中華民國第51屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

佳作

030417

三角形中的三角形—探討三角形的總數

學校名稱：臺中市立中山國民中學

作者：	指導老師：
國二 林妍辰 國二 鄭琳亦	黃富翔

關鍵詞：共頂點三角形、等差數列、等差級數

摘要

本研究主要目的是探討給定三角形邊長的等分點數（equal division points）後，形成在此三角形中所含三角形個數的計算方法。爲達成此目的，我們參考過去科展優勝作品專輯，以尋找破題靈感。在指導老師的提點與組員腦力激盪下，我們先探討三角形中內含三角形個數的規律性，再以共頂點分層計算法找出其規律性，經觀察後發現每一層與層之間的和會形公差爲（-2）的等差數列，最後利用等差級數求和的公式，推導出「共頂點三角形」的計算方式（Co-apex triangle formula）。由我們的研究結果發現，給定三角形邊長的等分點數後，此三角形中所含三角形的個數總和存在一般計算式。此方法在應用上既快速又不易出錯，對更複雜的多邊形所內含圖形數目的計算上亦有其參考的價值。

壹、研究動機

在二年級數學課程中學到了圖形的樣式與規律，同時老師也介紹了一些歷屆科展中有關於圖形樣式與規律的作品，其中最讓我們感到興趣的是一篇探討多邊形數的作品，從中我們學到了多邊形數是可以排成正多邊形的整數，雖然在這些例子中也有提到三角形中內含三角形數目規律的算法，但卻沒有談到關於在三角形中又內含三角形的總數，因此我們開始思考這個問題，在經過和老師討論後我們決定開始著手探討如何求得三角形中又內含三角形的總數的方法，並進而能結合在圖形的樣式與規律中所學到的知識來推導出一個計算式。

貳、研究目的

一、探討三角形中內含三角形的規律。
二、探討三角形中內含三角形的表示方法。
三、探討計算三角形中內含三角形的方法。
四、探討給定任意三角形邊長的等分點數所形成的三角形內含三角形的總數計算式。

參、研究設備及器材

一、電腦
二、紙
三、筆
四、Geogebra、PhotoImpact、Word

肆、研究過程或方法

一、定義三角形各邊等分點的分割方式：

將一正三角形各邊取相同數量的等分點後，把這些等分點連接起來後與底邊平行的連線即形成一個完成分割的三角形，如（圖 1），爲將正三角形的每邊取 1 個等分點（即每邊作二等分）所形成的分割圖；（圖 2）爲每邊取 2 個等分點所形成的分割圖。

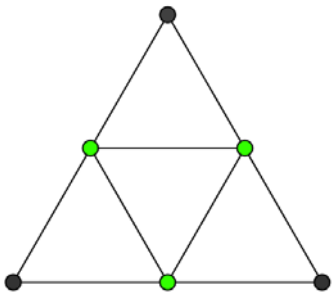


圖 1 每邊取 1 個等分點

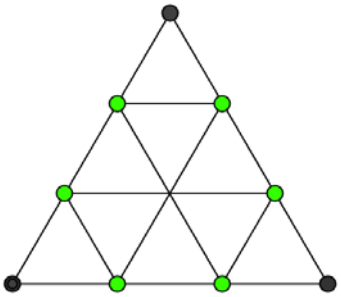


圖 2 每邊取 2 個等分點

依此類推，若每邊取 n 個等分點則可得 n 點分割圖，因此在本研究中將以 n 表示每邊的等分點數。

二、研究過程：

步驟一

以分解的方式計算分割圖中的三角形總數：

1. $n=1$時所形成的分割圖中的三角形總數：

   如（圖 3），可以知道我們可將它拆解成 3 個邊長爲 1 的小正三角形（黃色）、1 個邊長爲 1 的倒立小正三角形（藍色）及 1 個邊長爲 2 的大三角形（綠色），所以可得當 $n=1$時三角形的總數爲$3+1+1=5$個。

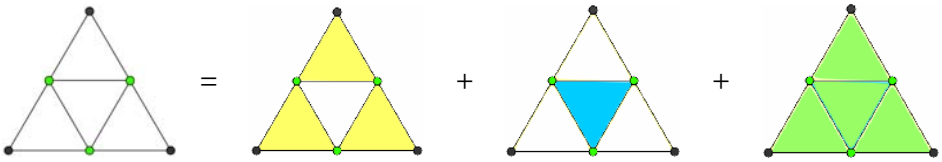


圖 3　$n=1$分解圖

2. $n=2$ 時所形成的分割圖中的三角形總數：

   如（圖 4），當 $n=2$ 時所形成的分割圖可拆成 6 個邊長爲 1 的小正三角形（黃色）、3 個邊長爲 1 的倒立的小正三角形（藍色）、3 個邊長爲 2 的三角形（綠色）以及 1 個邊長爲 3 的正三角形（紫色），所以可得當 $n=2$ 時三角形的總數爲 $6+3+3+1=$ 13個。

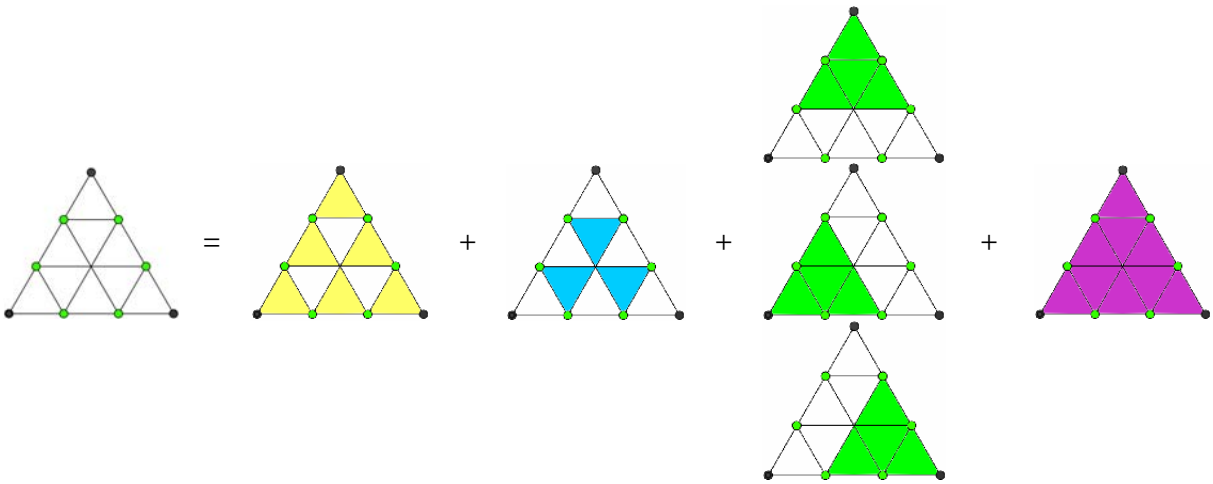


圖 4　$n=2$ 分解圖

3. $n=3$時所形成的分割圖中的三角形總數：

   如（圖 5），當 $n=3$時所形成的分割圖可拆成 10 個邊長爲 1 的小正三角形（黃色）、6 個邊長爲 1 的倒立的小正三角形（藍色）、6 個邊長爲 2 的三角形（綠色）、1 個邊長爲 2 的倒三角形（紫色）、3 個邊長爲 3 的正三角形（紅色），及 1 個邊長爲 4 的三角形（橙色），所以可得當 $n=3$時三角形的總數爲 $10+6+6+1+3+1=27$ 個。

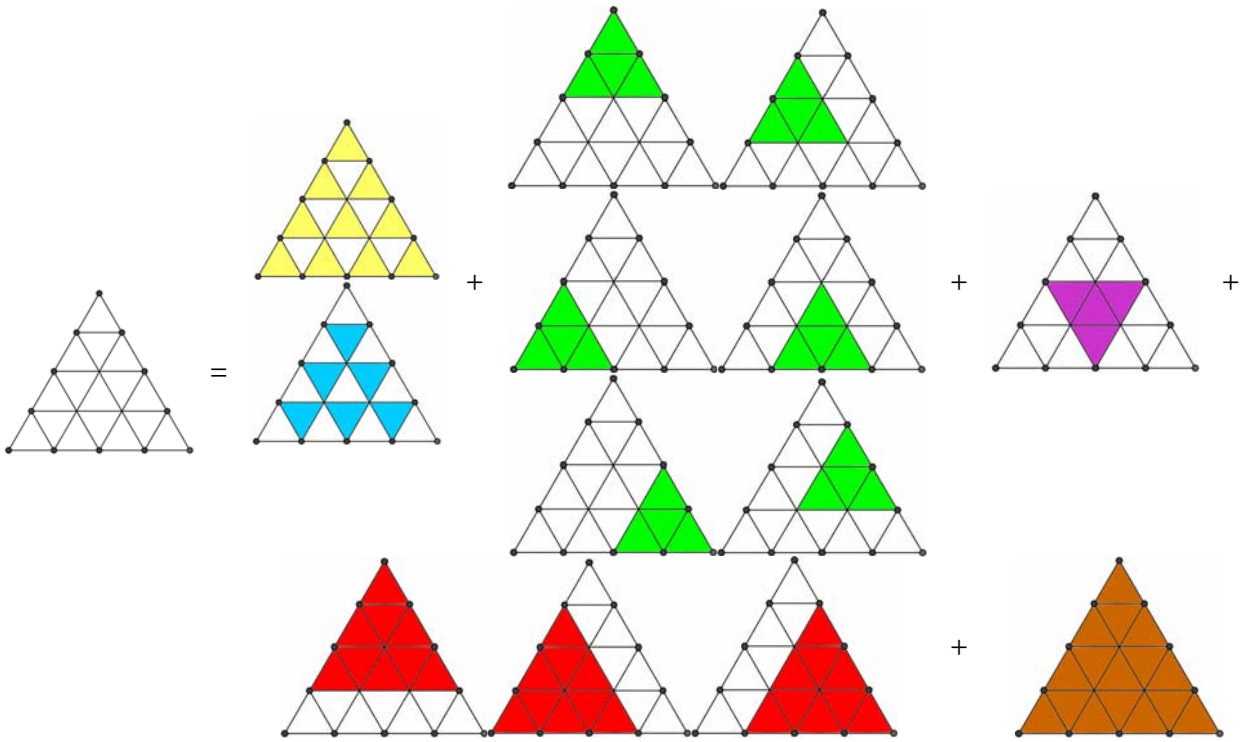


圖 5　$n=3$ 分解圖

步驟二

利用步驟一的方式將 $n=1\sim10$ 所得到的正三角形總數整理成（表 1）：

表 1　$n=1\sim10$ 正三角形總數

△邊長 / n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	合計
1	4	1										5
2	9	3	1									13
3	16	7	3	1								27
4	25	13	6	3	1							48
5	36	21	11	6	3	1						78
6	49	31	18	10	6	3	1					118
7	64	43	27	16	10	6	3	1				170
8	81	57	38	24	15	10	6	3	1			235
9	100	73	51	34	22	15	10	6	3	1		315
10	121	91	66	46	31	21	15	10	6	3	1	411

由上表可知當邊的等分點數增加時，則所分割的三角形總數也會快速的增加。

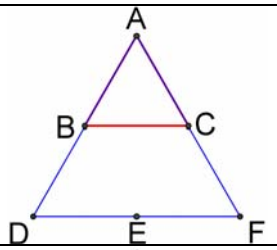
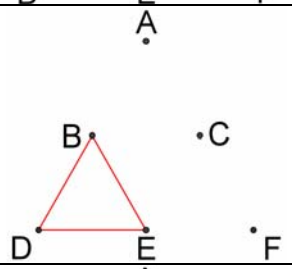
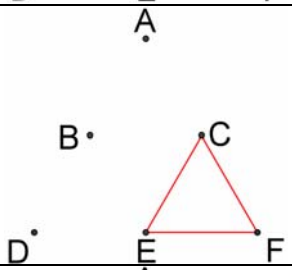
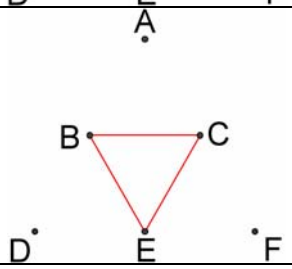
步驟三

由步驟一、二的過程中我們發現以分解的方式計算分割圖中的三角形總數是件冗長且容易出錯的事，因爲隨著 n 的增加其計算的過程就越不容易，所以在此步驟中我們要找出一種更快又更可靠的計算方法。

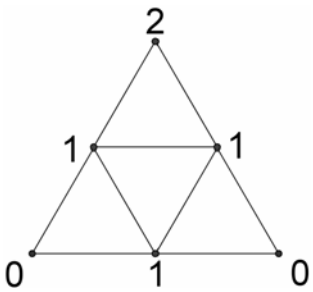
在重新觀察（圖 3）、（圖 4）、（圖 5）後發現，要計算分割圖中的三角形總數我們可

以採用共頂點三角形的計算方式，其計算方式分爲二個部分，第一部分爲正立三角形，第二部分爲倒立三角形二者都是採由上而下由左而右的計算方式，說明如下：

1. （圖 3）$n=1$：

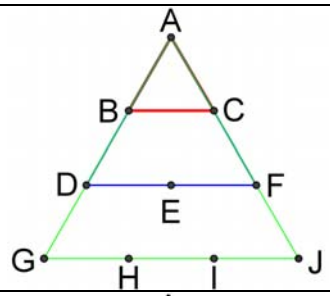
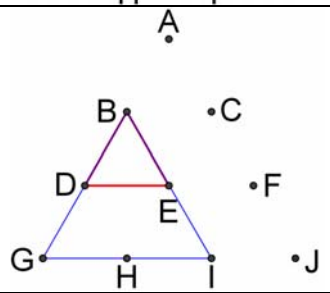
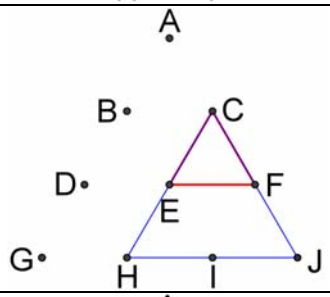
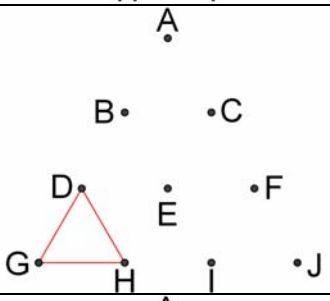
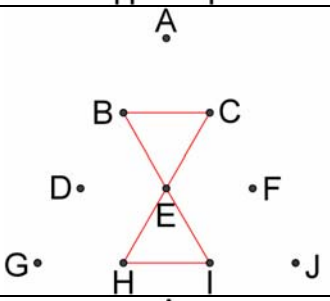
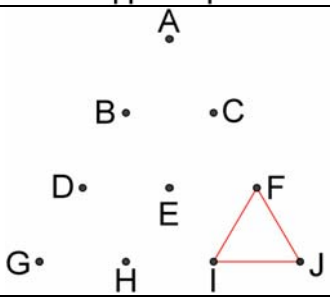
圖形	頂點	共頂點的三角形	三角形個數
	A	ΔABC 、 ΔADF	2
	B	ΔBDE	1
	C	ΔCEF	1
	E	ΔEBC	1

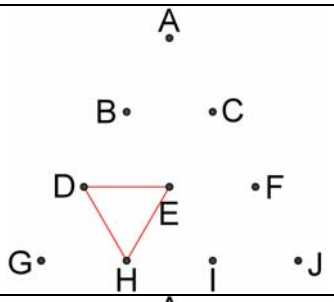
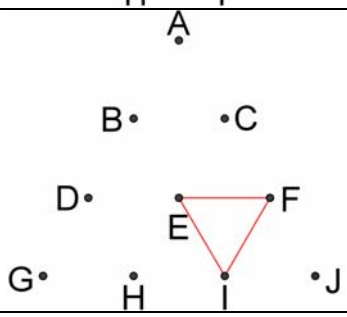
由上面的結果可以整理成如下的格式：



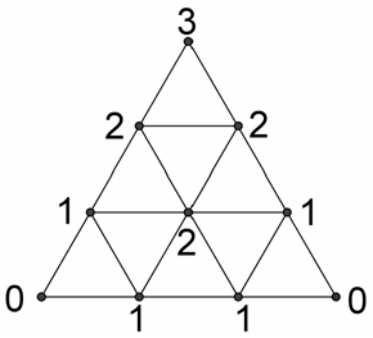
我們發現將各點所代表的數加起來後可得 $2+1+1+1=5$，恰好與步驟 2 中的（表 1）結果相同。

2. （圖 4）$n = 2$：

圖形	頂點	共頂點的三角形	三角形個數
	A	ΔABC 、 ΔADF 、 ΔAGJ	3
	B	ΔBDE 、 ΔBGI	2
	C	ΔCEF 、 ΔCHJ	2
	D	ΔDGH	1
	E	ΔEBC 、 ΔEHI	2
	F	ΔFIJ	1

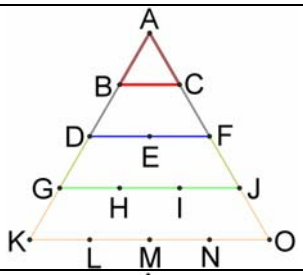
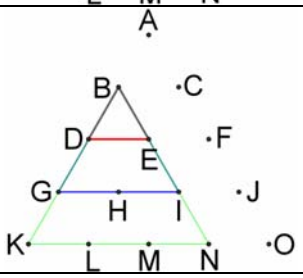
	H	ΔHDE	1
	I	ΔIEF	1

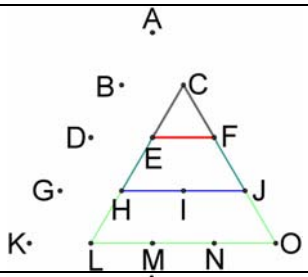
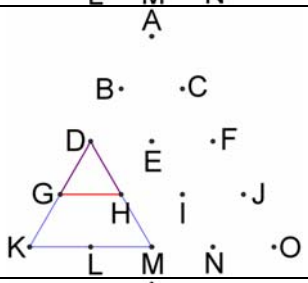
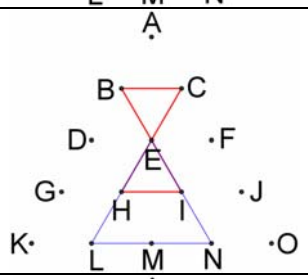
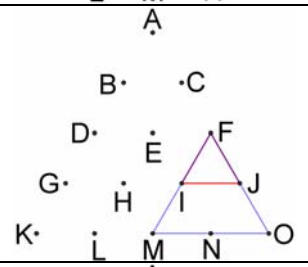
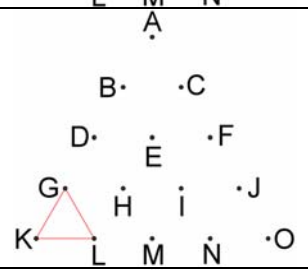
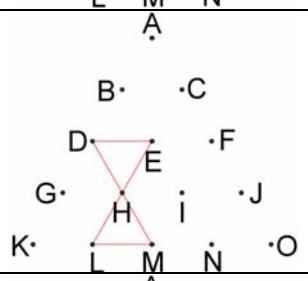
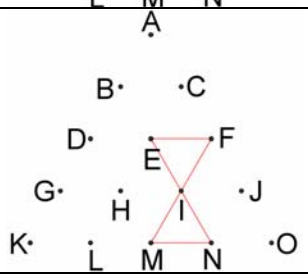
由上面的結果可以整理成如下的格式：

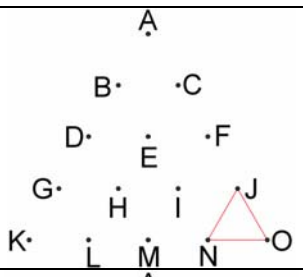
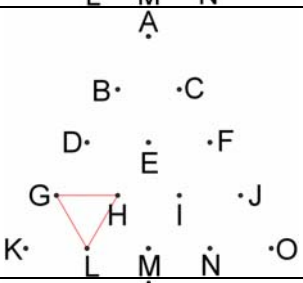
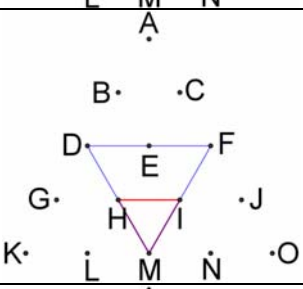
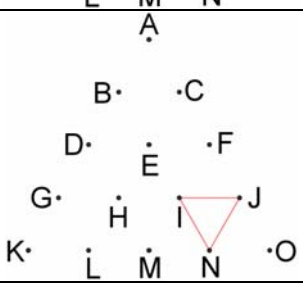


我們發現將各點所代表的數加起來後可得 $3+2+2+1+2+1+1+1=13$ 。

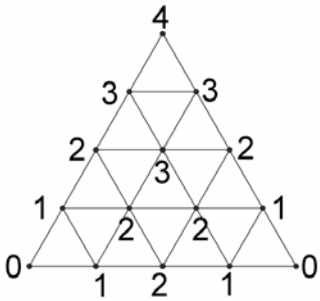
3. （圖 5）$n=3$

圖形	頂點	共頂點的三角形	三角形個數
	A	ΔABC 、 ΔADF 、 ΔAGJ ΔAKO	4
	B	ΔBDE 、 ΔBGI 、 ΔBKN	3

	C	ΔCEF 、ΔCHJ 、ΔCLO	3
	D	ΔDGH 、ΔDKM	2
	E	ΔEBC 、ΔEHI 、ΔELN	3
	F	ΔFIJ 、ΔFMO	2
	G	ΔGKL	1
	H	ΔHDE 、ΔHLM	2
	I	ΔIEF 、ΔIMN	2

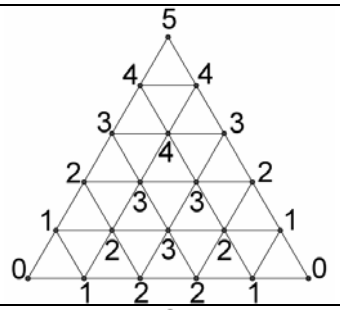
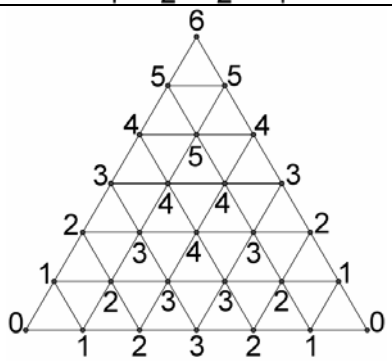
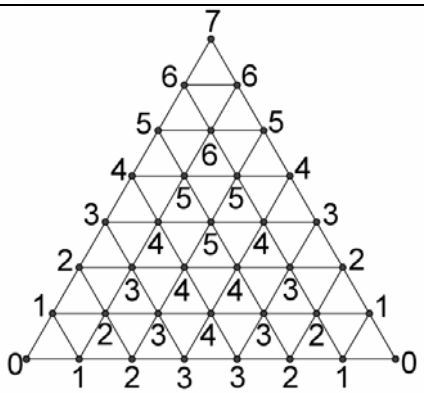
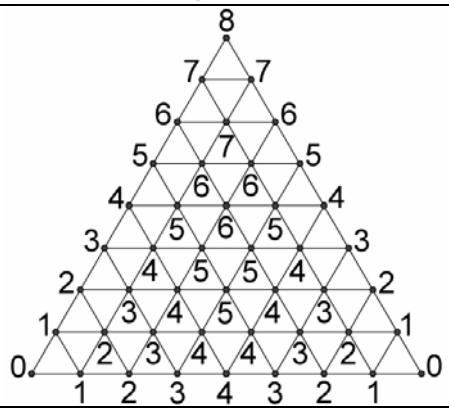
	J	ΔJNO	1
	L	ΔLGH	1
	M	ΔMHI 、ΔMDF	2
	N	ΔNIJ	1

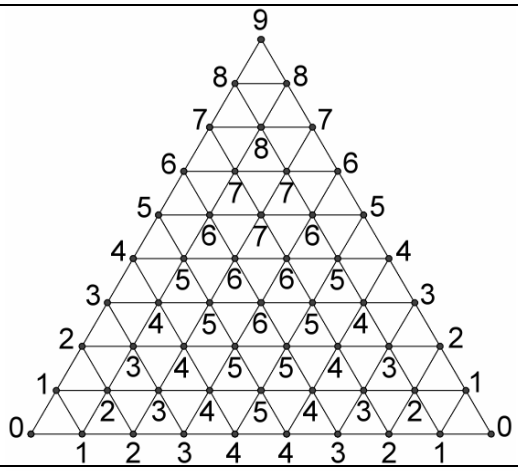
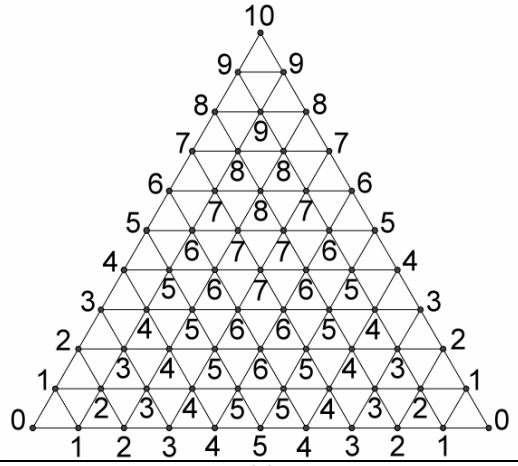
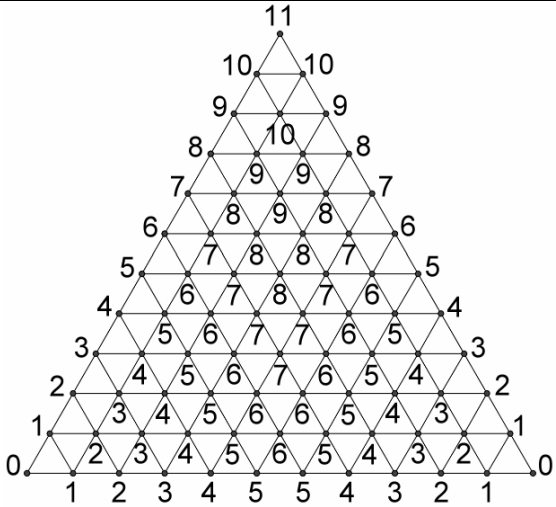
由上面的結果可以整理成如下的格式：



我們發現將各點所代表的數加起來後可得
$4+3+3+2+3+2+1+2+2+1+1+2+1=27$ 。

4. 爲了再一次確認本研究所提的方法之正確性，因此我們再利用共頂點的計算方法計算 $n=4,5,\cdots,10$ 的結果。

等分點數	共頂點計算圖	計算結果
$n=4$		48
$n=5$		78
$n=6$		118
$n=7$		170

$n=8$		235
$n=9$		315
$n=10$		411

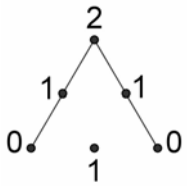
步驟四

由步驟三可知本研究所提的共頂點計算方法是正確的，但還是存在計算冗長的問題，不過我們可以發現在共頂點計算圖中每一個共頂點的數字排列具有其規律性，因此在本步驟中我們要找出這些數字排列的規律性質。

在經過分析後發現這些數字的排列在層與層之間具有等差的性質，如下所示：

1. $n=1$：

如下圖所示，我們將最外圍的數字稱爲第 1 層，並以 a_1 表示，而內部所剩下的數稱爲第 2 層，以 a_2 表示，因此可得：



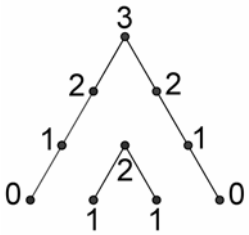
$a_1=0+1+2+1+0=4$

$a_2=1$

以數列的方式表示：4,1

其公差爲 $1-4=-3$

2. $n=2$：



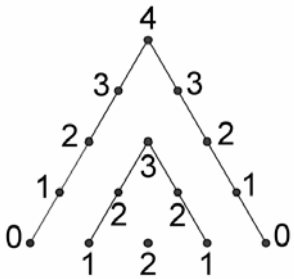
$a_1=0+1+2+3+2+1+0=9$

$a_2=1+2+1=4$

以數列的方式表示：9,4

其公差爲 $4-9=-5$

3. $n=3$：



$a_1=0+1+2+3+4+3+2+1+0=16$

$a_2=1+2+3+2+1=9$

$a_3=2$

以數列的方式表示：16,9,2

其公差爲 $9-16=2-9=-7$

4. 以此方式，將 $n=1\sim10$ 各層數字和所形成的數列整理成（表 2）：

表 2 $n=1\sim10$ 各層數字和的數列

n	數列	項數	公差
1	4,1	2	-3
2	9,4	2	-5
3	16,9,2	3	-7
4	25,16,7	3	-9
5	36,25,14,3	4	-11
6	49,36,23,10	4	-13
7	64,49,34,19,4	5	-15
8	81,64,47,30,13	5	-17
9	100,81,62,43,24,5	6	-19
10	121,100,79,58,37,16	6	-21

由（表 2）我們發現每一個數列的第一項都是完全平方數，且恰好是爲 $(n+1)^2$

而在項數的部分則形成具有二項循環規律的等差數列，另外我們發現每一個數列的公差也是一個公差爲 (-2) 等差數列，因此我們推測可以利用這些數列推導出一個一般式。

步驟五

利用（表 2）的結果進行下一步的探討。

1. 首先假設給定任一等分點數 n，則所形成的等差數列之首項 $a_1=(n+1)^2$，其公差爲 $d=-(2n+1)$。

2. 數列的項數部分我們發現當 $n=1,3,5,7,9$ 與 $n=2,4,6,8,10$ 時其所對應的項數是相等的，因此若假設 m 爲 n 對應數列的項數，則項數 m 可定義成：

$$m=\frac{n+3}{2}\text{，}n\text{爲奇數 -------（1）}$$

$$m=\frac{n+2}{2}\text{，}n\text{爲偶數 -------（2）}$$

3. 將數列的每一項進行相加即可形成一個等差級數，而由等差級數和的公式可知

$$S_m=\frac{m(a_1+a_m)}{2}\text{ --------（3）}$$

在（3）式中 m 爲等差級數的項數其值由（1）、（2）式決定；a_1 爲首項，a_m 爲末項，若其公差爲 d，則由等差公式可得：

$$a_m=a_1+(m-1)d$$

$$a_m=(n+1)^2+(m-1)[-(2n+1)]$$

$$a_m=(n+1)^2-(2n+1)(m-1)$$

將 a_1、a_m 代入第（3）式：

$$S_m=\frac{m\left[(n+1)^2+(n+1)^2-(2n+1)(m-1)\right]}{2}$$

$$S_m=\frac{m\left[2(n+1)^2-(2n+1)(m-1)\right]}{2}\text{ --------（4）}$$

由於第（4）式中需要二個變數，因此我們將第（4）式改寫成如下格式：

$$S_{n,m}=\frac{m\left[2(n+1)^2-(2n+1)(m-1)\right]}{2}\text{ --------（5）}$$

步驟六

檢驗步驟五中所推導出的計算式（5）

1. $n=1$時：

n 爲奇數，代入（1）式可得

$$m=\frac{1+3}{2}=2$$

（5）式可得

$$S_{1,2}=\frac{2\left[2(1+1)^2-(2\times1+1)(2-1)\right]}{2}$$

$$S_{1,2}=2\times2^2-3\times1$$

$$S_{1,2}=8-3$$

$$S_{1,2}=5$$

2. $n=2$時：

n爲偶數，代入（2）式可得

$$m=\frac{2+2}{2}=2$$

由（5）式可得

$$S_{2,2}=\frac{2\left[2(2+1)^2-(2\times2+1)(2-1)\right]}{2}$$

$$S_{2,2}=2\times3^2-5\times1$$

$$S_{2,2}=18-5$$

$$S_{2,2}=13$$

3. $n=3$時：

n爲奇數，代入（1）式可得

$$m=\frac{3+3}{2}=3$$

由（5）式可得

$$S_{3,3}=\frac{3\left[2(3+1)^2-(2\times3+1)(3-1)\right]}{2}$$

$$S_{3,3}=\frac{3\left[2\times4^2-7\times2\right]}{2}$$

$$S_{3,3}=\frac{3\times(32-14)}{2}$$

$$S_{3,3}=\frac{3\times18}{2}=27$$

4. $n=4$時：

n爲偶數，代入（2）式可得

$$m=\frac{4+2}{2}=3$$

由（5）式可得

$$S_{4,3}=\frac{3\left[2(4+1)^2-(2\times4+1)(3-1)\right]}{2}$$

$$S_{4,3}=\frac{3\left[2\times5^2-9\times2\right]}{2}$$

$$S_{4,3}=\frac{3\times(50-18)}{2}$$

$$S_{4,3}=\frac{3\times32}{2}=48$$

5. $n=5$時：

n爲奇數，代入（1）式可得

$$m=\frac{5+3}{2}=4$$

由（5）式可得

$$S_{5,4}=\frac{4\left[2(5+1)^2-(2\times5+1)(4-1)\right]}{2}$$

$$S_{5,4}=\frac{4\left[2\times6^2-11\times3\right]}{2}$$

$$S_{5,4}=\frac{4\times(72-33)}{2}$$

$$S_{5,4}=\frac{4\times39}{2}=78$$

6. $n=6$時：

n爲偶數，代入（2）式可得

$$m=\frac{6+2}{2}=4$$

由（5）式可得

$$S_{6,4}=\frac{4\left[2(6+1)^2-(2\times6+1)(4-1)\right]}{2}$$

$$S_{6,4}=\frac{4\left[2\times7^2-13\times3\right]}{2}$$

$$S_{6,4}=\frac{4\times(98-39)}{2}$$

$$S_{6,4}=\frac{4\times39}{2}=118$$

7. $n=7$時：

n爲奇數，代入（1）式可得

$$m=\frac{7+3}{2}=5$$

由（5）式可得

$$S_{7,5}=\frac{5\left[2(7+1)^2-(2\times 7+1)(5-1)\right]}{2}$$

$$S_{7,5}=\frac{5\left[2\times 8^2-15\times 4\right]}{2}$$

$$S_{7,5}=\frac{5\times(128-60)}{2}$$

$$S_{7,5}=\frac{5\times 68}{2}=170$$

8. $n=8$時：

n爲偶數，代入（2）式可得

$$m=\frac{8+2}{2}=5$$

由（5）式可得

$$S_{8,5}=\frac{5\left[2(8+1)^2-(2\times 8+1)(5-1)\right]}{2}$$

$$S_{8,5}=\frac{5\left[2\times 9^2-17\times 4\right]}{2}$$

$$S_{8,5}=\frac{5\times(162-68)}{2}$$

$$S_{8,5}=\frac{5\times 94}{2}=235$$

9. $n=9$時：

n爲奇數，代入（1）式可得

$$m=\frac{9+3}{2}=6$$

由（5）式可得

$$S_{9,6}=\frac{6\left[2(9+1)^2-(2\times 9+1)(6-1)\right]}{2}$$

$$S_{9,6}=\frac{9\left[2\times 10^2-19\times 5\right]}{2}$$

$$S_{9,6}=\frac{6\times(200-95)}{2}$$

$$S_{9,6}=\frac{6\times 105}{2}=315$$

10. $n=10$時：

n爲偶數，代入（2）式可得

$$m=\frac{10+2}{2}=6$$

由（5）式可得

$$S_{10,6}=\frac{6\left[2(10+1)^2-(2\times10+1)(6-1)\right]}{2}$$

$$S_{10,6}=\frac{6\left[2\times11^2-21\times5\right]}{2}$$

$$S_{10,6}=\frac{6\times(242-105)}{2}$$

$$S_{10,6}=\frac{6\times137}{2}=411$$

伍、研究結果

由研究的過程我們得到了一個計算給定任意每邊有 n 個等分點所形成的三角形總數之計算式：

$$S_{n,m}=\frac{m\left[2(n+1)^2-(2n+1)(m-1)\right]}{2} \text{ --------（5）}$$

算式中的變數 m 值必須取決於所給定的等分點數 n ：

$$m=\frac{n+3}{2}\text{，}n\text{ 爲奇數}$$

$$m=\frac{n+2}{2}\text{，}n\text{ 爲偶數}$$

由研究的過程中，我們發現算式中的 m 恰好符合高斯函數。由高斯符號的定義可知，形式爲 $\lfloor x\rfloor$，表示<u>不大於</u>（即小於等於）x 的最大「整數」，即 $x-1<\lfloor x\rfloor\le x$ 。因此可以將 m 重新定義成：

$$m=\left\lfloor\frac{n+3}{2}\right\rfloor \text{ --------（6）}$$

由（6）式可知：

當 $n=1$ 時，$m=\left\lfloor\frac{1+3}{2}\right\rfloor=\lfloor 2\rfloor=2$

當 $n=2$ 時，$m=\left\lfloor\frac{2+3}{2}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{5}{2}\right\rfloor=\lfloor 2.5\rfloor=2$

當 $n=3$ 時，$m=\left\lfloor\frac{3+3}{2}\right\rfloor=\lfloor 3\rfloor=3$

當 $n=4$ 時，$m=\left\lfloor\frac{4+3}{2}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{7}{2}\right\rfloor=\lfloor 3.5\rfloor=3$

利用（6）式可將（5）式整理成如下的結果：

$$S_n=\frac{\left\lfloor\frac{n+3}{2}\right\rfloor\left\{2(n+1)^2-(2n+1)\left[\left\lfloor\frac{n+3}{2}\right\rfloor-1\right]\right\}}{2} \text{ --------（7）}$$

陸、討論

一、在本研究的過程中，一開始最令我們困擾的是如何計算出所有的正三角形總數，尤其是當所給定的等分點數越大時則越容易數錯，爲了克服這個難題，我們找到了一個快速且又不易出錯的計算方法，這個方法我們把它稱之爲「共頂點計算法」。

二、在使用「共頂點計算法」整理後，我們進一步發現這些「共頂點數」其實是有規律的排列方式，乍看之下會誤以爲是巴斯卡三角形，但其實它並不具有巴斯卡三角形的性質，因此不能以計算巴斯卡三角形的方式來計算。在經過多次的嚐試後我們有了突破性的發現，那就是如果把這些有規律性排列的共頂點數以蓋蓋子的方式，把它一層一層的分開加總後，則每一層與層之間的總和會形成一個負公差的等差數列。

三、因每一層與層之間是爲等差數列，所以把每一層的「共頂點數」相加後即形成一個等差級數，利用等差級數求和的公式，我們得到了一個計算這些總和的一般式（5），算式中的 m 值決定於所給定的等分點數 n 是爲奇數還是偶數，如此在計算上較爲麻煩。在研究的過程中我們發現 m 值可用高斯函數來表示，即 m 爲小於等於 $\frac{n+3}{2}$ 的最大整數如（6）式，利用（6）式可以將（5）式整理成（7）式，這樣我們的計算式只需將等分點數 n 代入式中即可算出結果。

柒、結論

在本篇「三角形中的三角形－探討三角形的總數」的研究中，我們發現若要求任意 n 等分點所形成的全部三角形總數並不難，最困難的是在剛開始要找出規律的地方，以及要如何找出一個最簡便的計算方式。經由利用「共頂點三角形」的計算方式後，進一步發現這些圖形的排列律，然後循序漸進的找出其規則並順利推導出算式，而這個過程也讓我們深刻體會出數與形的精神所在。

回想起在研究過程中遭遇困難時的那種心情真是令人難忘，但卻總是在和老師討論後又重新燃起鬥志，繼續探索下去。總記得老師常提起的一句話「只要用心去觀察、去體會、去思考，就不難發現其中的奧妙」。在這次科展中，的確讓我們瞭解到在我們的日常生活中，確實有很多東西值得我們去觀察、去思考，只要能像老師講的，仔細去觀察然後思考自然就會有很多的收穫，相信這就是這次科展中讓我們覺得最有樂趣也最值得驕傲的地方。

捌、參考資料及其他

1. John Mason, Leone Burton, Kaye Stacey 原著；臺北市建國高級中學 49 屆 314 班全體同學合譯（民 87）。《數學思考》。臺北市：九章。
2. 數學科編輯小組（民 96）。國中數學第四冊。台北縣：康軒出版社。
3. 中華民國第四十六屆科學展覽優勝作品專輯（國中組）。

【評語】030417

本研究探討在三角形邊上設等分點的情況下，計算三角形的個數，研究應用兩種不同的方法進行，並發展推廣公式，本研究發展出一個方便記錄成果的表示方式，值得肯定。