

中華民國第 51 屆中小學科學展覽會 作品說明書

高中組 物理科

最佳(鄉土)教材獎

040109

實驗探討影響水中倒影的變因

學校名稱：國立嘉義高級中學

作者： 高一 李科翰 高一 張家碩 高一 李岳倫	指導老師： 李文堂 周黛青
---	-----------------------------

關鍵詞：水中倒影、反射、maple 13

實驗探討影響水中倒影的變因

摘要

物體在水中的倒影是光經水面反射後所形成的虛像，水面平靜無波時，倒影的長度等於物長，水面有微波時，水中倒影的長度會隨著水波的振幅改變。

實驗觀察和數學推導倒影的位置，知：物長愈大倒影長度愈大，觀察者所在位置愈高，倒影長度愈短；人和物的距離愈遠，倒影長度愈大，波動振幅愈大，倒影長度愈大；物體底部的倒影明亮清晰，頂部暗淡稀疏。

水波的振幅大小會影響倒影的數目以及倒影的亮度。用簡單的三角函數，可以算出不同的振幅下倒影的數目。

壹、研究動機：

去年 1 月 10 日全台好天氣，台中以南至屏東幾乎都可以遠眺覆蓋白雪的玉山山頭，嘉義蘭潭與仁義潭的水面上，都可看到玉山雪景倒映潭面，看到報紙刊載此如詩如畫的景象，引起作者進一步研究的興趣。

貳、研究目的：

- 一、實驗探討水中倒影的數目。
- 二、實驗探討水中倒影的長度的變因。
- 三、實驗探討水中倒影的亮度變因。

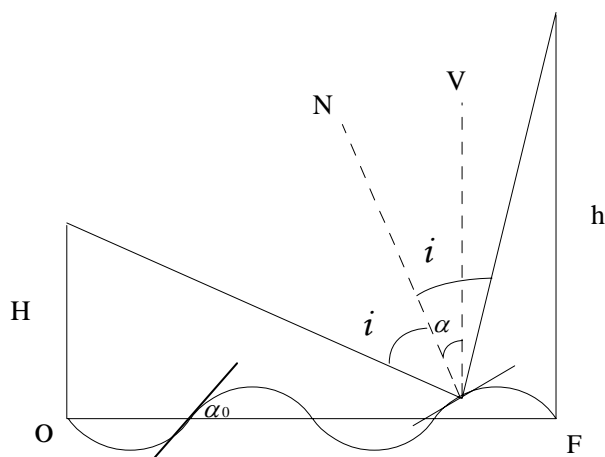
參、原理：

- 一、物體在水中的倒影，是物體發出的光線經水面反射後的虛像，水面未經干擾時，水面像一面平面鏡，虛像的像高=物高。
- 二、高 H 的物體和高 h 的觀察者相距 L ，其間有正弦波由 O 向 F 傳播，在 $t=0$ 的瞬間，水面上一點 M 的法線 N 亦作相同振幅，同週期的運動，當 $\alpha_0 \leq 5^\circ$ 時

$$\tan(2\alpha) = \tan[(i + \alpha) - (i - \alpha)] = \frac{\frac{x}{H} - \frac{L-x}{h}}{1 + \frac{L-x}{h} \cdot \frac{x}{H}} = \frac{(H+h)x - HL}{Hh + Lx - x^2}$$

$$y = y_0 \sin \frac{2\pi}{\lambda} x, \frac{dy}{dx} = \frac{2\pi y_0}{\lambda} \cos \frac{2\pi}{\lambda} x = \alpha_0 \cos \frac{2\pi}{\lambda} x = \tan \alpha \doteq \alpha$$

$$\tan(2\alpha) = 2\alpha_0 \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right) \Rightarrow \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right) = \frac{(H+h)x - HL}{2\alpha_0(Hh + Lx - x^2)} \dots\dots(1)$$



圖一：光經水波反射到觀察者

三、圖二所示，岸邊距離水面高度 H 鉛直而立的物體，距物體 L 處的觀察者，眼睛距水面 h ，水面 A 點和水平面成瞬間，由光的反射定律可得到 A 的頂點的倒影的座標 $P(x, y)$ 。

$$x = 2(H + M \tan \theta) \sin \theta \cos \theta \cdots (2)$$

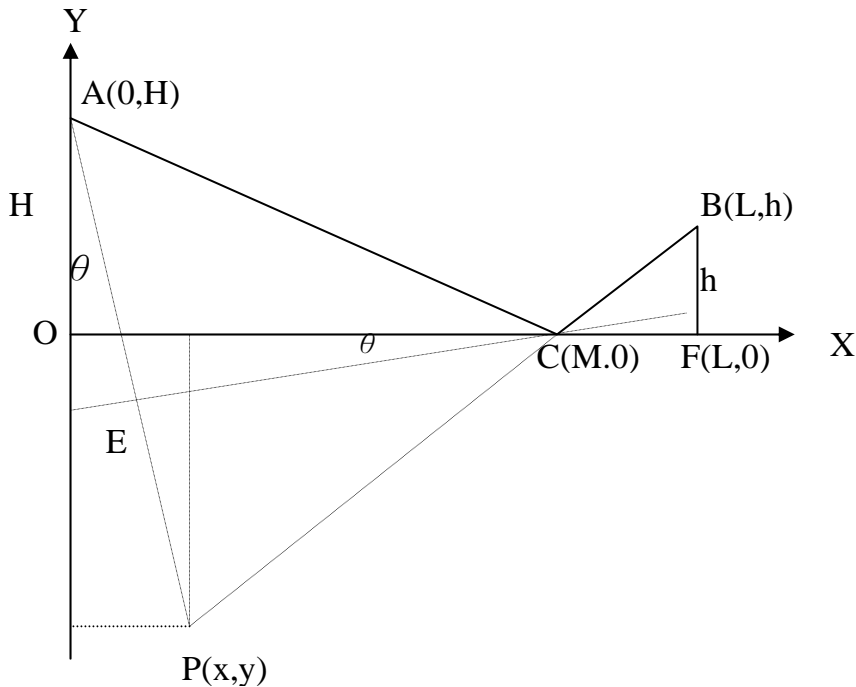
$$y = -2(H + M \tan \theta) \cos^2 \theta + H \cdots (3)$$

$$\frac{h}{L - M} = \frac{-y}{M - x} \cdots (4)$$

由上列三個公式整理後可得：

$$M = (2 \sin 2\theta)^{-1} \cdot (L \cdot \sin 2\theta - H \cdot \cos 2\theta - h \cdot \cos 2\theta + ((H \cdot \cos 2\theta + h \cdot \cos 2\theta - L \cdot \sin 2\theta)^2 + 4H \cdot \sin 2\theta \cdot (L \cdot \cos 2\theta + h \cdot \sin 2\theta))^{\frac{1}{2}} \cdots (5)$$

$$\text{倒影的長度 } S = \sqrt{x^2 + y^2}$$



圖二：物體發出的光線經微波反射到觀察者眼中

肆、實驗器材：

照相機、尺、電腦、Maple13 電腦繪圖軟體、GPS-map

伍、研究結果及討論：

一、實驗一：

(一)目的：探討水中倒影的數目。

(二)步驟：

1.滿月時，到海邊用攝影機錄下不同時間，離水平面不同高度的月亮，並拍下水中倒影。

2.測量海中水波的振幅、波長以及振動頻率。

(三)結果及討論：

1.圖三(右)、圖四所示分別為仰角 40° 以及 10° 的月亮倒影。

2.圖三(右)中月亮的仰角在水平面上 40° ，水中倒影的像只有一個。

3.圖四中月亮的仰角在水平面上 10° ，水中倒影的像有無限多個。

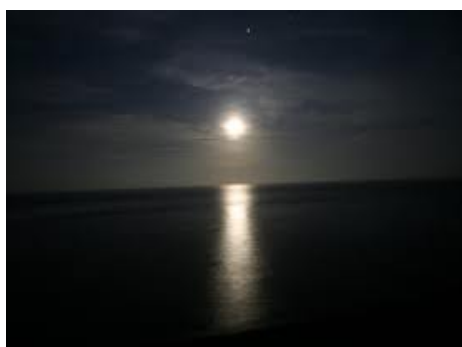
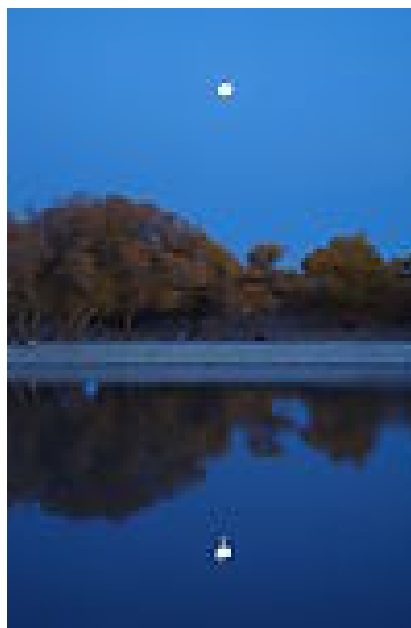
4.由 $\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right) = \frac{(H+h)x - HL}{2\alpha_0(Hh + Lx - x^2)} \dots\dots(1)$

公式(1)的左側代表波形，右側則為由 A 反射至 B 的光在水面的位置，

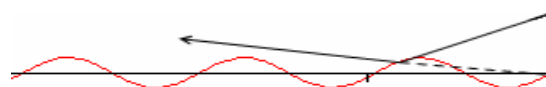
$$y_1 = \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right) \quad y_2 = \frac{(H+h)x - HL}{2\alpha_0(Hh + Lx - x^2)}$$

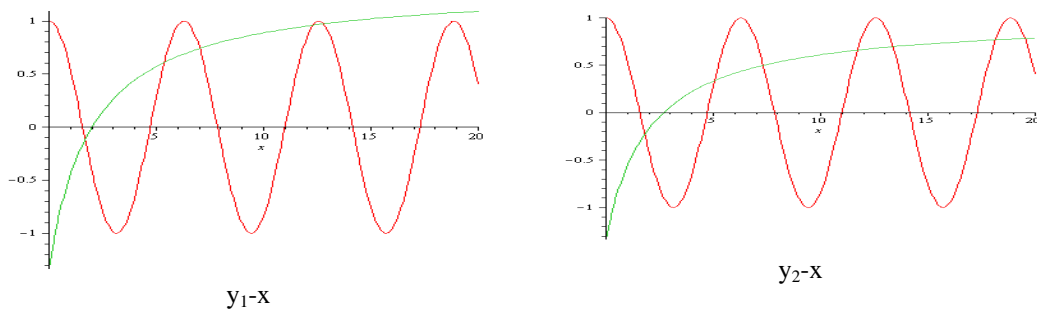


圖三：月亮高度較大時，倒影數目有限個，且為奇數個。



圖四：倒影數目無限多個。且倒影貼近水面





圖五:在同一座標系中,電腦繪圖 y_1-x 圖及 y_2-x 圖,兩曲線的交點,表示我們能看到的水面光線反射位置。

- 5.當 $L=\infty$ 時(像月亮、太陽)令 ω 為無限遠處,物體和水面間的視角, $\frac{H}{L} = \tan \omega$
 $\frac{h}{L} \neq 0$ 公式(1) 改為: $\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right) = \frac{x \cdot \tan \omega - H}{2\alpha_0(x + h \tan \omega)}$

由圖五可知 y_1-x 和 y_2-x 相交點離遠原點最近的位置 x_s 發生在 $y_1 = -1$,

代入 $y_2 = \frac{x \cdot \tan \omega - H}{2\alpha_0(x + h \tan \omega)}$ 得 $x_s = \frac{-H + 2\alpha_0 h \tan \omega}{2\alpha_0 + \tan \omega}$, 當 $y_1 = +1$ 時, 倒影的位置最

遠 $x_L = \frac{H + 2\alpha_0 h \tan \omega}{\tan \omega - 2\alpha_0}$, 因 x 必須為正值, 當 $\tan \omega > 2\alpha_0$ 時, 倒影的數目為有限

個, 且分布於 $\frac{H - 2\alpha_0 h \tan \omega}{\tan \omega + 2\alpha_0}$ 至 $\frac{H + 2\alpha_0 h \tan \omega}{\tan \omega - 2\alpha_0}$ 之間, 如圖五所示。如圖四所

示: $\tan \omega < 2\alpha_0$ 倒影的數目為無限多個, 且分布於地平線($x=0$)至

$x = x_s = \frac{H - 2\alpha_0 h \tan \omega}{\tan \omega + 2\alpha_0}$ 之間。

- 6.在同一座標系中,電腦繪圖 y_1-x 圖及 y_2-x 圖,兩曲線的交點,表示我們能看到的水面光線反射位置。

- 7.圖四中月亮仰角 $\omega = 10^\circ$, 月亮的倒影在 x_s 至地平線間, 月亮和觀察者距離

$$L = 5000\text{m}, \text{ 月亮高 } H = 872\text{m}, \text{ 觀察者高 } h = 1.7\text{m}, x_s = 2000\text{m}, x_s = \frac{H - 2\alpha_0 h \tan \omega}{\tan \omega + 2\alpha_0}$$

由可推論地平線附近的海浪的切線和海平面的最大夾角 α_0 約等於 7.4° 。

二、實驗二：

- (一)目的：探討玉山水中倒影的長度變因。

(二)步驟：

- 1.分別在蘭潭水庫及仁義潭水庫拍下玉山的水中倒影，由地圖以及利 GPS-map 測量玉山北峰高度、玉山至兩水庫的距離以及觀察者離水面的高度。
- 2.測量潭中水波的振幅、波長以及振動頻率。

(三)結果和討論：

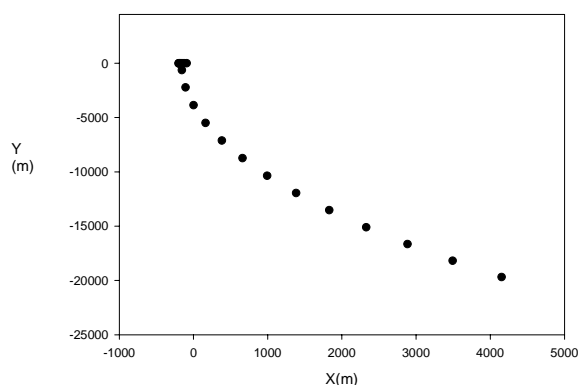
- 1.圖七所示為：蘭潭水庫的玉山倒影。玉山北峰標高 $H=3860$ 公尺，拍攝玉山倒影者眼睛距蘭潭水面高度 $h=7.8$ 公尺，玉山到蘭潭的直線距離 $L=49.4$ 公里。像片中倒影的長度為玉山高度的 1.5 倍，用 maple 計算出水波振動時， H 的影長，可得 $\alpha_0=\pm 1.7^\circ$ ，由公式所求得的结果和實際測量的結果相符。
- 2.圖八為拍攝者距水面 $h=11$ 公尺，在仁義潭水庫拍攝到的玉山倒影，同樣出現山頂倒影稀疏暗淡，山底部的倒影連續明亮，像片中兩水庫直線距離 2.4 公里，拍攝方向相同(均向東偏北 10°)拍攝時間相差約 8 分鐘，兩水庫的風向、水深等條件幾乎相同，所以水波和水平面的夾角相同的假設可以成立。

3.水中倒影的位置座標為： $x = 2(H + M \tan \theta) \sin \theta \cos \theta \dots (2)$

$$y = -2(H + M \tan \theta) \cos^2 \theta + H \dots (3)$$

影長度為玉山高度的 1.41 倍。拍攝點到玉山距離 47 公里，假設仁義潭水庫的水波和水平面的夾角亦為 $\alpha_0=\pm 1.7^\circ$ ，將 $h=11$ 公尺， $L=47$ 公里， $H=3860$ 公尺代入公式(2)及(3)，算出玉山在仁義潭的倒影長度為玉山高度的 1.41 倍。

- 4.圖六中用 Maple 繪出水波的 α_0 在 -10° 至 $+10^\circ$ 間變化時，倒影座標 y 隨 x 的變化。由圖可看出 α_0 越大，倒影長度越長。在 α_0 大的時候，倒影無法連續成像， α_0 越小，倒影越清晰。
- 5.倒影頂端的像會較稀疏。從物理反射定律的觀點：鏡面 M 做 -10° 至 $+10^\circ$ 的轉動反射光有一部份反射向 $-x$ 方向，一部份反射向 $+x$ 方向，所以在非頂端的地方會有其他光點，倒影較明亮連續；在頂端的地方，因部份的光點向原點方向反射，物體倒影稀疏暗淡。



圖六：水波的 α 在 $+10$ 度和 -10 度間變化時，倒影座標 y 隨 x 的變化



圖七：蘭潭水庫的玉山倒影



圖八：仁義潭水庫的玉山倒影

三、實驗三：

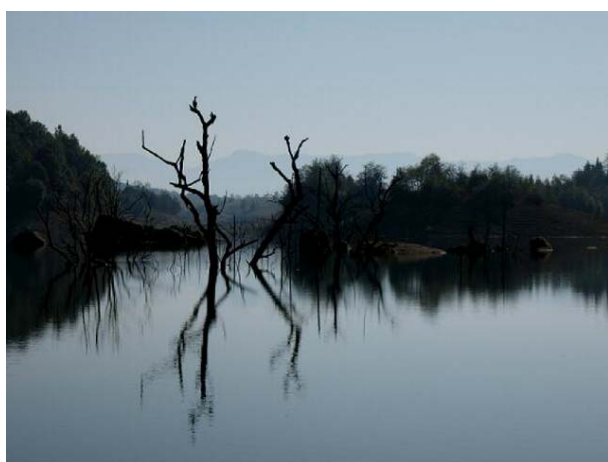
(一)目的：探討不同高度的物體水中倒影的長度變化。

(二)步驟：

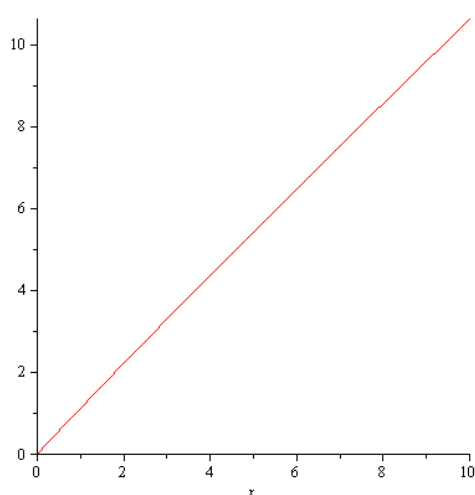
- 1.挑選位置很接近的兩個不同高度的物體，用相機拍下倒影。
- 2.測量倒影長度和原物的長度作比較。

3.結果及討論：

圖九中水面的微波波長 30.0cm，振幅 0.80cm，左方的枯木最頂端距水面 3.40m，倒影 3.63m，右方枯木最頂端距水面 2.70m，倒影長 2.91m。由此數據可知，畫出來的函數圖形斜率=1.04。圖十用 maple 作倒影長(S)對物高(H)的關係圖，所得到的結果和測量值相符。



圖九：枯木在水中的倒影



圖十：倒影長(S)對物高(H)的關係圖

四、實驗四：

(一)目的：探討物體和觀察者距離 L 對水中倒影的長度影響。

(二)步驟：

- 1.對著固定的實物拍下水中倒影。
- 2.沿著實物和觀察者的連線，靠近實物，再拍下水中倒影，測量水中倒影的長度隨著距離 L 的變化。

(三)結果及討論：

- 1.圖十一(a)和(b)分別為：觀察者距離高樓 86m 和距離 50m 拍到的水中倒影。
- 2.兩圖中水中倒影的長度 S 和物高 H 的比值分別為 1.05 和 1.02。
- 3.以 maple 作倒影長(S)對距離 L 的關係圖得到的結果和測量的結果相符。



圖十一(a)：觀察者距離高樓 86m 拍到的水中倒影



圖十一(b)：觀察者距離高樓 50m 拍到的水中倒影

(五)、實驗五：

(一)目的：探討水中倒影亮度和水波振幅的關係

(二)步驟：

- 1.相機拍下水中倒影，倒影的亮度大如圖十二所示。而且，水波的振幅愈大，亮度愈大。
- 2.利用簡單的數學式，加以解釋。

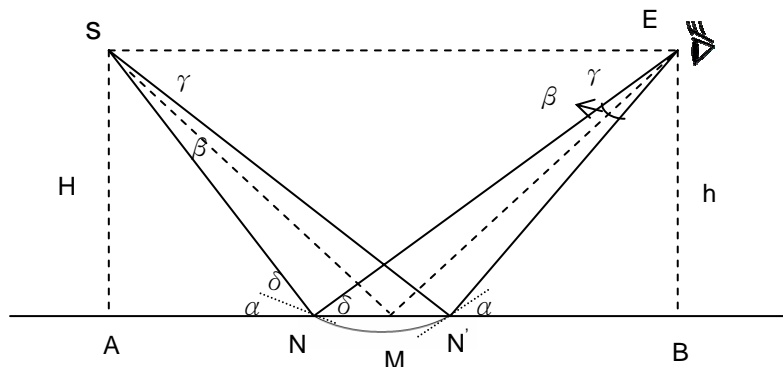


圖十二：水中倒影的亮度比實物大

(三)結果及討論：

- 1.圖十二中三棟黃色的建築物，在早上 6 點所拍攝，太陽光尚未直照建築物，倒影的亮度比沒有水波時大。
- 2.圖十三來所示，光源 S 所發出的光線若經過平面鏡(圖中 M 點)反射，則進入眼睛的光線僅有一條；但是，經和水平面夾角 α 的水波反射進入眼睛的光束，其夾角為 β 。當光源和眼睛一樣高時，由圖十三可證明 $\beta = 2\alpha$ ，換言之，水波的振幅愈大，反射進入眼睛的倒影的亮度就愈大。由圖： $\alpha + \delta = \beta + \gamma$ ， $\delta - \alpha = \gamma$

$\Rightarrow \beta = 2\alpha$ 當光源和眼睛不一樣高時，由圖十三可證明 $\beta = \frac{4\alpha H}{h + H}$ 。



圖十三：光經水波反射入眼，水中倒影的亮度隨振幅的增大而增大

七：

本作品所探討的水波為直線波，而且波的運動方向限定於波源和觀察者之間，圓形波或其他形態的波動形成的水中倒影如圖十四所示，值得進一步研究。



圖十四：非直線波形成的水中倒影

陸、結論：

本實驗用簡單的數學以及電腦軟體，配合攝影器材，探討水中倒影的長度和亮度的變因。

水面平靜無波時，倒影的長度等於物長的倒立虛像。

水面有波動時：

- 一、若波動振幅太大，看不到穩定的倒影。
- 二、太陽、月亮等極遠的物體，若仰角太小，會在水中成無限個倒影；若仰角較大，會成奇數個倒影，仰角愈大，倒影的數目愈少。水波的振幅愈大，倒影數愈多。
- 三、倒影長度和觀察者高度(h)的關係：若 h 很大，函數圖形為曲線，但若 h 很小，函數圖形可視為直線，且斜率=-0.42。
- 四、倒影長度和物高(H)的關係呈線性函數，斜率=1.00。
- 五、倒影長度和觀察者距離(L)的關係呈線性函數，斜率=0.06。
- 六、物頂端的倒影黯淡稀疏，底部明亮連續。
- 七、倒影不受水深影響。
- 八、水波的振幅愈大，反射進入眼睛的倒影的亮度就愈大。

柒、參考資料

- 一、胡守信，胡丹峰， 影響微幅波浪中倒影長度的幾個因素，物理與工程，2001(4)57-60。
- 二、M.Minnaert, The Nature of Light & Colors in the open air, Dover Publ., 1993.

【評語】 040109

物體在水中的倒影是光經過水面反射後所形成的虛像。本作品利用簡單三角函數，探討水中倒影，並解釋複雜光學現象，此實驗在簡單架構下，可以定性解釋光學現象，是相單有趣的結果，但也因為架構簡單，所以無法做定量的解釋。