中華民國第51屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

佳作

030418

運用之妙，存乎於「心」

學校名稱：彰化縣立大同國民中學

作者：	指導老師：
國二 林子亘 國二 林軒民 國二 沈柏瑋	顏福泉

關鍵詞：四心、旁心、軌跡

摘要

在三角形第三點繞半圓的研究中，我們求出三角形五心座標的相關性質及公式，其中重心的軌跡是所繞半圓縮小$\frac{1}{3}$的半圓；垂心的軌跡圖形較爲多變，其圖形和固定兩點所在位置有著高度的相關性，我們並試著用不同的方法證明垂心的軌跡方程式；外心是中垂線的交點，因此不論如何移動第三點，其交點總落在固定兩點的中垂線上，所以其軌跡不是一點就是一直線，且直線出現的位置也能證明出來；內心和旁心的軌跡類似，只有在固定兩點分居於直徑兩側時，才真正是一個 90° 的圓弧，而其餘皆不是圓弧。

研究過程中出現許多繁複的代數運算，我們也嘗試用幾何的方法加以證明，希望”心”的性質更平易近人。

壹、 研究動機

之前在新聞中看到有人拿速食店的公仔去頂電鍋，讓我們想到：如何使電鍋較不易掉下來。經詢問老師後才得知頂在重心才不易掉下，後來我們去查關於重心的資料，知道了三角形各種心（重心、內心、外心、垂心、旁心）的存在，並且在接觸了幾何繪圖軟體後，藉由操作發現，原來可以透過這軟體去觀察”心”的軌跡變化，所以我們就以這個題目去研究。

貳、 研究目的

一、研究三角形重心軌跡圖形之代數公式，及其和原繞半圓之相關性。
二、研究三角形垂心軌跡圖形之代數公式，並以幾何方式加以證明。
三、研究三角形外心軌跡圖形之代數公式，並探討半圓的位置和外心軌跡位置的相關性。
四、研究三角形內心軌跡圖形之代數公式，和半圓在特定位置時內心軌跡的特殊呈現。
五、研究三角形旁心軌跡圖形之代數公式，和半圓在特定位置時旁心軌跡的特殊呈現。

參、 研究設備及器材

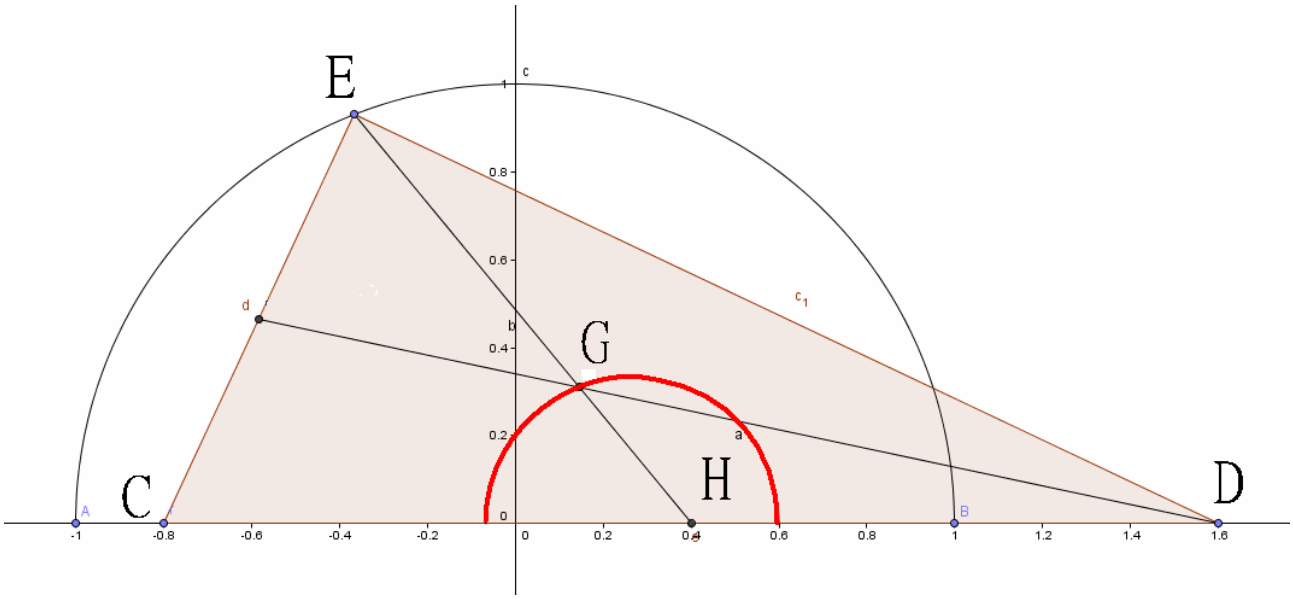
GeoGebra 軟體、電腦

肆、 研究過程及方法

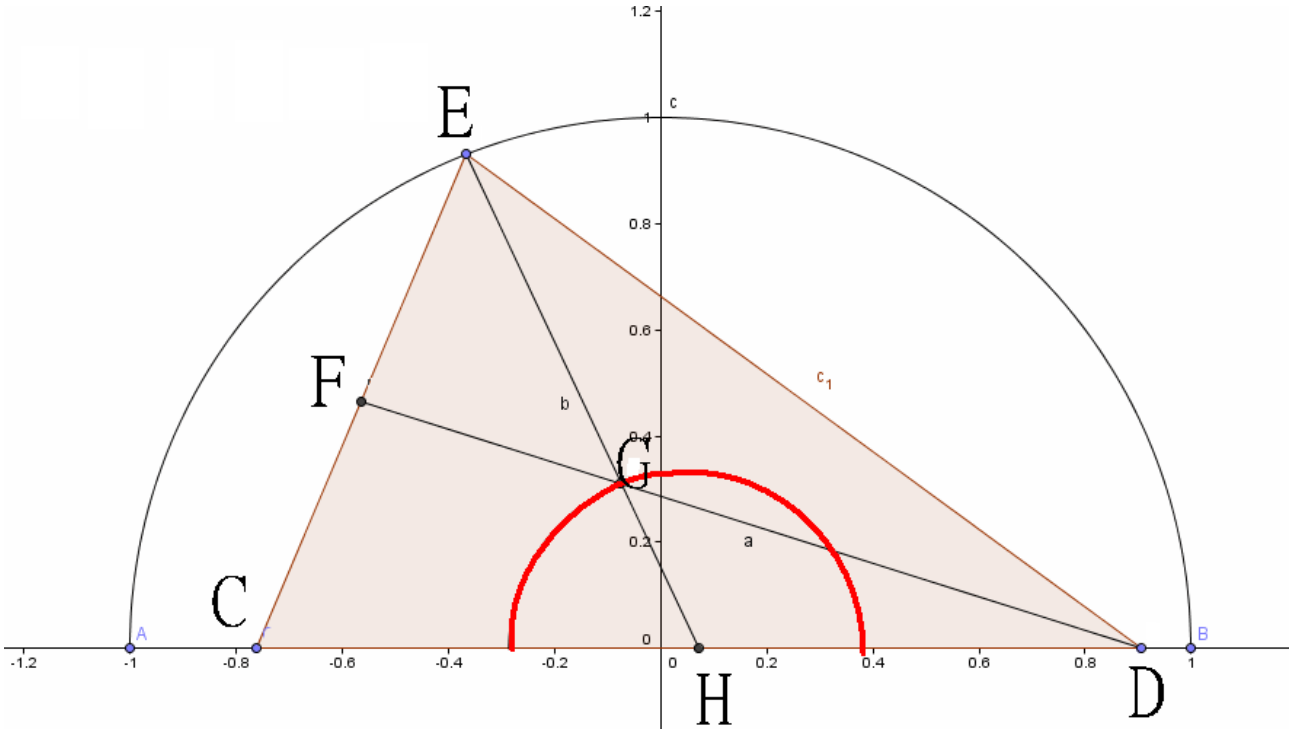
在之前已經有人針對三角形的四心做過討論，其方法乃固定三角形的其中兩點在直徑的兩端，而另外一點做水平、鉛垂、或繞圓的四心軌跡研究，而繞半圓是個令我們覺得有趣的方式，因爲類似星球的運行，而在我們的研究中，則是把三角形固定的兩點定位於過半圓直徑的直線上是可以左右移動的，藉此增加研究的困難度、多面性與趣味性，第三點再繞半圓以觀察三角形五心：重心、垂心、外心、內心、旁心軌跡並作成研究專題。

一、　　重心的軌跡

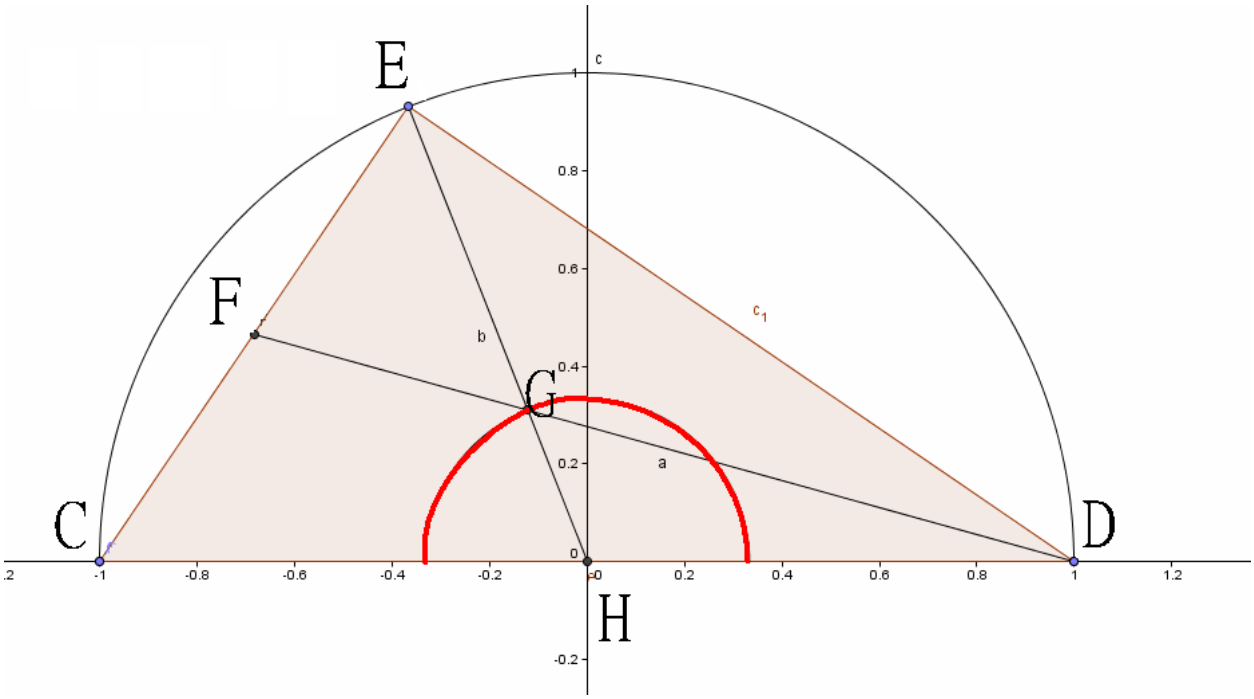
(一)三角形之一點在半圓內，另一點固定在半圓外，第三點繞半圓，由圖上可看出軌跡近似是個縮小版的半圓，而其圓心則向右偏移。



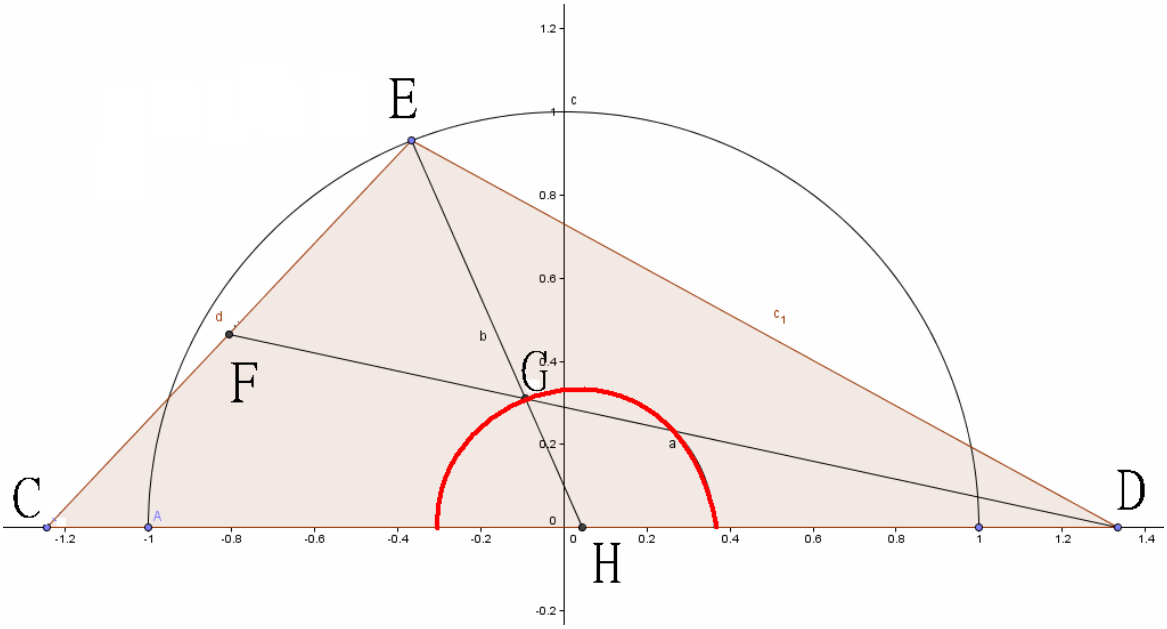
(二)把三角形的 C 點固定，D 點向左移進來半圓內，第三點繞半圓，由圖上可看出軌跡也是個縮小版的半圓，而其圓心也跟著 D 點向左偏移進來。



(三)若把三角形 C、D 點固定在直徑的兩端，第三點繞半圓，這時軌跡的圖形不變，但圓心和所繞半圓的圓心重合，並且再仔細觀察其半徑，恰爲原半圓半徑的$\frac{1}{3}$。

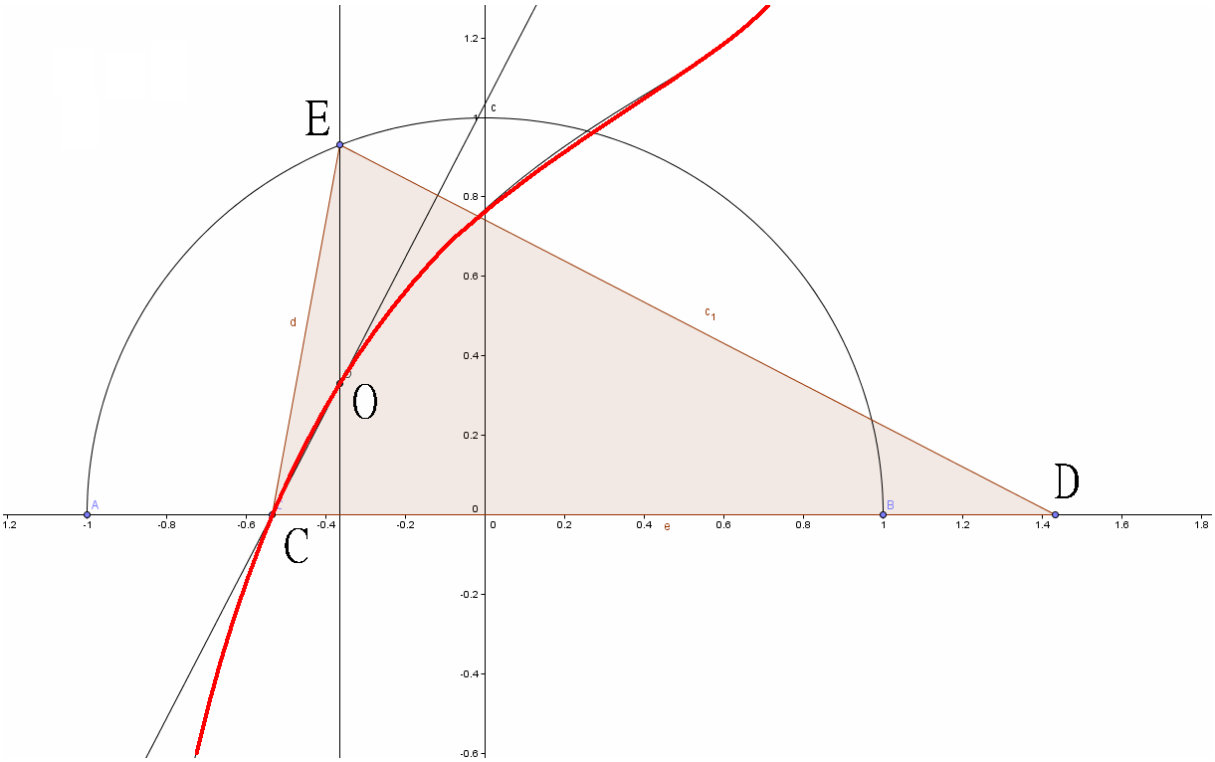


(四) 若把三角形 C、D 點拉到半圓外直徑外，第三點繞半圓，這時軌跡的圖形依舊不變，而圓心的位置和 C、D 點座標有相關性，那一點的拉扯力大，則圓心就偏向那一邊。

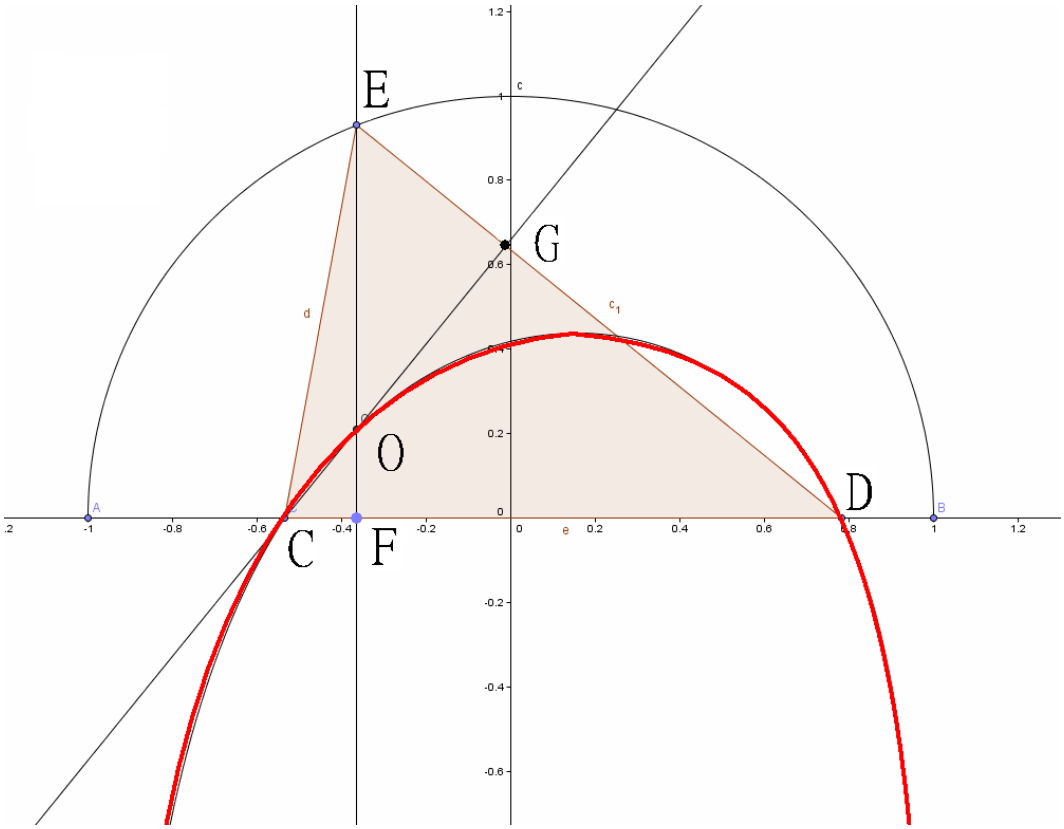


二、　　垂心的軌跡

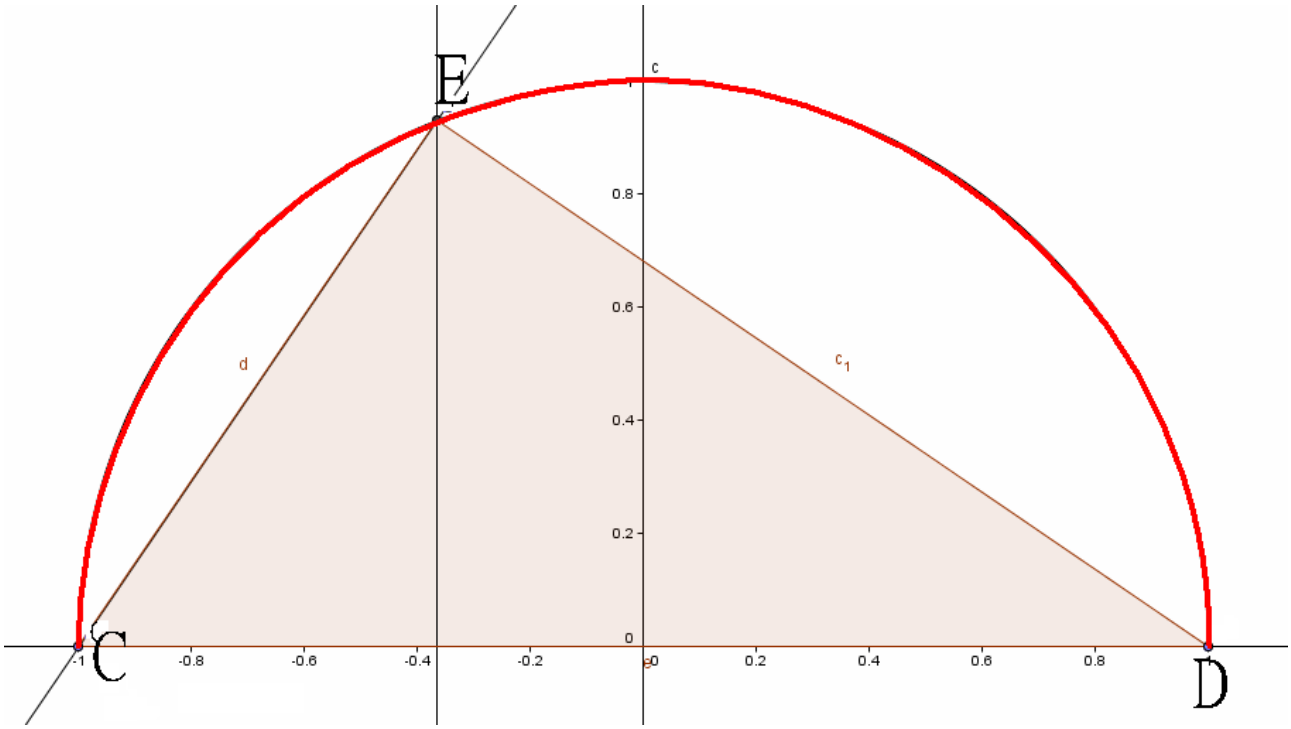
(一) 三角形之一點在半圓內，另一點固定在半圓外，第三點繞半圓，由圖上可看出軌跡近似高次方程式的圖形。



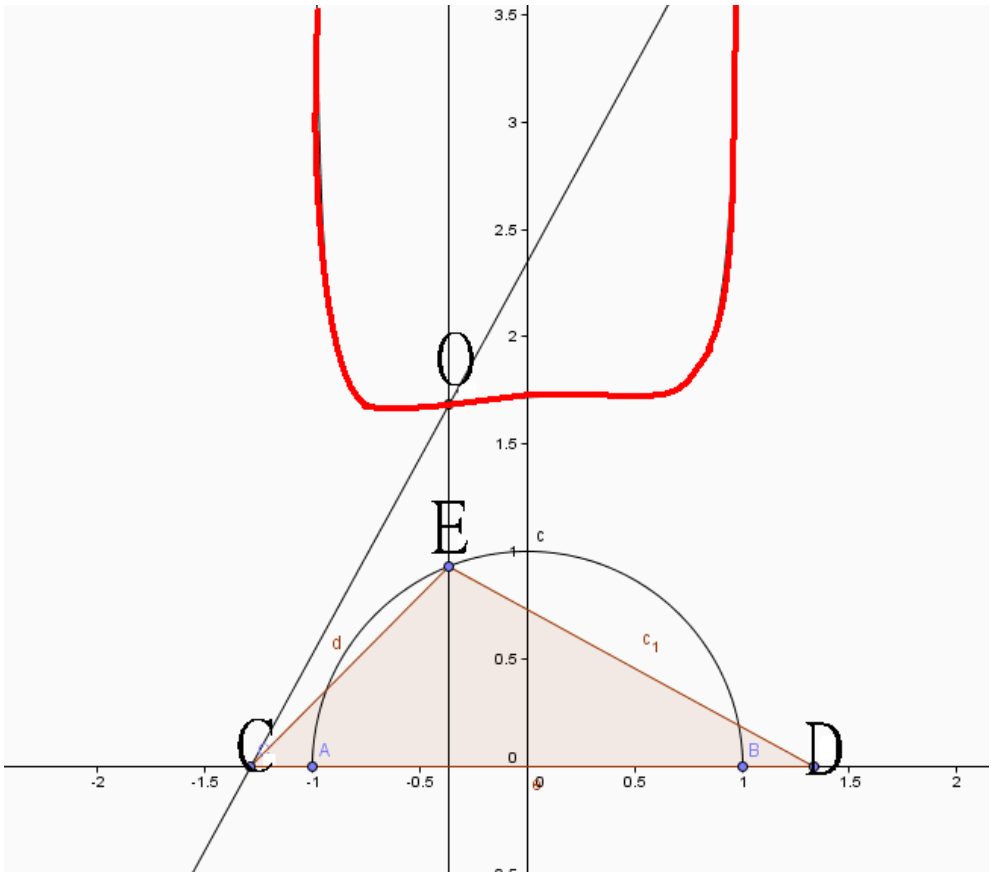
(二)把三角形的 C 點固定，D 點向左移進來半圓內，第三點繞半圓，由圖上可看出軌跡是一條開口向下的曲線，近似二次函數的線，但又有點傾斜。



(三)若把三角形 C、D 點固定在直徑的兩端，第三點繞半圓，這時軌跡跟所繞半圓重疊，因∠E 恰是半圓的圓周角，永遠都是 90 度，所以垂心永遠都在 E 點。

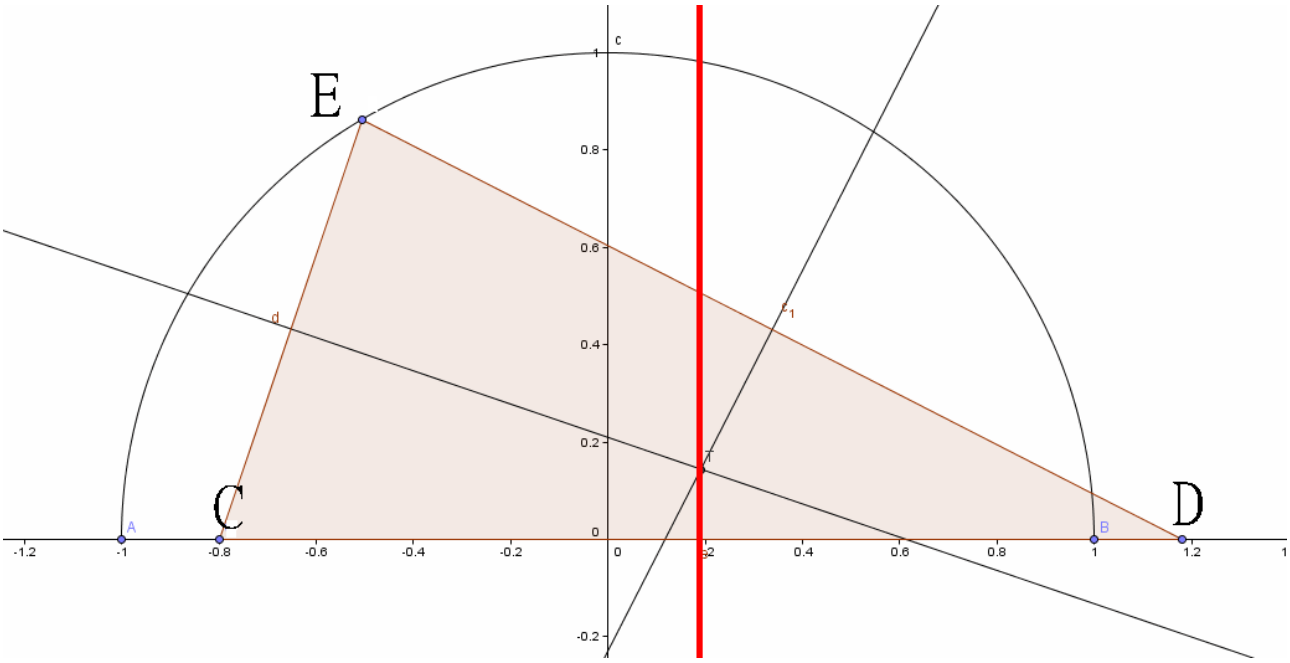


(四) 若把三角形 C、D 點拉到半圓外直徑外，第三點繞半圓，這時軌跡的圖形是一開口向上的曲線，但不像二次函數的曲線。

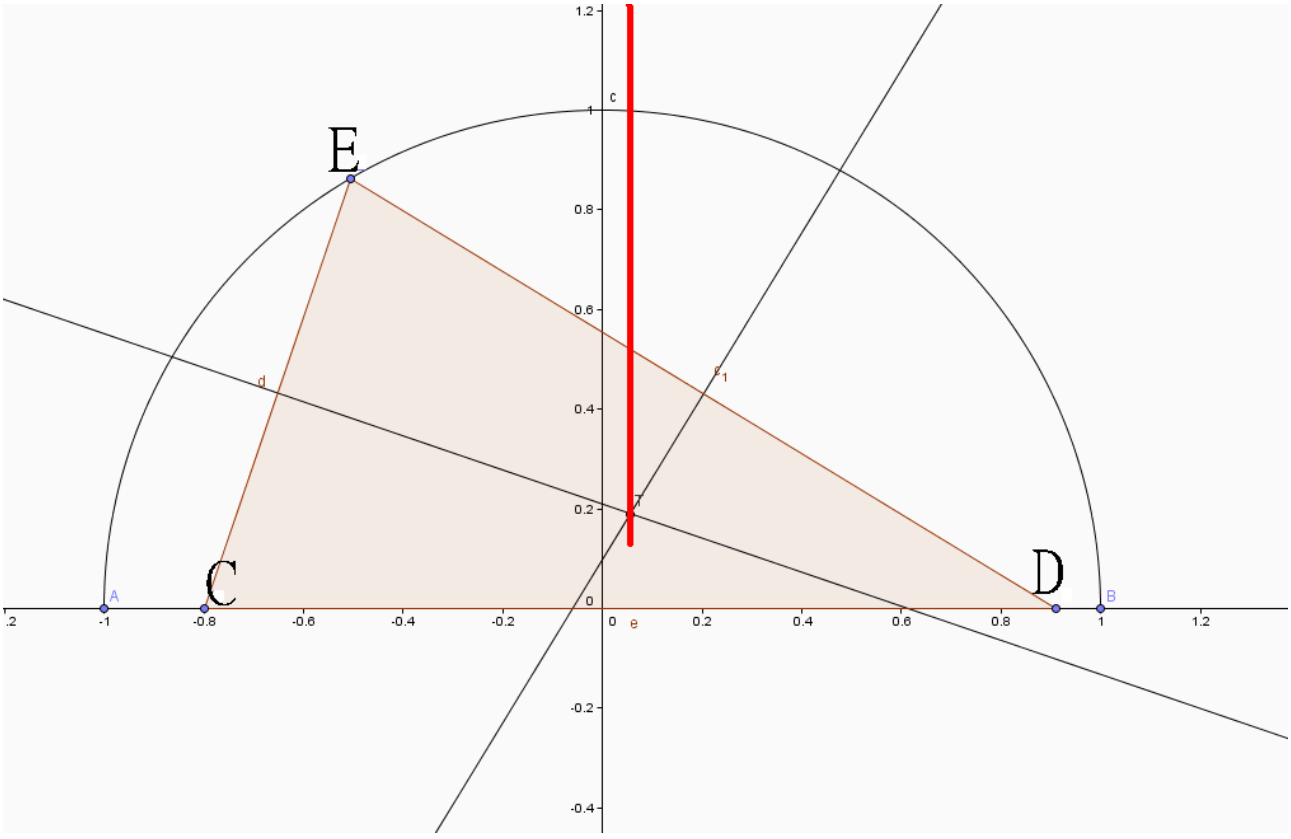


三、　　外心的軌跡

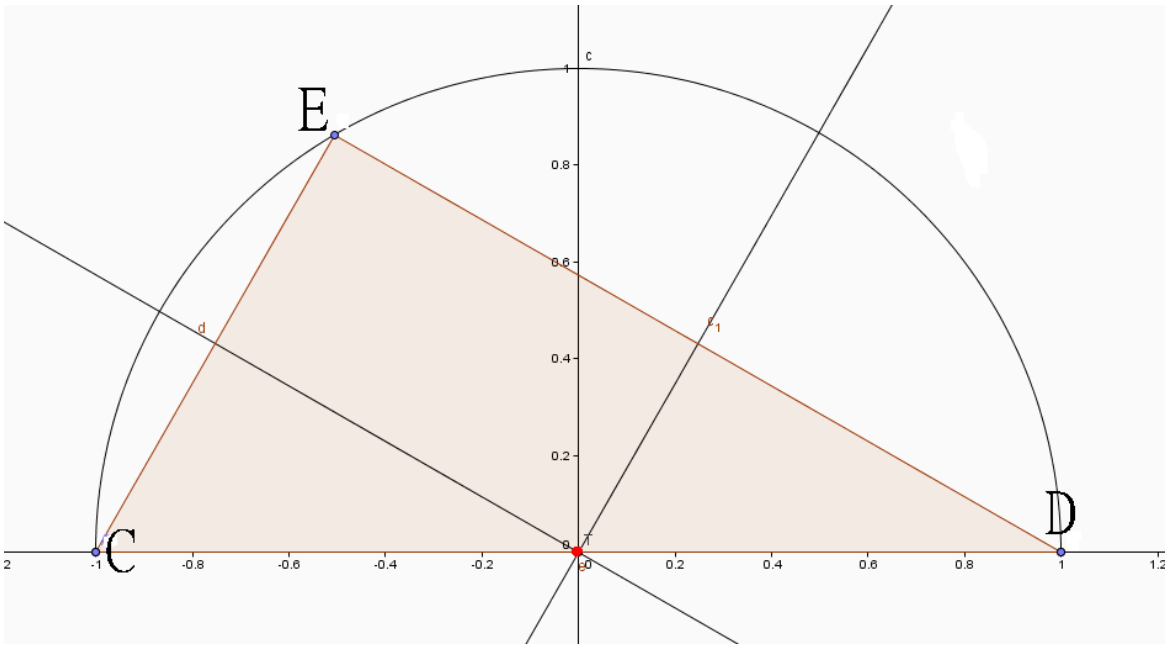
(一) 三角形之一點在半圓內，另一點固定在半圓外，第三點繞半圓，由圖上可看出軌跡爲一垂直於 X 軸的直線，與 X 軸的交點恰好是 C、D 的中點，因外心是三邊的中垂線的交點，當 C、D 固定時，外心永遠落於 C、D 的中垂線上。



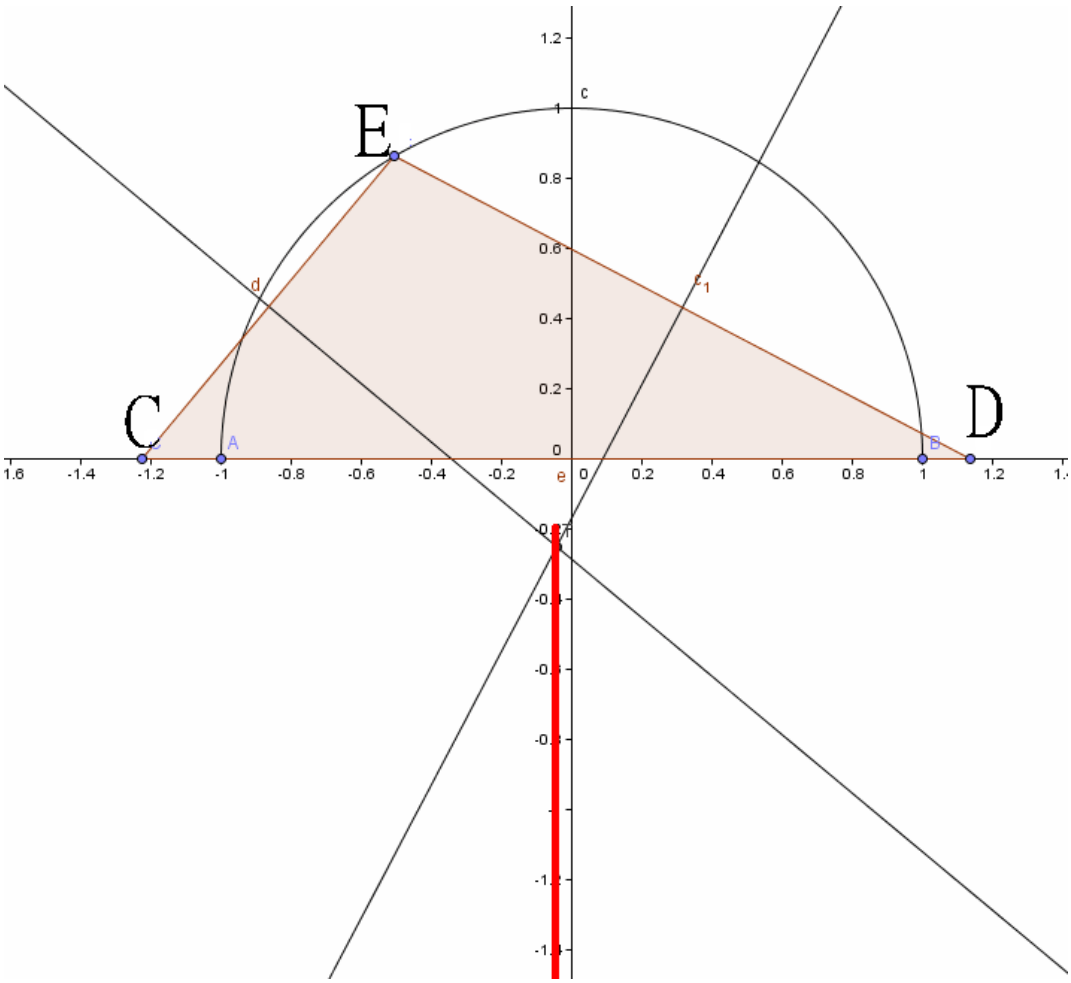
(二)把三角形的 C 點固定，D 點向左移進來半圓內，第三點繞半圓，由圖上可看出軌跡仍舊落於 C、D 的中垂線上，但下半部的軌跡卻不見了。



(三)若把三角形 C、D 點固定在直徑的兩端，第三點繞半圓，這時軌跡剛好是原點，因∠E 恰是半圓的圓周角，永遠都是 90 度，所以外心永遠都在直角三角形斜邊的中點上。

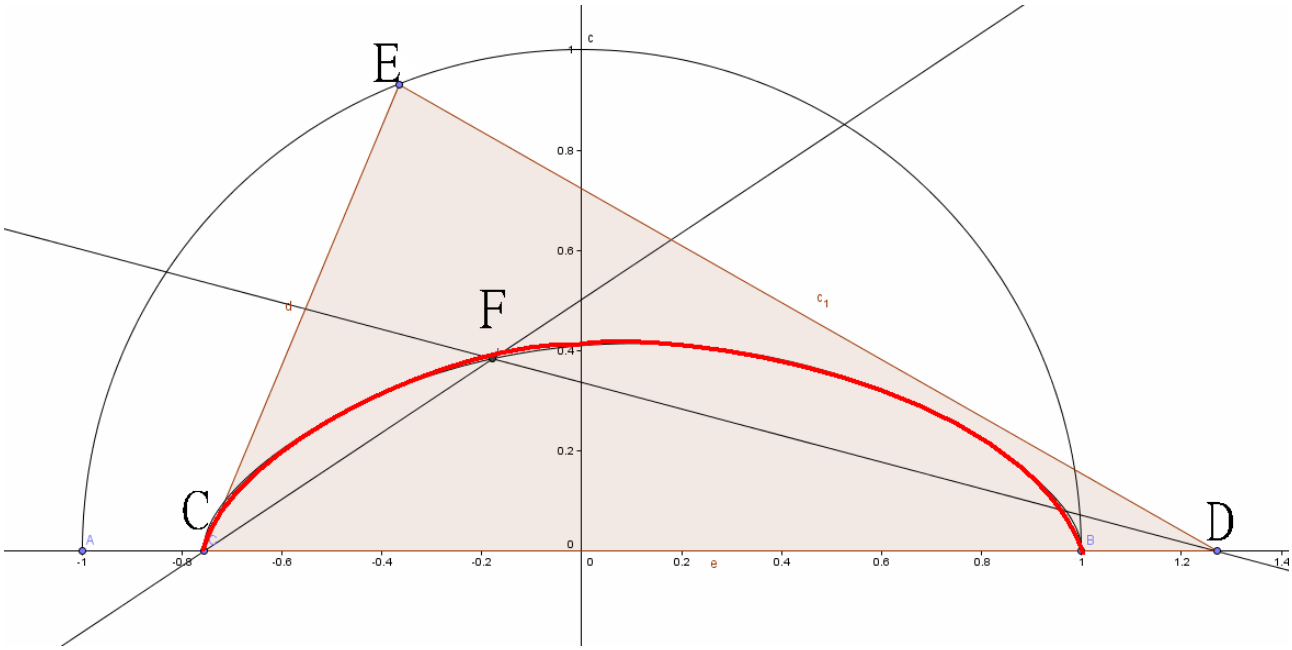


(四) 若把三角形 C、D 點拉到半圓外，第三點繞半圓，由圖上可看出軌跡仍舊落於 C、D 的中垂線上，但上半部的軌跡卻不見了，究竟爲何？我們將在下一章證明。

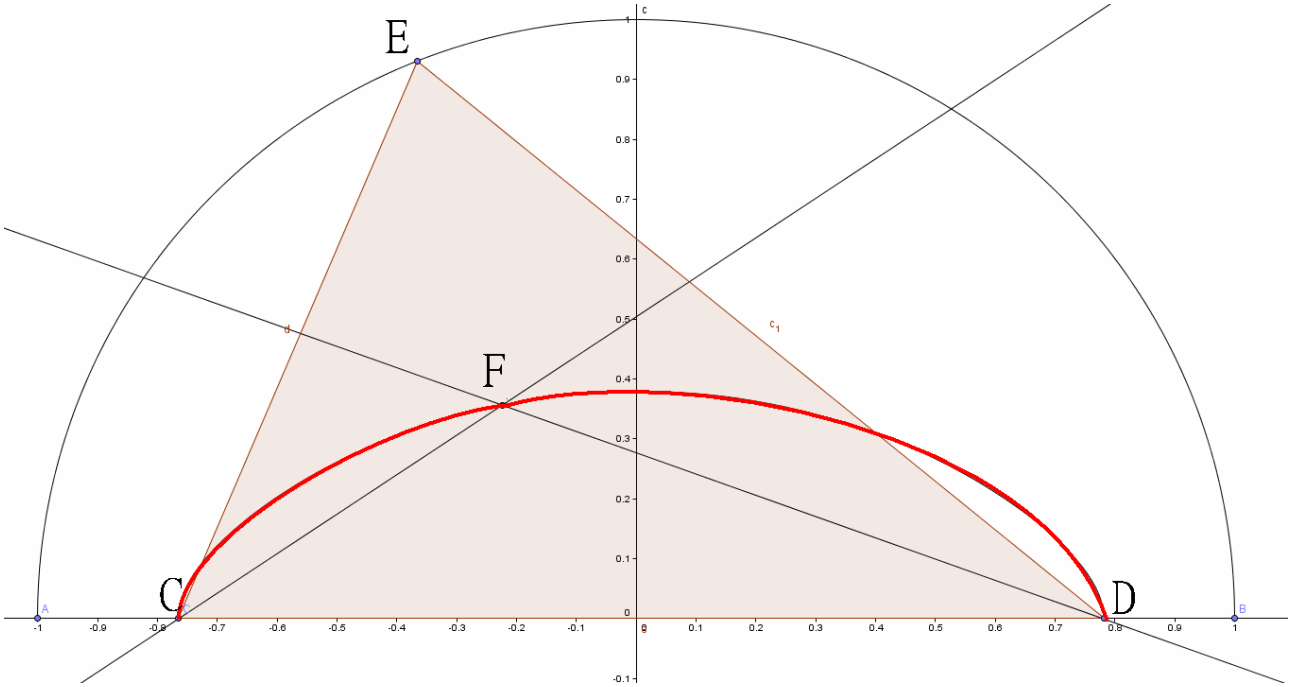


四、　　內心的軌跡

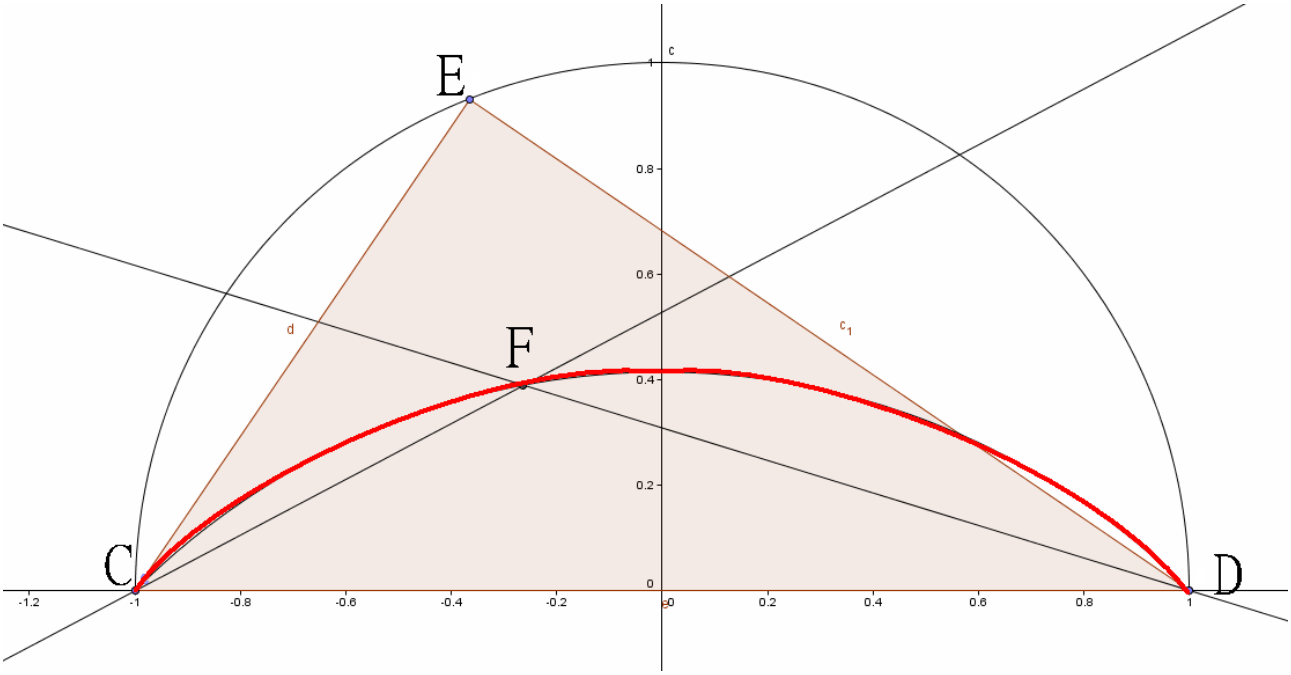
(一)三角形之一點在半圓內，另一點固定在半圓外，第三點繞半圓，由圖上可看出軌跡爲一類似圓的弧線，但經證明後並非是一圓弧。



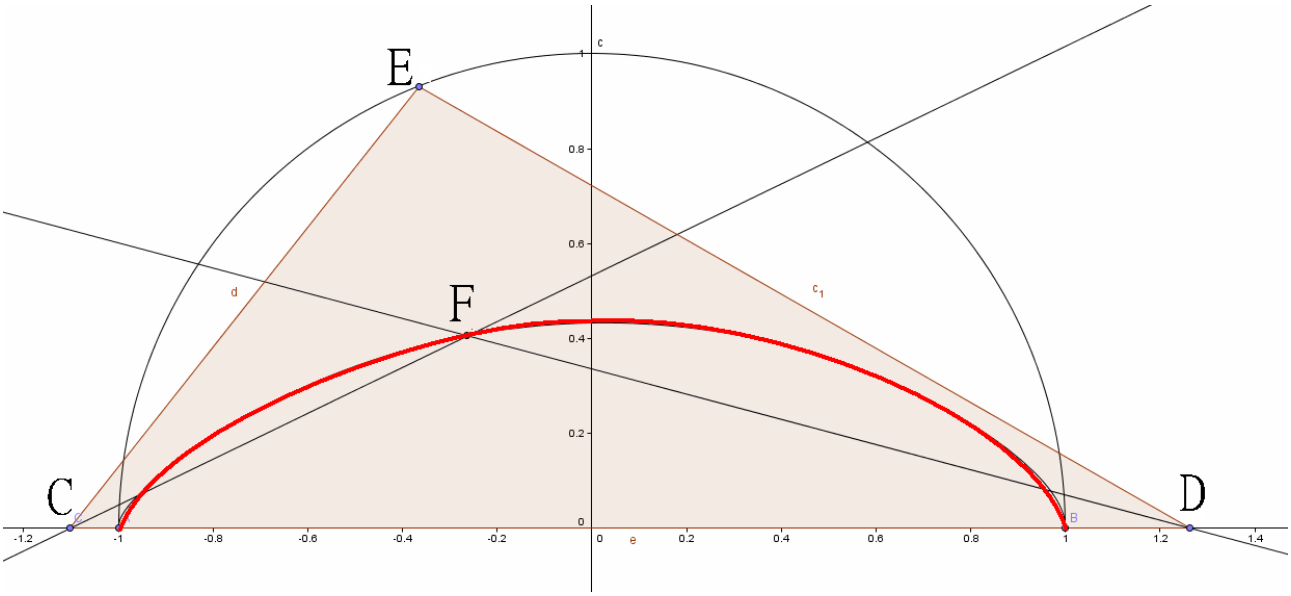
(二)把三角形的 C 點固定，D 點向左移進來半圓內，第三點繞半圓，由圖上可看出軌跡和上圖類似，但弧度較大。

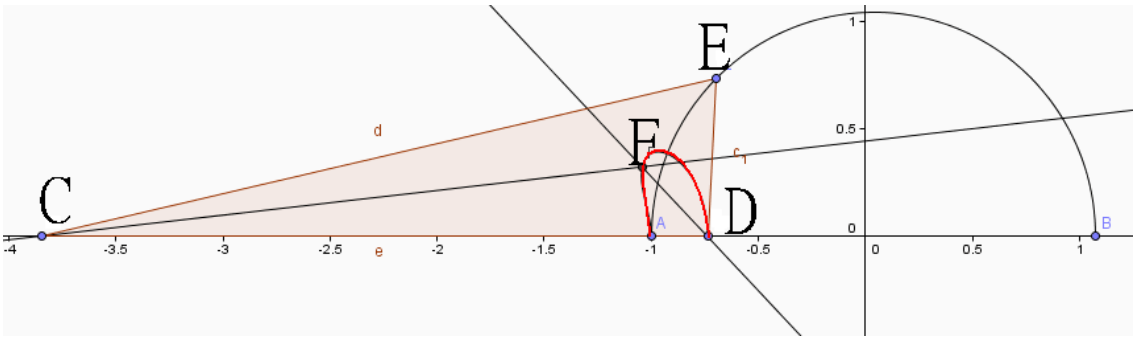


(三)若把三角形 C、D 點固定在直徑的兩端，第三點繞半圓，這時軌跡恰爲一圓弧，下章將證明其爲一 90°的圓弧。



(四)若把三角形 C、D 點拉到半圓外直徑外，第三點繞半圓，由圖上可看出無論 C、D，如何移動，似乎內心都不會超出半圓的範圍，但如果我們盡量縮小三角形在半圓內的角度，放大半圓外的角度，則又得到不同的結果，這時內心就會跑到半圓範圍外了。

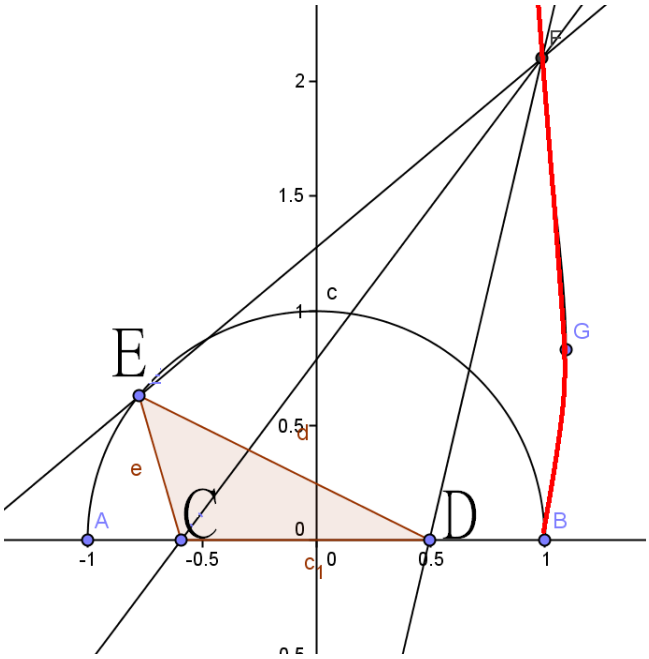




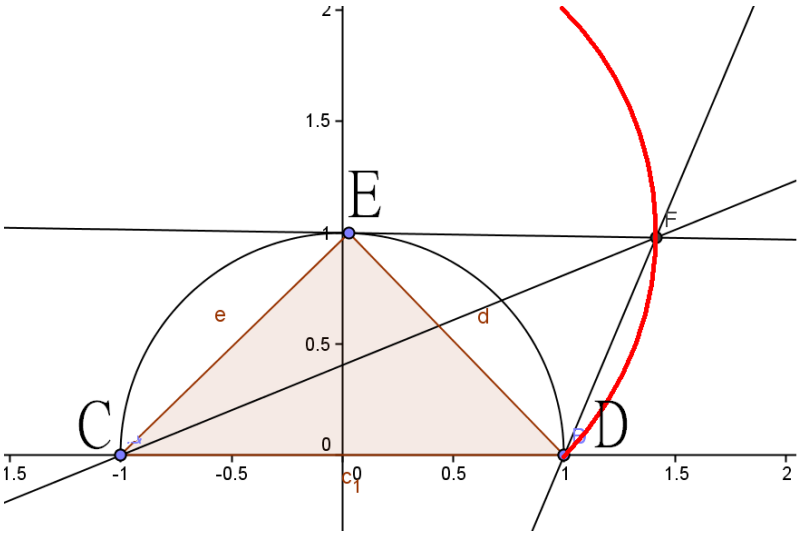
五、　　旁心的軌跡

作∠C 的角平分線和∠D、∠E 的外角平分線所得交點即得到三旁心之一，並把 C、D 點做不同位置的固定，E 點再繞半圓，得到不同軌跡的呈現。

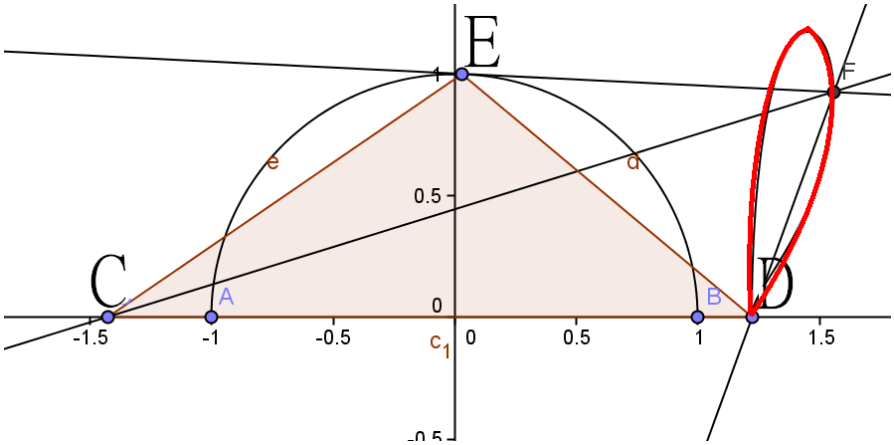
(一)把三角形的 C 點固定，D 點向左移進來半圓內，第三點繞半圓，由圖上可看出右旁心軌跡是一條有點弧度的曲線，C 控制上方彎度，D 控制下方彎度。



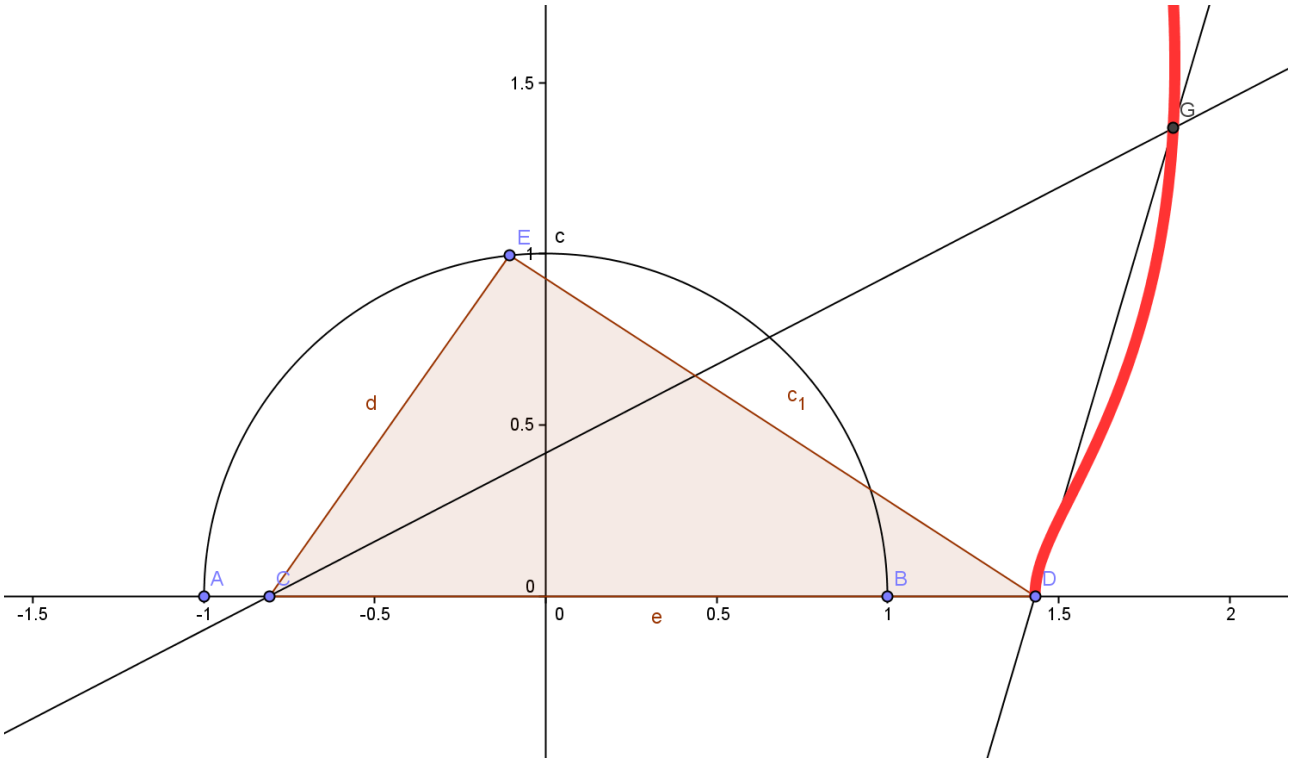
(二)若把三角形 C、D 點固定在直徑的兩端，第三點繞半圓，這時軌跡恰爲一圓弧，下章將證明其爲一趨近於 90°的圓弧。



(三)當 C 拉離圓時，軌跡就會從一條弧線變爲一封閉的圖形。



(四)三角形之一點在半圓內，另一點固定在半圓外，第三點繞半圓，由圖上可看出軌跡爲一弧線，C 控制上方彎度，D 控制下方彎度。。



伍、研究結果及證明

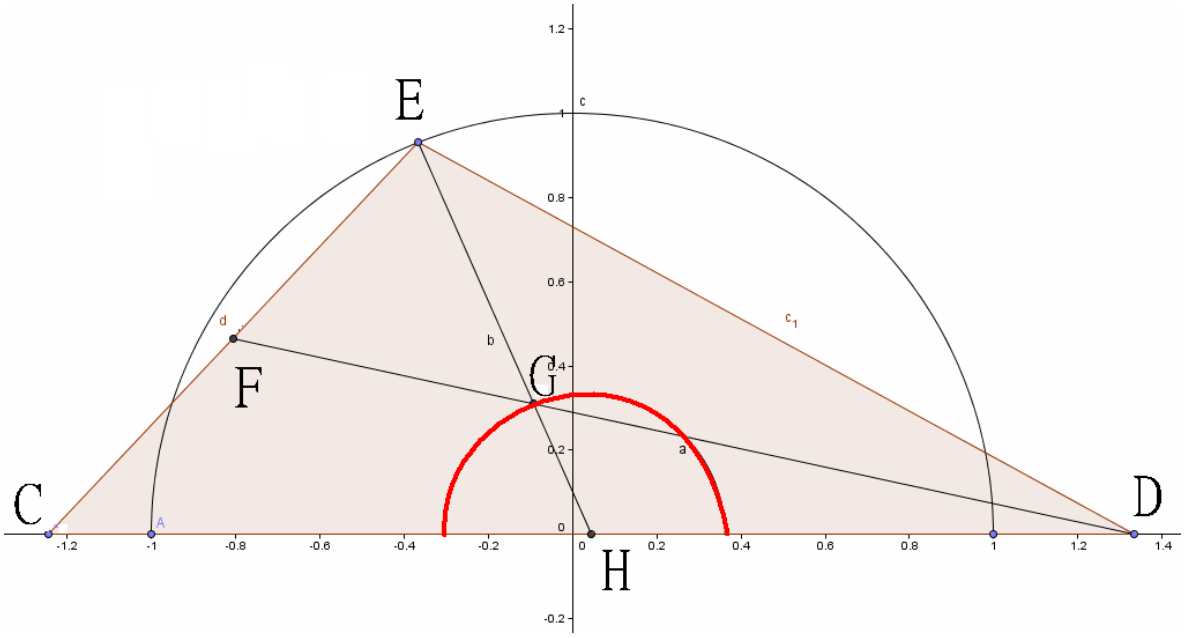
一、　重心

直觀來看，如圖，G 是△CDE 的重心，$\overline{EG}:\overline{GH}$ 爲 2:1，由於 E 在半圓上任意移動，因此 $\overline{EG}:\overline{GH}$ 總維持在 2:1，所以 G 也會畫出一個半圓。

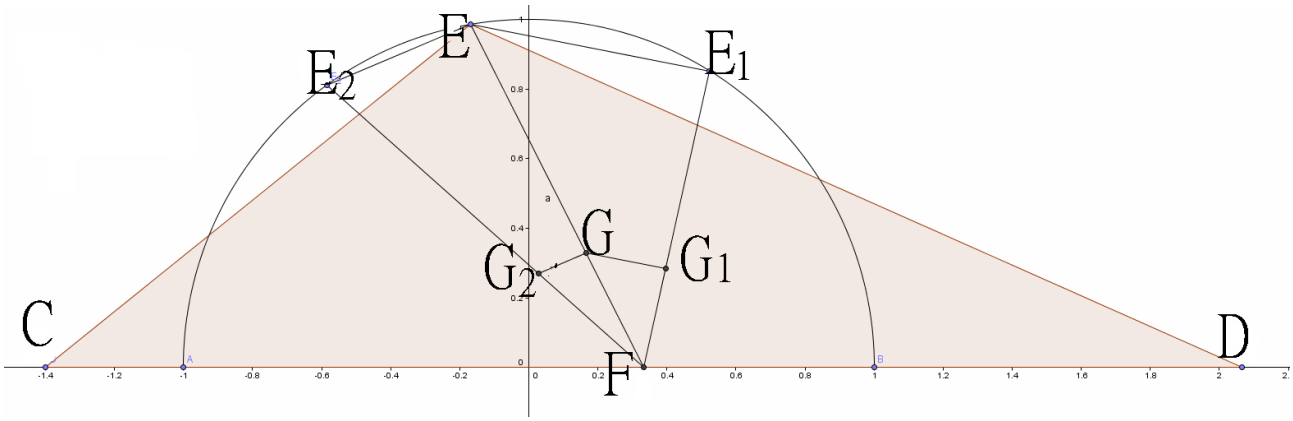
重心軌跡證明及其座標方程式：

現在我們在圖上畫出一個半徑爲 1、圓心(0,0)的半圓，設 E 點 x 座標爲 t，則 y 座標 $\sqrt{1-t^2}$，C 點座標爲(c,0)，D 座標爲(d,0)，$\overline{CD}$ 的中點 H 座標爲($\frac{c+d}{2}$,0)，所以 G 點的 x 座標爲 x＝$\frac{c+d}{2}+\frac{1}{3}(t-\frac{c+d}{2})=\frac{c+d+t}{3}$，y 座標爲 y＝$\frac{\sqrt{1-t^2}}{3}$，由 x 座標可得 t＝3x-c-d，代入 y 中，得到 y＝$\frac{\sqrt{1-(3x-c-d)^2}}{3}\rightarrow(x-\frac{c+d}{3})^2+y^2=(\frac{1}{3})^2$。

此爲重心軌跡之方程式，明顯的其圖形爲半圓，且圓心爲($\frac{c+d}{3}$,0)，半徑爲$\frac{1}{3}$。



重心軌跡之另證法:



移動 E 點至 E_1 上，得重心 G_1，移動 E 點至 E_2 上，得重心 G_2，因 $\overline{FE_1}$ 爲中線，G_1 爲重心，所以 $\overline{FG_1}$ ：$\overline{G_1E_1}$ ＝1：2；同樣的，$\overline{FG}$ ：$\overline{GE}$ ＝1：2，所以 $\overline{GG_1}$ 平行於 $\overline{EE_1}$ ，可知 $\angle FGG_1$ ＝ $\angle FEE_1$，同理可證 $\angle FGG_2$ ＝ $\angle FEE_2$，因此 $\angle G_1GG_2$ ＝ $\angle E_1EE_2$，現在將 E 點在 E_1 和 E_2 間任意移動，所得到新點和 E_1、E_2 連線間的角度永遠等於 $\angle E_1EE_2$（因爲都在同一半圓上），所得到的新重心點和 G_1、G_2 的連線的角度經由之前的證明，也會永遠等於 $\angle E_1EE_2$，如果我們將 E_1、E_2 的定位點移往半圓的兩側，則中間的軌跡點的圓周角也會和 $\angle E_1EE_2$ 相等，所以新重心的軌跡是位於同一圓上。而半圓的直徑爲 $\frac{1}{3}\overline{FA}+\frac{1}{3}\overline{FB}=\frac{1}{3}\overline{AB}$ 。

二、　　垂心

垂心軌跡方程式：

以（0,0）爲圓心，1 爲半徑，做一半圓，△CDE 中，E 點在半圓上，C、D 在 X 軸上，所以設 E 點爲（t,$\sqrt{1-t^2}$ ），C、D 座標各爲（c,0）、（d,0）。$\overline{ED}$的斜率爲$\dfrac{\sqrt{1-t^2}}{t-d}$，所以$\overline{ED}$的垂線斜率爲（-1）÷（$\dfrac{\sqrt{1-t^2}}{t-d}$）＝$\dfrac{d-t}{\sqrt{1-t^2}}$，通過 C 且和$\overline{ED}$垂直的直線方程式爲

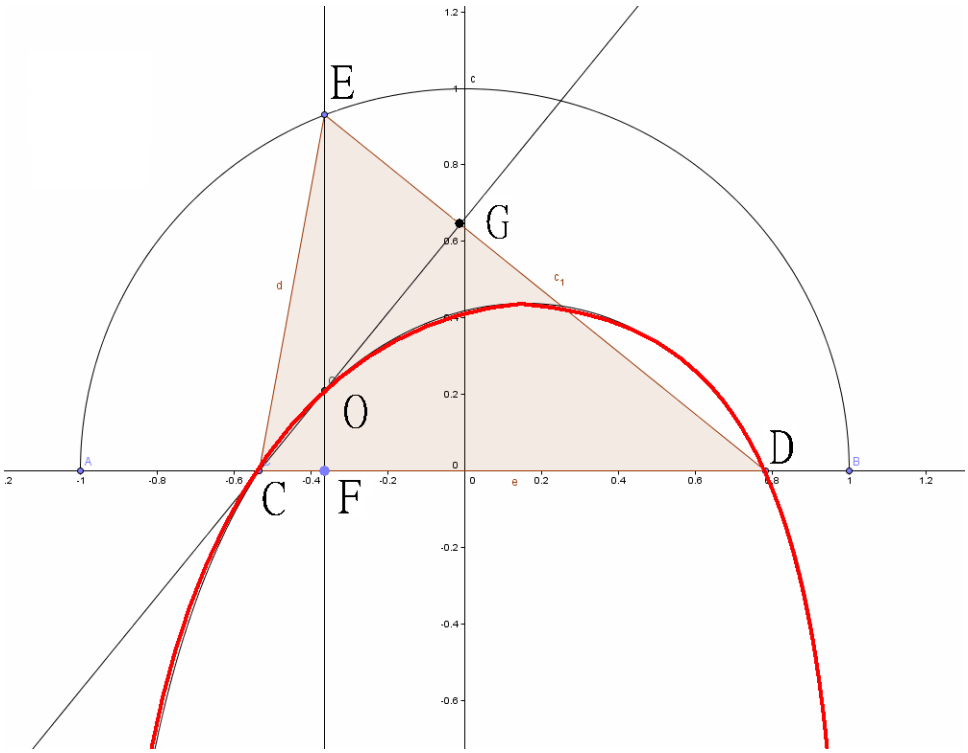
$\dfrac{y}{x-c}=\dfrac{d-t}{\sqrt{1-t^2}}\rightarrow\sqrt{1-t^2}$ y＝（x-c）（d-t）.....①

通過 E 點和$\overline{CD}$垂直的直線方程式爲

x＝t .....②

①和②的交點即爲△CDE 垂心的軌跡方程式，②代入①

$\sqrt{1-x^2}$ y＝（x-c）（d-x） →y＝$\dfrac{(x-c)(d-x)}{\sqrt{1-x^2}}$ →y＝$\dfrac{-x^2+(c+d)x-cd}{\sqrt{1-x^2}}$



幾何另證法：

現在我們用另外一種方法來證明垂心的座標，因爲∠COF＝∠GOE，且∠CFO＝∠OGE＝90 度，所以∠FCG＝∠OEG；又∠CFO＝∠EFD＝90 度，所以

△ OFC～△DFE，得到$\overline{OF}$ ：$\overline{FD}$＝$\overline{CF}$ ：$\overline{EF}$ ，$\overline{OF}$ ＝ $\dfrac{\overline{FD}\times\overline{CF}}{\overline{EF}}$，此結果和上面方法所得結果 y＝$\dfrac{(x-c)(d-x)}{\sqrt{1-x^2}}$一樣。

三、　外心

外心軌跡方程式：

同樣的，如果以（0,0）爲圓心，1 爲半徑，做一半圓，△CDE 中，E 點在半圓上，C、D 在 X 軸上，所以設 E 點爲（t, $\sqrt{1-t^2}$ ），C、D 座標各爲（c,0）、（d,0）。因 $\overline{ED}$ 的斜率爲 $\frac{\sqrt{1-t^2}}{t-d}$，

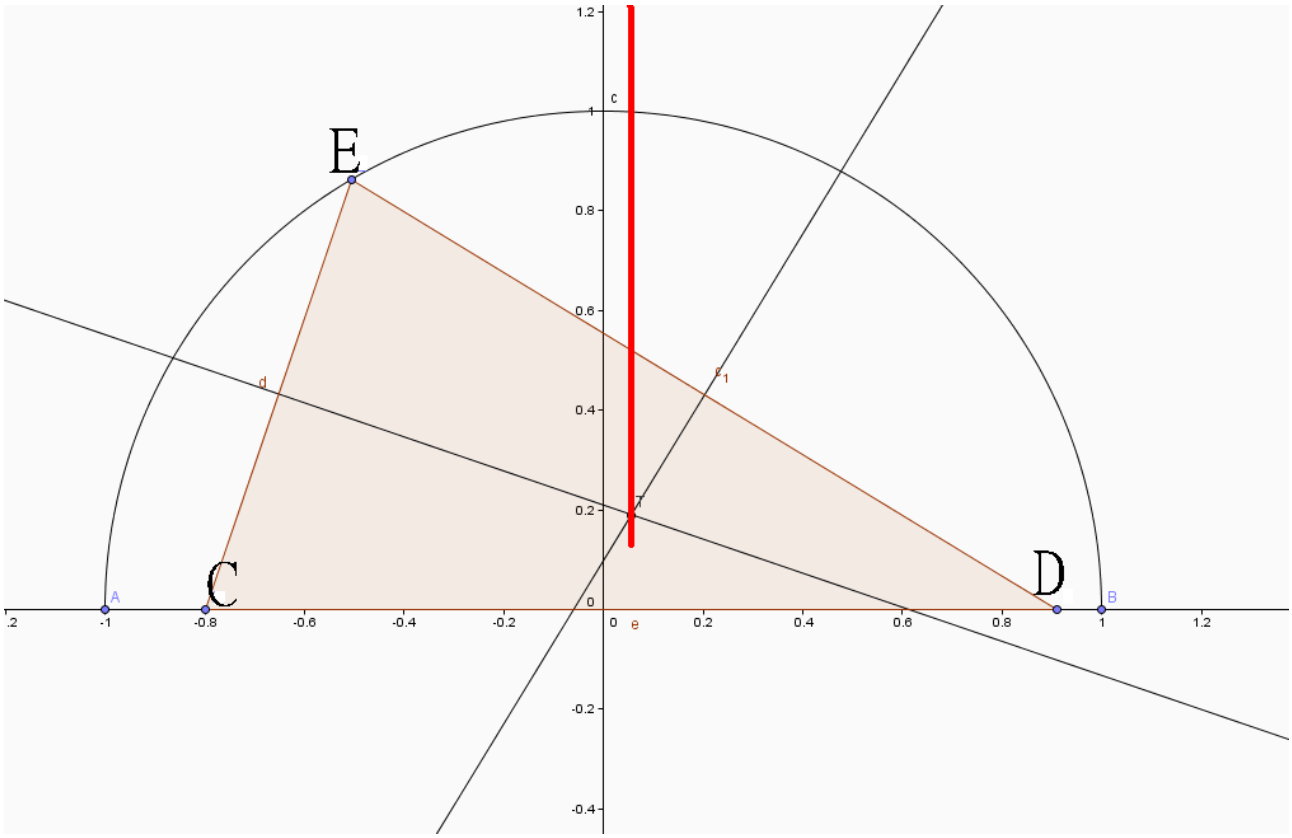
所以 $\overline{ED}$ 的中垂線斜率爲（-1）÷（$\frac{\sqrt{1-t^2}}{t-d}$）＝$\frac{d-t}{\sqrt{1-t^2}}$，中垂線的方程式爲 y＝$\frac{d-t}{\sqrt{1-t^2}}$x

＋□，又該中垂線通過 $\overline{ED}$ 的中點（$\frac{t+d}{2}$, $\frac{\sqrt{1-t^2}}{2}$），代入方程式，得□＝$\frac{1-d^2}{2\sqrt{1-t^2}}$，所以

$\overline{ED}$ 中垂線方程式爲 y＝$\frac{d-t}{\sqrt{1-t^2}}$x＋$\frac{1-d^2}{2\sqrt{1-t^2}}$……①

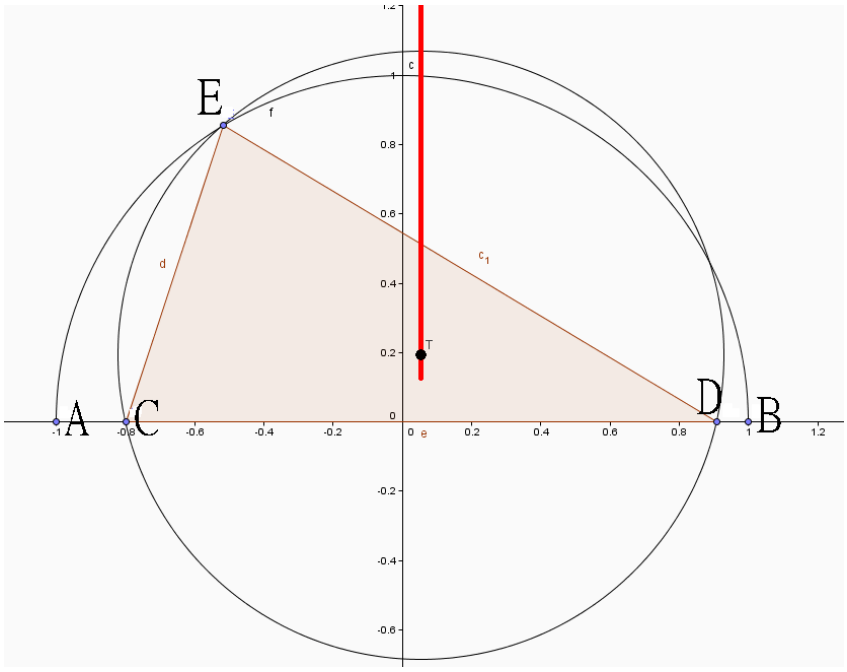
因爲外心的 x 座標爲 $\frac{c+d}{2}$，代入①

得 y＝$\frac{cd-td-tc+1}{2\sqrt{1-t^2}}$

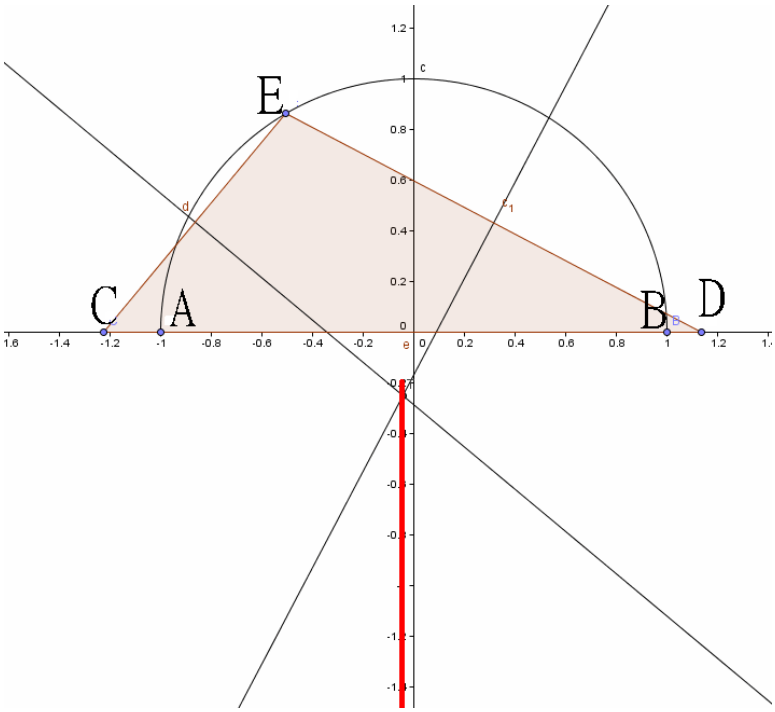


外心位置點之證明：

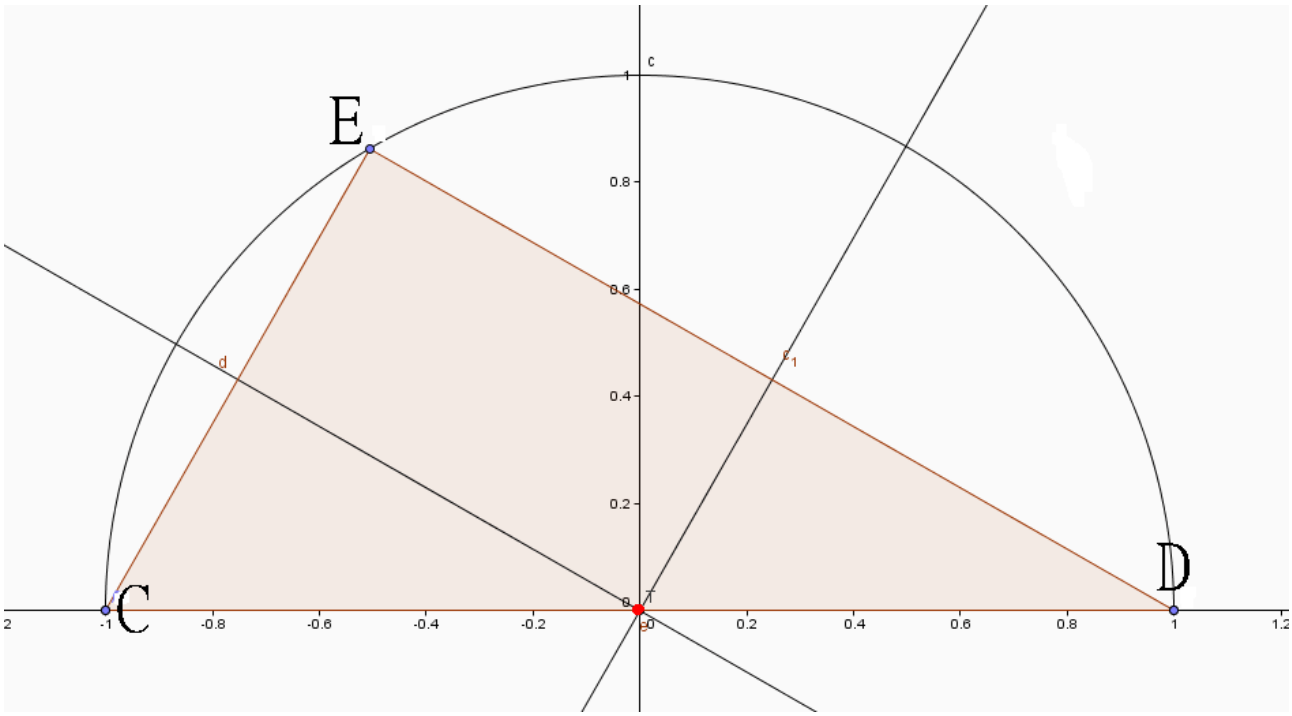
(一)當三角形的 C、D 都在圓裡面，∠CED 就會小於 90 度，因爲∠AEB 是所繞圓之圓周角，且 $\overline{AB}$ 爲直徑，所以∠AEB＝90 度，如今 C、D 位於 $\overline{AB}$ 內，故∠CED 必定小於 90 度，如果 C、E、D 形成另外一圓，由於∠CED 小於 90 度，所對的 CD 圓弧一定小於 180 度，外心就會在 $\overline{CD}$ 上方。



(二)當三角形的 C、D 都在圓外面，所以∠CED＞∠AEB＝90 度，當 C、E、D 形成另外一圓，由於∠CED 大於 90 度，所對的 CD 圓弧一定大於 180 度，外心就會在 $\overline{CD}$ 下方。



(三)當三角形的 C、D 恰在直徑的兩端，∠CED＝∠AEB＝90 度，△CED 永遠爲一直角三角形，由外心的相關性質可以知道直角三角形的外心必定落在斜邊的中點，因此無論怎麼移動 E 點，外心總固定在$\overline{CD}$中點上。



由以上的證明可以得知當 C、D 分別在圓內外時，∠CED 的角度決定了外心的位置，小於 90 度時，外心高於$\overline{CD}$；恰爲 90 度時，外心在$\overline{CD}$中點上；若大於 90 度，外心則在$\overline{CD}$下方。

四、　　內心

內心座標公式：

若三角形△CDE，C 點座標爲（x_1, y_1），D 點座標爲（x_2, y_2），E 點座標爲（x_3, y_3），$\overline{CD}$ ＝e，$\overline{CE}$ ＝d，$\overline{DE}$ ＝c，則內心座標公式爲（$\dfrac{cx_1+dx_2+ex_3}{c+d+e}, \dfrac{cy_1+dy_2+ey_3}{c+d+e}$）。

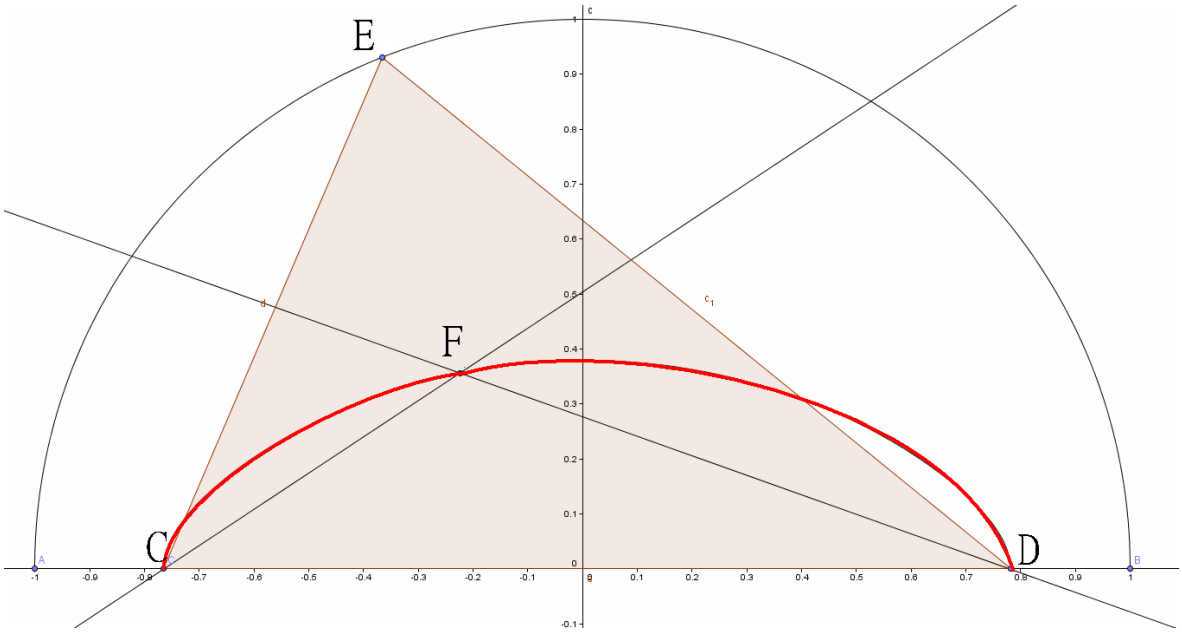
內心軌跡方程式：

以（0,0）爲圓心，1 爲半徑，做一半圓，△CDE 中，E 點在半圓上，C、D 在 X 軸上，所以設 E 點爲（t, $\sqrt{1-t^2}$ ），C、D 座標各爲（c,0）、（d,0）。

因此 $\overline{CD}$ ＝d－c，$\overline{CE}$ ＝ $\sqrt{(t-c)^2+1-t^2}=\sqrt{c^2-2tc+1}$ ，

$\overline{DE}=\sqrt{(d-t)^2+1-t^2}=\sqrt{d^2-2dt+1}$ ，將以上資訊代入內心座標公式，得到內心座標爲

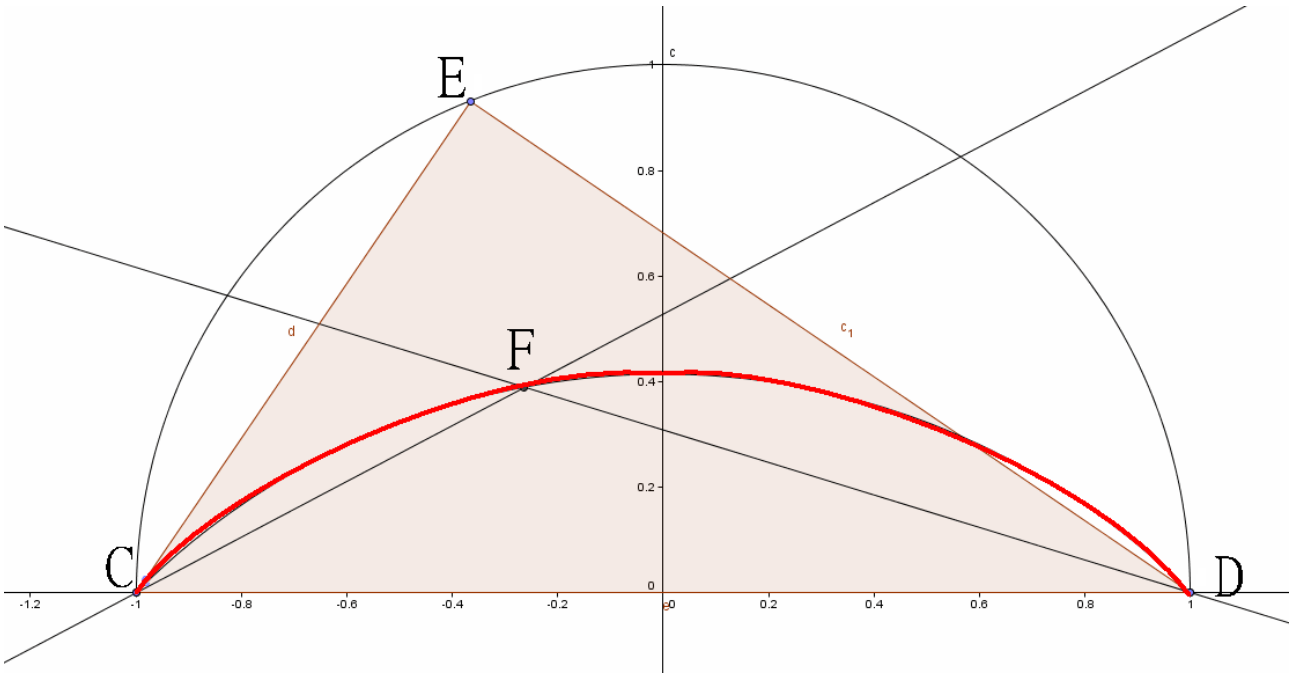
$$\left(\frac{c\sqrt{d^2-2dt+1}+d\sqrt{c^2-2ct+1}+t(d-c)}{\sqrt{d^2-2dt+1}+\sqrt{c^2-2ct+1}+d-c}, \frac{(d-c)\sqrt{1-t^2}}{\sqrt{d^2-2dt+1}+\sqrt{c^2-2ct+1}+d-c}\right)$$



底邊爲圓的直徑，內心軌跡恰爲一 90 度圓弧之證明：

∠CED 是所繞圓之圓周角，因爲$\overline{CD}$是圓的直徑，所以∠CED 永遠爲 90 度，由此知道∠ECD＋∠EDC＝90 度，因內心 F 是∠ECD、∠EDC 角平分線的交點，所以∠FCD＋∠FDC＝$\frac{1}{2}$（∠ECD＋∠EDC）＝45 度，得知∠CFD＝135 度，因此內心不論如何移動，其和 C、D 的夾角永遠是 135 度，故內心軌跡同在一圓上，所以∠CFD 對到的圓弧是 270 度，因此內心軌跡的圓弧爲 90 度。

同理可用以上的方式證明，當三角形的底邊不是恰爲所繞半圓的直徑時，由於∠CED 的角度隨著轉動而不固定，因此$\frac{1}{2}$（∠ECD＋∠EDC）的角度也無法保持一定，連帶∠CFD 也無法保持一定，故 F 的軌跡點並不是在同一個圓上。



五、　　旁心

旁心座標公式：

若三角形△CDE，C 點座標爲（x_1, y_1），D 點座標爲（x_2, y_2），E 點座標爲（x_3, y_3），$\overline{CD}$ ＝e，$\overline{CE}$ ＝d，$\overline{DE}$ ＝c，則∠E 的角平分線和另外二角的外角平分線的交點座標公式爲

（$\dfrac{-cx_1+dx_2+ex_3}{-c+d+e}, \dfrac{-cy_1+dy_2+ey_3}{-c+d+e}$）。

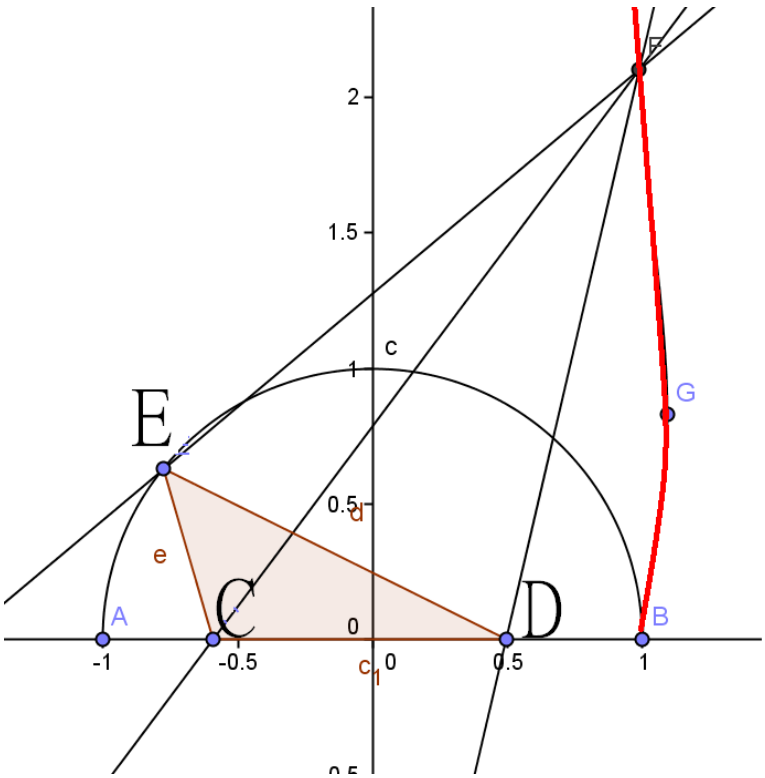
旁心軌跡方程式：

以（0,0）爲圓心，1 爲半徑，做一半圓，△CDE 中，E 點在半圓上，C、D 在 X 軸上，所以設 E 點爲（t, $\sqrt{1-t^2}$ ），C、D 座標各爲（c,0）、（d,0）。

因此 $\overline{CD}$ ＝d－c，$\overline{CE}$ ＝ $\sqrt{(t-c)^2+1-t^2}$ ＝$\sqrt{c^2-2tc+1}$ ，

$\overline{DE}$ ＝$\sqrt{(d-t)^2+1-t^2}$ ＝$\sqrt{d^2-2dt+1}$ ，將以上資訊代入座標公式，得到旁心座標爲

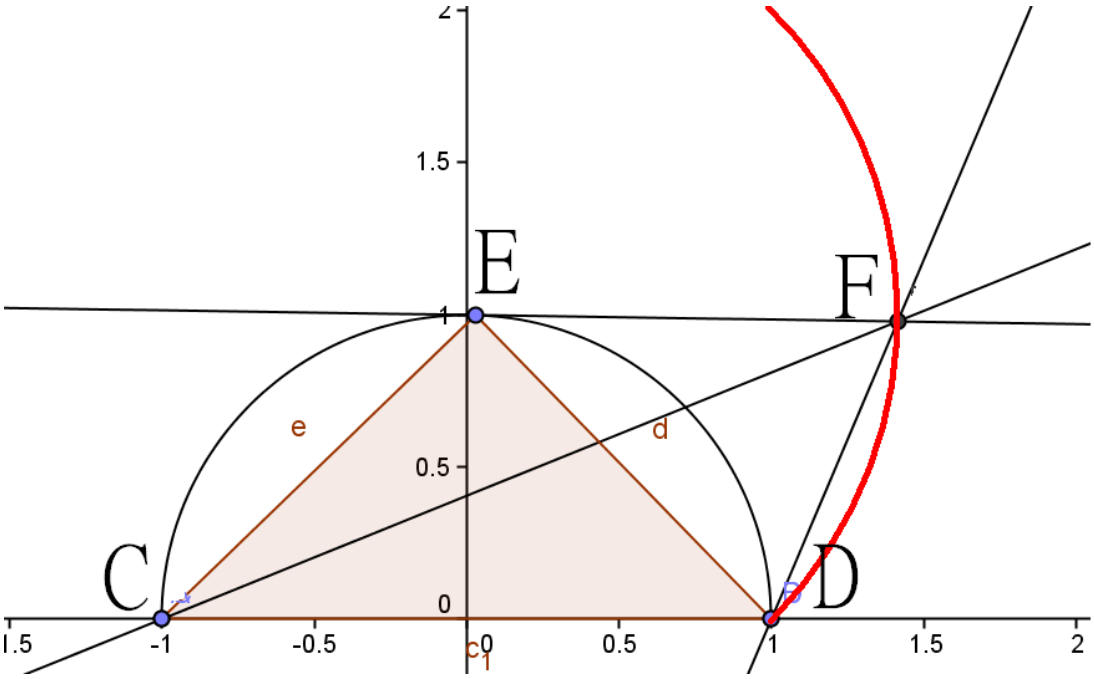
（$\dfrac{-c\sqrt{d^2-2dt+1}+d\sqrt{c^2-2ct+1}+t(d-c)}{-\sqrt{d^2-2dt+1}+\sqrt{c^2-2ct+1}+d-c}, \dfrac{(d-c)\sqrt{1-t^2}}{-\sqrt{d^2-2dt+1}+\sqrt{c^2-2ct+1}+d-c}$）



底邊爲圓的直徑，相關性質之證明：

(1)旁心軌跡爲圓弧證明：

首先證明此一軌跡爲一圓弧，△CDF 中，∠CFD＝180 度－∠FCD－∠CDF=180 度－∠FCD－∠EDC－$\frac{1}{2}$ (∠ECD+∠CED)= 180 度－∠FCD－∠EDC－∠FCD－$\frac{1}{2}$ ∠CED＝180 度－∠ECD－∠EDC－$\frac{1}{2}$ ∠CED=45 度(其中∠ECD+∠EDC=∠CED =90 度)，因此不管 E 點如何移動，∠CFD 永遠爲 45 度，故此軌跡爲一圓弧，且 C 點和此圓弧位於同一個圓上。



(2)圓心及半徑：

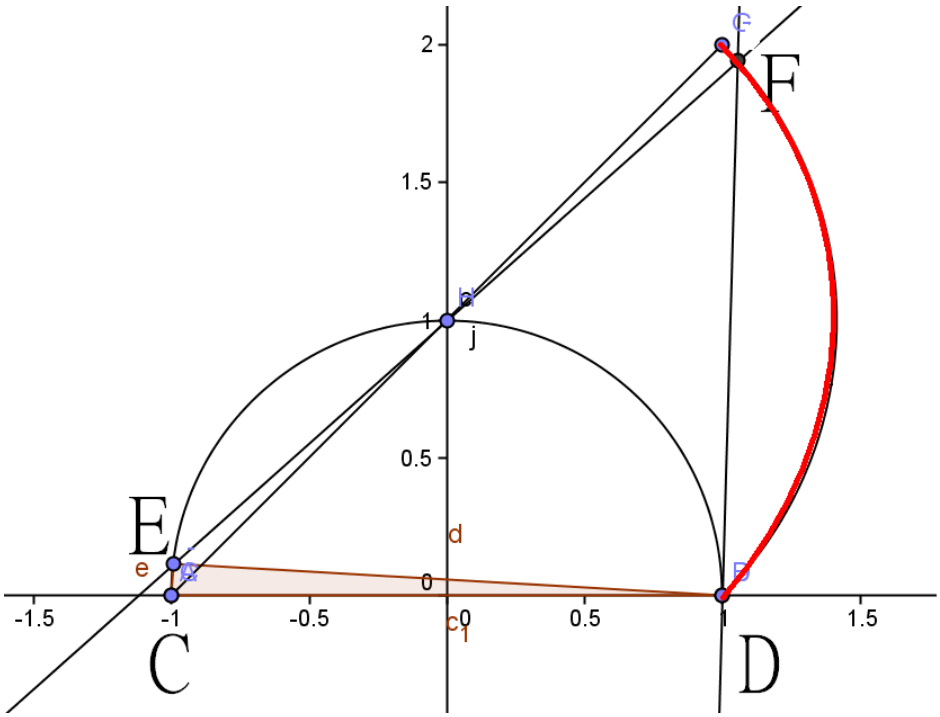
其次證明此圓弧的圓心位置，由於底邊固定在直徑兩端上，所以$\overline{CD}=2$，$\overline{CE}=\sqrt{2+2t}$，$\overline{DE}=\sqrt{2-2t}$，將以上資訊代入座標公式，得到旁心座標爲

$$(x,y)=\left(\frac{\sqrt{2-2t}+\sqrt{2+2t}+2t}{-\sqrt{2-2t}+\sqrt{2+2t}+2},\frac{2\sqrt{1-t^2}}{-\sqrt{2-2t}+\sqrt{2+2t}+2}\right)$$

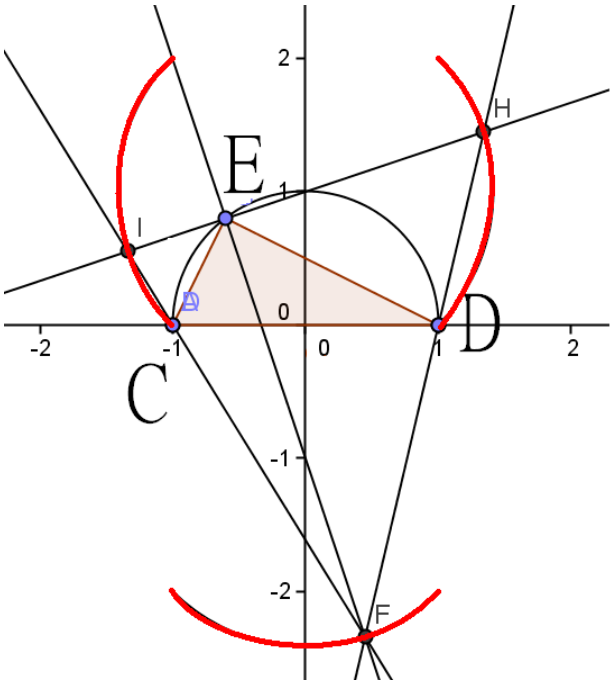
再將 x,y 做一系列的計算，可以得出 $x^2+(y-1)^2=(\sqrt{2})^2$，所以得到此圓弧的圓心位於(0,1)，且半徑爲$\sqrt{2}$。

(3)圓弧度數：

因前已證明 C、D 點和軌跡弧皆位於同一圓上，當動點 E 趨近於 C 點時，則∠ECD 趨近於 90 度，所以平分角也會大約是 45 度，依圓周角定理可知此軌跡弧爲一趨近 90 度



(4)其餘另二個旁心也可以同樣的方式來證明軌跡都是 90 度的圓弧，只不過左、右旁心軌跡弧的圓心都位於(0,1)，而下方旁心軌跡弧的圓心則是(0,-1)。



陸、結論

一、重心的軌跡仍是一半圓，且其直徑長度爲原所繞半圓直徑之$\frac{1}{3}$。

二、垂心的座標方程式爲 y＝$\frac{-x^2+(c+d)x-cd}{\sqrt{1-x^2}}$，其中 c,d 爲三角形底邊兩點之 x 座標，而 x 座標則同於所繞點之 x 座標；又或者以$\overline{OF}$ ＝ $\frac{\overline{FD}\times\overline{CF}}{\overline{EF}}$形式表示，其中 O 爲垂心，F 爲頂點在底邊的垂足，C、D 爲三角形的底邊兩點。

三、外心的軌跡爲一垂直於 X 軸的鉛垂線，其座標方程式爲 y＝$\frac{cd-td-tc+1}{2\sqrt{1-t^2}}$，其中 c,d 爲三角形底邊兩點之 x 座標，t 爲頂點的 x 座標；而當三角形底邊在半圓內時，垂心的軌跡在底邊之上方；底邊在半圓外時，垂心的軌跡在底邊之下方；又當底邊恰爲半圓的直徑時，垂心的軌跡永遠在底邊的中點之上。

四、內心的座標爲

$$\left(\frac{c\sqrt{d^2-2dt+1}+d\sqrt{c^2-2ct+1}+t(d-c)}{\sqrt{d^2-2dt+1}+\sqrt{c^2-2ct+1}+d-c},\frac{(d-c)\sqrt{1-t^2}}{\sqrt{d^2-2dt+1}+\sqrt{c^2-2ct+1}+d-c}\right)$$

，其中 c,d 爲三角形底邊兩點之 x 座標，t 爲頂點的 x 座標；若底邊恰爲圓的直徑，內心軌跡爲一 90 度的圓弧；其餘之軌跡均不爲圓弧。

五、三個旁心的座標分別爲

$$\left(\frac{-c\sqrt{d^2-2dt+1}+d\sqrt{c^2-2ct+1}+t(d-c)}{-\sqrt{d^2-2dt+1}+\sqrt{c^2-2ct+1}+d-c},\frac{(d-c)\sqrt{1-t^2}}{-\sqrt{d^2-2dt+1}+\sqrt{c^2-2ct+1}+d-c}\right)$$

$$\left(\frac{c\sqrt{d^2-2dt+1}-d\sqrt{c^2-2ct+1}+t(d-c)}{\sqrt{d^2-2dt+1}-\sqrt{c^2-2ct+1}+d-c},\frac{(d-c)\sqrt{1-t^2}}{\sqrt{d^2-2dt+1}-\sqrt{c^2-2ct+1}+d-c}\right)$$

$$\left(\frac{c\sqrt{d^2-2dt+1}+d\sqrt{c^2-2ct+1}-t(d-c)}{\sqrt{d^2-2dt+1}+\sqrt{c^2-2ct+1}-d+c},\frac{-(d-c)\sqrt{1-t^2}}{\sqrt{d^2-2dt+1}+\sqrt{c^2-2ct+1}-d+c}\right)$$

，其中 c,d 爲三角形底邊兩點之 x 座標，t 爲頂點的 x 座標；若底邊爲圓的直徑，三旁心軌跡爲一 90 度的圓弧，且軌跡弧的圓心分別爲(0,1)及(0,-1)。

柒、參考資料

1. 徐琬庭、吳千圳、高尉庭、洪研竣 / 刻骨銘＜心＞ / 第四十九屆全國中小學科學展覽。

【評語】030418

本研究探討三角形五心軌跡圖形的代表公式，方法則採用參數法，以國中階段而言，該研究的成果值得肯定，建議在作品中說明原點位置考量的要點，並發展函數的表示式。