 \end{vmatrix} =0$

證明：

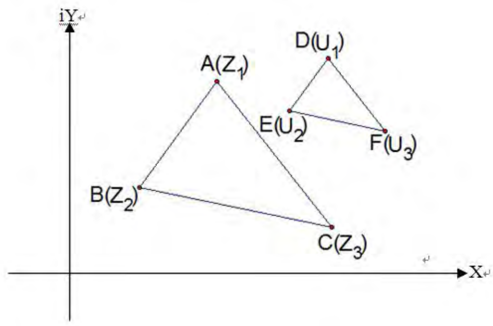


圖 4-1

設$\dfrac{z_2-z_1}{z_3-z_1}=pe^{iA}$、$\dfrac{u_2-u_1}{u_3-u_1}=qe^{iD}$

若 $\triangle ABC\sim\triangle DEF \Leftrightarrow \angle A=\angle D$ ，且$\left|\dfrac{z_2-z_1}{z_3-z_1}\right|=p=q=\left|\dfrac{u_2-u_1}{u_3-u_1}\right|$

$\Leftrightarrow \dfrac{z_2-z_1}{z_3-z_1}=pe^{iA}=qe^{iA}=qe^{iD}=\dfrac{u_2-u_1}{u_3-u_1}$

$\Leftrightarrow (Z_2-Z_1)(U_3-U_1)-(Z_3-Z_1)(U_2-U_1)=0$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} Z_1 & U_1 & 1 \\ Z_2-Z_1 & U_2-U_1 & 0 \\ Z_3-Z_1 & U_3-U_1 & 0 \end{vmatrix}=0 \quad \Leftrightarrow \begin{vmatrix} Z_1 & U_1 & 1 \\ Z_2 & U_2 & 1 \\ Z_3 & U_3 & 1 \end{vmatrix}=0$ 得證。

【引理二】

設$A(Z_1)$、$B(Z_2)$、$C(Z_3)$爲$\triangle ABC$ 的三頂點，則

$\triangle ABC$ 爲正三角形的充要條件爲$\begin{vmatrix} Z_1 & 1 & 1 \\ Z_2 & \omega & 1 \\ Z_3 & \omega^2 & 1 \end{vmatrix}=Z_1+Z_2\omega+Z_3\omega^2=0$(根據引理一)

，其中1、ω、ω^2 是方程式$X^3-1=0$的三個根

【引理三】

頂點爲Z_1、Z_2、Z_3的三角形，則其重心坐標是 $\frac{1}{3}(z_1+z_2+z_3)$

證明：

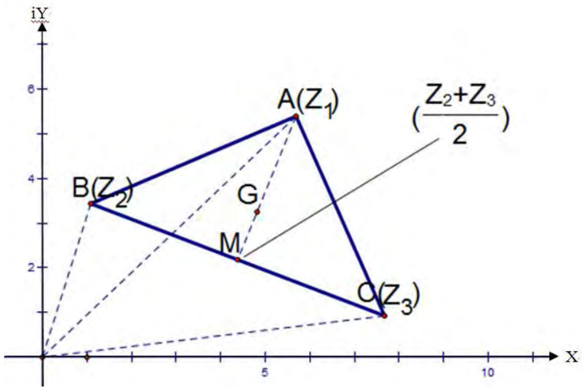


圖 4-2

上圖中Z_1、Z_2、Z_3是△ABC 頂點坐標，那麼$\overline{BC}$線段中點 M 爲$(\frac{Z_2+Z_3}{2})$，設此三角形重心爲 G。

$\overrightarrow{AM}=\left(\frac{Z_2+Z_3}{2}\right)-Z_1 \qquad \overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\left(\frac{Z_2+Z_3}{2}\right)-\frac{2}{3}Z_1$

$\overrightarrow{OG}=\dfrac{1}{3}(z_1+z_2+z_3)$

接下來，我們就開始來說明爲什麼 Echois 三角形會是一個正三角形？

(一) Echois 三角形是一個正三角形

設G_1、G_2、G_3分別爲$\triangle A_1B_1C_1$、$\triangle A_2B_2C_2$、$\triangle A_3B_3C_3$的重心 G_A、G_B、G_C分別爲$\triangle A_1A_2A_3$、$\triangle B_1B_2B_3$、$\triangle C_1C_2C_3$的重心 若 G 爲$\triangle G_AG_BG_C$的重心，則 (1)G 爲$\triangle G_1G_2G_3$的重心 (2)$\triangle G_AG_BG_C$爲一個正三角形

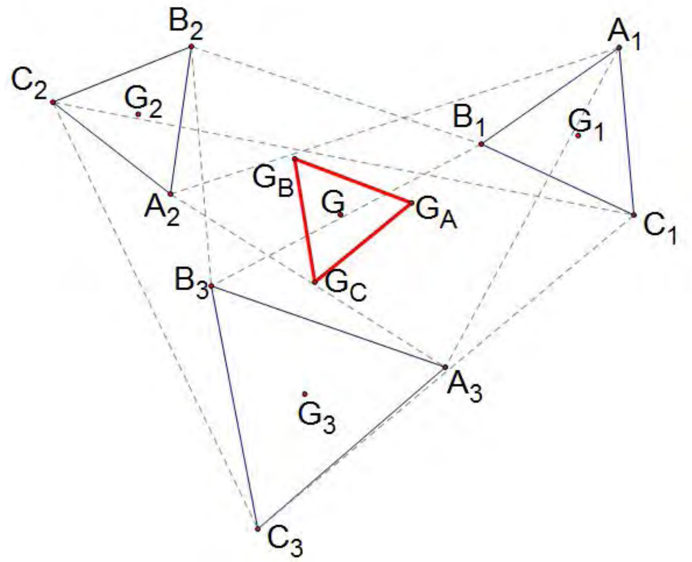


圖 4-3

【複數證法】

設$\Delta A_1B_1C_1$、$\Delta A_2B_2C_2$、$\Delta A_3B_3C_3$的頂點座標依序爲Z_1、Z_2、Z_3、U_1、U_2、U_3、V_1、V_2、V_3

由於它們都是正三角形，根據引理二，所以

$$Z_1+Z_2\omega+Z_3\omega^2=0 \text{—①}$$

$$U_1+U_2\omega+U_3\omega^2=0 \text{—②}$$

$$V_1+V_2\omega+V_3\omega^2=0 \text{—③}$$

三式相加除以三得

$\frac{Z_1+U_1+V_1}{3}+\frac{Z_2+U_2+V_2}{3}\omega+\frac{Z_3+U_3+V_3}{3}\omega^2=0$　根據引理三得知

$\frac{Z_1+U_1+V_1}{3}$、$\frac{Z_2+U_2+V_2}{3}$、$\frac{Z_3+U_3+V_3}{3}$三點即爲 G_A、G_B、G_C，且$\Delta G_AG_BG_C$爲一個正三角形

接下來我們提出一個比上述更簡單的證明方法

【向量證法】

1. 設 O 爲原點，根據三角形的重心性質

$\overrightarrow{OG_A}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_3})$　　$\overrightarrow{OG_1}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OC_1})$

$\overrightarrow{OG_B}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OB_2}+\overrightarrow{OB_3})$　　$\overrightarrow{OG_2}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OB_2}+\overrightarrow{OC_2})$

$\overrightarrow{OG_C}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OC_1}+\overrightarrow{OC_2}+\overrightarrow{OC_3})$　　$\overrightarrow{OG_3}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA_3}+\overrightarrow{OB_3}+\overrightarrow{OC_3})$

因爲 G 爲$\Delta G_AG_BG_C$的重心，且根據上述可推得

$$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OG_A}+\overrightarrow{OG_B}+\overrightarrow{OG_C})$$

$$=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_3}\right)+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OB_2}+\overrightarrow{OB_3}\right)+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OC_1}+\overrightarrow{OC_2}+\overrightarrow{OC_3}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OC_1}\right)+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OB_2}+\overrightarrow{OC_2}\right)+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA_3}+\overrightarrow{OB_3}+\overrightarrow{OC_3}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OG_1}+\overrightarrow{OG_2}+\overrightarrow{OG_3}\right)$$

所以 G 亦爲$\Delta G_1G_2G_3$的重心

換句話說 Echois 三角形$\Delta G_AG_BG_C$的重心 G，也是$\Delta A_1B_1C_1$、$\Delta A_2B_2C_2$、$\Delta A_3B_3C_3$的重心連線所形成的$\Delta G_1G_2G_3$的重心。

2. 以$\overrightarrow{XY}e^{i\theta}$表示向量$\overrightarrow{XY}$以 X 爲旋轉中心將向量旋轉$\theta$度所得的結果，

其中$e^{i\theta}$爲複數的極式$\cos\theta+i\sin\theta$。

因爲$\Delta A_1B_1C_1$、$\Delta A_2B_2C_2$、$\Delta A_3B_3C_3$爲正三角形，所以

$$\overrightarrow{G_1B_1}=\overrightarrow{G_1A_1}\,e^{i\frac{2}{3}\pi}\qquad\overrightarrow{G_1C_1}=\overrightarrow{G_1A_1}\,e^{i\frac{4}{3}\pi}$$

$$\overrightarrow{G_2B_2}=\overrightarrow{G_2A_2}\,e^{i\frac{2}{3}\pi}\qquad\overrightarrow{G_2C_2}=\overrightarrow{G_2A_2}\,e^{i\frac{4}{3}\pi}$$

$$\overrightarrow{G_3B_3}=\overrightarrow{G_3A_3}\,e^{i\frac{2}{3}\pi}\qquad\overrightarrow{G_3C_3}=\overrightarrow{G_3A_3}e^{i\frac{4}{3}\pi}$$

3. $\overrightarrow{GG_B}=\overrightarrow{OG_B}-\overrightarrow{OG}$

$$=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OB_2}+\overrightarrow{OB_3})-\frac{1}{3}(\overrightarrow{OG_1}+\overrightarrow{OG_2}+\overrightarrow{OG_3})$$

$$=\frac{1}{3}(\overrightarrow{G_1B_1}+\overrightarrow{G_2B_2}+\overrightarrow{G_3B_3})$$

$$=\frac{1}{3}(\overrightarrow{G_1A_1}\,e^{i\frac{2}{3}\pi}+\overrightarrow{G_2A_2}\,e^{i\frac{2}{3}\pi}+\overrightarrow{G_3A_3}\,e^{i\frac{2}{3}\pi})=\frac{1}{3}(\overrightarrow{G_1A_1}+\overrightarrow{G_2A_2}+\overrightarrow{G_3A_3})e^{i\frac{2}{3}\pi}$$

$$=\left[\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_3})-\frac{1}{3}(\overrightarrow{OG_1}+\overrightarrow{OG_2}+\overrightarrow{OG_3})\right]e^{i\frac{2}{3}\pi}$$

$$=(\overrightarrow{OG_A}-\overrightarrow{OG})\,e^{i\frac{2}{3}\pi}$$

$=\overrightarrow{GG_A}e^{i\frac{2}{3}\pi}$，同理$\overrightarrow{GG_C}=\overrightarrow{GG_A}e^{i\frac{4}{3}\pi}$。

從上述可知，若以 G 爲旋轉中心，將G_A旋轉 120 度可得G_B點，旋轉 240 度可得G_C點，換句話說，$\triangle G_AG_BG_C$就是一個正三角形。

(二) Echois 三角形與原三角形的面積關係

> $\triangle A_1B_1C_1$、$\triangle A_2B_2C_2$、$\triangle A_3B_3C_3$爲正三角形，$\triangle A_1A_2A_3$、$\triangle B_1B_2B_3$、$\triangle C_1C_2C_3$ 之重心G_A、G_B、G_C爲另一正三角形的三頂點。
>
> 則$\triangle G_AG_BG_C$的面積爲
>
> $\frac{\sqrt{3}}{36}\left(\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right|^2+\left|\overrightarrow{A_2B_2}\right|^2+\left|\overrightarrow{A_3B_3}\right|^2+2(\overrightarrow{A_1B_1}\bullet\overrightarrow{A_2B_2}+\overrightarrow{A_2B_2}\bullet\overrightarrow{A_3B_3}+\overrightarrow{A_1B_1}\bullet\overrightarrow{A_3B_3})\right)$。

證明：

$\overrightarrow{G_AG_B}=\overrightarrow{OG_B}-\overrightarrow{OG_A}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{A_2B_2}+\overrightarrow{A_3B_3})$

$\triangle G_AG_BG_C$邊長

$$=\frac{1}{3}\sqrt{\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right|^2+\left|\overrightarrow{A_2B_2}\right|^2+\left|\overrightarrow{A_3B_3}\right|^2+2(\overrightarrow{A_1B_1}\bullet\overrightarrow{A_2B_2}+\overrightarrow{A_2B_2}\bullet\overrightarrow{A_3B_3}+\overrightarrow{A_1B_1}\bullet\overrightarrow{A_3B_3})}$$

$\triangle G_AG_BG_C$面積

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\left|\overrightarrow{G_AG_B}\right|^2=\frac{\sqrt{3}}{4}\left|\frac{1}{3}(\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{A_2B_2}+\overrightarrow{A_3B_3})\right|^2$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{36}\left[\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right|^2+\left|\overrightarrow{A_2B_2}\right|^2+\left|\overrightarrow{A_3B_3}\right|^2+2(\overrightarrow{A_1B_1}\bullet\overrightarrow{A_2B_2}+\overrightarrow{A_2B_2}\bullet\overrightarrow{A_3B_3}+\overrightarrow{A_1B_1}\bullet\overrightarrow{A_3B_3})\right]。$$

【觀察與分析】

由上式可知$\triangle G_AG_BG_C$形狀大小會受到向量$\overrightarrow{A_1B_1}$、$\overrightarrow{A_2B_2}$、$\overrightarrow{A_3B_3}$的大小和方向的影響，所以接下來就來觀察分析一下不同情形：

首先我們假設

1. α、β、γ 分別爲$\overrightarrow{A_1B_1}$和$\overrightarrow{A_2B_2}$、$\overrightarrow{A_2B_2}$和$\overrightarrow{A_3B_3}$、$\overrightarrow{A_3B_3}$和$\overrightarrow{A_1B_1}$的夾角。。
2. 不失一般性 ，$\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right|\ge\left|\overrightarrow{A_2B_2}\right|\ge\left|\overrightarrow{A_3B_3}\right|$。

則我們可得知

- $0\le\alpha+\beta+\gamma\le 2\pi$ ，且 $0\le\alpha$、β、$\gamma\le\pi$。
- $\left|\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right|-\left|\overrightarrow{A_2B_2}\right|-\left|\overrightarrow{A_3B_3}\right|\right|\le\left|(\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{A_2B_2}+\overrightarrow{A_3B_3})\right|\le\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right|+\left|\overrightarrow{A_2B_2}\right|+\left|\overrightarrow{A_3B_3}\right|$

我們從上述$\overrightarrow{A_1B_1}$、$\overrightarrow{A_2B_2}$、$\overrightarrow{A_3B_3}$的長度與夾角 α、β、γ來分析$\triangle G_AG_BG_C$的面積的特殊值。

(1) 當$\alpha+\beta+\gamma=0$ (也就是 $\alpha=\beta=\gamma=0$)時

$\Delta G_AG_BG_C$的邊長有最大值爲$\frac{1}{3}(|\overrightarrow{A_1B_1}|+|\overrightarrow{A_2B_2}|+|\overrightarrow{A_3B_3}|)$

此時$\Delta A_1B_1C_1$、$\Delta A_2B_2C_2$、$\Delta A_3B_3C_3$之對應邊向量$\overrightarrow{A_1B_1}$、$\overrightarrow{A_2B_2}$、$\overrightarrow{A_3B_3}$方向均相同如下圖。

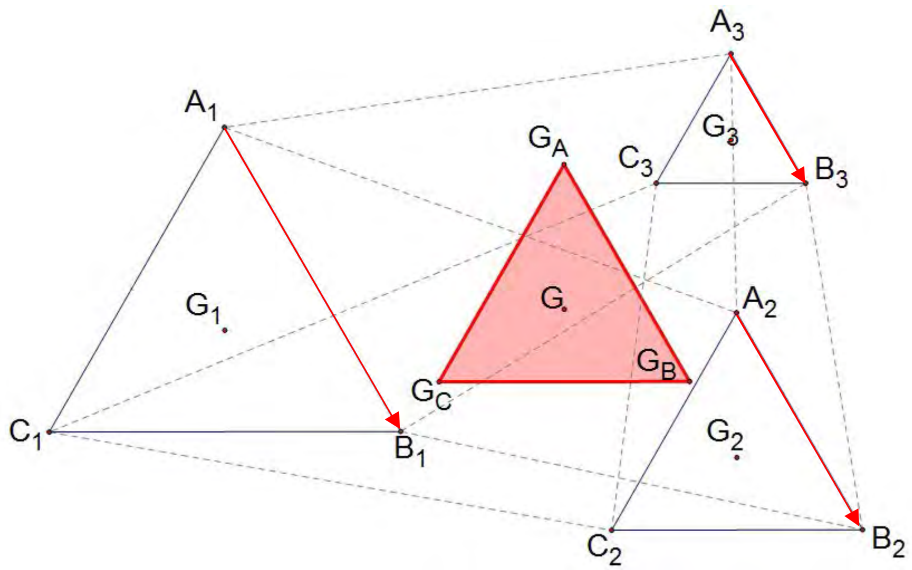


圖 4-4

(2) 當$\alpha+\beta+\gamma=2\pi$ 時，$\Delta G_AG_BG_C$的邊長爲$\left|\frac{1}{3}(|\overrightarrow{A_1B_1}|-|\overrightarrow{A_2B_2}|-|\overrightarrow{A_3B_3}|)\right|$有兩種情形

- $|\overrightarrow{A_1B_1}|\geq|\overrightarrow{A_2B_2}|+|\overrightarrow{A_3B_3}|$，此時$\alpha=\gamma=\pi$、$\beta=0$，

  $\overrightarrow{A_1B_1}$和$\overrightarrow{A_2B_2}$、$\overrightarrow{A_3B_3}$的方向均相反，如下圖。

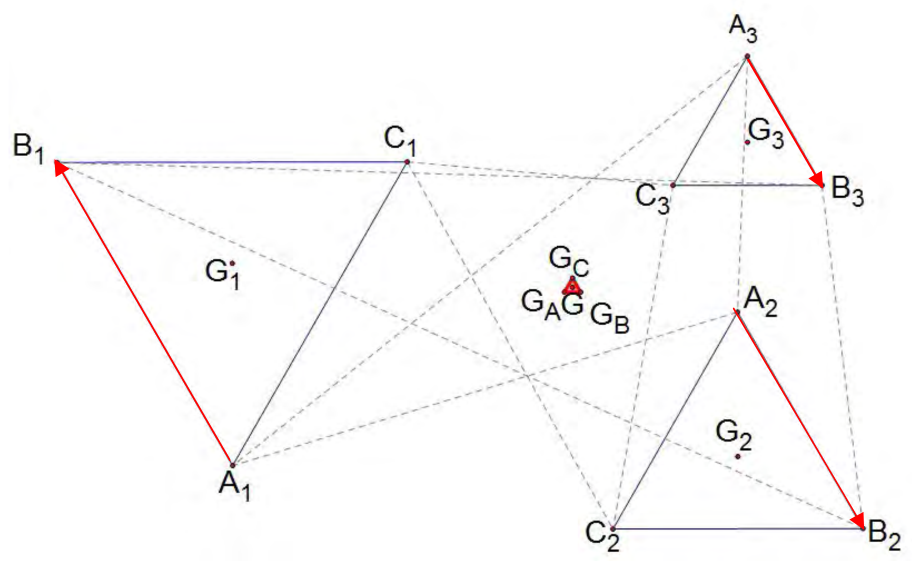


圖 4-5

■ $|\overrightarrow{A_1B_1}| \le |\overrightarrow{A_2B_2}| + |\overrightarrow{A_3B_3}|$，

根據三角形的構成要件兩邊之和大於第三邊，

此時$\overrightarrow{A_1B_1}$和$\overrightarrow{A_2B_2}$、$\overrightarrow{A_3B_3}$三個向量平移可圍成一個三角形，

$\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$(即爲其三角形的外角和)，但$\overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{A_2B_2} + \overrightarrow{A_3B_3} = \vec{0}$

所以$\Delta G_AG_BG_C$的邊長爲 0 如下圖。

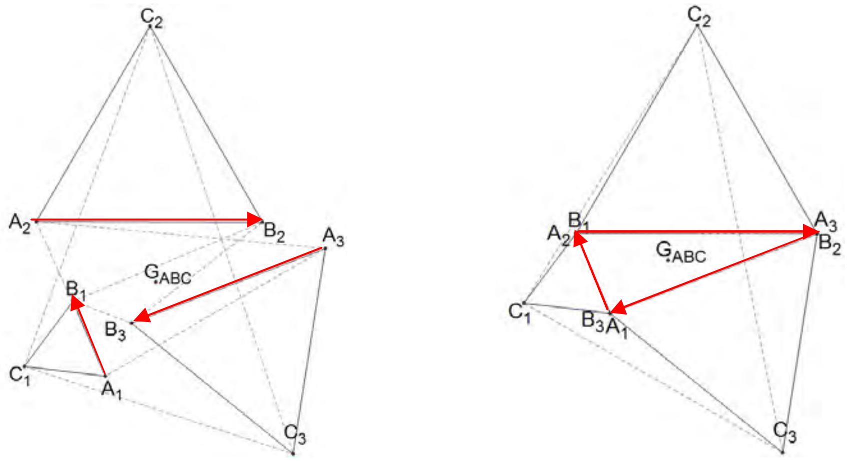


圖 4-6

(3) 平移$\Delta A_1B_1C_1$、$\Delta A_2B_2C_2$、$\Delta A_3B_3C_3$並不會改變$\overrightarrow{A_1B_1}$和$\overrightarrow{A_2B_2}$、$\overrightarrow{A_3B_3}$三個向量的大小和方向，因此$\Delta G_AG_BG_C$除了重心會跟著平移之外，其形狀大小是不會受影響的。

(三) Echois 三角形的退化情形

1. 如果我們分別將$\Delta A_1B_1C_1$、$\Delta A_2B_2C_2$、$\Delta A_3B_3C_3$逐漸退化成一點時，$\Delta G_AG_BG_C$亦退化集中到 G。也就回到我們熟悉的情形，三角形的三頂點與其重心的關係。

2. 如果我們只考慮兩個正三角形的 Echois 三角形，如下

設G_1、G_2分別爲$\Delta A_1B_1C_1$、$\Delta A_2B_2C_2$的重心
G_A、G_B、G_C分別爲$\Delta A_1A_2A_3$、$\Delta B_1B_2B_3$、$\Delta C_1C_2C_3$的重心
若 G 爲$\Delta G_AG_BG_C$的重心，則
(1) G 爲$\overline{G_1G_2}$的中點
(2)$\Delta G_AG_BG_C$爲一個正三角形

證明：

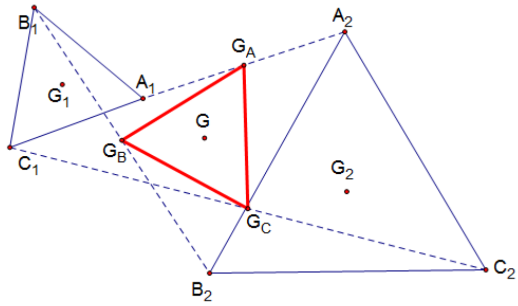


圖 4-7

1. 設 O 爲原點，根據三角形的中點性質

$$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OG_A}+\overrightarrow{OG_B}+\overrightarrow{OG_C})=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2})+\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OB_2})+\frac{1}{2}(\overrightarrow{OC_1}+\overrightarrow{OC_2})\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OC_1})+\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OB_2}+\overrightarrow{OC_2})\right]=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OG_1}+\overrightarrow{OG_2})$$

所以 G 亦爲$\overline{G_1G_2}$的中點

2. 因爲$\triangle A_1B_1C_1$、$\triangle A_2B_2C_2$、$\triangle A_3B_3C_3$爲正三角形，所以

$$\overrightarrow{G_1B_1}=\overrightarrow{G_1A_1}\,e^{i\frac{2}{3}\pi} \qquad \overrightarrow{G_1C_1}=\overrightarrow{G_1A_1}\,e^{i\frac{4}{3}\pi}$$

$$\overrightarrow{G_2B_2}=\overrightarrow{G_2A_2}\,e^{i\frac{2}{3}\pi} \qquad \overrightarrow{G_2C_2}=\overrightarrow{G_2A_2}\,e^{i\frac{4}{3}\pi}$$

$$\overrightarrow{GG_B}=\overrightarrow{OG_B}-\overrightarrow{OG}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OB_2})-\frac{1}{2}(\overrightarrow{OG_1}+\overrightarrow{OG_2})$$

$$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{G_1B_1}+\overrightarrow{G_2B_2})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{G_1A_1}\,e^{i\frac{2}{3}\pi}+\overrightarrow{G_2A_2}\,e^{i\frac{2}{3}\pi})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{G_1A_1}+\overrightarrow{G_2A_2})e^{i\frac{2}{3}\pi}$$

$$=\left[\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2})-\frac{1}{2}(\overrightarrow{OG_1}+\overrightarrow{OG_2})\right]e^{i\frac{2}{3}\pi}=(\overrightarrow{OG_A}-\overrightarrow{OG})\,e^{i\frac{2}{3}\pi}$$

$=\overrightarrow{GG_A}e^{i\frac{2}{3}\pi}$，同理$\overrightarrow{GG_C}=\overrightarrow{GG_A}e^{i\frac{4}{3}\pi}$。

從上述可知，若以 G 爲旋轉中心，將G_A旋轉 120 度可得G_B點，旋轉 240 度可得G_C點，換句話說，$\triangle G_AG_BG_C$就是一個正三角形。

接下來，我們來探討四個以上的正三角形的 Echois 三角形。因爲過程會涉及到多邊形的重心，我們將以幾何中心來稱之，並定義如下：

設$A_1(x_1,y_1),A_2(x_2,y_2),\ldots,A_n(x_n,y_n)$爲 n 邊形的 n 個頂點，一般我們定義此 n 邊形的幾何中心 G 的座標爲$(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n},\frac{y_1+y_2+\cdots+y_n}{n})$。

【幾何中心的性質】

設$A_1(x_1,y_1), A_2(x_2,y_2), \ldots, A_n(x_n,y_n)$為 n 邊形的頂點，O 為原點，若 G 為 n 邊形$A_1A_2A_3\ldots A_n$的幾何中心，其充要條件為$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{n}\left(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_n}\right)$。

證明：$\frac{1}{n}\left(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_n}\right)=\frac{1}{n}\left((x_1,y_1)+(x_2,y_2)+\cdots+(x_n,y_n)\right)$

$$=\frac{1}{n}\left((x_1+x_2+\cdots+x_n),(y_1+y_2+\cdots+y_n)\right)=\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n},\frac{y_1+y_2+\cdots+y_n}{n}\right)$$

$$=\overrightarrow{OG}$$

二、 n 個正三角形的 Echois 三角形

(一) 四個正三角形的 Echois 三角形

設G_i為正三角形$\triangle A_iB_iC_i$、$i=1\sim4$ 的重心，

G_A、G_B、G_C分別為四邊形$A_1A_2A_3A_4$、$B_1B_2B_3B_4$、$C_1C_2C_3C_4$之幾何中心

若 G 為$\triangle G_AG_BG_C$的重心，則

(1) G 為$G_1G_2G_3G_4$的幾何中心

(2)$\triangle G_AG_BG_C$為一個正三角形

證明：

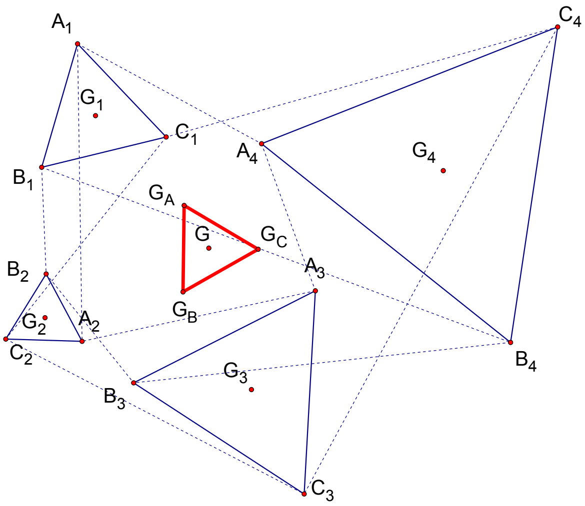


圖 4-8

1. 設 O 為原點，根據四邊形的幾何中心性質

$$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OG_A}+\overrightarrow{OG_B}+\overrightarrow{OG_C})$$

$$=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{4}(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_3}+\overrightarrow{OA_4})+\frac{1}{4}(\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OB_2}+\overrightarrow{OB_3}+\overrightarrow{OB_4})+\frac{1}{4}(\overrightarrow{OC_1}+\overrightarrow{OC_2}+\overrightarrow{OC_3}+\overrightarrow{OC_4})\right]$$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OC_1})+\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OB_2}+\overrightarrow{OC_2})+\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA_3}+\overrightarrow{OB_3}+\overrightarrow{OC_3})+\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA_4}+\overrightarrow{OB_4}+\overrightarrow{OC_4})\right]$$

$$=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OG_1}+\overrightarrow{OG_2}+\overrightarrow{OG_3}+\overrightarrow{OG_4}\right)$$

所以 G 亦爲四邊形$G_1G_2G_3G_4$的幾何中心

2. 因爲$\Delta A_1B_1C_1$、$\Delta A_2B_2C_2$、$\Delta A_3B_3C_3$、 $\Delta A_4B_4C_4$爲正三角形，所以

$$\overrightarrow{GG_B}=\overrightarrow{OG_B}-\overrightarrow{OG}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OB_2}+\overrightarrow{OB_3}+\overrightarrow{OB_4})-\frac{1}{4}(\overrightarrow{OG_1}+\overrightarrow{OG_2}+\overrightarrow{OG_3}+\overrightarrow{OG_4})$$

$$=\frac{1}{4}(\overrightarrow{G_1B_1}+\overrightarrow{G_2B_2}+\overrightarrow{G_3B_3}+\overrightarrow{G_4B_4})=\frac{1}{4}(\overrightarrow{G_1A_1}\,e^{i\frac{2}{3}\pi}+\overrightarrow{G_2A_2}\,e^{i\frac{2}{3}\pi}+\overrightarrow{G_3A_3}\,e^{i\frac{2}{3}\pi}+\overrightarrow{G_4A_4}\,e^{i\frac{2}{3}\pi})$$

$$=\frac{1}{4}(\overrightarrow{G_1A_1}+\overrightarrow{G_2A_2}+\overrightarrow{G_3A_3}+\overrightarrow{G_4A_4})e^{i\frac{2}{3}\pi}$$

$$=\left[\frac{1}{4}(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_3}+\overrightarrow{OA_4})-\frac{1}{4}(\overrightarrow{OG_1}+\overrightarrow{OG_2}+\overrightarrow{OG_3}+\overrightarrow{OG_4})\right]e^{i\frac{2}{3}\pi}$$

$=(\overrightarrow{OG_A}-\overrightarrow{OG})\,e^{i\frac{2}{3}\pi}=\overrightarrow{GG_A}e^{i\frac{2}{3}\pi}$，同理$\overrightarrow{GG_C}=\overrightarrow{GG_A}e^{i\frac{4}{3}\pi}$。

從上述可知，若以 G 爲旋轉中心，將G_A旋轉 120 度可得G_B點，旋轉 240 度可得G_C點，換句話說，$\Delta\, G_AG_BG_C$就是一個正三角形。

(二)五個正三角形的 Echois 三角形

設G_i爲$\Delta\, A_iB_iC_i$、$i=1\sim5$ 的重心，

G_A、G_B、G_C分別爲五邊形$A_1A_2A_3A_4A_5$、$B_1B_2B_3B_4B_5$、$C_1C_2C_3C_4C_5$之幾何中心

若 G 爲$\Delta\, G_AG_BG_C$的重心，則

(1)G 爲$G_1G_2G_3G_4G_5$的幾何中心

(2)$\Delta\, G_AG_BG_C$爲一個正三角形

證明：

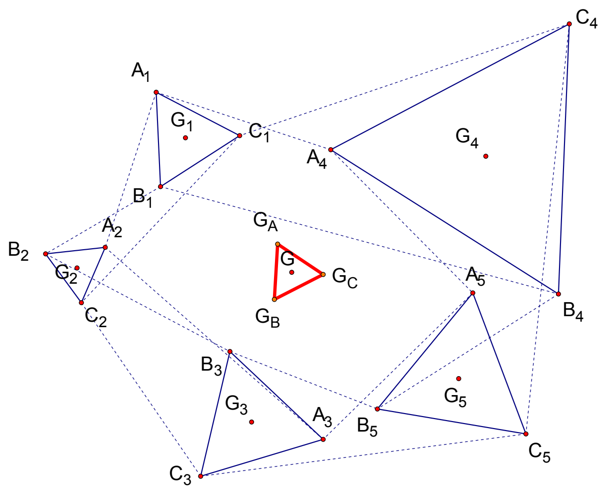


圖 4-9

1. 設 O 爲原點，根據五邊形的幾何中心性質

$$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OG_A}+\overrightarrow{OG_B}+\overrightarrow{OG_C})$$

$$=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{5}(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_3}+\overrightarrow{OA_4}+\overrightarrow{OA_5})+(\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OB_2}+\overrightarrow{OB_3}+\overrightarrow{OB_4}+\overrightarrow{OB_5})+\frac{1}{5}(\overrightarrow{OC_1}+\overrightarrow{OC_2}+\overrightarrow{OC_3}+\overrightarrow{OC_4}+\overrightarrow{OC_5})\right]$$

$$=\frac{1}{5}\left[\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OC_1})+\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OB_2}+\overrightarrow{OC_2})+\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA_3}+\overrightarrow{OB_3}+\overrightarrow{OC_3})+\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA_4}+\overrightarrow{OB_4}+\overrightarrow{OC_4})+\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA_5}+\overrightarrow{OB_5}+\overrightarrow{OC_5})\right]$$

$$=\frac{1}{5}\left(\overrightarrow{OG_1}+\overrightarrow{OG_2}+\overrightarrow{OG_3}+\overrightarrow{OG_4}+\overrightarrow{OG_5}\right)$$

所以 G 亦爲$\triangle G_1G_2G_3G_4G_5$的幾何中心

2. 因爲$\triangle A_1B_1C_1$、$\triangle A_2B_2C_2$、$\triangle A_3B_3C_3$、$\triangle A_4B_4C_4$、$\triangle A_5B_5C_5$爲正三角形

所以

$$\overrightarrow{GG_B}=\overrightarrow{OG_B}-\overrightarrow{OG}$$

$$=\frac{1}{5}(\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OB_2}+\overrightarrow{OB_3}+\overrightarrow{OB_4}+\overrightarrow{OB_5})-\frac{1}{5}(\overrightarrow{OG_1}+\overrightarrow{OG_2}+\overrightarrow{OG_3}+\overrightarrow{OG_4}+\overrightarrow{OG_5})$$

$$=\frac{1}{5}(\overrightarrow{G_1B_1}+\overrightarrow{G_2B_2}+\overrightarrow{G_3B_3}+\overrightarrow{G_4B_4}+\overrightarrow{G_5B_5})$$

$$=\frac{1}{5}(\overrightarrow{G_1A_1}\,e^{i\frac{2}{3}\pi}+\overrightarrow{G_2A_2}\,e^{i\frac{2}{3}\pi}+\overrightarrow{G_3A_3}\,e^{i\frac{2}{3}\pi}+\overrightarrow{G_4A_4}\,e^{i\frac{2}{3}\pi}+\overrightarrow{G_5A_5}\,e^{i\frac{2}{3}\pi})$$

$$=\frac{1}{5}(\overrightarrow{G_1A_1}+\overrightarrow{G_2A_2}+\overrightarrow{G_3A_3}+\overrightarrow{G_4A_4}+\overrightarrow{G_5A_5})e^{i\frac{2}{3}\pi}$$

$$=\left[\frac{1}{5}(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_3}+\overrightarrow{OA_4}+\overrightarrow{OA_5})-\frac{1}{5}\left(\overrightarrow{OG_1}+\overrightarrow{OG_2}+\overrightarrow{OG_3}+\overrightarrow{OG_4}+\overrightarrow{OG_5}\right)\right]e^{i\frac{2}{3}\pi}$$

$=(\overrightarrow{OG_A}-\overrightarrow{OG})\,e^{i\frac{2}{3}\pi}=\overrightarrow{GG_A}e^{i\frac{2}{3}\pi}$，同理$\overrightarrow{GG_C}=\overrightarrow{GG_A}e^{i\frac{4}{3}\pi}$。

從上述可知，若以 G 為旋轉中心，將G_A旋轉 120 度可得G_B點，將G_A旋轉 240 度可得G_C點，換句話說，$\Delta G_A G_B G_C$就是一個正三角形。

(三) m 個正三角形的 Echois 三角形

設G_i為正三角形$\Delta A_i B_i C_i$、$i = 1\sim m$的重心

G_A、G_B、G_C分別為m 邊形$A_1 A_2 A_3 \dots A_m$、$B_1 B_2 B_3 \dots B_m$、$C_1 C_2 C_3 \dots C_m$之幾何中心

若 G 為$\Delta G_A G_B G_C$的重心，則

(1) G 為$G_1 G_2 G_3 \dots G_m$的重心

(2)$\Delta G_A G_B G_C$為一個正三角形

證明：

1. 設 O 為原點，根據 m 邊形的幾何中心性質

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OG_A} + \overrightarrow{OG_B} + \overrightarrow{OG_C}) = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{m}\left(\sum_{k=1}^{m} \overrightarrow{OA_k}\right) + \frac{1}{m}\left(\sum_{k=1}^{m} \overrightarrow{OB_k}\right) + \frac{1}{m}\left(\sum_{k=1}^{m} \overrightarrow{OC_k}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{m}\left[\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{m}\left(\overrightarrow{OA_k} + \overrightarrow{OB_k} + \overrightarrow{OC_k}\right)\right] = \frac{1}{m}\left(\overrightarrow{OG_1} + \overrightarrow{OG_2} + \overrightarrow{OG_3} + \cdots + \overrightarrow{OG_m}\right)$$

所以 G 亦為m 邊形$G_1 G_2 G_3 \dots G_m$的幾何中心

2. 因為$\Delta A_1 B_1 C_1$、$\Delta A_2 B_2 C_2$、$\Delta A_3 B_3 C_3 \dots \dots \Delta A_m B_m C_m$為正三角形，所以

$$\overrightarrow{GG_B} = \overrightarrow{OG_B} - \overrightarrow{OG}$$

$$= \frac{1}{m}\left(\sum_{k=1}^{m} \overrightarrow{OB_k}\right) - \frac{1}{m}\left(\sum_{k=1}^{m} \overrightarrow{OG_k}\right) = \frac{1}{m}\left(\sum_{k=1}^{m} \overrightarrow{G_k B_k}\right) = \frac{1}{m}\left(\sum_{k=1}^{m} \overrightarrow{G_k A_k}\right) e^{i\frac{2}{3}\pi}$$

$$= \left[\frac{1}{m}\left(\sum_{k=1}^{m} \overrightarrow{OA_k}\right) - \frac{1}{m}\left(\sum_{k=1}^{m} \overrightarrow{OG_k}\right)\right] e^{i\frac{2}{3}\pi}$$

$$= (\overrightarrow{OG_A} - \overrightarrow{OG})\, e^{i\frac{2}{3}\pi} = \overrightarrow{GG_A} e^{i\frac{2}{3}\pi}$$，同理$\overrightarrow{GG_C} = \overrightarrow{GG_A} e^{i\frac{4}{3}\pi}$。

從上述可知，若以 G 為旋轉中心，將G_A旋轉 120 度可得G_B點，旋轉 240 度可得G_C點，換句話說，$\Delta G_A G_B G_C$就是一個正三角形。

上述結果，我們可確定在平面上任意 m 個正三角形的 Echois 三角形都會是正三角形，那麼如果是正方形、正五邊形…會不會也是呢？

三、 正方形、正五邊形的 Echois 圖形

透過 GSP 的動態幾何實驗，我們嘗試 2 個、3 個、4 個、5 個正方形的 Echois 四邊形，結果發現都是正方形。如下圖

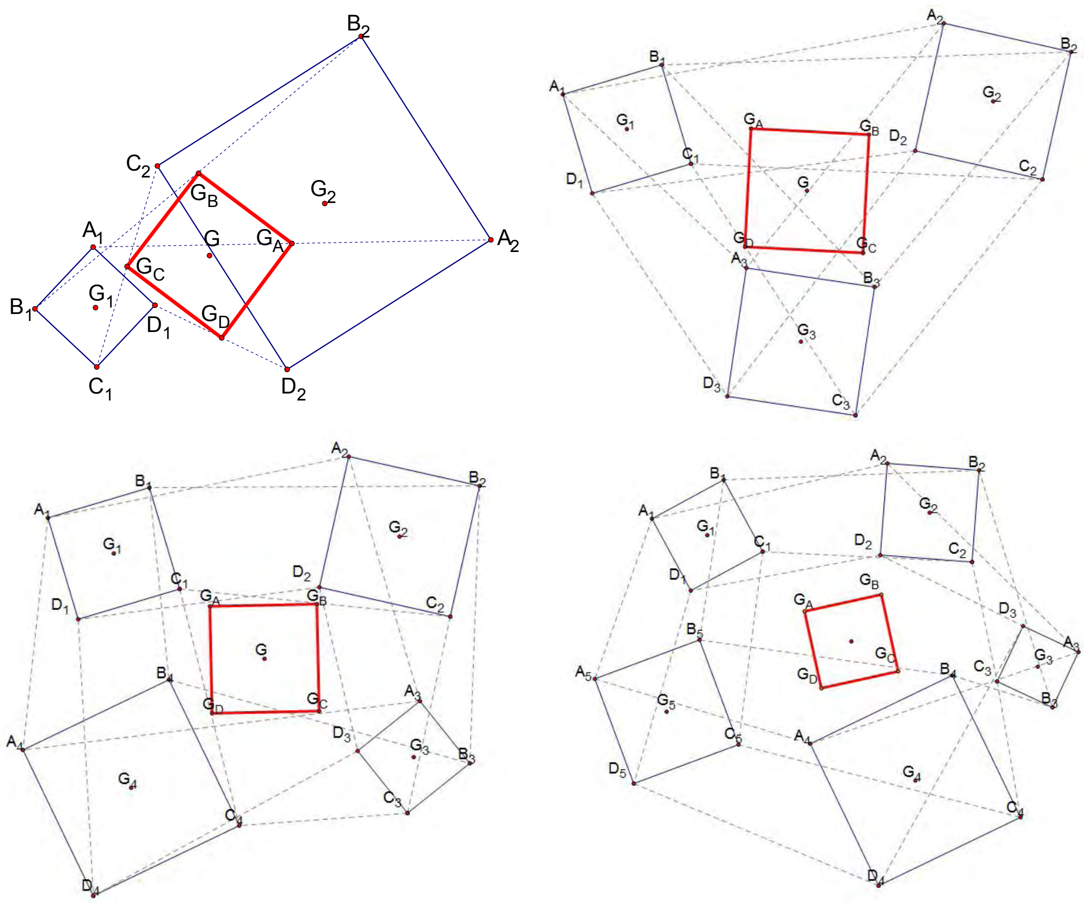


圖 4-10

所以我們就嘗試直接證明

(一) m 個正方形的 Echois 四邊形

設G_i為正方形$A_iB_iC_iD_i$的幾何中心，$i = 1 \sim m$

G_A、G_B、G_C、G_D分別為m 邊形$A_1A_2A_3 \ldots A_m$、$B_1B_2B_3 \ldots B_m$、$C_1C_2C_3 \ldots C_m$

、$D_1D_2D_3 \ldots D_m$的幾何中心。

若 G 為 四邊形 $G_AG_BG_CG_D$的重心，則

(1)G 為$G_1G_2G_3 \ldots G_m$的幾何中心

(2)四邊形$G_AG_BG_CG_D$為一個正方形

證明：

1. 設 O 為原點，根據幾何中心性質

$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{OG_A}+\overrightarrow{OG_B}+\overrightarrow{OG_C}+\overrightarrow{OG_D})$

$=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{m}(\sum_{k=1}^{m}\overrightarrow{OA_k})+\frac{1}{m}(\sum_{k=1}^{m}\overrightarrow{OB_k})+\frac{1}{m}(\sum_{k=1}^{m}\overrightarrow{OC_k})+\frac{1}{m}(\sum_{k=1}^{m}\overrightarrow{OD_k})\right]$

$=\frac{1}{m}\left[\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{4}(\overrightarrow{OA_k}+\overrightarrow{OB_k}+\overrightarrow{OC_k}+\overrightarrow{OD_k})\right]$ $=\frac{1}{m}(\overrightarrow{OG_1}+\overrightarrow{OG_2}+\overrightarrow{OG_3}+\cdots+\overrightarrow{OG_m})$

所以 G 亦為m 邊形$G_1G_2G_3\dots G_m$的幾何中心。

2. 因為有 m 個正方形，所以

$\overrightarrow{GG_B}=\overrightarrow{OG_B}-\overrightarrow{OG}$

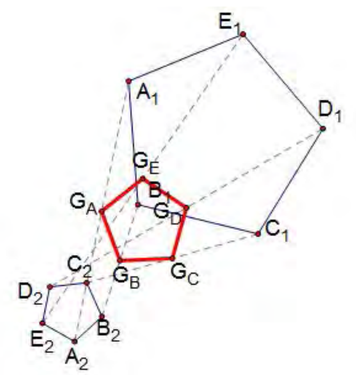
$=\frac{1}{m}(\sum_{k=1}^{m}\overrightarrow{OB_k})-\frac{1}{m}(\sum_{k=1}^{m}\overrightarrow{OG_k})$ $=\frac{1}{m}(\sum_{k=1}^{m}\overrightarrow{G_kB_k})=\frac{1}{m}(\sum_{k=1}^{m}\overrightarrow{G_kA_k})e^{i\frac{1}{2}\pi}$

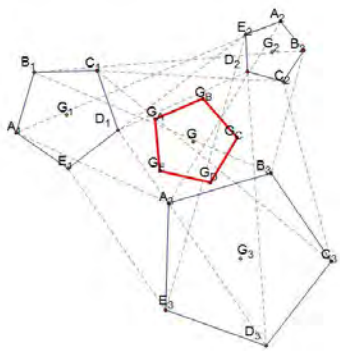
$=\left[\frac{1}{m}(\sum_{k=1}^{m}\overrightarrow{OA_k})-\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\overrightarrow{OG_k}\right]e^{i\frac{1}{2}\pi}$ $=(\overrightarrow{OG_A}-\overrightarrow{OG})e^{i\frac{1}{2}\pi}=\overrightarrow{GG_A}e^{i\frac{1}{2}\pi}$

$=\overrightarrow{GG_A}e^{i\frac{1}{2}\pi}$，同理$\overrightarrow{GG_C}=\overrightarrow{GG_A}e^{i\pi}$、$\overrightarrow{GG_D}=\overrightarrow{GG_A}e^{i\frac{3}{2}\pi}$。

從上述可知，若以 G 為旋轉中心，將G_A旋轉 90 度可得G_B點，旋轉 180 度可得G_C點，旋轉 270 度可得G_D，換句話說，$G_AG_BG_CG_D$就是一個正方形。

同樣的，我們也發現 2 個、3 個、4 個、5 個正五邊形的 Echois 五邊形也都是正五邊形。如下圖：





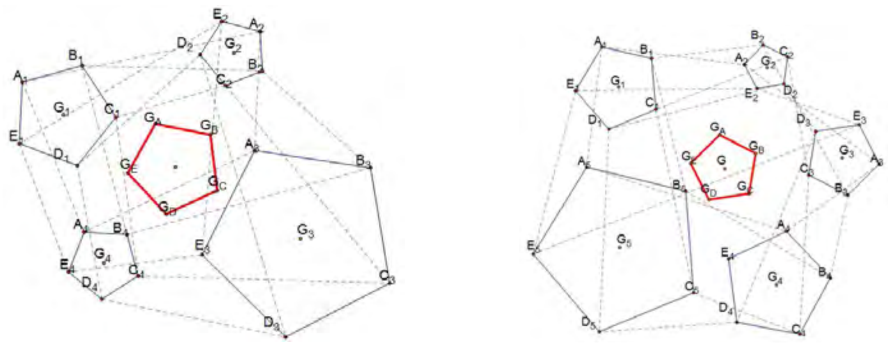


圖 4-11

所以提出大膽的猜測：**m** 個正五邊形的 Echois 五邊形一定也是正五邊形。

(二) m 個正五邊形的 Echois 五邊形

設G_i爲正五邊形$A_iB_iC_iD_iE_i$的幾何中心，$i = 1 \sim m$
G_A、G_B、G_C、G_D、G_E分別爲m 邊形$A_1A_2A_3 \dots A_m$、$B_1B_2B_3 \dots B_m$、$C_1C_2C_3 \dots C_m$
、$D_1D_2D_3 \dots D_m$、$E_1E_2E_3 \dots E_m$的幾何中心。若 G 爲五邊形 $G_AG_BG_CG_DG_E$的重心，則
(1)G 爲$G_1G_2G_3 \dots G_m$的幾何中心
(2) $G_AG_BG_CG_DG_E$爲一個正五邊形

證明：

1. 設 O 爲原點，根據幾何中心性質

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{5}(\overrightarrow{OG_A} + \overrightarrow{OG_B} + \overrightarrow{OG_C} + \overrightarrow{OG_D} + \overrightarrow{OG_E})$$

$$=\frac{1}{5}\left[\frac{1}{m}(\textstyle\sum_{k=1}^{m}\overrightarrow{OA_k}) + \frac{1}{m}(\sum_{k=1}^{m}\overrightarrow{OB_k}) + \frac{1}{m}(\sum_{k=1}^{m}\overrightarrow{OC_k}) + \frac{1}{m}(\sum_{k=1}^{m}\overrightarrow{OD_k}) + \frac{1}{m}(\sum_{k=1}^{m}\overrightarrow{OE_k})\right]$$

$$=\frac{1}{m}\left[\textstyle\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{5}(\overrightarrow{OA_k} + \overrightarrow{OB_k} + \overrightarrow{OC_k} + \overrightarrow{OD_k} + \overrightarrow{OE_k})\right]$$

$$=\frac{1}{m}(\overrightarrow{OG_1} + \overrightarrow{OG_2} + \overrightarrow{OG_3} + \cdots + \overrightarrow{OG_m})$$ 所以 G 亦爲m 邊形$G_1G_2G_3 \dots G_m$的幾何中心。

2. 因爲有 m 個正五邊形，所以

$$\overrightarrow{GG_B} = \overrightarrow{OG_B} - \overrightarrow{OG}$$

$$= \frac{1}{m}(\textstyle\sum_{k=1}^{m}\overrightarrow{OB_k}) - \frac{1}{m}(\sum_{k=1}^{m}\overrightarrow{OG_k})$$

$$=\frac{1}{m}(\textstyle\sum_{k=1}^{m}\overrightarrow{G_kB_k}) = \frac{1}{m}(\sum_{k=1}^{m}\overrightarrow{G_kA_k})\, e^{i\frac{2}{5}\pi}$$

$=\left[\frac{1}{m}\left(\sum_{k=1}^{m}\overrightarrow{OA_k}\right)-\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\overrightarrow{OG_k}\right]e^{i\frac{2}{5}\pi}$

$=(\overrightarrow{OG_A}-\overrightarrow{OG})\ e^{i\frac{2}{5}\pi}$

$=\overrightarrow{GG_A}e^{i\frac{2}{5}\pi}$，同理$\overrightarrow{GG_C}=\overrightarrow{GG_A}e^{i\frac{4}{5}\pi}$、$\overrightarrow{GG_D}=\overrightarrow{GG_A}e^{i\frac{6}{5}\pi}$、$\overrightarrow{GG_E}=\overrightarrow{GG_A}e^{i\frac{8}{5}\pi}$

從上述可知，若以 G 爲旋轉中心，將G_A旋轉 72 度可得G_B點，旋轉 144 度可得G_C點，旋轉 216 度可得G_D，旋轉 288 度可得G_E，換句話說，$G_AG_BG_CG_DG_E$就是一個正五邊形。

根據前面的結果，我們大膽的挑戰 m 個正 n 邊形的 Echois 圖形，如下。

四、 m 個正 n 邊形的 Echois n 邊形

設G_k爲正 n 邊形$A_{k,1}A_{k,2}A_{k,3}\ldots A_{k,n}$的幾何中心，$k=1\sim m$

G'_j爲 m 邊形$A_{1,j}A_{2,j}A_{3,j}\ldots A_{m,j}$的幾何中心，$j=1\sim n$

若 G 爲 n 邊形$G'_1G'_2G'_3\ldots G'_n$的幾何中心，則

(1) G 爲m 邊形 $G_1G_2G_3\ldots G_m$的幾何中心

(2) n 邊形$G'_1G'_2G'_3\ldots G'_n$爲正 n 邊形

證明：

1. 設 O 爲原點，根據幾何中心性質

$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{n}(\overrightarrow{OG'_1}+\overrightarrow{OG'_2}+\overrightarrow{OG'_3}+\cdots+\overrightarrow{OG'_n})$

$$=\frac{1}{n}\left(\begin{array}{c}\frac{1}{m}\left(\overrightarrow{OA_{1,1}}+\overrightarrow{OA_{2,1}}+\overrightarrow{OA_{3,1}}+\cdots+\overrightarrow{OA_{m,1}}\right)+\\ \frac{1}{m}\left(\overrightarrow{OA_{1,2}}+\overrightarrow{OA_{2,2}}+\overrightarrow{OA_{3,2}}+\cdots+\overrightarrow{OA_{m,2}}\right)+\\ \frac{1}{m}\left(\overrightarrow{OA_{1,3}}+\overrightarrow{OA_{2,3}}+\overrightarrow{OA_{3,3}}+\cdots+\overrightarrow{OA_{m,3}}\right)+\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+\\ \frac{1}{m}(\overrightarrow{OA_{1,n}}+\overrightarrow{OA_{2,n}}+\overrightarrow{OA_{3,n}}+\cdots+\overrightarrow{OA_{m,n}})\end{array}\right)$$

$$=\frac{1}{m}\left(\begin{array}{c}\frac{1}{n}(\overrightarrow{OA_{1,1}}+\overrightarrow{OA_{1,2}}+\overrightarrow{OA_{1,3}}+\cdots+\overrightarrow{OA_{1,n}})+\\ \frac{1}{n}(\overrightarrow{OA_{2,1}}+\overrightarrow{OA_{2,2}}+\overrightarrow{OA_{2,3}}+\cdots+\overrightarrow{OA_{2,n}})+\\ \frac{1}{n}(\overrightarrow{OA_{3,1}}+\overrightarrow{OA_{3,2}}+\overrightarrow{OA_{3,3}}+\cdots+\overrightarrow{OA_{3,n}})+\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+\\ \frac{1}{n}(\overrightarrow{OA_{m,1}}+\overrightarrow{OA_{m,2}}+\overrightarrow{OA_{m,3}}+\cdots+\overrightarrow{OA_{m,n}})\end{array}\right)$$

$=\frac{1}{m}\left(\overrightarrow{OG_1}+\overrightarrow{OG_2}+\overrightarrow{OG_3}+\cdots+\overrightarrow{OG_m}\right)$ 所以 G 亦爲m 邊形$G_1G_2G_3\ldots G_m$的幾何中心

2. 因爲有 m 個正 n 邊形$A_{k,1}A_{k,2}A_{k,3}\ldots A_{k,n}$，所以

$\overrightarrow{G_kA_{k,j+1}}=\overrightarrow{G_kA_{k,1}}\cdot e^{i\frac{2j\pi}{n}}$，其中 $k=1\sim m$ ，$j=1\sim n$。

3. $\overrightarrow{GG'_{k+1}}=\overrightarrow{OG'_{k+1}}-\overrightarrow{OG}$

$$=\frac{1}{m}\left[\sum_{k=1}^{m}\overrightarrow{OA_{k,j+1}}\right]-\frac{1}{m}\left[\sum_{k=1}^{m}\overrightarrow{OG_k}\right]$$

$$=\frac{1}{m}\left[\sum_{k=1}^{m}\overrightarrow{G_kA_{k,j+1}}\right]=\frac{1}{m}\left[\sum_{k=1}^{m}\overrightarrow{G_kA_{k,1}}\cdot e^{i\frac{2j\pi}{n}}\right]=\frac{1}{m}\left[\sum_{k=1}^{m}\overrightarrow{G_kA_{k,1}}\right]\cdot e^{i\frac{2j\pi}{n}}$$

$$=\left(\frac{1}{m}\left[\sum_{k=1}^{m}\overrightarrow{OA_{k,1}}\right]-\frac{1}{m}\left[\sum_{k=1}^{m}\overrightarrow{OG_k}\right]\right)\cdot e^{i\frac{2j\pi}{n}}=\left(\overrightarrow{OG'_1}-\overrightarrow{OG}\right)\cdot e^{i\frac{2j\pi}{n}}=\overrightarrow{GG'_1}\cdot e^{i\frac{2j\pi}{n}}$$

對所有的 $j=1\sim n$ 均成立

所以n 邊形$G'_1G'_2G'_3\ldots G'_n$會是一個正 n 邊形。

截至目前爲止，我們都是針對正多邊形來討論 Echois 多邊形的特性，如果不是正多邊形呢？我們先從簡單的相似三角形著手。

五、 相似多邊形的 Echois 多邊形

(一)三個相似三角形的 Echois 三角形

設G_1、G_2、G_3分別爲任意相似三角形$\triangle A_1B_1C_1$、$\triangle A_2B_2C_2$、$\triangle A_3B_3C_3$的重心

G_A、G_B、G_C分別爲$\triangle A_1A_2A_3$、$\triangle B_1B_2B_3$、$\triangle C_1C_2C_3$的重心

若 G 爲$\triangle G_AG_BG_C$，則

(1) G 爲$\triangle G_1G_2G_3$的重心

(2) $\triangle G_AG_BG_C$也是相似三角形

證明：

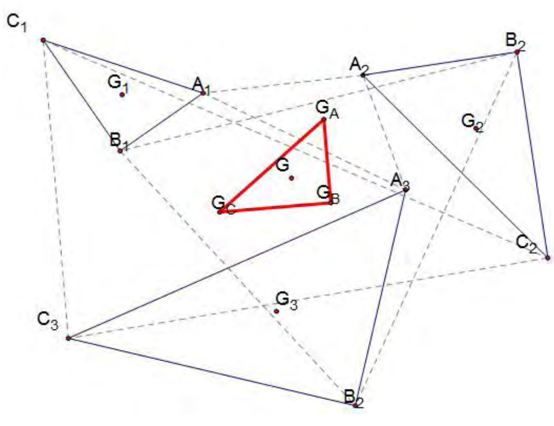


圖 4-12

1. 設 O 爲原點，根據三角形的重心性質

$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OG_A}+\overrightarrow{OG_B}+\overrightarrow{OG_C})$

$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_3}\right)+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OB_2}+\overrightarrow{OB_3}\right)+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OC_1}+\overrightarrow{OC_2}+\overrightarrow{OC_3}\right)\right)$

$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OC_1}\right)+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OB_2}+\overrightarrow{OC_2}\right)+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA_3}+\overrightarrow{OB_3}+\overrightarrow{OC_3}\right)\right)$

$=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OG_1}+\overrightarrow{OG_2}+\overrightarrow{OG_3}\right)$ 所以 G 亦爲$\triangle G_1G_2G_3$的重心

2. 因爲$\triangle A_1B_1C_1$、$\triangle A_2B_2C_2$、$\triangle A_3B_3C_3$爲相似三角形

設其中$\frac{|\overrightarrow{B_1C_1}|}{|\overrightarrow{B_1A_1}|}=\frac{|\overrightarrow{B_2C_2}|}{|\overrightarrow{B_2A_2}|}=\frac{|\overrightarrow{B_3C_3}|}{|\overrightarrow{B_3A_3}|}=r$且$\angle A_1B_1C_1=\angle A_2B_2C_2=\angle A_3B_3C_3=\theta$

所以$\overrightarrow{B_1C_1}=\overrightarrow{B_1A_1}re^{i\theta}$ $\overrightarrow{B_2C_2}=\overrightarrow{B_2A_2}re^{i\theta}$ $\overrightarrow{B_3C_3}=\overrightarrow{B_3A_3}re^{i\theta}$

3. $\overrightarrow{G_BG_c}=\overrightarrow{OG_c}-\overrightarrow{OG_B}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OC_1}+\overrightarrow{OC_2}+\overrightarrow{OC_3})-\frac{1}{3}(\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OB_2}+\overrightarrow{OB_3})$

$=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OC_1}-\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OC_2}-\overrightarrow{OB_2}+\overrightarrow{OC_3}-\overrightarrow{OB_3})$ $=\frac{1}{3}(\overrightarrow{B_1C_1}+\overrightarrow{B_2C_2}+\overrightarrow{B_3C_3})$

$=\frac{1}{3}(\overrightarrow{B_1A_1}re^{i\theta}+\overrightarrow{B_2A_2}re^{i\theta}+\overrightarrow{B_3A_3}re^{i\theta})$ $=\frac{1}{3}(\overrightarrow{B_1A_1}+\overrightarrow{B_2A_2}+\overrightarrow{B_3A_3})re^{i\theta}$

$=[\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_3})-\frac{1}{3}(\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OB_2}+\overrightarrow{OB_3})]re^{i\theta}$ $=(\overrightarrow{OG_A}-\overrightarrow{OG_B})re^{i\theta}$

$=\overrightarrow{G_BG_A}re^{i\theta}$ $\because\frac{|\overrightarrow{G_BG_C}|}{|\overrightarrow{G_BG_A}|}=\frac{|\overrightarrow{B_1C_1}|}{|\overrightarrow{B_1A_1}|}=r$且$\angle G_AG_BG_C=\angle A_1B_1C_1=\theta$（SAS 相似性質）

所以$\triangle G_AG_BG_C\sim\triangle A_iB_iC_i$（i=1,2,3）

(二) m 個相似 n 邊形的 Echois 多邊形

設G_k爲相似 n 邊形$A_{k,1}A_{k,2}A_{k,3}\ldots A_{k,n}$的幾何中心，$k=1\sim m$

G'_j爲 m 邊形$A_{1,j}A_{2,j}A_{3,j}\ldots A_{m,j}$的幾何中心，$j=1\sim n$

若 G 爲 n 邊形$G'_1G'_2G'_3\ldots G'_n$的幾何中心，則

(1)G 爲m 邊形 $G_1G_2G_3\ldots G_m$的幾何中心

(2)$G'_1G'_2G'_3\ldots G'_n$爲相似 n 邊形

證明：

1. 設 O 爲原點，根據幾何中心性質

$$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{n}(\overrightarrow{OG'_1}+\overrightarrow{OG'_2}+\overrightarrow{OG'_3}+\cdots+\overrightarrow{OG'_n})$$

$$=\frac{1}{n}\begin{pmatrix}\frac{1}{m}\left(\overrightarrow{OA_{1,1}}+\overrightarrow{OA_{2,1}}+\overrightarrow{OA_{3,1}}+\cdots+\overrightarrow{OA_{m,1}}\right)+\\ \frac{1}{m}\left(\overrightarrow{OA_{1,2}}+\overrightarrow{OA_{2,2}}+\overrightarrow{OA_{3,2}}+\cdots+\overrightarrow{OA_{m,2}}\right)+\\ \frac{1}{m}\left(\overrightarrow{OA_{1,3}}+\overrightarrow{OA_{2,3}}+\overrightarrow{OA_{3,3}}+\cdots+\overrightarrow{OA_{m,3}}\right)+\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+\\ \frac{1}{m}\left(\overrightarrow{OA_{1,n}}+\overrightarrow{OA_{2,n}}+\overrightarrow{OA_{3,n}}+\cdots+\overrightarrow{OA_{m,n}}\right)\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{m}\begin{pmatrix}\frac{1}{n}\left(\overrightarrow{OA_{1,1}}+\overrightarrow{OA_{1,2}}+\overrightarrow{OA_{1,3}}+\cdots+\overrightarrow{OA_{1,n}}\right)+\\ \frac{1}{n}\left(\overrightarrow{OA_{2,1}}+\overrightarrow{OA_{2,2}}+\overrightarrow{OA_{2,3}}+\cdots+\overrightarrow{OA_{2,n}}\right)+\\ \frac{1}{n}\left(\overrightarrow{OA_{3,1}}+\overrightarrow{OA_{3,2}}+\overrightarrow{OA_{3,3}}+\cdots+\overrightarrow{OA_{3,n}}\right)+\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+\\ \frac{1}{n}\left(\overrightarrow{OA_{m,1}}+\overrightarrow{OA_{m,2}}+\overrightarrow{OA_{m,3}}+\cdots+\overrightarrow{OA_{m,n}}\right)\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{m}\left(\overrightarrow{OG_1}+\overrightarrow{OG_2}+\overrightarrow{OG_3}+\cdots+\overrightarrow{OG_m}\right)$$

所以 G 亦爲m 邊形$G_1G_2G_3\ldots G_m$的幾何中心

2. 因爲有 m 個相似 n 邊形$A_{k,1}A_{k,2}A_{k,3}\ldots A_{k,n}$

所以 $\dfrac{\left|\overrightarrow{A_{k,j}A_{k,j+1}}\right|}{\left|\overrightarrow{A_{k,j}A_{k,j-1}}\right|}=r_j$且$\angle A_{k,j-1}A_{k,j}A_{k,j+1}=\theta_j$

則$\overrightarrow{A_{k,j}A_{k,j+1}}=\overrightarrow{A_{k,j}A_{k,j-1}}\cdot r_je^{i\theta_j}$ $k=1\sim m$ $j=1\sim n$。

3. $\overrightarrow{G'_jG'_{j+1}}=\overrightarrow{OG'_{j+1}}-\overrightarrow{OG'_j}$

$=\frac{1}{m}\left[\sum_{k=1}^{m}\overrightarrow{OA_{k,j+1}}\right]-\frac{1}{m}\left[\sum_{k=1}^{m}\overrightarrow{OA_{k,j}}\right]$ $=\frac{1}{m}\left[\sum_{k=1}^{m}\left(\overrightarrow{OA_{k,j+1}}-\overrightarrow{OA_{k,j}}\right)\right]$

$=\frac{1}{m}\left[\sum_{k=1}^{m}\overrightarrow{A_{k,j}A_{k,j+1}}\right]$ $=\frac{1}{m}\left[\sum_{k=1}^{m}\overrightarrow{A_{k,j}A_{k,j-1}}\cdot r_je^{i\theta_j}\right]$

$=\frac{1}{m}\left[\sum_{k=1}^{m}\left(\overrightarrow{OA_{k,j-1}}-\overrightarrow{OA_{k,j}}\right)\right]\cdot r_je^{i\theta_j}$

$=\left[\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\overrightarrow{OA_{k,j-1}}-\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\overrightarrow{OA_{k,j}}\right]\cdot r_je^{i\theta_j}$ $=\left[\overrightarrow{OG'_{j-1}}-\overrightarrow{OG'_j}\right]\cdot r_je^{i\theta_j}$ $=\overrightarrow{G'_jG'_{j-1}}\cdot r_je^{i\theta_j}$

則$\dfrac{\left|\overrightarrow{G'_jG'_{j+1}}\right|}{\left|\overrightarrow{G'_jG'_{j-1}}\right|}=r_j$ 兩邊夾角爲 θ_j， $j=1\sim n$，故 n 邊形 $G'_1G'_2G'_3\ldots G'_n$爲相似 n 邊形。

從上述我們不禁懷疑任意三角形是不是也可以呢？

(三) 三個任意三角形的 Echois 三角形

設G_1、G_2、G_3分別爲任意三角形$\triangle A_1B_1C_1$、$\triangle A_2B_2C_2$、$\triangle A_3B_3C_3$的重心
G_A、G_B、G_C分別爲$\triangle A_1A_2A_3$、$\triangle B_1B_2B_3$、$\triangle C_1C_2C_3$的重心
若 G爲$\triangle G_AG_BG_C$的重心，則 G也會是$\triangle G_1G_2G_3$的重心

證明：

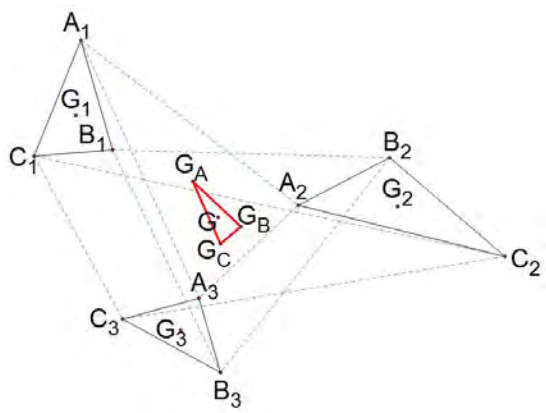


圖 4-13

1. 設 O 爲原點，根據三角形的重心性質

$$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OG_A}+\overrightarrow{OG_B}+\overrightarrow{OG_C})$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_3})+\frac{1}{3}(\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OB_2}+\overrightarrow{OB_3})+\frac{1}{3}(\overrightarrow{OC_1}+\overrightarrow{OC_2}+\overrightarrow{OC_3})\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OC_1})+\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OB_2}+\overrightarrow{OC_2})+\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA_3}+\overrightarrow{OB_3}+\overrightarrow{OC_3})\right)$$

$$=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OG_1}+\overrightarrow{OG_2}+\overrightarrow{OG_3})$$ 所以 G 亦爲$\triangle G_1G_2G_3$的重心

2. 從上圖來看，很顯然不相似圖形的 Echois 圖形與原圖形並無特別的關係。

   最後我們來看一些特殊有趣的發現。

六、 從 Echois到Napoleon

(一) 取點順序對 Echois 圖形的影響

在平面上給定三個任意正三角形，在其三個頂點中分別任取一點標上符號A_1、A_2、A_3作爲起始點，然後再依順(逆)時針標上符號B_1和C_1、B_2和C_2、B_3和C_3，得到$\triangle A_1B_1C_1$、

$\triangle A_2B_2C_2$、$\triangle A_3B_3C_3$；因為任取起始點不同，會產生 9 種 Echois 三角形，根據前面所證，這 9 種 Echois 三角形都會是正三角形，且 Echois 三角形的重心也是原三個正三角形重心連線所形成$\triangle G_1G_2G_3$的重心 G，故這 9 種 Echois 三角形的重心都會是同一點 G，如下圖。同理，對其他 m 個正 n 邊形的 Echois 圖形而言，取點順序不同就會得到大小不同的正 n 邊形，但其重心都會與 m 個正 n 邊形的重心連線所形成的 m 邊形的重心同一點。

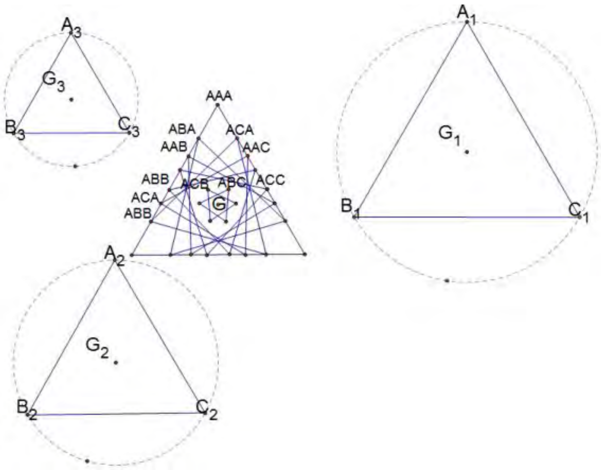
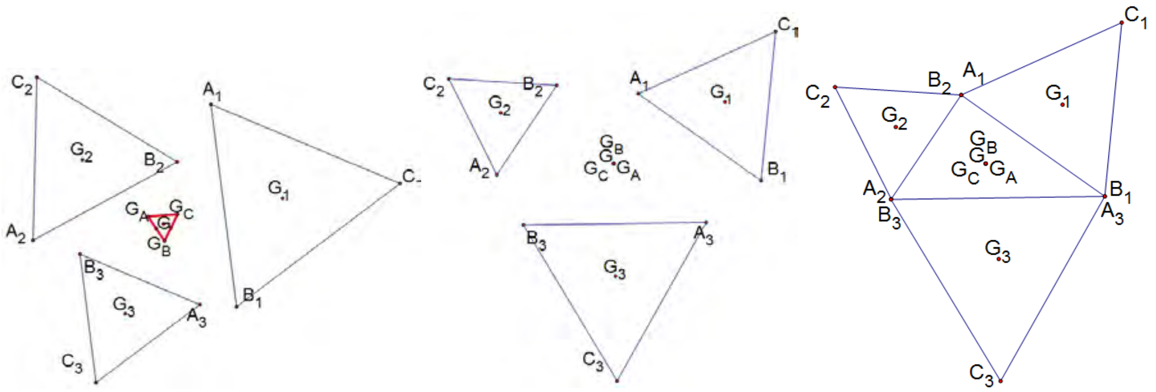


圖 6-1

(二) Echois 圖形退化成一點時



(1) (2) (3)

圖 6-2

如上圖 6-2-(3)，當三個正三角形的對應邊向量和$\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{A_2B_2}+\overrightarrow{A_3B_3}=\vec{0}$，根據前面所證，其 Echois 三角形會退化到與重心同一點，且將向量平移可構成一個封閉的三角形。

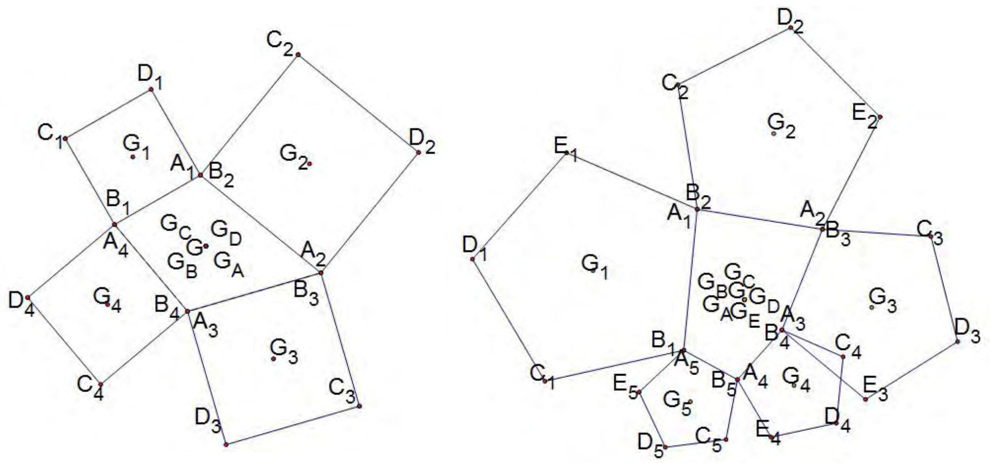


圖 6-3

同理在四個正方形（或五個正五邊形）時，若其對應邊向量和爲零時，其 Echois 圖形會退化到與重心爲同一點，且將向量平移可構成一個封閉的四邊形(或五邊形)，如上圖。這樣結果推廣到 m 個相似 n 邊形都成立。

(三) Napoleon三角形

從圖 6-2 可發現到 Echois 三角形退化到與重心爲同一點時，將原來三個正三角形的重心連接形成$\Delta G_1G_2G_3$竟變成一個正三角形，如下左圖，此時這正是文獻上所記載的Napoleon三角形。

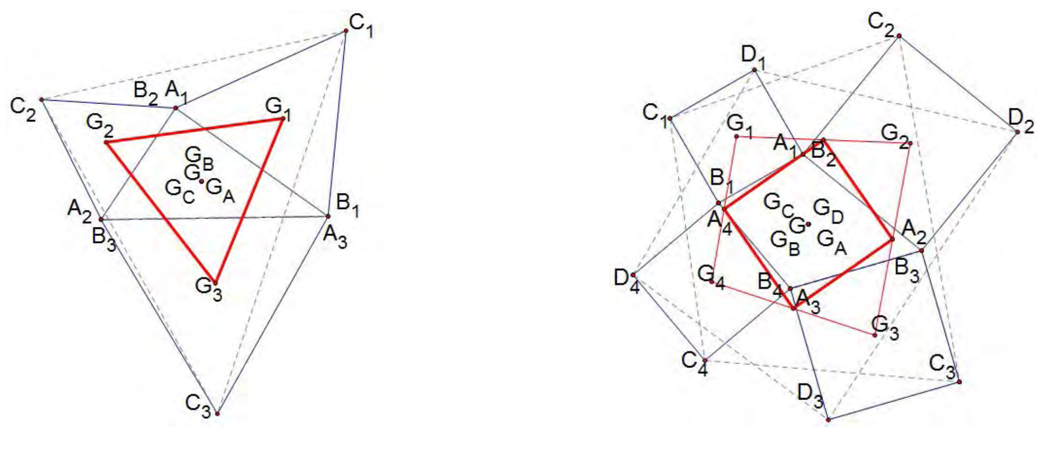


圖 6-4

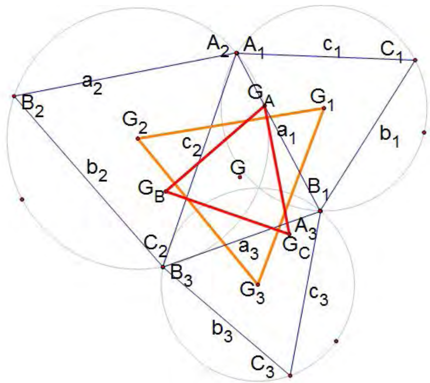
又如圖 6-3 左圖對四個正方形，當 Echois 四邊形退化到與重心爲同一點時，連接原四個正方形的重心所形成的四邊形$G_1G_2G_3G_4$，雖然不是正方形，但取其四邊中點連線所形成的四邊形竟也會是一個正方形，如上右圖，我們就稱它爲Napoleon四邊形。

事實上不一定要在 Echois 三角形退化成一點時，$\Delta G_1G_2G_3$才會是Napoleon三角形。只要在三個正三角形的三邊各任取一邊圍成三角形時，所得到的$\Delta G_1G_2G_3$都會是同一個 Napoleon 三角形，而其 Echois 三角形則會有 9 種類型變化(原 27 種經同類型合併後只有 9 種)。我們以三碼來表示這些類型，以及 Echois 三角形的變化，如下表。

類型	1	2	3	4	5	6	7	8	9
同類型	abc	acb	aab	aac	aba	aca	baa	caa	aaa
	bca	bac	bbc	bba	bcb	bab	cbb	abb	bbb
	cab	cba	cca	ccb	cac	cbc	acc	bcc	ccc
Echois 三角形的變化	與外 **Napoleon** 三角形完全重疊	與內 **Napoleon** 三角形完全重疊	6 個大小不同的正三角形						退化成一點

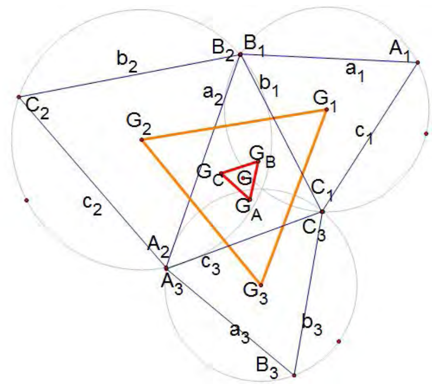
例如 aca

第一碼爲 a 表示第一個正$\triangle A_1B_1C_1$的$\overrightarrow{A_1B_1}$
第二碼爲 c 表示第二個正$\triangle A_2B_2C_2$的$\overrightarrow{C_2A_2}$
第三碼爲 a 表示第三個正$\triangle A_3B_3C_3$的$\overrightarrow{A_3B_3}$
aca 就是三個正三角形各取一邊
$\overrightarrow{A_1B_1}$、$\overrightarrow{C_2A_2}$、$\overrightarrow{A_3B_3}$所圍成的三角形。



例如 bac

第一碼爲 b 表示第一個正$\triangle A_1B_1C_1$的$\overrightarrow{B_1C_1}$
第二碼爲 a 表示第二個正$\triangle A_2B_2C_2$的$\overrightarrow{A_2B_2}$
第三碼爲 c 表示第三個正$\triangle A_3B_3C_3$的$\overrightarrow{C_3A_3}$
bac 就是三個正三角形各取一邊
$\overrightarrow{B_1C_1}$、$\overrightarrow{A_2B_2}$、$\overrightarrow{C_3A_3}$所圍成的三角形。



首先，在第 1 類 abc 型，爲什麼 Echois 三角形會與Napoleon 三角形完全重疊呢？

說明如下：如下圖，A_1和C_2，B_1和C_3，B_2和A_3分別互相疊合 ，此時

$$\overrightarrow{OG_1}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OC_1}\right)=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OC_2}+\overrightarrow{OC_3}+\overrightarrow{OC_1}\right)=\overrightarrow{OG_C}$$

同理$\overrightarrow{OG_2}=\overrightarrow{OG_A}$、$\overrightarrow{OG_3}=\overrightarrow{OG_B}$，故得Echois $\Delta G_AG_BG_C$與 Napoleon $\Delta G_1G_2G_3$完全重疊；又已知Echois 三角形爲正三角形，故Napoleon 爲正三角形。此爲外 Napoleon，內 Napoleon 亦同(即爲第 2 類型)。

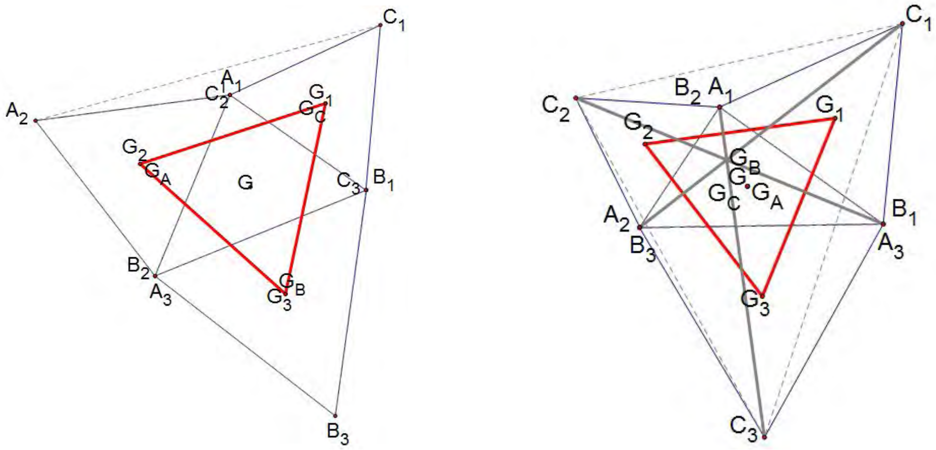


圖 6-5

在第 9 類的 aaa 型，如上右圖中，在$\triangle A_1A_3C_2$、$\triangle A_1C_1A_2$中，因爲 $\triangle A_1A_3C_2 \cong \triangle A_1C_1A_2$，所以$\overline{A_3C_2} = \overline{A_2C_1}$，

且$\overline{A_3C_2}$和$\overline{A_2C_1}$的夾角爲 120 度，故 $\overrightarrow{A_3C_2} = \overrightarrow{A_2C_1}e^{i\frac{2}{3}\pi}$、，同理 $\overrightarrow{A_1C_3} = \overrightarrow{A_2C_1}e^{i\frac{4}{3}\pi}$

$$\overrightarrow{GG_2} = \overrightarrow{OG_2} - \overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OG_2} - \overrightarrow{OG_A} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OB_2} + \overrightarrow{OC_2}\right) - \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OC_2}\right) - \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\overrightarrow{A_3C_2} = \frac{1}{3}\overrightarrow{A_2C_1}e^{i\frac{2}{3}\pi} = \frac{1}{3}\left[\left(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_3} + \overrightarrow{OC_1}\right) - \left(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3}\right)\right]e^{i\frac{2}{3}\pi}$$

$$= \frac{1}{3}\left[\left(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1}\right) - \left(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3}\right)\right]e^{i\frac{2}{3}\pi} = \overrightarrow{GG_1}e^{i\frac{2}{3}\pi}$$

同理$\overrightarrow{GG_3} = \overrightarrow{GG_1}e^{i\frac{4}{3}\pi}$ 。 從上述可知，若以 G 爲旋轉中心，將G_1旋轉 120 度可得G_2點，旋轉 240 度可得G_3點，換句話說，$\triangle G_1G_2G_3$就是一個正三角形。

接下來，我們來看Napoleon四邊形的情形。

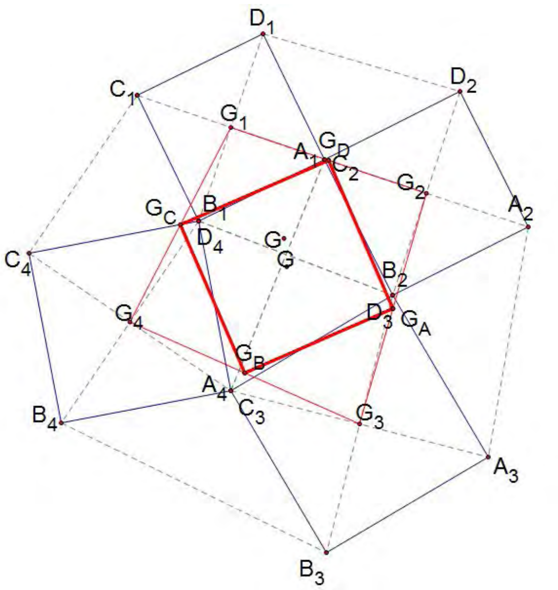


圖 6-6

如上圖，A_1和C_2，B_2和D_3，C_3和A_4，D_4和B_1分別疊合 。

此時$\overrightarrow{O\left(\frac{G_1+G_2}{2}\right)} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OG_1} + \overrightarrow{OG_2}\right)$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{OD_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OB_2} + \overrightarrow{OC_2} + \overrightarrow{OD_2}\right)\right]$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OD_4} + \overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{OD_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OD_3} + \overrightarrow{OC_2} + \overrightarrow{OD_2}\right)\right]$

$= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OD_1} + \overrightarrow{OD_2} + +\overrightarrow{OD_3} + \overrightarrow{OD_4}\right) + \left(\overrightarrow{OG_1} + \overrightarrow{OG_2}\right)\right]$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{OG_D} + \frac{1}{2}\overrightarrow{O\frac{G_1+G_2}{2}}$　　故得 $\overrightarrow{O\frac{G_1+G_2}{2}} = \overrightarrow{OG_D}$　　所以$G_D = \frac{G_1+G_2}{2}$，

同理$G_A = \frac{G_2+G_3}{2}$ 、$G_B = \frac{G_3+G_4}{2}$ 、$G_C = \frac{G_4+G_1}{2}$

故得Echois 四邊形$G_AG_BG_CG_D$與 Napoleon 四邊形$\left(\frac{G_1+G_2}{2}\right)\left(\frac{G_2+G_3}{2}\right)\left(\frac{G_3+G_4}{2}\right)\left(\frac{G_4+G_1}{2}\right)$完全重疊

又已知Echois 四邊形爲正方形，所以Napoleon 四邊形爲正方形。

在電腦動態幾何環境中，我們不斷地變換圖形，觀察 Echois 圖形與周圍的變化，除了退化情形的有趣現象，更發現其中所隱含的 Napoleon 圖形特殊情形，真是有趣。

伍、結論

我們從文獻上的 Echois 三角形與其複數證法引起一連串的實驗發現與推廣，並提出更簡單的向量證法得到下面幾個重要結論:

一、 在平面上三個任意正三角形$\Delta A_1B_1C_1$、$\Delta A_2B_2C_2$、$\Delta A_3B_3C_3$的 Echois 三角形爲正三角形，且具有下列特性：

(一).Echois 三角形的重心也是原三個正三角形重心連線所形成的三角形的重心。

(二).Echois 三角形的邊長與原三個正三角形的邊長和方位有關

其面積可以用下面式子表示：

$$\frac{\sqrt{3}}{36}\left|(\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{A_2B_2}+\overrightarrow{A_3B_3})\right|^2$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{36}(\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right|^2+\left|\overrightarrow{A_2B_2}\right|^2+\left|\overrightarrow{A_3B_3}\right|^2+2(\overrightarrow{A_1B_1}\bullet\ \overrightarrow{A_2B_2}+\overrightarrow{A_2B_2}\bullet\overrightarrow{A_3B_3}+\overrightarrow{A_1B_1}\bullet\ \overrightarrow{A_3B_3})$$

其值會受三角形方位的影響，我們發現：若$\overrightarrow{A_1B_1}$和$\overrightarrow{A_2B_2}$、$\overrightarrow{A_2B_2}$和$\overrightarrow{A_3B_3}$、$\overrightarrow{A_3B_3}$和$\overrightarrow{A_1B_1}$的夾角分別爲 α、β、γ $(0\le\alpha$、β、$\gamma\le\pi)$，則當

$\alpha+\beta+\gamma=0$，面積有最大值$\frac{\sqrt{3}}{36}\left(\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right|+\left|\overrightarrow{A_2B_2}\right|+\left|\overrightarrow{A_3B_3}\right|\right)^2$。

$\alpha+\beta+\gamma=2\pi$，面積有最小值 0。

但因向量的可平移性，其形狀大小、面積不受影響，只有重心會隨著平移。

(三)當原$\Delta A_1B_1C_1$、$\Delta A_2B_2C_2$、$\Delta A_3B_3C_3$逐漸由正三角形退化成一點時，Echois 三角形亦退化成一點，即爲退化後三點連線所形成的三角形的重心。

在平面上，我們以多邊形頂點分量的算術平均數來表示多邊形的幾何中心，結果有更一般性的發現：

二、 任意 n 個正三角形的 Echois 三角形仍爲正三角形，仍有上述結論一樣的特性。

三、 將正三角形推廣到 m 個正方形、正五邊形時，其 Echois 四邊形或五邊形也會是正方形或正五邊形；甚至推廣到任意 m 個正 n 邊形的 Echoisn 邊形也會是正 n 邊形。($m\ge2$)。

四、 從任意三個相似三角形的 Echois 三角形發現其仍爲相似三角形，推廣至任意 m 個相似 n 邊形的 Echois 三角形也成立。但最後我們嘗試了任意的三角形，並未發現 Echois 三角形有何特殊情形，唯其重心仍是所有三角形重心連線所形成的圖形的重心。

五、 m 個相似 n 邊形的對應邊向量和爲零時，Echois 圖形會退化成一點。特別是三個正三角形時，發現 Napoleon 三角形是其中特例；也進而發現四個正方形時的 Napoleon 四邊形。

六、 回溯整個研究，我們提出四點有趣的觀點：

(一) 從上述結論，我們大膽猜測若干個相似圖形的 Echois 圖形必與之相似；而任意圖形的重心連線形成的圖形的重心，也必爲 Echois 圖形的重心。

(二) 過去我們都知道三角形的三個頂點決定一個重心，本研究告訴我們在平面上的任意三個正三角形必決定一個 Echois 三角形(正三角形)，即三個正三角形決定一個類似以平面圖形爲重心概念的一個正三角形；換句話說，兩者可想像成是一種圖形退化的前後關係。本研究明確告訴我們「重心的重心仍然是重心」，我們不妨給 Echois 圖形的重心一個有趣的稱呼，就叫做「萬重之心」，以彰顯其特殊性。

(三) 在生活中，我們談重心，基本上不會僅限於一個點的概念上，例如要如何在三個城鎮之間，成立一個「重鎮」，它可能是某一群圖的重心、或者是一個區域，這種想法便是一種 Echois 圖形的概念。

(四) Napoleon 和 Echois 均是 19 世紀上葉的人，當時科技並不發達，兩個看似不相干的發現，竟在 21 世紀藉由電腦動態幾何環境下找到它們的關聯性。由此，對早期的數學發現，可以用新的眼光來重新看待，我們會獲得更多意想不到的發現，真是令人啊哈的有趣！

陸、參考文獻

1. 沈康身，數學的魅力，一版，大陸，上海辭書出版社，178~182，2004

2. 南一版高中數學第二冊複數的極式、第三冊平面向量

3. Benjamin Finkel，1932，美國數學月刊

4. http://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%87%A0%E4%BD%95%E4%B8%AD%E5%BF%83

【評語】040402

將平面上任意三個正角形之對應頂點相連線，再將所組成的三個三角形之重心相連，此為 Echois 三角形。作者透過實驗觀察到 Echois 三角形的性質再改為正 n 邊形甚或是相似 n 邊形時依然會成立，並進而透過複數與向量法證明之。除此之外，作者亦發現並證明 Echois 三角形的極限行為。論證嚴謹，結構完整，為一卓越研究。