中華民國第51屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

佳作

030419

弧輪偵找—等腰三角形的擴張

學校名稱：基隆市立中正國民中學

作者：	指導老師：
國二 何俊逸	林耀南
國二 楊信宏	吳建昀
國二 彭若晴	

關鍵詞：等腰三角形、共線作圖法、八點共圓

弧輪偵找–等腰三角形的擴張

摘要

本文利用尺規作圖的技巧求作三角形的第一型及第二型內接三角形，並擴展到任意凸多邊形。在第一型內接多邊形上找出其解的範圍，在第二型的順逆兩個內接圖形上，發現其解部分有共圓現象，部分有共橢圓或雙曲線的現象，直角△中有更多有趣的特性。

關於正多邊形的第一型及第二型內接多邊形的尺規作圖，本文找到快速的畫法，並發現其解有許多特性。

壹、研究動機

在第四冊尺規作圖單元中，一開始的隨堂練習，要我們知道如何使用直尺和圓規作圖時，出現兩題看似簡單的作圖題：

(1)已知：

，試在 L 上找一點 P，使 $\overline{AP}=\overline{AB}$

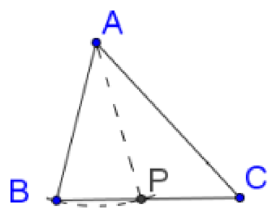
(2)已知：

，試在 L 上找一點 P，使 $\overline{AB}=\overline{BP}$

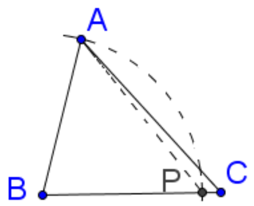
而在習作及練習題中，又將上面的概念轉換成在△中作圖，如下：

題目：(1)在 $\overline{BC}$ 上找一點 P，使 $\overline{AP}=\overline{AB}$ ，如圖(1)

(2)在 $\overline{BC}$ 上找一點 P，使 $\overline{AB}=\overline{BP}$ ，如圖(2)



圖(1)



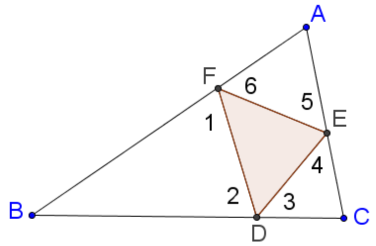
圖(2)

同學提出說，是否可以再擴大這個概念成為：

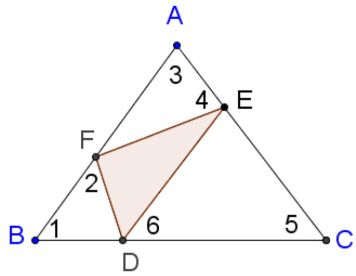
(1) 在△ABC 的三邊上，各找到一點 D、E、F，使 $\overline{BD}=\overline{BF}$ ，$\overline{CE}=\overline{CD}$ ， $\overline{AF}=\overline{AE}$ 。(此△DEF 簡稱為△ABC 的第一型內接△)，如圖(3)

(2)在△ABC 的三邊上，各找到一點 D、E、F，使 $\overline{DB}=\overline{DF}$ ，$\overline{FE}=\overline{FA}$ ，$\overline{ED}=\overline{EC}$ 。(此

△DEF 簡稱爲△ABC 的第二型內接△)，如圖(4)



圖(3)



圖(4)

這問題很有趣，也有點難，我們不知從何處下手，請教老師，老師要我們多試試。

貳、研究目的

一、尋找第一型內接△的尺規作圖法，並擴充到四、五、六……n 等多邊形

二、尋找第二型內接△的尺規作圖法，並擴充到四、五、六……n 等多邊形

三、分別探討第一型及第二型內接多邊形的存在條件及解的範圍

四、在正多邊形中，尋找第一型及第二型內接多邊形的速畫法及解的特性

參、研究設備及器材

一、GeoGebra 繪圖軟體

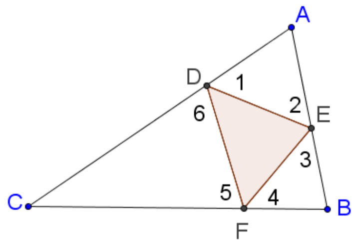
肆、研究過程或方法

一、名詞定義：爲了容易區別本文所要探討的兩種內接圖形，定義圖形名稱如下：

(一)第一型內接三角形：

1.如圖(5)，∠1=∠2，∠3=∠4，∠5=∠6，則△DEF 被稱爲是△ABC 的第一型內接△

2.四、五、六邊形…類推

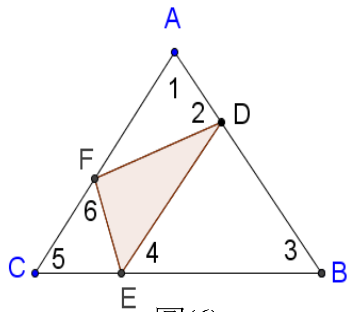


圖(5)

(二)第二型內接多邊形：

1.如圖(6)，∠1=∠2，∠3=∠4，∠5=∠6，則△DEF 被稱爲是△ABC 的第二型內接△

2. 四、五、六邊形…類推



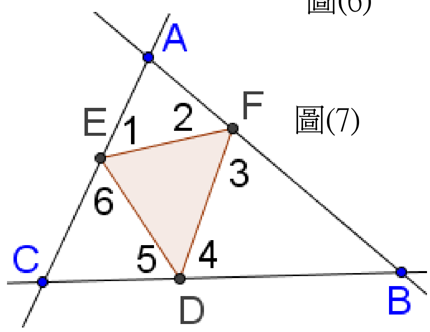
圖(6)

二、第一型內接多邊形作圖探討

(一)如圖(7)，若△DEF 爲△ABC 的第一型內接△，也就是∠1=∠2，∠3=∠4，∠5=∠6，則

$\overline{AE}=\overline{AF}$ ，$\overline{BD}=\overline{BF}$ ，$\overline{CD}=\overline{CE}$ ，

因此 $\overline{AB}+\overline{AC}-\overline{BC}=\overline{AF}+\overline{FB}+\overline{AE}+\overline{EC}-\overline{BD}-\overline{DC}$



圖(7)

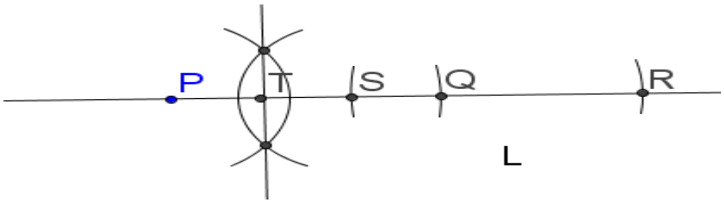
$$=\overline{AF}+\overline{AE}=2\overline{AF}\text{，故}\overline{AF}=\frac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{AC}-\overline{BC})$$

當我們取得這唯一的線段長 $\overline{AF}$ 後，我們就可以把這唯一的第一型內接△畫出來，且 D、E、F 三點明顯的為△ABC 內切圓的切點。

(二)以尺規作圖畫出△ABC 的第一型內接三角形

已知△ABC，試畫出△ABC 的第一型內接△

方法 1：(1)在直線 L 上，任取一點 P，如圖(8-1)



圖(8-1)

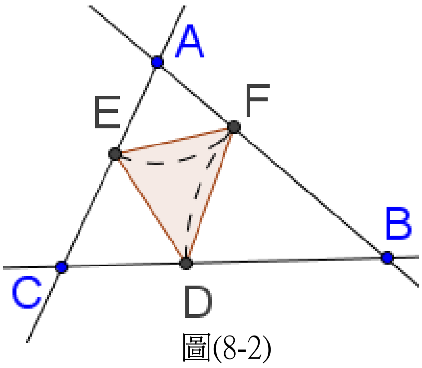
(2)作 $\overline{PQ}=\overline{AB}$，作 $\overline{QR}=\overline{AC}$

(3)反方向作 $\overline{RS}=\overline{BC}$， 作 $\overline{PS}$ 的中點 T

(4)以 A 為圓心，$\overline{PT}$ 為半徑，畫弧，交 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 於 F、E

(5)以 B 為圓心，$\overline{BF}$ 為半徑，畫弧，交 $\overline{BC}$ 於 D

(6)連 $\overline{EF}$、$\overline{FD}$、$\overline{DE}$，則此△DEF 即為△ABC 的第一型內接△，如圖(8-2)



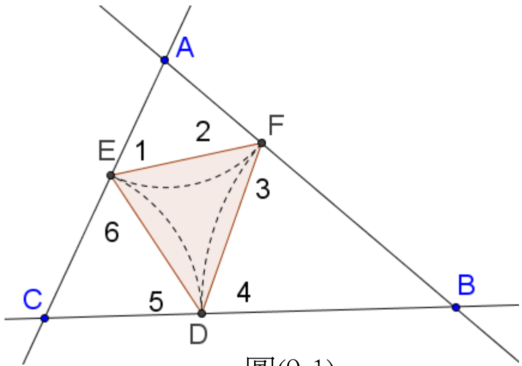
圖(8-2)

證明：(1).∵ $\overline{AE}=\overline{AF}$，∴∠1=∠2，如圖(9-1)

(2).∵ $\overline{BF}=\overline{BD}$，∴∠3=∠4

(3).∵ $\overline{PT}=\dfrac{\overline{AB}+\overline{AC}-\overline{BC}}{2}$，∴ $2\overline{PT}=\overline{AB}+\overline{AC}-\overline{BC}$

$\therefore 2\overline{AF}=(\overline{AF}+\overline{BF})+(\overline{AE}+\overline{EC})-(\overline{BD}+\overline{DC})$



圖(9-1)

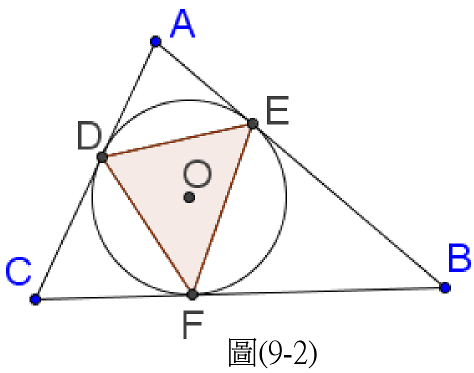
$\therefore 2\overline{AF}=\overline{AF}+\overline{AE}+\overline{EC}-\overline{DC}$

$\therefore 2\overline{AF}=2\overline{AF}+\overline{EC}-\overline{DC}$，∴ $\overline{DC}=\overline{EC}$，∴∠5=∠6

得證△DEF 即為△ABC 的第一型內接△

方法 2：(1)作△ABC 的內切圓 O，切點分別為 D、E、F

(2)連接 $\overline{DE}$、$\overline{EF}$、$\overline{FD}$，則△ABC 即為所求，如圖(9-2)

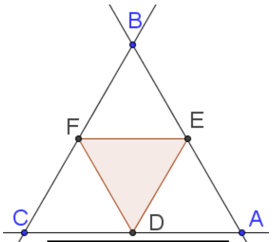


圖(9-2)

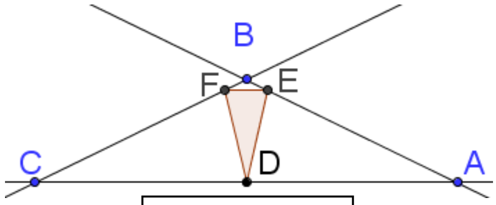
(三)討論：

我們依三內角的特色，畫出它們個別的第一型內接△，非常有趣。

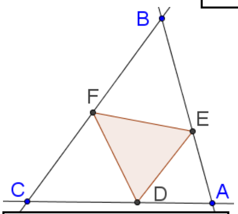
我們發現：無論是任意銳角、直角、鈍角三角形，甚至是正三角形、等腰三角形……等，都可以找到**唯一**的第一型內接△。



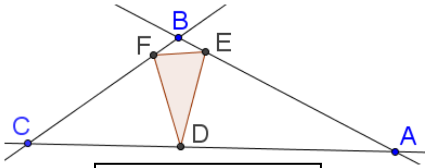
正三角形



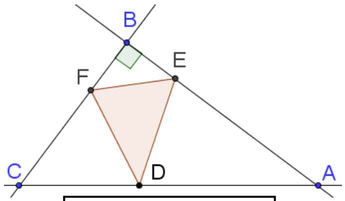
等腰三角形



銳角三角形



鈍角三角形



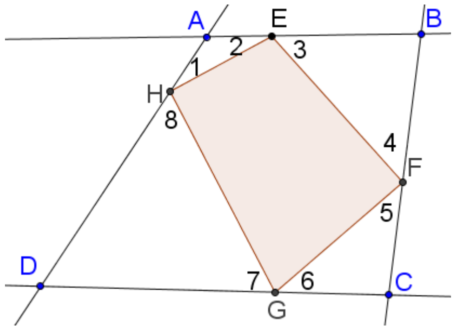
直角三角形

(四)觀察四邊形的第一型內接四邊形

如圖(10)，假設存在四邊形 EFGH 爲四邊形 ABCD 的第一型內接四邊形，則必∠1=∠2，∠3=∠4，∠5=∠6，∠7=∠8，即 $\overline{AH}=\overline{AE}$ ，

$\overline{BF}=\overline{BE}$ ， $\overline{CF}=\overline{CG}$ ， $\overline{DH}=\overline{DG}$ ，

故 $\overline{AH}+\overline{BF}+\overline{CF}+\overline{DH}=\overline{AE}+\overline{BE}+\overline{CG}+\overline{DG}$ ，



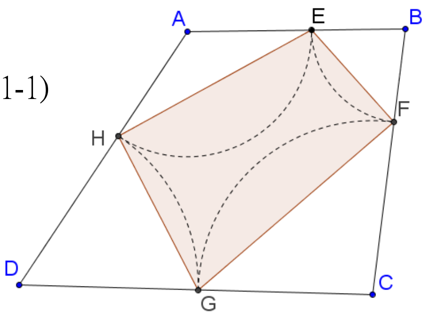
圖(10)

$\overline{AD}+\overline{BC}=\overline{AB}+\overline{CD}$ ，這表示兩雙對邊和必相等。且顯然的，移動 E 點，分別作各邊的平行線後仍可找到一個新的第一型內接四邊形，因此內接四邊形 EFGH 好像有無限多個，我們來畫畫看。

已知：四邊形 ABCD 中， $\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{AD}+\overline{BC}$ ， $\overline{AB}\leqq\overline{DC}$ ，E 爲 $\overline{AB}$ 上的任一點。

求作：試從 E 點開始，畫出 ABCD 的第一型內接四邊形，如圖(11-1)

圖(11-1)



方法 1：

(1)以 B 爲圓心， $\overline{BE}$ 爲半徑，畫弧，交 $\overline{BC}$ 於 F

(2)以 C 爲圓心， $\overline{CF}$ 爲半徑，畫弧，交 $\overline{CD}$ 於 G

(3)以 D 爲圓心，$\overline{DG}$ 爲半徑，畫弧，交 $\overline{DA}$ 於 H

(4)以 A 爲圓心，$\overline{AH}$ 爲半徑，畫弧，必回到 E 點

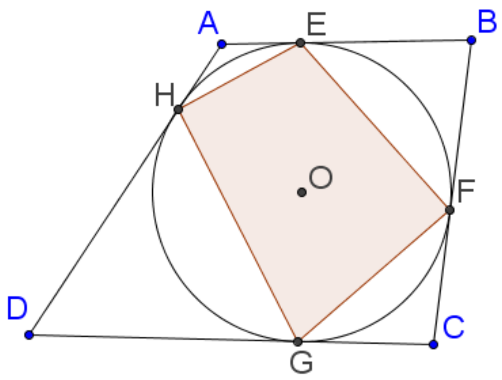
(5)連 $\overline{EF}$ 、$\overline{FG}$ 、$\overline{GH}$ 、$\overline{HE}$ ，則四邊形 EFGH 即爲所求

證明：

(1)設最後以 A 爲圓心，$\overline{AH}$ 爲半徑，所畫的弧，交 $\overline{AB}$ 於 E'點，我們可以證明 E'點和 E 點是同一點

(2)由 $\overline{BE}=\overline{BF}$ ---①　　$\overline{AE'}=\overline{AH}$ ---②

$\overline{CG}=\overline{CF}$ ---③　　$\overline{DG}=\overline{DH}$ ---④



圖(11-2)

再①+②+③+④

得 $\overline{BE}+\overline{AE'}+\overline{CG}+\overline{DG}=\overline{BF}+\overline{AH}+\overline{CF}+\overline{DH}$

即 $\overline{BE}+\overline{AE'}+\overline{CD}=\overline{BC}+\overline{AD}$ ---⑤

但已知 $\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{AD}+\overline{BC}$ ---⑥

比較⑤、⑥，得 $\overline{BE}+\overline{AE'}+\overline{CD}=\overline{AB}+\overline{CD}$

即 $\overline{BE}+\overline{AE'}=\overline{AB}$

這就表示 E 點和 E'點必重合。且在證明過程中知一開始的 E 點可在 $\overline{AB}$ 上的任一處，也就是說此種條件下的第一型內接四邊形有**無限多個**。

方法 2：(1)如圖(11-2)，作四邊形 ABCD 的內切圓 O，且切點各爲 E、F、G、H。

(2)分別連 $\overline{EF}$ 、$\overline{FG}$ 、$\overline{GH}$ 、$\overline{HE}$ ，則四邊形 EFGH 即爲所求。顯然的，這個四邊形是圖(11-1)中無限多個解之一。

(五)但當兩雙對邊和不相等時，是否存在第一型內接四邊形，又該怎麼畫呢?

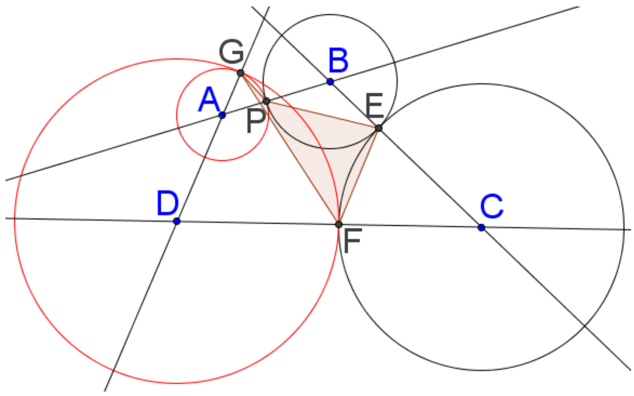
這問題很複雜，一開始亂試了好幾個月，好幾千個圖，慢慢的我們發現這種情況下的 P、E、F、G 點似乎會跑到四邊形 ABCD 的外側(當然仍在四邊的延長線上)，這種廣義的第一型內接四邊形最後被我們找出來了，敘述如下：

爲了說明方便，我們做了底下的線段或點的名詞使用規定：

① $\overline{AB}$ 爲ABCD四邊形中的最短邊

②點P在$\overleftrightarrow{AB}$上，且

$$\overline{AP}=\frac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{CD}-\overline{BC}-\overline{AD})$$



圖(12)

1.當$(\overline{AB}+\overline{CD})-(\overline{BC}+\overline{AD})>0$時

求作：ABCD 的第一型內接四邊形，圖(12)

作法：

(1)在直線 L 上，作

$\overline{KU}=\frac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{CD}-\overline{BC}-\overline{AD})$，圖(13)

(2)在圖(12)上，以 A 爲圓心，$\overline{KU}$長爲半徑，畫圓，取$\overline{AB}$上的交點 P (∵差值大於 0)

圖(13)

(3)以 B 爲圓心，$\overline{BP}$爲半徑，畫圓，交$\overline{BC}$於 E

(4)以 C 爲圓心，$\overline{CE}$爲半徑，畫圓，交$\overline{CD}$於 F

(5)以 D 爲圓心，$\overline{DF}$爲半徑，畫圓，交$\overline{DA}$的延長線於 G

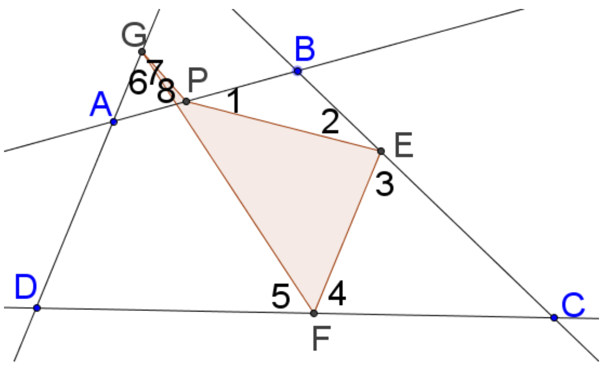
(6)連$\overline{PE}$、$\overline{EF}$、$\overline{FG}$、$\overline{GP}$，則四邊形 PEFG 即爲 ABCD 的廣義第一型內接四邊形(廣義的意思是等腰△APG 跑到∠DAB 的外部去了)

證明：將圖(12)消除圓弧後，形成圖(14)

(1)∵$\overline{BP}=\overline{BE}$，∴∠1=∠2

(2)∵$\overline{CE}=\overline{CF}$，∴∠3=∠4

(3)∵$\overline{DF}=\overline{DG}$，∴∠5=∠6



圖(14)

我們證明$\overline{AG}=\overline{AP}$

由$\overline{AP}=\frac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{CD}-\overline{BC}-\overline{AD})$

$$=\frac{1}{2}(\overline{AP}+\overline{PB}+\overline{CF}+\overline{FD}-\overline{BE}-\overline{EC}-\overline{AD})$$

$$=\frac{1}{2}(\overline{AP}+\overline{FD}-\overline{AD})=\frac{1}{2}(\overline{AP}+\overline{DG}-\overline{AD})$$

$$=\frac{1}{2}(\overline{AP}+\overline{GA}+\overline{AD}-\overline{AD})=\frac{1}{2}(\overline{AP}+\overline{AG})$$

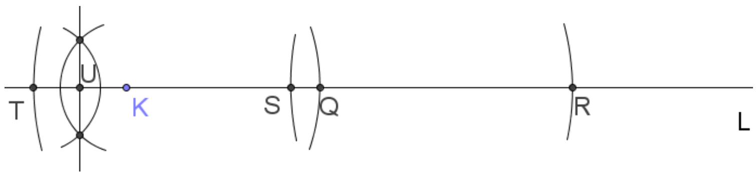
故 $2\overline{AP}=\overline{AP}+\overline{AG}$，即 $\overline{AP}=\overline{AG}$ 得證

由上述的證明得 $\overline{AG}=\overline{AP}$，此時∠DAB 當頂角的等腰△跑至四邊形 ABCD 的外面去了，但仍具有∠1=∠2，∠3=∠4，∠5=∠6，∠7=∠8(∠AGP=∠APG)的第一型內接四邊形的特色。也因為有部分圖形跑到外面，這和「內接」有點矛盾，但若廣義的來看，△AEF 只是畫到原∠A 的外角去了而已，其它特色仍都存在，因此我們可叫它為廣義的內接四邊形。

2.當 $(\overline{AB}+\overline{CD})-(\overline{BC}+\overline{AD})<0$ 時，如圖(15)就是這種情況。我們要用尺規作圖求作出其第一型的內接四邊形。

作法：

(1)在圖(16)的直線 L 上，作 $\overline{KQ}=\overline{AB}$，$\overline{QR}=\overline{CD}$，反方向，作 $\overline{RS}=\overline{AD}$，$\overline{ST}=\overline{BC}$



圖(16)

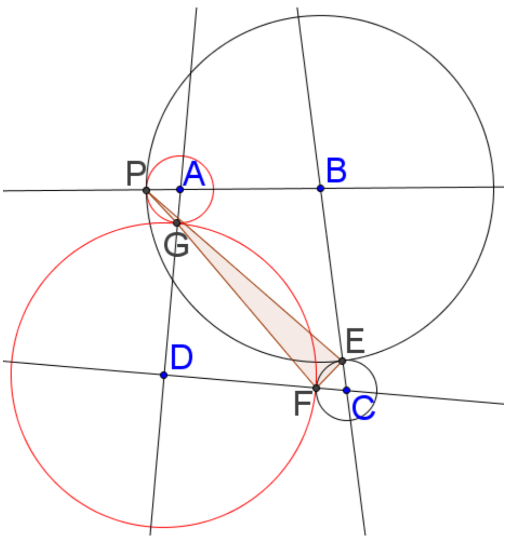
(2)作 $\overline{KT}$ 的中點 U

(3)和前一部份不同，因 $(\overline{AB}+\overline{CD})-(\overline{BC}+\overline{AD})<0$，所以當我們以 A 為圓心，$\overline{KU}$ 為半徑畫圓時，取此圓和 $\overleftrightarrow{AB}$ 的交點 P，P 在外部 (因為差值小於 0)

(4)以 B 為圓心，$\overline{BP}$ 為半徑，畫圓，交 $\overline{BC}$ 於 E

(5)以 C 為圓心，$\overline{CE}$ 為半徑，畫圓，交 $\overline{CD}$ 於 F

(6)以 D 為圓心，$\overline{DF}$ 為半徑，畫圓，交 $\overline{AD}$ 於 G



圖(15)

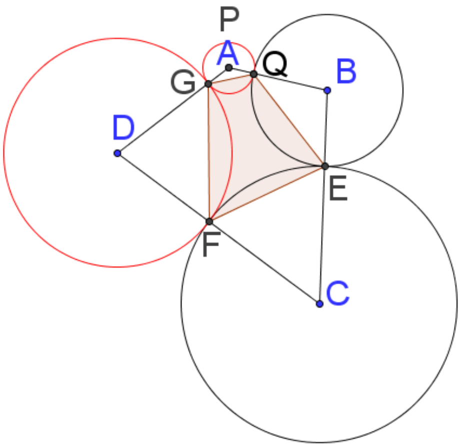
(7)連 $\overline{PE}$、$\overline{EF}$、$\overline{FG}$、$\overline{GP}$，則廣義的第一型內接四邊形 PEFG 即為所求

證明：略

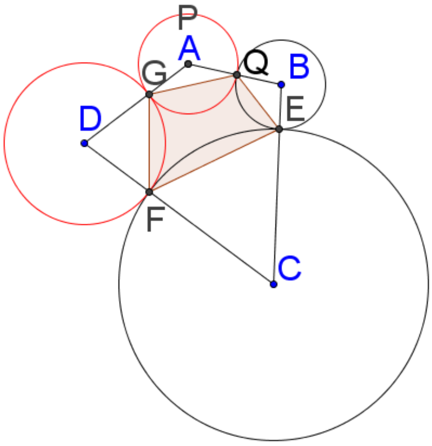
(六)討論：如右圖，一個四邊形 ABCD，從 A 點開始，順時針方向命名各邊長爲 $\overline{AB}=a$ 、

$\overline{BC}=b$ 、 $\overline{CD}=c$ 、 $\overline{DA}=d$ ，試分別觀察各類內接第一型四邊形的變化，並做結論。

1.當 $(a+c)-(b+d)=0$ 時，此時線段 AP=0

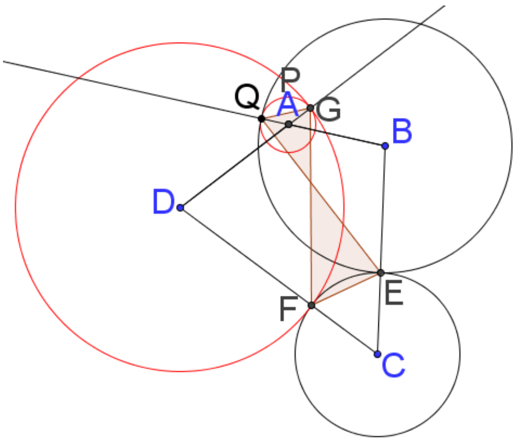


圖(17-1)

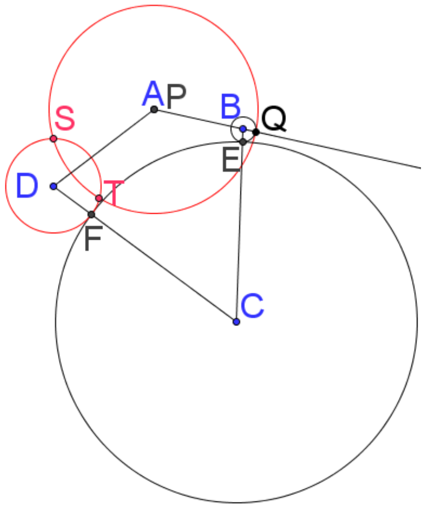


圖(17-2)

圖(17-1)、圖(17-2)表示從 $\overline{AB}$ 上任意點 Q 開始，都可畫出一個內接第一型四邊形，所以在此條件下存在**無限多個**第一型內接四邊形。

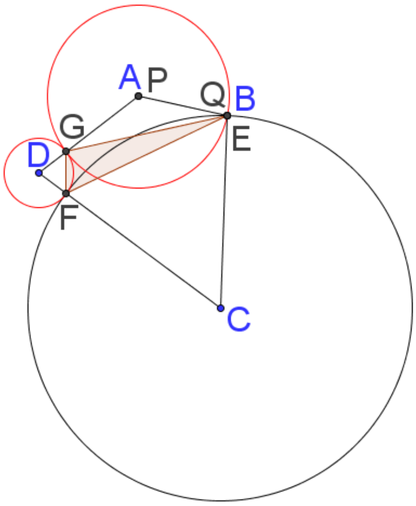


圖(17-3)

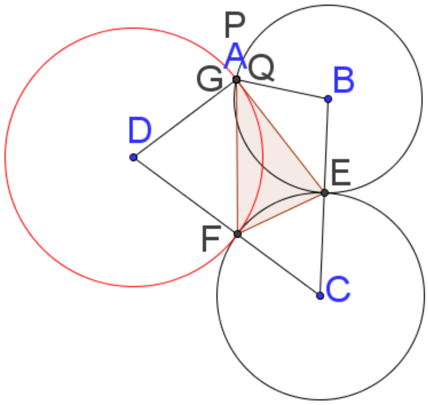


圖(17-4)

圖(17-3)表示若在 $\overline{AB}$ 的左側任取一點 Q 開始，則畫出扭曲的第一型內接四邊形。圖(17-4)表示若在 $\overline{AB}$ 的右側任取一點 Q 開始，則畫不出第一型內接四邊形。(因圓 A 和圓 D 有兩交點且不在 $\overline{AD}$ 上)做到這裡，我們發現可以用兩圓的內切、外切、相交、外離、內離等關係來辨認是否存在第一型內接圖形，例如圖(17-1)、圖(17-2)，從圓 B、圓 C、圓 D 到圓 A 時，它們都外切，最後觀察圓 A 和圓 D 這頭尾兩個圓，若它兩仍相切時，第一型內接多邊形即存在。若像圖(17-3)一樣，第一型內接四邊形扭曲，第一型內接多邊形也存在。而像圖(17-4)圓 A 和圓 D 相交於相異兩點時第一型內接多邊形都不存在。



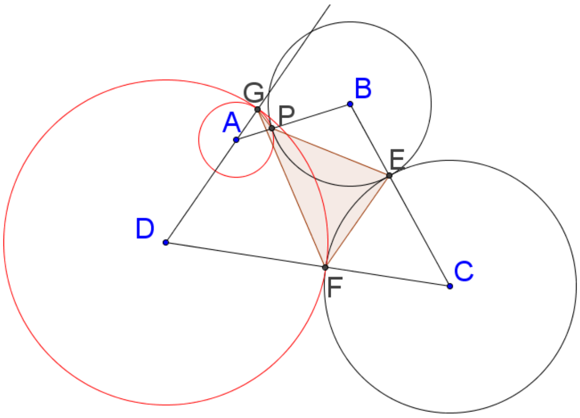
圖(17-5)



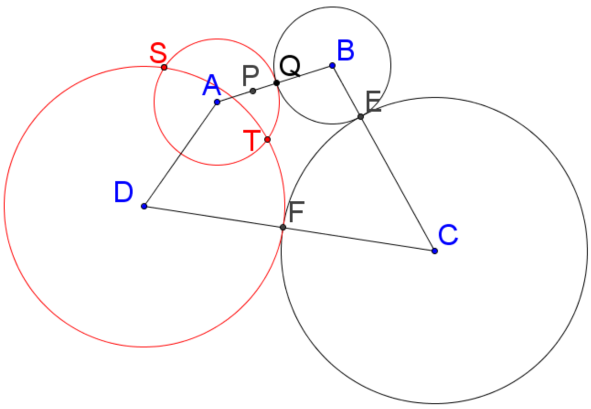
圖(17-6)

圖(17-5)，圖(17-6)表示若在 $\overline{AB}$ 的兩端點上任取一點 Q，則畫出來的第一型內接四邊形退化成三角形，仍算**有解**。

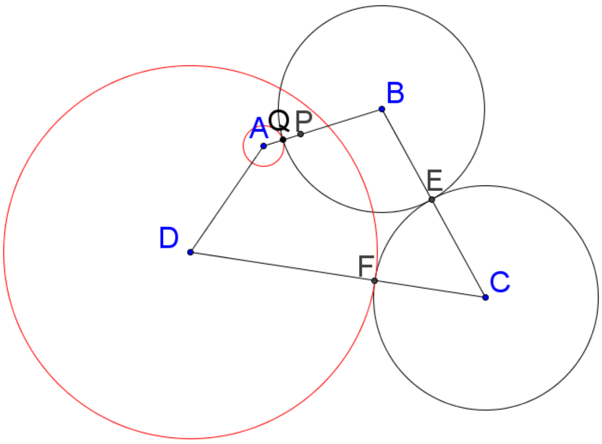
2.當 $(a+c)-(b+d)>0$ 時，僅在圖(17-7)時有解，且是**唯一的**。



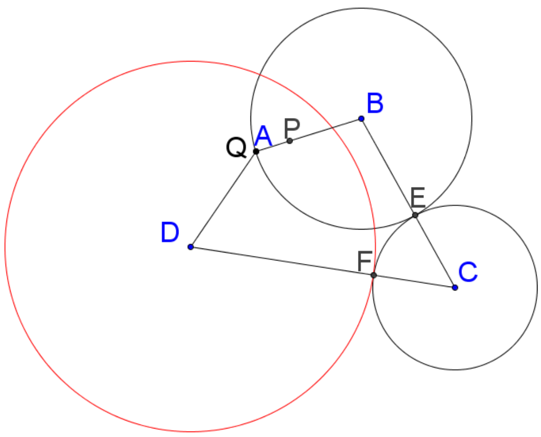
圖(17-7)，圓 A 和 D 圓內切，**唯一解**



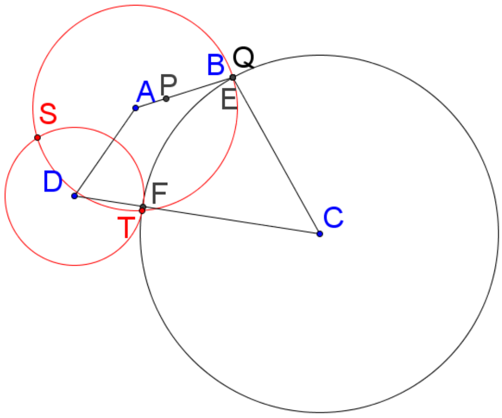
圖(17-8)，圓 A 和圓 D 相交於兩點 S、T，**非解**



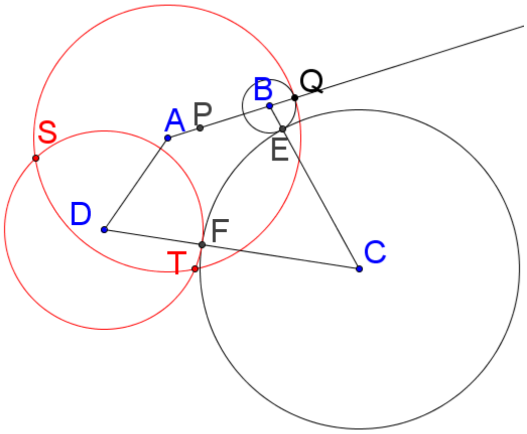
圖(17-9)，圓 A 和圓 D 內離，**非解**



圖(17-10)，圓 A 退化成一點和圓 D 內離，**非解**

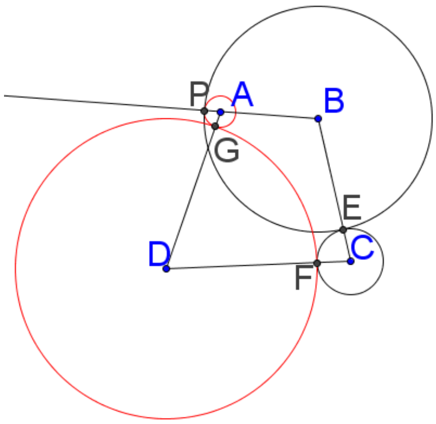


圖(17-11)，圓 B 退化成一點，圓 A 和
圓 D 相交於兩點 S、T，**非解**

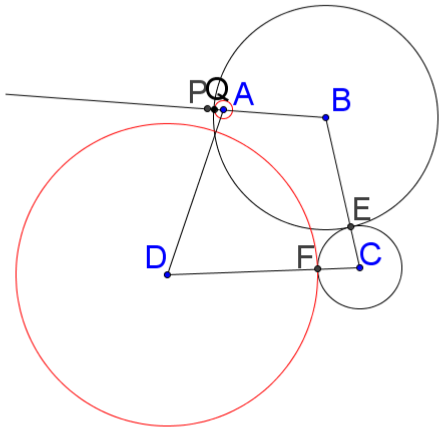


圖(17-12)，圓 A 和圓 D
相交於兩點 S、T，**非解**

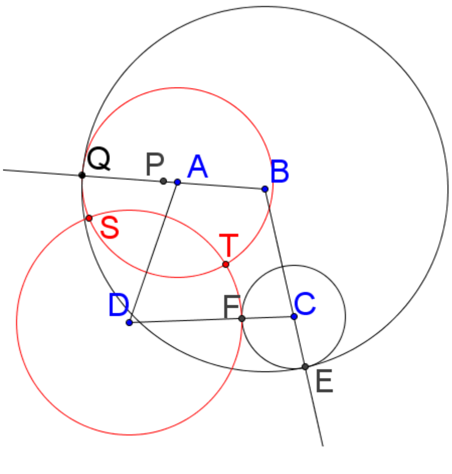
結論：在此條件下，恰有一個解，如圖(17-7)，其餘的位置都非解，如圖(17-8)~圖(17-12)
3.當 $(a+c)-(b+d)<0$ 時，僅在圖(17-13)時有解且是唯一的



圖(17-13)圓 A 和圓 D 外切，有**唯一解**



圖(17-14)　，圓 A 和圓 D 外離，**非解**

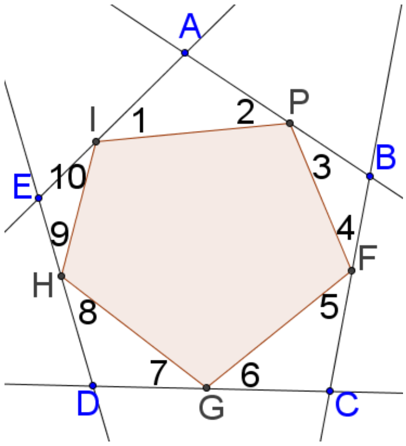


圖(17-15)　，圓 A 和圓 D
相交於兩點 S、T，**非解**

結論:在此條件下，有唯一解，如圖(17-13)此外都非解，如圖(17-14)到圖(17-15)

(七)觀察五邊形的第一型內接五邊形

如圖(18)，同樣的我們先假設存在五邊形 ABCDE 的內接五邊形 PFGHI，使∠1=∠2，∠3=∠4，⋯，∠9=∠10。故 $\overline{AP}=\overline{AI}$，$\overline{BP}=\overline{BF}$，$\overline{CF}=\overline{CG}$，$\overline{DH}=\overline{DG}$，$\overline{EI}=\overline{EH}$。顯然這五邊形不一定共圓



圖(18)

我們發現 $(\overline{AB}+\overline{AE}+\overline{CD})-(\overline{BC}+\overline{ED})$

$$=(\overline{AP}+\overline{PB}+\overline{AI}+\overline{IE}+\overline{CG}+\overline{GD})-(\overline{BF}+\overline{FC}+\overline{EH}+\overline{HD})$$

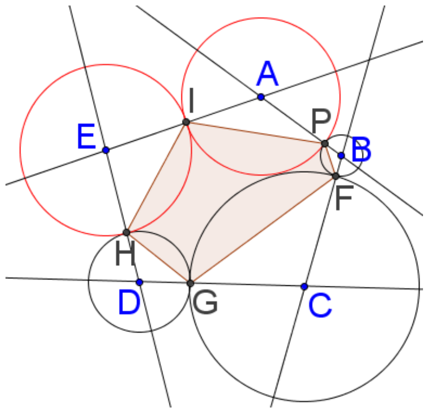
$$=\overline{AP}+\overline{AI}=2\overline{AP}$$

所以 $\overline{AP}=\dfrac{1}{2}[(\overline{AB}+\overline{AE}+\overline{CD})-(\overline{BC}+\overline{ED})]$，明顯的一定唯一，只是其值可能大於 0、小於 0 或等於 0，我們逐一的將它畫出來。

1.當 $(\overline{AB}+\overline{AE}+\overline{CD})-(\overline{BC}+\overline{ED})>0$ 時，如圖(19)，作圖的方法是：

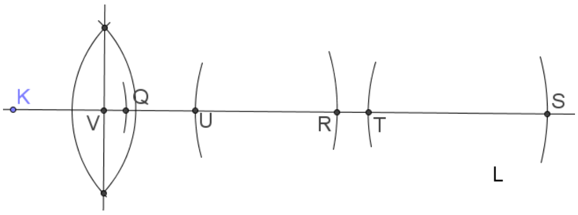
(1)先在直線 L 上，作

$\overline{KV}=\dfrac{1}{2}[(\overline{AB}+\overline{AE}+\overline{CD})-(\overline{BC}+\overline{ED})]$，如圖(20)



圖(19)

(2)以 A 爲圓心，$\overline{KV}$ 爲半徑，畫圓，交 $\overline{AB}$ 於 P(因 $\overline{KV}$ 爲正值，故取 $\overline{AB}$ 之間的 P 點)



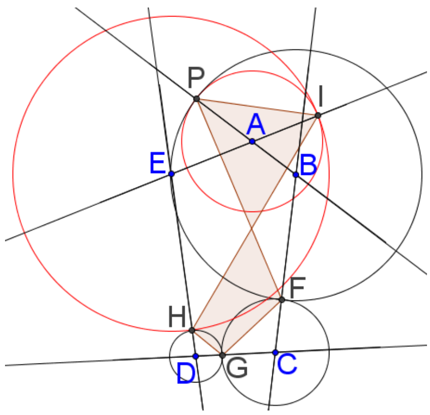
圖(20)

(3)以 B 爲圓心，$\overline{BP}$ 爲半徑，畫圓，交 $\overline{BC}$ 於 F

(4)以 C 爲圓心，$\overline{CF}$ 爲半徑，畫圓，交 $\overline{CD}$ 於 G

(5)以 D 爲圓心，$\overline{DG}$ 爲半徑，畫圓，交 $\overline{DE}$ 於 H

(6)以 E 爲圓心，$\overline{EH}$ 爲半徑，畫圓，交 $\overline{AE}$ 於 I

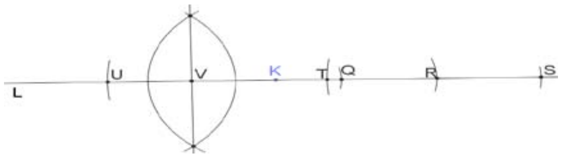


圖(21)

(7)連 $\overline{PF}$ 、$\overline{FG}$ 、$\overline{GH}$ 、$\overline{HI}$ 、$\overline{IP}$ ，則第一型內接五邊形 PFGHI 即為所求。

2.當 $(\overline{AB}+\overline{AE}+\overline{CD})-(\overline{BC}+\overline{ED})<0$ 時，如圖 (21)，在圖(22)上，作

$\overline{KV}=\frac{1}{2}[(\overline{AB}+\overline{AE}+\overline{CD})-(\overline{BC}+\overline{ED})]$ 其值小於 0，故以 A 為圓心，$\overline{KV}$ 為半徑，畫圓，此時取 $\overline{AB}$ 外側的交點上，接下去如同 1.的畫法，最後得到的第一型內接五邊形 PFGHI 如圖(21)上所示。



圖(22)

3.當 $(\overline{AB}+\overline{AE}+\overline{CD})-(\overline{BC}+\overline{ED})=0$ 時，如圖(23)

因為 $\overline{AP}=\frac{1}{2}[(\overline{AB}+\overline{AE}+\overline{CD})-(\overline{BC}+\overline{ED})]=0$，作圖如下：

(1)在 $\overline{AB}$ 上，任取一點 Q。

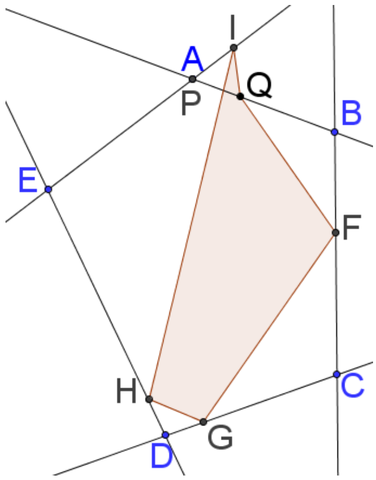
(2)以 A 為圓心，以 $\overline{AQ}$ 為半徑，畫圓，交 $\overrightarrow{EA}$ 於 I

(3)以 B 為圓心，以 $\overline{BQ}$ 為半徑，畫圓，交 $\overline{BC}$ 於 F

(4)以 C 為圓心，以 $\overline{CF}$ 為半徑，畫圓，交 $\overline{CD}$ 於 G

(5)以 D 為圓心，以 $\overline{DG}$ 為半徑，畫圓，交 $\overline{DE}$ 於 H

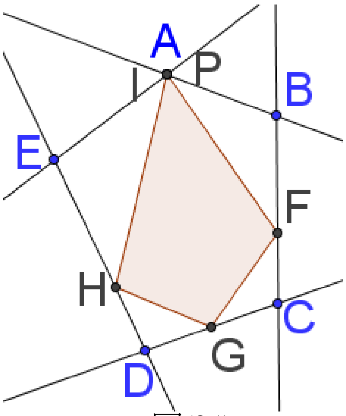
(6)以 E 為圓心，以 $\overline{EH}$ 為半徑，畫圓，和圓 A 內切於 I



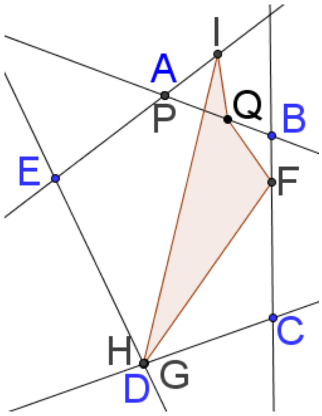
圖(23)

故在此條件下，第一型內接五邊形有無限多組解。

因此當 $(\overline{AB}+\overline{AE}+\overline{CD})-(\overline{BC}+\overline{ED})=0$ 時，如圖(24)，我們可以在 $\overline{AB}$ 上任取一點，都可畫出第一型內接五邊形，其中有的會退化，如圖(24)和圖(25)，大部分不會退化，我們發現此時有無限多個第一型內接五邊形可以畫出來。



圖(24)



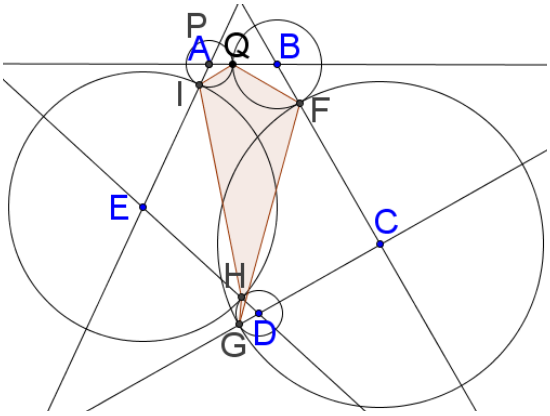
圖(25)

(八)討論：

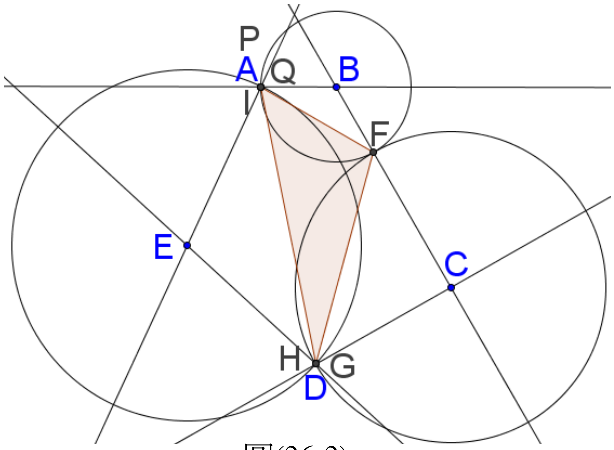
如右圖，一個五邊形 ABCDE，從 A 點開始，順時針方向，命名各邊長爲 $\overline{AB}=a$ ，

$\overline{BC}=b$ ，$\overline{CD}=c$ ，$\overline{DE}=d$ ，$\overline{EA}=e$ ，試分別觀察各類內接第一型五邊形的變化，並作結論。

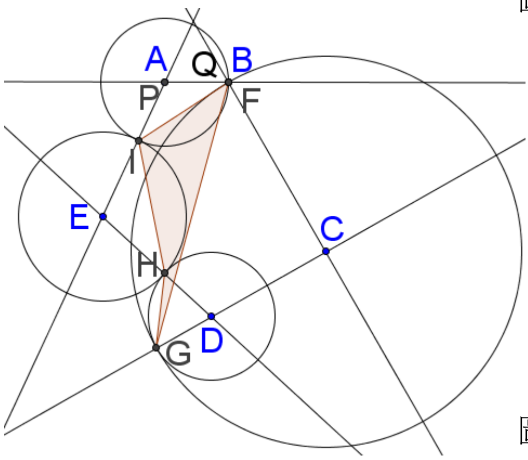
1.當 $(a+c+e)-(b+d)=0$ 時，在 $\overline{AB}$ 上任取一點開始都可畫出第一型內接五邊形，如圖(26-1)，當起點落在端點 A 或 B 時，內接五邊形會退化成三邊形或四邊形如圖(26-2)、(26-3)



圖(26-1)



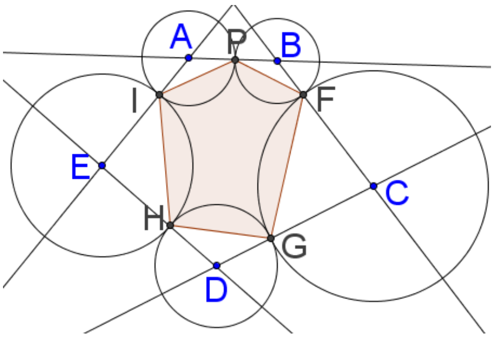
圖(26-2)



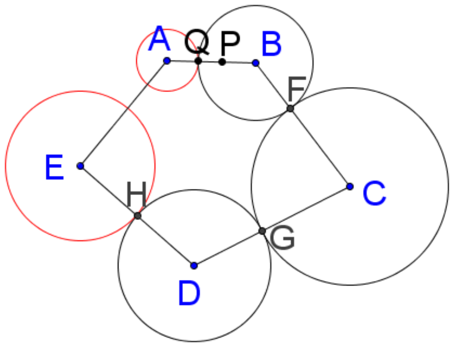
圖(26-3)

2.當 $(a+c+e)-(b+d)>0$ 時，只有一解，起點在射線 AB 上的 P 點

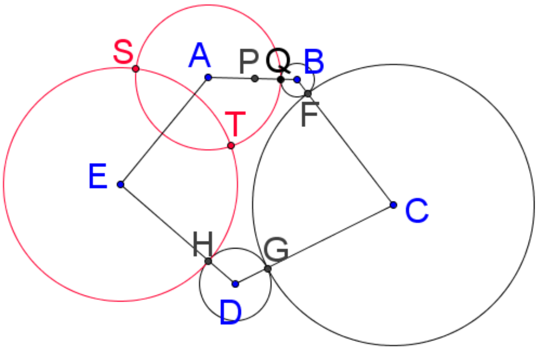
$$\overline{AP}=(\overline{AB}+\overline{CD}+\overline{AE})-(\overline{BC}+\overline{DE})/2$$



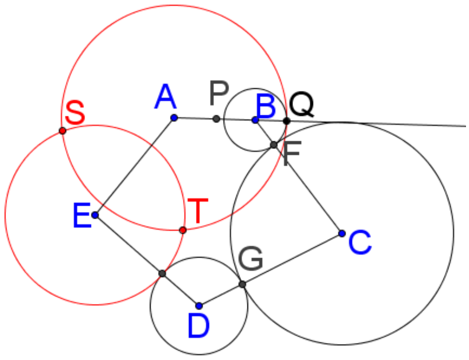
圖(26-4)，唯一解



圖(26-5)，圓 E 和圓 A 外離，**非解**



圖(26-6)，圓 E 和圓 A 相交於兩點 S、T，**非解**



圖(26-7)，圓 E 和圓 A 相交於兩點 S、T，**非解**

討論：在此條件下，恰有一個解，如圖(26-4)，其餘的位置都非解，如圖(26-5)~圖(26-7)

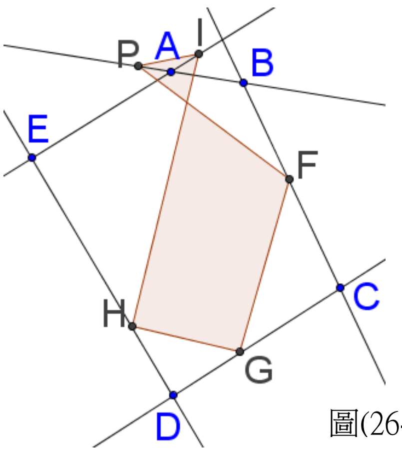
如圖(26-5)，圓 A 的半徑為 AQ＜AP，圓 A 和圓 E 最後不相交。

如圖(26-6)，圓 A 的半徑為 AQ＞AP，圓 A 和圓 E 最後相交於相異兩點。

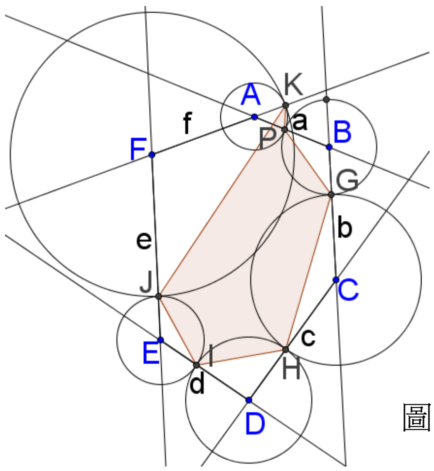
如圖(26-7)，圓 A 的半徑為 AQ＞AB，圓 A 和圓 E 最後相交於相異兩點。

因此，當 $(a+c+e)-(b+d)>0$ 時，只有一解

3.當 $(a+c+e)-(b+d)<0$ 時在此條件下，同理恰有一個解，如圖(26-8)

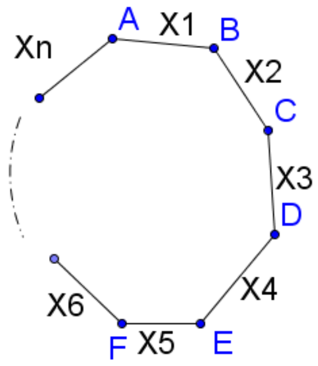


圖(26-8)



圖(27)

(九)任意六邊形的第一型內接六邊形的探討，如圖(27)，基於方便說明，之後我們約定畫第一型內接多邊形時，都從 A 點開始，再依順時針方向繞一圈，且規定 $\overline{AB}=a$、$\overline{BC}=b$、$\overline{CD}=c$、$\overline{DE}=d$，$\overline{EF}=e$，……一直按順序表示各邊的邊長。進一步的，若是 n 邊多邊形時，各邊長就用 x_1、x_2、x_3、$x_4\cdots x_n$ 表示。如圖(28)



圖(28)

綜合前三邊、四邊、五邊多邊形的畫法與證明後，我們發現一個規律，設 $\overline{AB}$ 為最短邊，我們從 A 點開始，畫第一型的半徑 r 的取法有一定的規則：

1.三邊形，$2r=a-b+c$

2.四邊形，$2r=a-b+c-d$

3.五邊形，$2r=a-b+c-d+e$，其餘類推

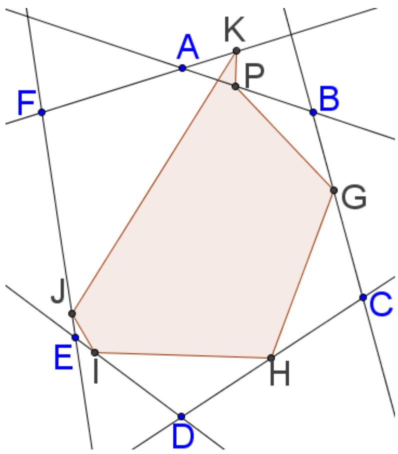
故推論六邊形的半徑 $r=\frac{1}{2}(a-b+c-d+e)$ 即 $\frac{1}{2}(X_1-X_2+X_3-X_4+X_5-X_6)$

且當 $r>0$ 時，此內接多邊形的第一個頂點位在 $\overleftrightarrow{AB}$ 上 P 的右側。如圖(29)

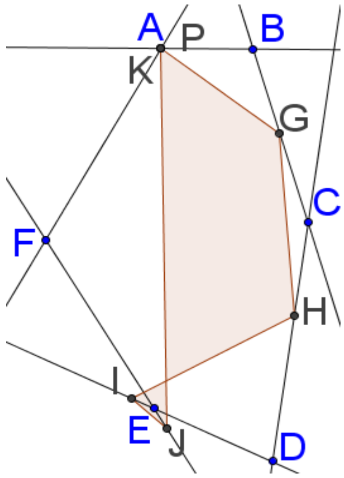
當 $r=0$ 時，此內接多邊形的第一個頂點就位在 A 點，與 A 重和，如圖(30)

又第一點落在 $\overline{AB}$ 上的任一位置也都存在第一型內接多邊形，如圖(31)

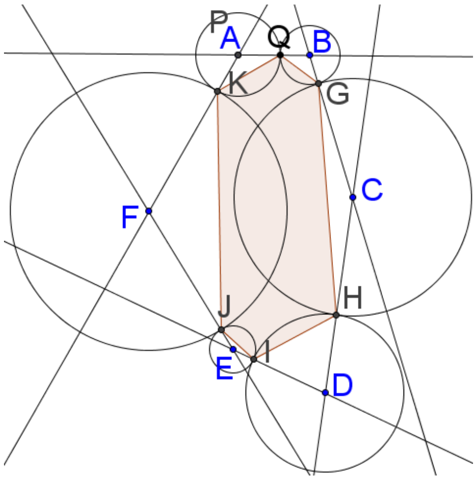
當 $r<0$ 時，此內接多邊形的第一個頂點位在 $\overleftrightarrow{AB}$ 上 P 的左側，如圖(32)



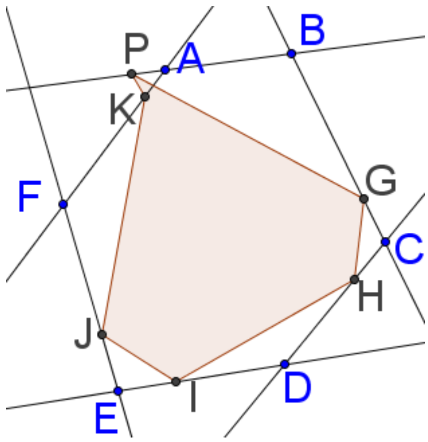
圖(29)，r>0，起點 P 在 A 點右側



圖(30)，r=0，第一點在 A 點，即本身 A=P



圖(31)，r=0，第一點在 A 點右側的 Q 點



圖(32)，r<0，第一點在 A 點左側的 P 點

(十)任意 n 邊形的第一型內接多邊形探討總結

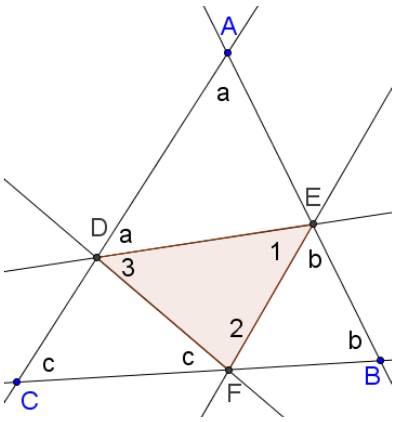
1.若 n 為正整數，取 x_1 為最短邊長，令 $r=\frac{1}{2}(x_1-x_2+x_3-x_4+\cdots x_n)$

(1)若 r>0 時，其內接第一型多邊形，有唯一解

(2)若 r =0 時，其內接第一型多邊形，有無限多組解

(3)若 r<0 時，其內接第一型多邊形，有唯一解

2.當 n≧4 且 r =0 時，都會發生第一型內接多邊形有退化現象。且發生位置是作圖時第一點取在該邊的任一端點上，此時 n 邊形退化成 n-1 邊形或更低。



圖(35)

三、第二型內接多邊形作圖探討

(一)如圖(35)，若△DEF 為△ABC 的第二型內接△

我們將先推導△DEF 三內角與△ABC 三內角的關係，設∠A=a 度，∠B=b 度，∠C=c 度，在△ADE 中，∠1+b=2a，得∠1=2a-b，同理可得，∠2=2b-c，∠3=2c-a，就算我們有了△DEF 的三內角，由於不知道三邊長中的任一邊長，要畫出這個第二型內接△看起來不容易，我們又想了好幾個星期才被我們想出方法來。

(二)已知△ABC，如圖(36)

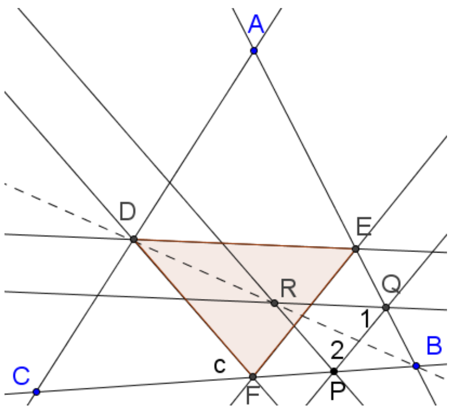
求作：以尺規作圖畫出△ABC 的第二型內接△

作法：

(1)在 $\overline{BC}$ 上，任取一點 P

(2)以 P 為圓心，$\overline{PB}$ 為半徑，畫弧，交 $\overline{BA}$ 於 Q

(3)連 $\overline{PQ}$



圖(36)

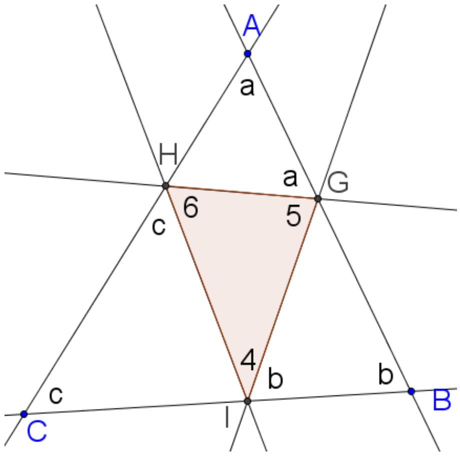
(4)以 $\overline{PQ}$ 為△的一邊長，在 $\overline{PQ}$ 的同側，作

$\angle 2 = 2b\text{-}c$，作 $\angle 1 = 2a\text{-}b$，設 $\angle 2$ 和 $\angle 1$ 的另一邊交於 R

(5)作直線 $\overline{BR}$，交 $\overline{AC}$ 於 D

(6)過 D，分別作 $\overline{DE} // \overline{RQ}$，作 $\overline{DF} // \overline{RP}$，分別交

$\overline{BA}$，$\overline{BC}$ 於 E、F



圖(37)

(7)連 $\overline{EF}$，則△DEF 即為△ABC 的第二型內接△

證明：略

註:當 2b-c 或 2a-b 為零或負數時，仍可作圖，只是作圖方向取法不同而已，請看附件一。

(三)在如同上文的△ABC 中，我們發現若圖(35)的內接△稱為逆時針內接△，則如圖(37)應該存在另一方向的順時針內接△GHI，作圖如下：

已知△ABC，如圖(38)

求作：以尺規作圖，畫出△ABC 的另一方向第二型內接△

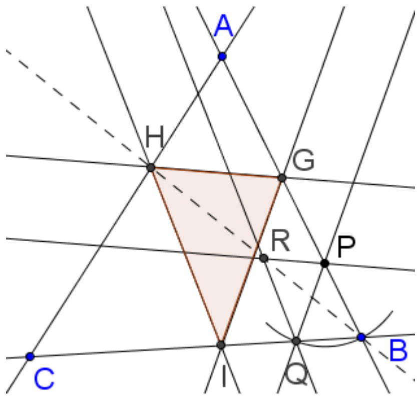
作法：

(1)在 $\overline{AB}$ 上，任取一點 P

(2)以 P 為圓心，$\overline{PB}$ 為半徑，畫弧，交 $\overline{BC}$ 於 Q

(3)連 $\overline{PQ}$

(4)作 $\angle 4 = 2c\text{-}b$，作 $\angle 5 = 2b\text{-}a$，設 $\angle 4$ 和 $\angle 5$ 的另一邊交於 R



圖(38)

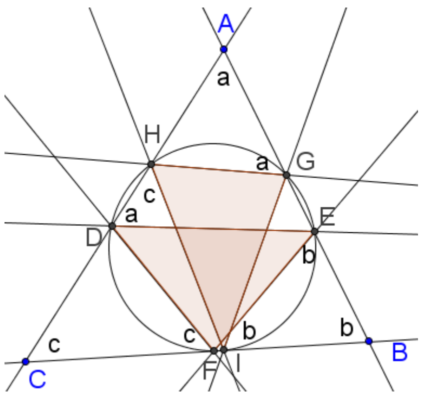
(5)作直線 $\overline{BR}$，交 $\overline{AC}$ 於 H

(6)分別作 $\overline{HG} // \overline{RP}$，$\overline{HI} // \overline{RQ}$

(7)連 $\overline{GI}$，則△GHI 即為另一方向的內接第二型△

(四)將順逆時針方向的兩個內接第二型△，合併在同一母△中，如圖(39)

我們發現這兩個內接△會共圓，證明如下：



圖(39)

已知：△DEF 和△GHI 各爲逆時針及順時針方向的第二型內接△
求證：△DEF 和△GHI 共圓
證明：
1.∠AHG＝180°-2a，∠GED＝180°-b-∠DEF＝180°-b-(2a-b)＝180°-2a
由∠AHG＝∠GED 知四邊形 HDEG 共圓
2.∠CFD＝c 且∠DHI＝c，故四邊形 HDFI 共圓
3.∠GEF＝180°-b 且∠GIF＝180°-b 故四邊形 GHIF 共圓
4.由上述 1、2、3 推得 D、H、G、E、I、F 六點共圓，也就是說，△DEF 和△GHI 共圓

(五)討論：

1.這共圓現象有助於縮短我們同時畫出這兩個第二型內接△的時間，只要我們先畫出第一個△，再畫出此△的外接圓，即可由這外接圓和母△的其它三個交點，得出另一方向的內接△，非常方便。

2.在任意直角三角形中，第二型內接三角形有下列性質:

(1)兩內接三角形各有一頂點，和原直角三角形的直角頂點重合，所以六點共圓減成五點共圓。

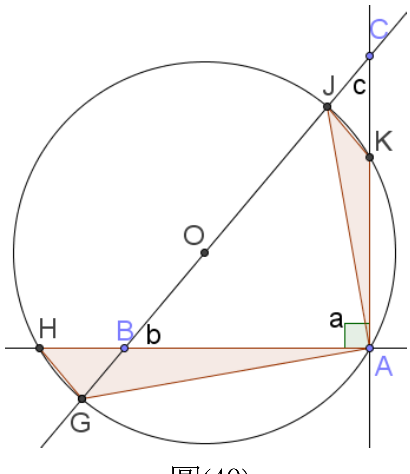
(2)五點共圓的圓心在原直角△的斜邊上。

已知：直角△ABC 中，∠A=90°，△AJK 爲順時針第二型內接△，△AGH 爲逆時針第二型內接△，△AJK 和△AGH 共圓，且圓心爲 O

求證：點 O 在斜邊 $\overleftrightarrow{BC}$ 上

證明：如圖(40)
∵弧 GA=2∠GHA=2b°
弧 AK=2∠AJK=2(2c-b)=4c-2b°
弧 JK=2∠KAJ=2(2b-a)=4b-2a°
∴弧 GA+弧 AK+弧 JK=2b+4c-2b+4b-2a
=4b+4c-2a=4(b+c)-2a=4*90°-2*90°=360°-180°=180°

故 $\overline{GJ}$ 爲圓 O 的直徑，也就是點 O 在斜邊 $\overleftrightarrow{BC}$ 上



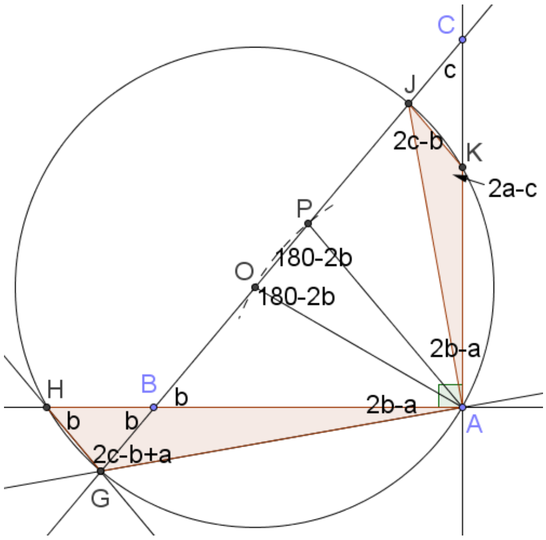
圖(40)

(3)五點圓和母△外接圓兩圓半徑相等。

我們進一步的可以證明圓 O 和△ABC 的外接圓的大小必相等。

已知：直角△ABC 中，∠A=90°，圓 O 爲其兩個第二形內接△的外接圓，圓 P 爲△ABC 的外接圓，如圖(41)

求證：圓 O 和圓 P 的半徑相等



圖(41)

證明：①連$\overline{OA}$、$\overline{PA}$

②∵∠GOA=2∠GHA=2b°，∴∠AOP=180-2b°

③在直角△ABC中∵P爲斜邊$\overline{BC}$的中點

　∴$\overline{PB}=\overline{PA}=\overline{PC}$，∴∠BPA=180°-2b°

④由②、③得知∠AOP=∠BPA

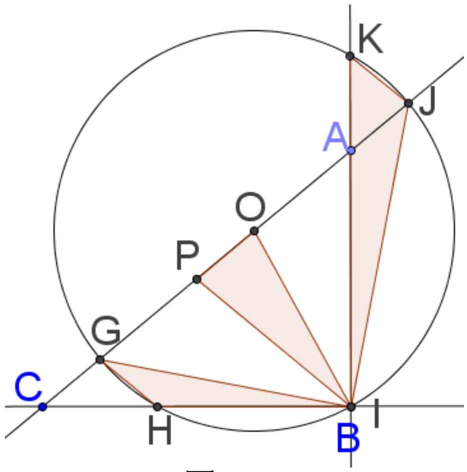
　故$\overline{OA}=\overline{PA}$，及圓 O 和圓 P 半徑相等

(4)任意直角△的兩第二型順逆內接△共圓的半徑恆爲斜邊的一半。

(5)如圖(42-1)，任意直角△中，直角頂、外心和共圓圓心所連起來的△AOP 的面積恆爲順逆兩個第二型內接△面積的算術平均數。

已知：直角△ABC 中，∠B=90°，△BKJ 爲逆時針第二型內接△，
　　△BGH 爲順時針第二型內接△，O 點爲△BKJ 和△BGH 共圓的圓心，P 點爲△ABC 外接圓的圓心。

求證：△BKJ 面積+△BGH 面積=2・△BOP 面積



圖(42-1)

證明：①∵$\overline{GJ}$爲直徑，∴∠JBG=90°=∠ABC

∵∠JBK=∠GBC，∴弧 KJ=弧 GH

∴$\overline{KJ}=\overline{GH}$，又$\overline{JK}=\overline{JA}$，$\overline{GH}=\overline{GC}$

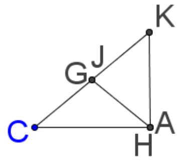
故$\overline{KJ}=\overline{JA}=\overline{GH}=\overline{GC}$，且等於$\overline{PO}$(平移)

②∠CGH+∠KJA=180°-2∠C+180°-2∠A
　　=360°-2(∠C+∠A)=360°-2*90°=180°互補

③由①、②，將兩△併在一起，如圖(42-2)，此時$\overline{JA}$(或$\overline{GH}$)成爲△KAC的中線，故△KJA面積=△CGH面積

④承①、②、③，由等底同高現象，
　知△BAJ 面積=△BPO 面積=△BGC 面積

⑤△BKJ+△BGH面積
　=(△BAJ+△JKA)+ △BGH
　=△BAJ+(△JKA+△BGH)
　=△BAJ+(△GCH+△BGH)
　=△BAJ+△BCG
　=△BOP+△BOP
　=2△BOP，得證



圖(42-2)

3.利用五點共圓的圓心在斜邊上及等半徑的特性，我們可以更快速的畫出那兩個第二型內接△，作法如下:

已知:直角△ABC，∠A=90°，如圖(42)

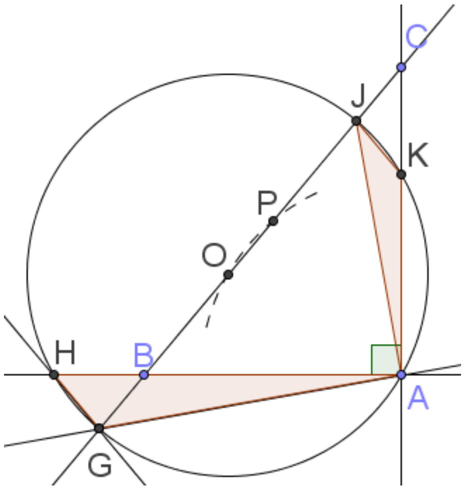
求作:順逆兩個第二型內接△(快速畫法)

作法:

(1)作 $\overline{BC}$ 的中點 P

(2)以 A 為圓心，$\overline{PA}$ 為半徑，畫弧，交 $\overleftrightarrow{BC}$ 於 O

(3)以 O 為圓心，$\overline{OA}$ 為半徑，畫圓，交斜邊 BC 於 G、J，又分別交邊 AC、邊 AB 於 K、H，則△AGH 和△AJK 為內接第二型△即為所求。



圖(42-3)

4.對於任意直角△的順逆第二型內接△共圓的圓的半徑是那麼的簡單，恆為原母△斜邊長的二分之一，我們也想將銳角△或鈍角△的第二型順逆內接△共圓的半徑利用母△的三邊長表示出來，我們試了一段很長的時間，利用我們國中的知識一直無法突破，但也不是完全沒收穫，當我們將母△的一內角指定角為 60°時，奇怪的事情發生了，我們竟然算出這共圓的半徑，非常高興。

已知：△ABC 中，∠A=60°，

△DEF 和△DAF 各為其順、逆兩個第二型內接△，圓 O 為此兩內接△共圓的圓。

求證：$\overleftrightarrow{BC}$ 必為圓 O 的切線，如圖(42-4)

證明：

(1)當∠A=60°時，由之前的性質知會五點共圓，由圖(42-5)知在 E 點共圓。

(2)連 $\overline{OD}$

(3) $\angle OED=\dfrac{180°-2(120°-\angle C)}{2}$

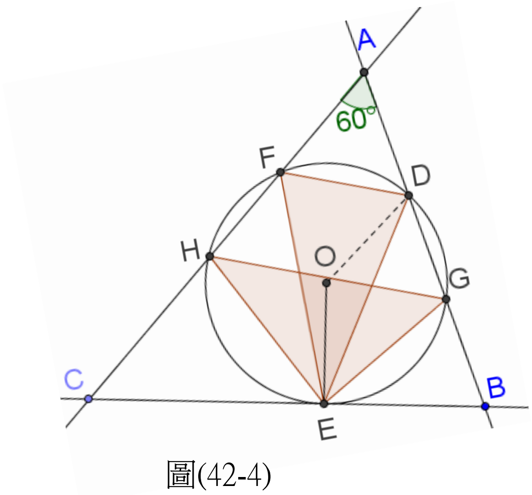
$=90°-120°+\angle C=\angle C-30°$

$\angle DEB=\angle B$

$\therefore \angle OED+\angle DEB=\angle C-30°+\angle B=120°-30°=90°$

$\therefore \overline{OE}\perp\overline{BC}$

$\therefore \overleftrightarrow{BC}$ 為圓 O 的切線



圖(42-4)

又當順逆兩內接△有一邊重合時，我們就可以算出此共圓的半徑。

已知：△ABC 中，∠A=60°，如圖(42-5)

△DEF 和△DAF 個為順逆兩個第二型內接△，圓 O 為其圓。

試以△ABC 邊長表示圓 O 的半徑

(令 r 為半徑，$\overline{AB}=c$ ，$\overline{BC}=a$ ，$\overline{CA}=b$)

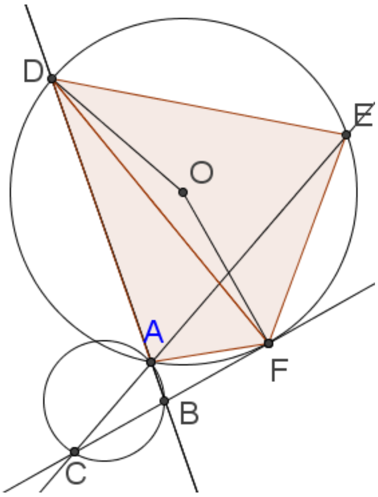
證明：(1)承上文，$\overleftrightarrow{BC}$ 為圓 O 切線

(2)證明△DEA 為正△

∵△DEF 為第二型內接△，∴$\overline{EA}=\overline{ED}$

又∠DAE=∠A=60°

故△DEA 三內角都是 60°，必為正△



圖(42-5)

(3)計算圓 O 的半徑

令正△DEA 的邊長為 x，由圓 O 的外冪性質

$\overline{BA}\cdot\overline{BD}=\overline{BF}^2$ …①

$\overline{CA}\cdot\overline{CE}=\overline{CF}^2$ …②

∵△DAF 也是第二型內接△，∴$\overline{FB}=\overline{FA}$ ，又 $\overline{AC}=\overline{AF}$ ，故 $\overline{BF}=\overline{AC}$ =b

當代入①　c・(c+x)=b^2

∴c^2+cx=b^2

cx= b^2 - c^2

$$x=\frac{b^2-c^2}{c}$$

而 r=正△高長的 $\frac{2}{3}$

故 $r=\frac{2}{3}(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{b^2-c^2}{c})=\frac{\sqrt{3}}{3}(\frac{b^2-c^2}{c})$

當代入②　$b(b+x)=(a+b)^2$

$b^2+bx=a^2+2ab+b^2$

$$x=\frac{a^2+2ab}{b}$$

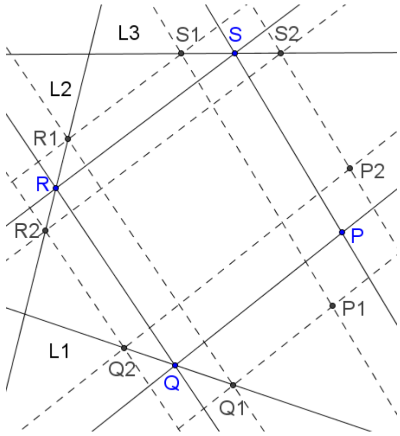
故 $r=\frac{\sqrt{3}}{3}(\frac{a^2+2ab}{b})$

(六)四邊形的內接第二型四邊形探討：

可惜的是我們延續用畫△的方法去畫四邊形的第二型內接四邊形卻畫不出來，因為我們不知道這第二型內接四邊形的邊長比，我們只得再去尋找其它的畫法，經過了好幾星期的努力後，皇天不負苦心人，終於被我們想出辦法來了，我們先準備了一個預備定理，敘述如下：

※預備定理：

已知平面上三直線 L_1 、L_2 、L_3 及四邊形 PQRS，其中 Q、R、S 分別落在 L_1 、L_2 、L_3 上，且另兩四邊形 P_1 、Q_1 、R_1 、S_1 及 P_2 、Q_2 、R_2 、S_2 的 Q_1 、Q_2 落在 L_1 上，R_1 、R_2 落在 L_2 上，S_1 、S_2 落在 L_3 上，又各對應邊都平行，如圖(43-1)



圖(43-1)

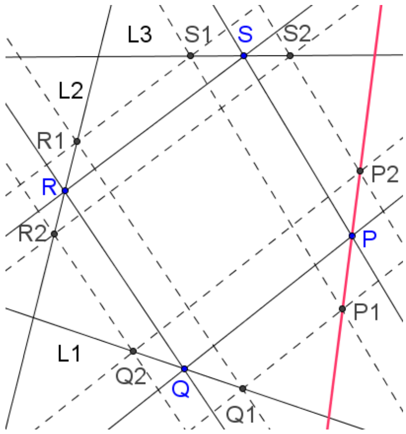
求證：P 、P_1 、P_2 三點共線

證明：(1)連 $\overline{PP_2}$、$\overline{PP_1}$，設直線 $\overline{PP_1}$ 交直線 $\overline{S_2P_2}$ 於 P_2'

(2)$\because$ $\overline{P_1S_1} // \overline{PS} // \overline{P_2'S_2}$ $\therefore$ $\overline{P_1P} : \overline{PP_2'} = \overline{S_1S} : \overline{SS_2}$

(3)同理$\because$ $\overline{S_2R_2} // \overline{SR} // \overline{S_1R_1}$ $\therefore$ $\overline{S_1S} : \overline{SS_2} = \overline{R_1R} : \overline{RR_2}$

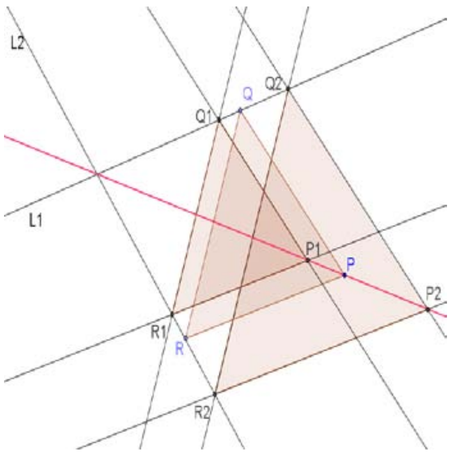
及 $\overline{R_1R} : \overline{RR_2} = \overline{Q_2Q} : \overline{QQ_1}$



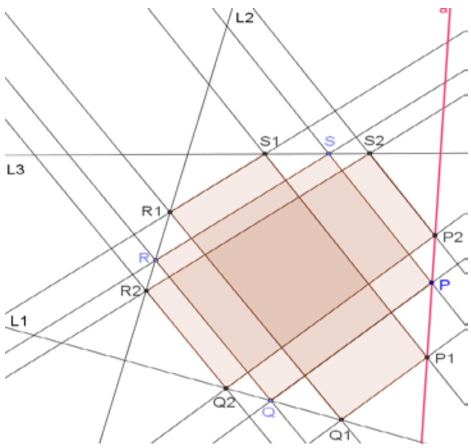
圖(43-2)

(4)$\because$ $\overline{Q_2P_2} // \overline{QP}$ 且 $\overline{Q_2P_2'} // \overline{QP}$ 故點 P_2' 和 P_2 是同一點，因此點 P_1 ，P ，P_2 必在同一直線上，如圖(43-2)

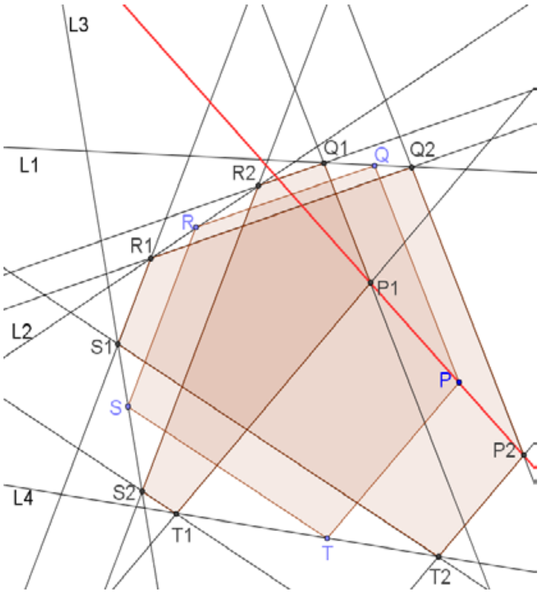
※預備定理應用於三、四、五、六…等多邊形的共線概念圖



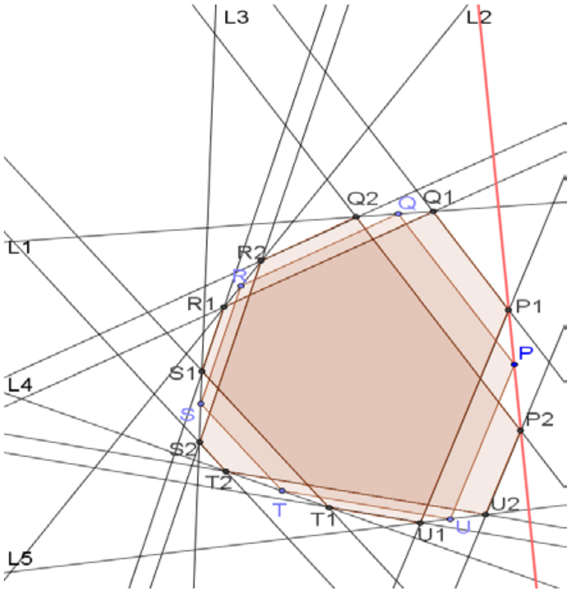
三邊形的共線概念圖



四邊形的共線概念圖



五邊形的共線概念圖



六邊形的共線概念圖

有了這個預備定理後，我們就能輕易的畫出任意四邊形的第二型內接四邊形

已知：四邊形 ABCD，如圖(44)

求作：畫出 ABCD 的第二型內接四邊形(逆)

作法：

(1)先在 $\overline{BC}$ 邊上任取一點 M

(2)作 $\overline{MQ}=\overline{MC}$ ，$\overline{QR}=\overline{QD}$ ，$\overline{RS}=\overline{RA}$ ，

$\overline{SN}=\overline{BS}$ ，設直線 $\overline{SN}$ 、$\overline{QM}$ 交於 P

(3)如同預備定理中的作圖法，再任作兩個四邊形 $P_1Q_1R_1S_1$ 及 $P_2Q_2R_2S_2$ ，並使同一組對應邊都平行

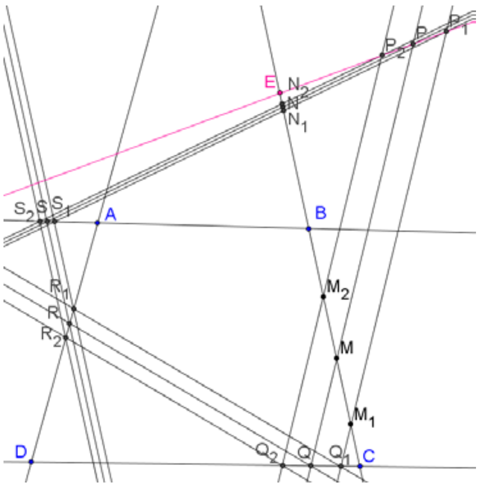
(4)由預備定理可知 P_1 、 P 、 P_2 共線

(5)延長 $\overline{PP_1}$ 交 $\overline{BC}$ 於 E，如圖(45)

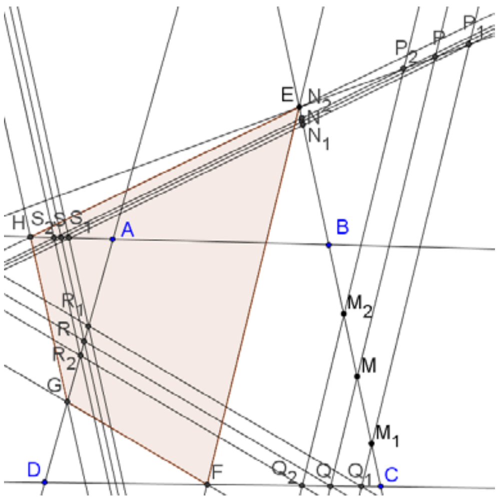
(6)過 E 作 $\overline{EF}\,//\,\overline{PQ}$ ，$\overline{GF}\,//\,\overline{QR}$ ，$\overline{HG}\,//\,\overline{RS}$ ，

$\overline{HE}\,//\,\overline{SP}$ ，則第二型內接四邊形即爲所求

證明：略



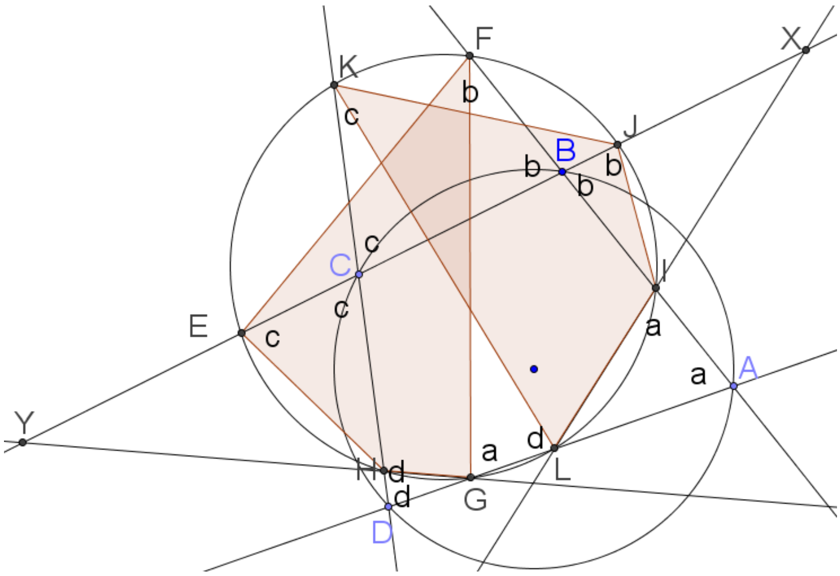
圖(44)



圖(45)

(七)第二型順、逆內接四邊形的關係圖：

1.我們發現若母四邊形共圓，則它的兩個順、逆第二型內接四邊形共圓，如圖(46)



圖(46)

已知：A、B、C、D 四點共圓，EFGH、IJKL 分別爲其第二型內接四邊形。且 ∠A=a 度、∠IBJ=b 度、∠ECH=c 度、∠D=d 度

求證：E、F、G、H、I、J、K、L 八點共圓

證明：

(1) ∠EFG=∠EFA-∠GFA=b-(180-2a)=2a+b-180

∠EHY=180-∠GHC-∠CHE=180-(180-d)-(180-2c)=2c+d-180

又由共圓四邊形 ABCD 外角定理知 a=c、b=d

∴∠EFG=∠EHY

則 E、F、G、H 四點共圓

(2) ∠JKL=∠JKD-∠LKD=c-(180-2d)=2d+c-180

∠FIX=180-∠LIF-∠JIB=180-(180-a)-(180-2b)=2b+a-180

又∵a=c、b=d

∴∠JKL=∠FIX

則 I、J、K、L 四點共圓

(3) ∠KJE=180-2c 且∠KHE=180-2c

∴∠KJE=∠KHE

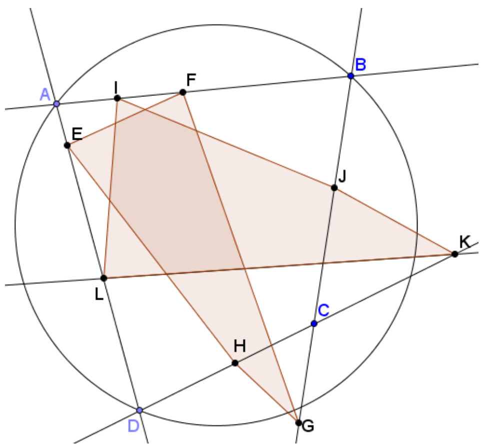
則 J、K、E、H 四點共圓

(4) ∠IFG=180-2a 且∠ILA=180-2a

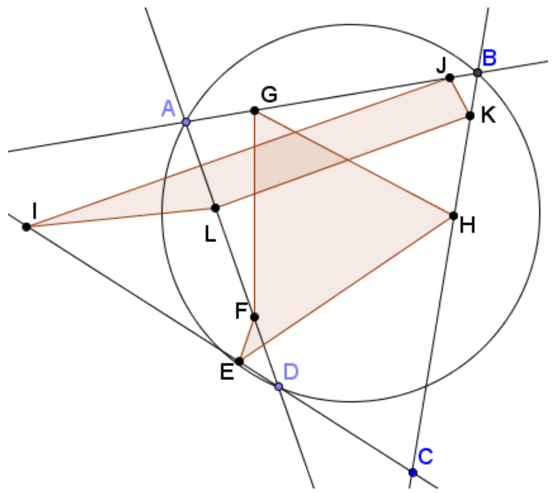
則 I、L、G、F 四點共圓

(5)由(1)、(2)、(3)、(4)可推得 E、F、G、H、I、J、K、L 八點必共圓

2.我們發現若母四邊形沒有共圓，C 點不在圓上，則它的兩個順、逆第二型內接四邊形不會共圓，如圖(47-1)、(47-2)

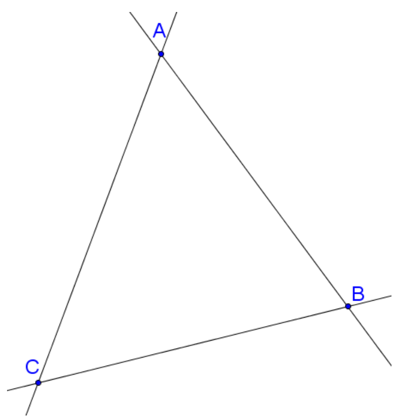


圖(47-1)，點 C 在圓內，八點不共圓

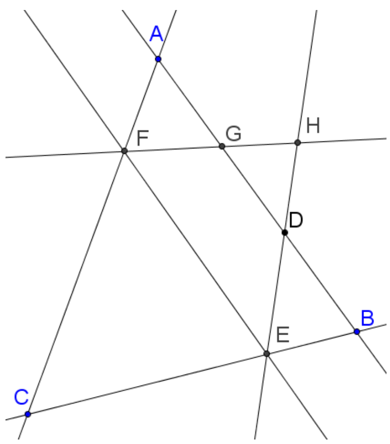


圖(47-2)，點 C 在圓外，八點不共圓

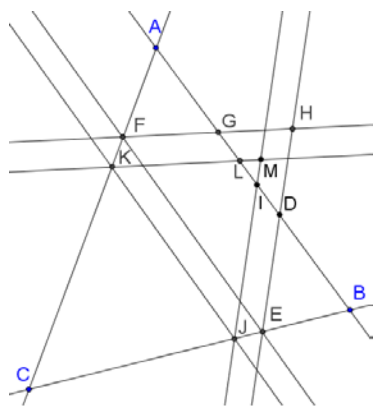
(八)利用預備定理的概念，重畫三角形第二型內接△



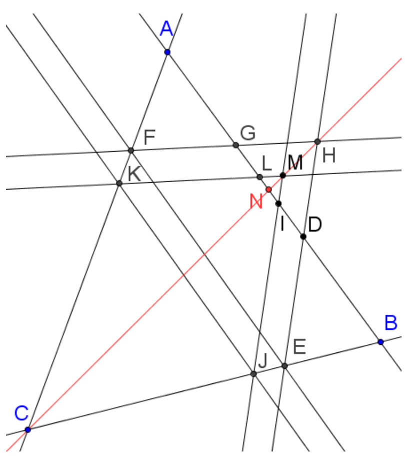
圖(48-1)



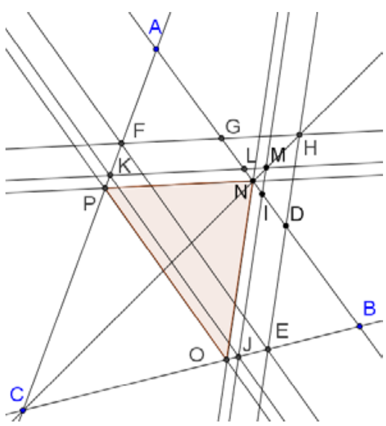
圖(48-2)



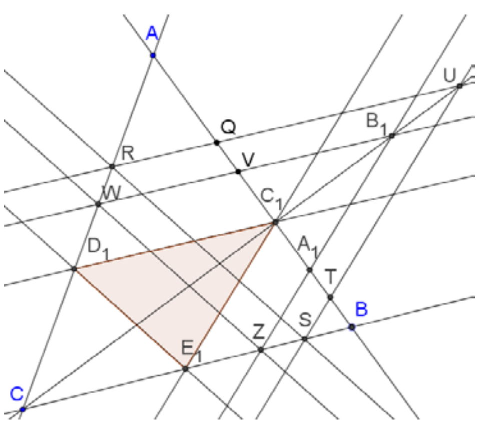
圖(48-3)



圖(48-4)



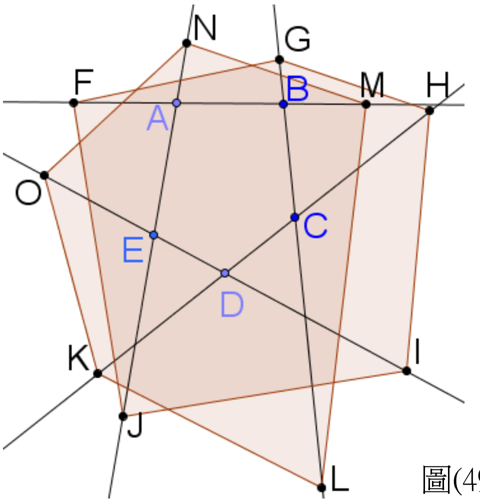
圖(48-5)



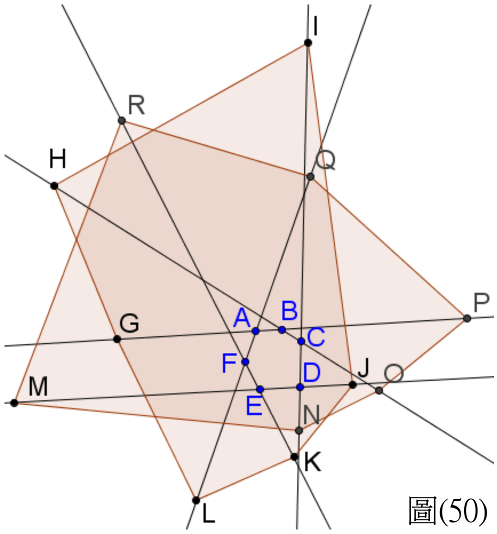
圖(48-6)

則如圖(48-5) 中△NOP 爲第型順時針方向內接△，又利用同樣方法在圖(48-6) 中，△$C_1D_1E_1$ 爲第二型逆時針方向內接△。

(九)利用同法，畫出五邊形及六邊形的第二型內接圖形(七邊、八邊見附件二)：



圖(49)



圖(50)

※註：

1.如圖(49)爲原五邊形 ABCDE 所畫出來的兩個第二型順逆內接五邊形 FGHIJ、KLMNO

2.如圖(50)爲原六邊形 ABCDEF 所畫出來的兩個第二型順逆內接六邊形 GHIJKL、MNOPQR

3.順逆兩個內接五邊形十點不共圓，但個別兩個會共橢圓或雙曲線，見附件三

4.順逆兩個內接六邊形十二點不共圓，且個別兩個也不易共圓、橢圓、雙曲線，見附件四

5.當邊數更多更不易共圓或橢圓或雙曲線，除非是正多邊形

6.我們統整了第二型內接多邊形的特性，表格如下：

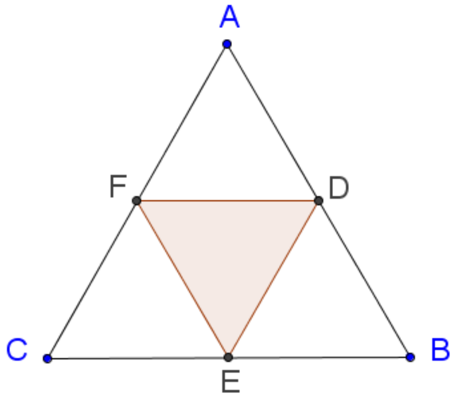
原多邊形邊數 / 原多邊形頂點狀態	三邊	四邊	五邊	六邊以上(含)
N 點共圓	六點恆共圓 (順逆三邊形共六頂點)	八點恆共圓 (順逆四邊形共八頂點)	順逆內接五邊形各爲共圓、共橢圓或共雙曲線	順逆兩多邊形不易共圓.橢圓或雙曲線
N 點不共圓		八頂點不共圓	順逆內接五邊形各爲共圓、共橢圓或共雙曲線	順逆兩多邊形不易共圓.橢圓或雙曲線

※註：上表中的橢圓和雙曲線是用 GeoGebra 軟體判斷的。

四、正多邊形第一、二型的速畫法：

(一)正△的第一、二型內接△速畫法：

如圖(51)，因爲正△的第一、二型內接△重合於△DEF，所以只要取各邊中點，再連接起來即可(都是唯一解)

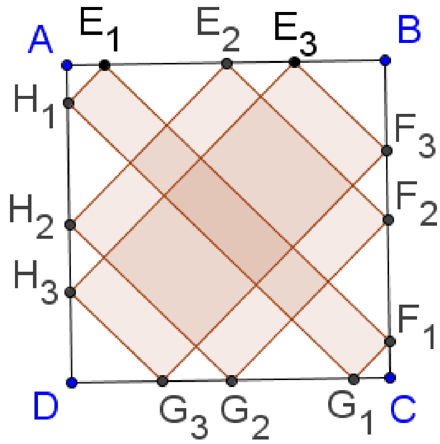


圖(51)

(二)正方形的第一、二型內接四邊形速畫法：

1.第一型：四邊形 $E_1F_1G_1H_1$、四邊形 $E_2F_2G_2H_2$、四邊形 $E_3F_3G_3H_3$(無限多組解) ，如圖(52)

2.第二型：即爲正方形 ABCD 本身(唯一解)



圖(52)

(三)正五邊形的第一、二型內接五邊形速畫法：

1.第一型：取各邊中點 F、G、H、I、J，連起來即爲所求(唯一解)，如圖(53)

2.第二型：

(1)延長 $\overleftrightarrow{EA}$ 、 $\overleftrightarrow{CB}$ ，交於 K

(2)延長 $\overleftrightarrow{AB}$ 、 $\overleftrightarrow{CD}$ ，交於 L

(3)延長 $\overleftrightarrow{BC}$ 、 $\overleftrightarrow{ED}$ ，交於 M

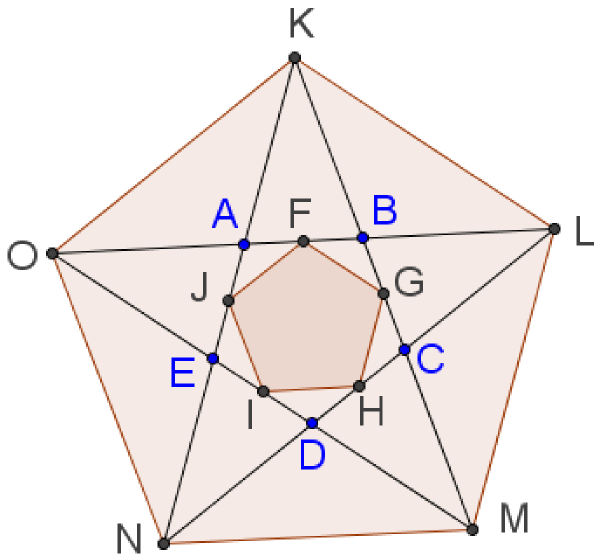
(4)延長 $\overleftrightarrow{CD}$ 、 $\overleftrightarrow{AE}$ ，交於 N

(5)延長 $\overleftrightarrow{DE}$ 、 $\overleftrightarrow{BA}$ ，交於 O

則 KLMNO 即爲所求(唯一解)

且第二型邊長：第一型邊長$=4:(\sqrt{5}-1)$

第二型面積：第一型面積$=8:(3-\sqrt{5})$



圖(53)

(四)正六邊形的第一、二型內接六邊形速畫法：

1.第一型：如圖(54)，如同正四邊形有無限多組解

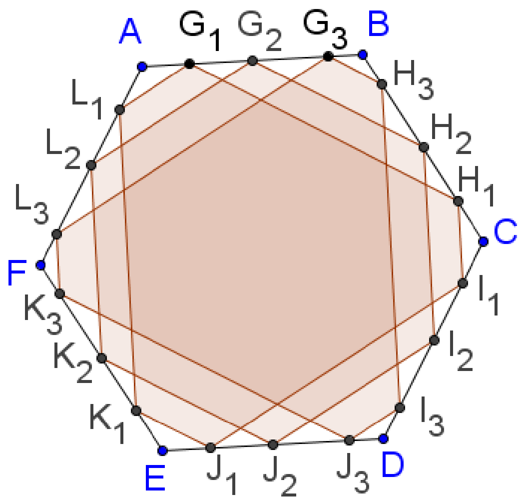
2.第二型：

(1) $\overleftrightarrow{FA}$ 和 $\overleftrightarrow{CD}$ 平行，交於無限遠

(2) $\overleftrightarrow{AB}$ 和 $\overleftrightarrow{DE}$ 平行，交於無限遠

(3) $\overleftrightarrow{BC}$ 和 $\overleftrightarrow{EF}$ 平行，交於無限遠

∴第二型內接六邊形無限大



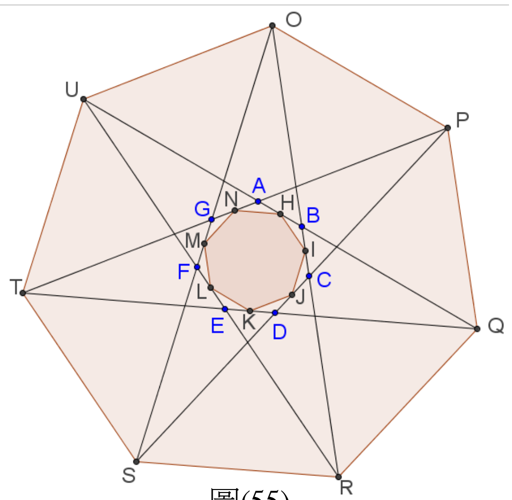
圖(54)

(五)正七邊形的第一、二型內接七邊形速畫法：

1.第一型：取各邊中點 H、I、J、K、L、M、N，連起來即為所求(唯一解)，如圖(55)

2.第二型：

(1)分別延長 $\overleftrightarrow{GF}$ 和 $\overleftrightarrow{BC}$ 、 $\overleftrightarrow{GA}$ 和 $\overleftrightarrow{DC}$ 、 $\overleftrightarrow{AB}$ 和 $\overleftrightarrow{ED}$ 、 $\overleftrightarrow{BC}$ 和 $\overleftrightarrow{EF}$ 、 $\overleftrightarrow{CD}$ 和 $\overleftrightarrow{GF}$ 、 $\overleftrightarrow{DE}$ 和 $\overleftrightarrow{AG}$ 、 $\overleftrightarrow{EF}$ 和 $\overleftrightarrow{AB}$ 交於 O、P、Q、R、S、T、U，則第二型內接七邊形即為所求(唯一解)



圖(55)

(六)正八邊形的第一、二型內接八邊形速畫法：

1.第一型：如圖(56)，如同正四邊形有無限多組解

2.第二型：如同之前每隔兩條邊延伸後取交點即可

(七)正 2n+1 邊形的第一、二型內接多邊形速畫法：

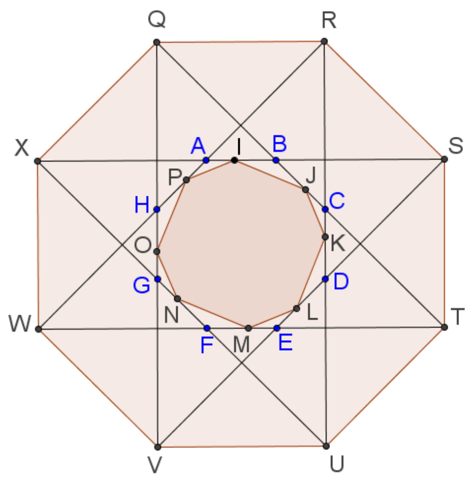
1.第一型：取各邊中點，唯一解

2.第二型：每隔兩條邊延伸後取交點即可

(八)正 2n 邊形的第一、二型內接多邊形速畫法：

1.第一型：從邊上任一點開始皆可，有無限多組解

2.第二型：每隔兩條邊延伸後取交點即可 (正六邊形除外)



圖(56)

伍、結論

一、第一型多邊形：

(一)在三角形中，不論是銳角△，鈍角△或直角△，其內接第一型三角形，都是唯一解(此解也是三角形內切圓的三切點)

(二)在四邊形中，若兩雙對邊和相等，內切圓的四切點是無限多組解中的一組解。

(三)在凸多邊形中，不論邊數是多少，當確定最短邊後，我們可以利用 r 值畫出第一型內接多邊形，$r=\frac{1}{2}(x_1-x_2+x_3-x_4+\cdots-x_n)$，(x_1 為最短邊長)

1.當 $r>0$ 時，起點 P 取在 A 點右側

2.當 $r<0$ 時，起點 P 取在 A 點左側(三邊形除外)

3.當 r =0 時，起點 P 可取在 $\overline{AB}$ 上的任一點(三邊形除外)

(四)若 n≧4

1.若 $r>0$ 時，其內接第一型多邊形，有唯一解

2.若 $r=0$ 時，其內接第一型多邊形，有無限多組解(在最短邊上每一點都是解)

3.若 $r<0$ 時，其內接第一型多邊形，有唯一解

(五)在 n≧4 中，當 $r=0$ 時，都會發生第一型內接多邊形在最短邊頂點處有退化現象，邊數會減少。

二、第二型多邊形：

(一)在凸多邊形中，不論邊數是多少，我們都可以藉助預備定理的共線概念，利用尺規作圖畫出它的第二型內接多邊形，且有順逆兩個。

(二)三邊形的順逆兩個第二型內接三角形會共圓。

(三)任意直角△的順逆兩個第二型內接△各同時有一頂點落在直角頂點上，形成五點共圓，共圓的圓心落在母△的斜邊上；更特別的是，此共圓的半徑與原直角△外接圓的半徑相等。利用這些特性，可以輕易且快速的畫出任一直角三角形的順逆兩個第二型內接三角形。

(四)任意直角△中，直角頂、外心和共圓圓心所連起來的△AOP 的面積恆為順逆兩個第二型內接△面積的算術平均數。

(五)共圓的四邊形其順逆兩個第二型內接四邊形必八點共圓。五邊形以上則未必。

三、正多邊形的第一型、第二型內接多邊形取法及特性：

(一) 1.正奇數多邊形的第一型內接多邊形的頂點位於各邊中點，是唯一解。

2.正偶數多邊形的第一型內接多邊形有無限多解，頂點的起點為邊上任一點。

(二) 1.正三角形第二型內接三角形的頂點位於各邊中點。

2.正四邊形第二型內接四邊形與原四邊形重合 。

3.正五邊形第二型內接五邊形是取間隔一邊的兩邊延長線交點。

4.正六邊形的第二型內接六邊形無限大。

5.正 N (N≧7)邊形的第二型內接 N 邊形皆是取間隔兩邊的兩邊延長線交點。

陸、未來展望

將第二型順逆兩個內接圖形的共橢圓或雙曲線等現象再探討。

柒、參考資料

一、康軒國中數學第四冊，課本及習作

二、Geogebra 操作手冊

【評語】030419

本研究探討在多邊形內尋找特別形式的等腰三角形的尺規作圖方法，研究發現一些有趣的結果，建議交待在什麼情況下會出現該現象，另外本研究團隊合作頗佳。