中華民國第51屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

第二名

030416

凸n邊形完美分割線的尺規作圖與數量探討

學校名稱：新北市立福和國民中學

作者：	指導老師：
國二 張伯瑞	鄭釧鋒
國二 林冠廷	邊智屏
國三 陳　毅	

關鍵詞：完美分割線、面積分割、尺規作圖

凸 n 邊形完美分割線的尺規作圖與數量探討

[摘要]：

本研究的規則：以尺規作圖的方式，作一直線 L 將凸 n 邊形的周長與面積同時平分。若直線 L 存在，則我們稱 L 為完美分割線。

我們得到以下成果：

1. 對於具有內心的凸 n 邊形，其完美分割線必過其內心；不通過內心的直線必不是完美分割線。
2. 利用等周線移動產生的面積變化，我們簡單的證出：凸 n 邊形必存在完美分割線。
3. 利用研究出的[完美分割線畢氏作圖法]，可作出凸 n 邊形的所有完美分割線。
4. 對於非平行凸 n 邊形，當等周線通過頂點，必存在「順坡」與「逆波」移動兩者之一。利用此結果，我們創造出「最多順坡移動建構法」，證出：最多有 $(n-3)$ 個「順坡移動」。進一步證明出：最多存在 $2n$-3 條完美分割線。

壹、 研究動機：

在查閱多邊形的周長分割與面積分割中，我們搜尋到完整的多邊形過定點的面積平分與三角形過定點的周長分割，及少數提到完美分割線(即將原圖形分割成兩區域，使原圖形的面積與周長皆被平分)，但其作法不是尺規作圖，且結論似乎有問題。因此，我們針對上述不足與疑問之處，繼續研究，盼能有好的結果出現。

貳、 研究目的：

一、探討凸 n 邊形的完美分割線是否必存在？

二、如何以尺規作圖作出完美分割線？

三、非平行凸 n 邊形，最多存在幾條完美分割線？

參、 研究器材：

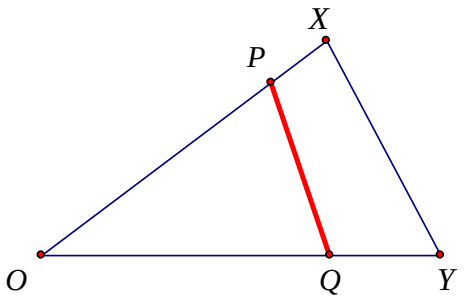
紙、筆、GSP 幾何繪圖軟體、圓規

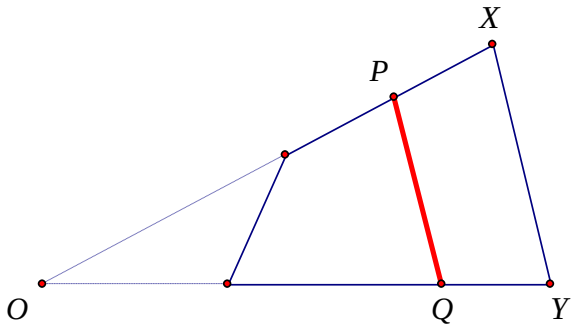
肆、 研究過程及方法：

一、**研究規則：**以尺規作圖的方式，作直線 L 將凸 n 邊形的周長與面積同時平分。若直線 L 存在，則我們稱 L 為**完美分割線**。

二、名詞定義：

1. 基本線：在凸 n 邊形的周界上， P、Q 為相異兩邊上的點，當 P、Q 所在的兩邊或延長線有交點，假設為 O。且當 $\overline{OP}=\overline{OQ}$ 時，我們稱 $\overline{PQ}$(或$\overleftrightarrow{PQ}$) 為 $\angle XOY$ 的一條基本線或稱為此凸 n 邊形的基本線。





2. 基本等周線：當一條基本線將凸 n 邊形的周長平分，則此基本線我們稱為基本等周線。

3. 基本等積線：當一條基本線將凸 n 邊形的面積平分，則此基本線我們稱為基本等積線。

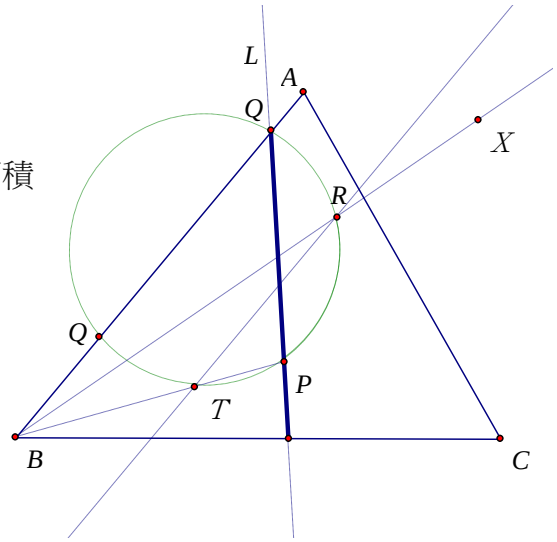
4. 非平行多邊形：若多邊形不存在任何一組對邊平行，則我們稱此多邊形為非平行多邊形。

三、文獻探討：

1. 來源：幾何學辭典 *P*486---第 2209 題

已知： ΔABC 內部一點 P

求作：過 P 點作一直線平分 ΔABC 的面積



作法：1.連 $\overline{PB}$

2.作 $x=\dfrac{\overline{AB}\times\overline{BC}}{2\overline{PB}}$

3.作 $\angle XBA=\angle PBC$

4.在 $\overrightarrow{BX}$ 上取 $\overline{BR}=x$

5.作 $\overrightarrow{RT}\,//\,\overline{AB}$ 交 $\overline{PB}$ 於 T

6.作 ΔPRT 外接圓交 $\overline{AB}$ 於 Q(可能有 0 個交點或 1 個交點或 2 個交點)

7.過 P、Q 作直線 L，若 L 與 $\overline{BC}$ 有交點，則 L 為所求。

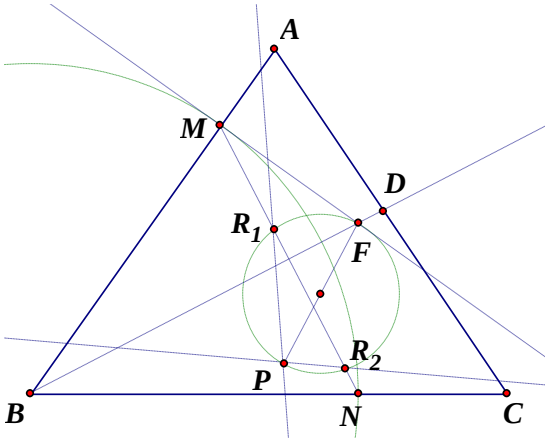
討論：從上述作圖中，我們發現此文獻作圖存在盲點。即當 P 在分角線上，則上述[步驟 6]作不出外接圓。後續自然作不出等面積線。

2. 來源：中華民國第四十六屆中小學科學展覽國中數學科---

『三角形周長等分線的作圖與數量的分布』

已知：ΔABC 內部一點 P

求作：過 P 點作一直線平分 ΔABC 的周長



作法：(1) 作 $\angle B$ 的平分線 $\overrightarrow{BD}$

(2) 作 $\angle B$ 的基本等周線 $\overline{MN}$

(3) 過 M 作 $\overrightarrow{MF} \perp \overline{BM}$ 交 $\overrightarrow{BD}$ 於 F

(4) 以 $\overline{PF}$ 為直徑作圓交 $\overline{MN}$ 於 R

(可能有 0 個交點或 1 個交點或 2 個交點)

(5) 作 $\overleftrightarrow{PR}$，若 $\overleftrightarrow{PR}$ 與 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$ 分別有交點，則 $\overleftrightarrow{PR}$ 即為所求。

想法：**從文獻的作圖中，假如能找到一個點，滿足過此點的等周線與等積線能重合，則此條等周線(或等積線)即為「完美分割線」。特別的，我們稱具有上述結果的點為「完美點」。**

以下是我們的研究：

四、問題的分析與討論

[研究一]：三角形完美分割線的相關探討

[研究一之 1]：三角形「完美點」的尋找？

首先，我們從三角形的「三心」思考。發現到：「內心到三角形的三邊等距」，會產生「等高」結果。因此，我們可考慮過內心的分割線，分析如下：

分析：1.設 I 為 ΔABC 的內心

2.過 I 任意作一直線 $\overleftrightarrow{PQ}$，假設 P 在 $\overline{AB}$，Q 在 $\overline{BC}$ 上(不影響其一般化)

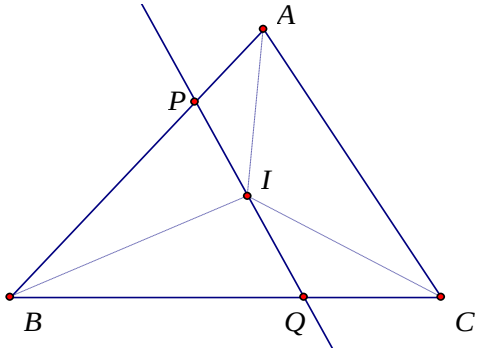
3.連 $\overline{IA}$ 、 $\overline{IB}$ 、 $\overline{IC}$

4. ΔPBQ ：四邊形 $APQC$ 面積

$=(\Delta PBI+\Delta QBI):(\Delta PAI+\Delta AIC+\Delta CQI)$

$=(\overline{PB}+\overline{QB}):(\overline{PA}+\overline{AC}+\overline{CQ})$

($\because I$ 為 ΔABC 內心 $\therefore$ 等高)



即 $\overleftrightarrow{PQ}$ 將 ΔABC 分割成的兩塊區域，其面積比等於原周長的分割比。

假如 $\overleftrightarrow{PQ}$ 為等周線，則 $\overleftrightarrow{PQ}$ 即為 ΔABC 的一條完美分割線。

即三角形的內心為「**完美點**」。

[結論一]：

1. **過三角形內心的分割線，所分割成的兩塊區域，其面積比等於原周長的分割比。**

2. **三角形的內心為「完美點」。**

由[結論一]可得

[結論二]：過三角形內心的等周線(或等積線)，即為此三角形的完美分割線。

[研究一之 2]：三角形完美分割線是否存在於不通過其內心的直線？

證明：1.假設 I 為內心，$\overleftrightarrow{PQ}$ 為任意一條不通過 I 的分割線。

2.當 I 落在 ΔPBQ 的內部

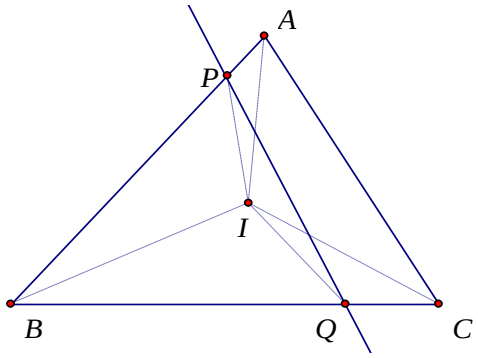
(1) 連 $\overline{IA}$ 、 $\overline{IB}$ 、 $\overline{IC}$ 、 $\overline{IP}$ 、 $\overline{IQ}$

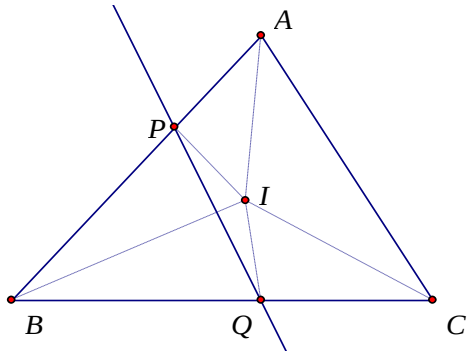
(2) $\because \dfrac{\Delta PBQ\text{面積}}{\text{四邊形}APQC} > \dfrac{\text{四邊形}IPBQ\text{面積}}{\text{五邊形}APIQC\text{面積}} = \dfrac{\Delta PBI+\Delta BQI}{\Delta API+\Delta CQI+\Delta AIC}$

$=\dfrac{\overline{PB}+\overline{BQ}}{\overline{AP}+\overline{CQ}+\overline{AC}}$ ($\because I$ 為 ΔABC 內心 $\therefore$ 等高)

可得：$\overleftrightarrow{PQ}$ 分割出的兩區域面積比大於周長分割比

$\therefore \overleftrightarrow{PQ}$ 不為完美分割線





3.當 I 落在四邊形$APQC$ 內部，同上述之證明，

可得 $\dfrac{\Delta PBQ}{\text{四邊形}APQC\text{面積}} < \dfrac{\overline{PB}+\overline{BQ}}{\overline{AP}+\overline{CQ}+\overline{AC}}$

4.綜合 2、3 可證：三角形的完美分割線不存在於不過其內心之直線上。

由[研究一之 1]、[研究一之 2]可得[結論三]：

[結論三]：過三角形的完美分割線只存在於過內心的直線。

由[**結論二**] 可知要作出全部的完美分割線，只要利用文獻中的「**等周線作圖**」，通過內心，即可作出完美分割線。

根據文獻：**通過三角形內部一點至多有 3 條等積線，以正三角形為例，可得 3 條中線，皆為完美分割線。**

在[研究一]的探討中，由於三角形必存在內心，且完美分割線必過內心。但四邊以上並不一定存在內心，顯然，上述推論不能如法炮製，因此，我們需要有其他的想法。

[研究二]：四邊形完美分割線的相關探討

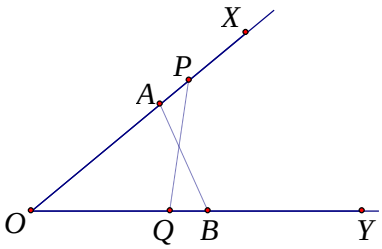
由於四邊形並不一定存在內心，那完美分割線是否存在呢？我們想利用等周線的移動，來觀察分割成兩區域面積之變化。因此，我們先證明下面定理：

[定理 1] 已知 $\angle XOY$ 上兩定點 A 、 B ， A 在 $\overrightarrow{OX}$ 、 B 在 $\overrightarrow{OY}$ 上，且 $\overline{OA}=\overline{OB}=\dfrac{1}{2}l$ 。若兩動點 P 、 Q ， P 在 $\overrightarrow{OX}$ 、 Q 在 $\overrightarrow{OY}$ 上，維持 $\overline{OP}+\overline{OQ}=l$ ，則

① 當 $\overline{OP}=\overline{OQ}=\dfrac{1}{2}l$ ，此時 ΔOPQ 面積最大。

② 當 P 越遠離 A (或 Q 越遠離 B)，

則 ΔOPQ 面積越小。



證明：假設 $\overline{OP}=x\,(0\le x\le l)$，$\overline{OQ}=l-x$，

ΔOPQ面積$=f(x)$，

則 $f(x)=\dfrac{1}{2}x(l-x)\sin\theta$

$$=-\frac{1}{2}\sin\theta(x-\frac{1}{2}l)^2+\frac{1}{8}l^2\sin\theta\le\frac{1}{8}l^2\sin\theta$$

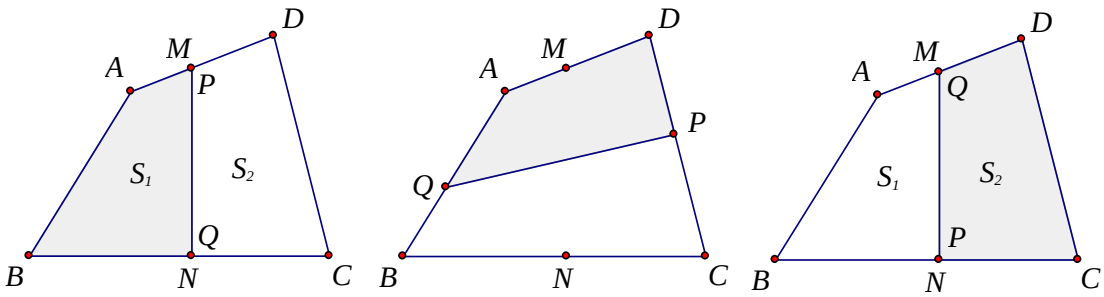
可得知：(1) 當 $x=\dfrac{1}{2}l$，$f(x)$ 有最大值 $\dfrac{1}{8}l^2\sin\theta$

(2) $f(x)$ 的圖形為拋物線的一部分。

[研究二之 1]四邊形的完美分割線是否必存在？

證明：1. 假設 $\overline{MN}$ 為四邊形 $ABCD$ 的等周線，如下圖。

2. 考慮周界動點 P，作四邊形 $ABCD$ 等周線 $\overline{PQ}$。並假設四邊形 $ABNM$ 面積$=S_1$，四邊形 $MNCD$ 面積$=S_2$。當 P 點自 M 點沿著四邊形周界，順時針移動至 N，則等周線 $\overline{PQ}$ 分割四邊形成灰、白兩區域(為了方便說明，我們予以圖色來區分)的面積也會隨之變動如圖：



面積變動如下表：

P	M	N
灰色面積	S_1	S_2
白色面積	S_2	S_1

① 當 $S_1=S_2$，則 $\overline{MN}$ 即為四邊形 $ABCD$ 的完美分割線

② 當 $S_1 \neq S_2$，則根據[定理一]可得：P 自 M 移動至 N，灰色區域面積其值也會從 S_1 變為 S_2，且其過程面積變化與 P 點移動，形成二次函數關係。所以，過程必存在灰色面積=$\frac{1}{2}\times$ 四邊形 $ABCD$ 面積，此時的 $\overline{PQ}$ 即為完美分割線。

由①、②可證明四邊形必存在完美分割線。

[推廣]：上述的證明，顯然可類推至凸 n 邊形。即凸 n 邊形必存在完美分割線。

[研究二之 2]若凸 n 邊形存在內心，則其完美分割線必過內心。

其證明方式同[研究一之 1]及[研究一之 2]　(P.3)。

[研究二之 3]：存在內心，凸 $n(n\geq 4)$ 邊形的尺規作圖

對於具有內心的四邊形，本來想同樣可以轉化為過四邊形內部一點。作等面積或等周長分割線。但發現文獻上的尺規作圖方法，不能推廣到四邊形以上多邊形的分割：

<方法一>過內部一點作等積線，不適用於過內角平分線上的點。

<方法二>過內部一點作等周線，僅適用於三角形。

因此，對於具有內心凸 $n(n\geq 4)$ 邊形的尺規作圖，我們須尋找其他作圖的方式。

在[研究二之 1]中，我們利用等周線移動產生的面積變化，證出凸 n 邊形完美分割線必存在。接下來，我們想是否可利用等周線的移動產生的面積變化，來判斷完美分割線存在於何種區間？

[定理 2]：已知 $\overline{IJ}$ 、 $\overline{MN}$ 為 $\angle XOY$ 兩條相異的基本線，則

1. 當 I 介於 O、M 之間，必存在 P、 Q 兩動點(P 在 $\overrightarrow{OX}$，Q 在 $\overrightarrow{OY}$ 上)，滿足

[條件一] $\overline{OP}+\overline{OQ}=2\overline{OM}$

[條件二] ΔPOQ 面積= ΔIOJ 面積。

2. **當 M 介於 O 、I 之間，則必不存在 $\overline{PQ}$ 同時滿足上述兩條件。**

證明：可在$\overrightarrow{OX}$、$\overrightarrow{OY}$上取$\overline{PM}=\overline{QN}$，且$P$、$Q$在$\overline{MN}$之異側，可

得$\overline{OP}+\overline{OQ}=2\overline{OM}$滿足[條件一]

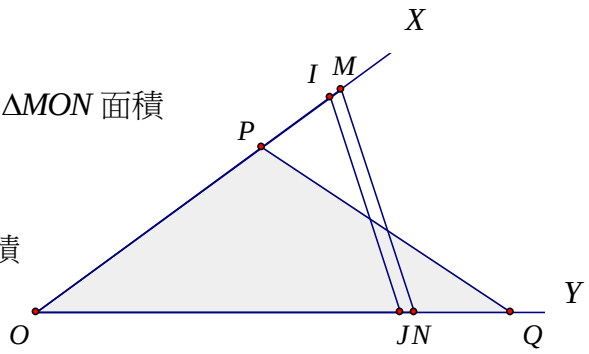
1.當I介於O、M之間

由[定理 1]知：$0\le\Delta POQ$面積$\le\Delta MON$面積

又$\Delta IOJ<\Delta MON$面積

$\therefore$必存在ΔPOQ面積$=\Delta IOJ$面積

2.當M介於O、I之間



由[定理 1]知：$0\le\Delta POQ$面積$\le\Delta MON$面積

但ΔMON面積$<\Delta IOJ$面積

$\therefore$必不存在ΔPOQ面積$=\Delta IOJ$面積滿足[條件二]，得證。

至於，[定理 2]中，P在何處才能滿足[條件二]？

假設$\overline{OI}=\overline{OJ}=s$，$\overline{OM}=\overline{ON}=t$，$\angle XOY=\theta$，則

(1) 因為要滿足[條件一]，所以可令$\overline{PM}=\overline{QN}=x$

(2) 因為要滿足[條件二]，則必

$$\frac{1}{2}(t+x)(t-x)\sin\theta=\frac{1}{2}s^2\sin\theta\text{，}\Rightarrow t^2-x^2=s^2$$

可得x、s、t形成畢氏三數。

$$\Rightarrow x=\sqrt{t^2-s^2}$$

我們將此結果運用在完美分割線的尺規作圖，簡稱為[完美分割線畢氏作圖法]

[完美分割線畢氏作圖法]：

1. 已知：ΔABC

求作：ΔABC的完美分割線

作法：1.分別作$\angle B$基本等積線$\overline{IJ}$，基本等周線$\overline{MN}$

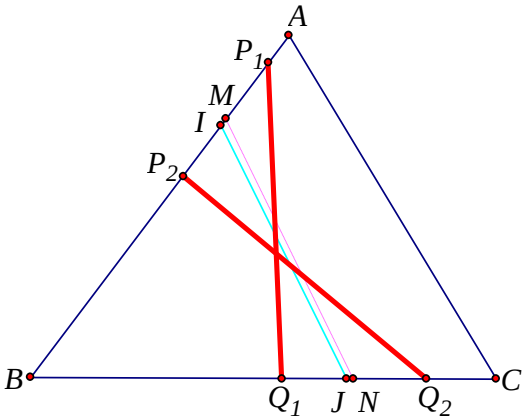
2.作$x=\sqrt{\overline{BM}^2-\overline{BI}^2}$(可能不存在)

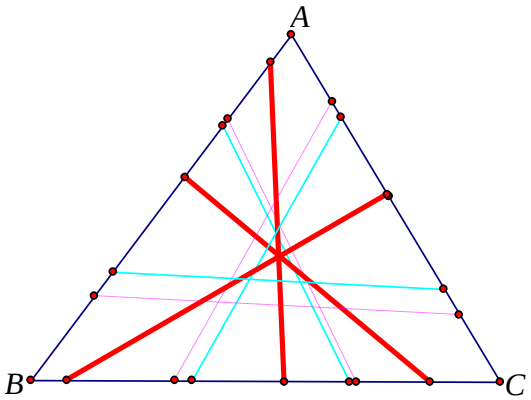
3.分別在 $\overline{AB}$ 上作 $\overline{MP}=x$(P 至多有兩個位置)。 $\overline{NQ}=x$(Q 至多有兩個位置)

4.連接 $\overline{PQ}$(其中 P、Q 分別在 $\overline{MN}$ 的異側)為所求。(如圖)

5.重複上面的作圖步驟，分別作出穿越∠A、∠C兩邊的完美分割線。

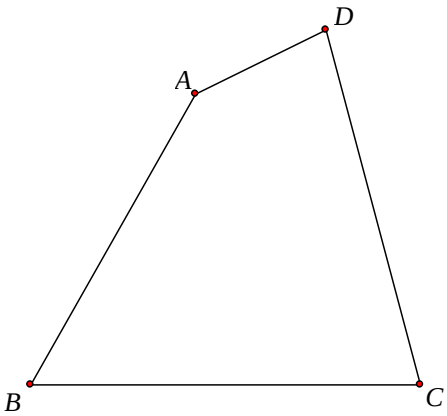
可得 ΔABC 的所有完美分割線。(如圖)





2. 已知：四邊形 $ABCD$

求作：四邊形 $ABCD$ 的完美分割線



作法：1.針對 $\angle B$ 的分割

(1) 作 $\angle B$ 的基本等積線 $\overline{I_1J_1}$ 及

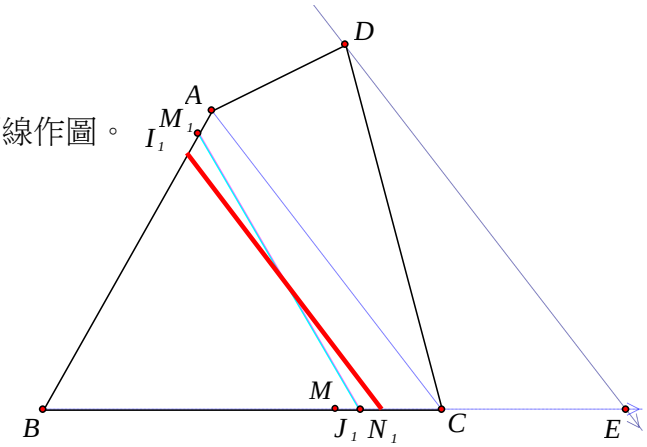
基本等周線 $\overline{M_1N_1}$ ，其中

① $\overline{BM_1}=\overline{BN_1}=\frac{1}{4}(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DA})$

② 作 $\overline{DE}//\overline{AC}$ 交 $\overrightarrow{BC}$ 於 E ，使得 $\overline{BI_1}=\overline{BJ_1}=\sqrt{\frac{1}{2}\overline{AB}\times\overline{BE}}$

③ 作 $x_1=\sqrt{\overline{BM_1}^2-\overline{BI_1}^2}$

接著同三角形的完美分割線作圖。



2. 針對 $\overline{AD}$ 、 $\overline{BC}$ 兩邊延長線交角 $\angle F$ 的分割

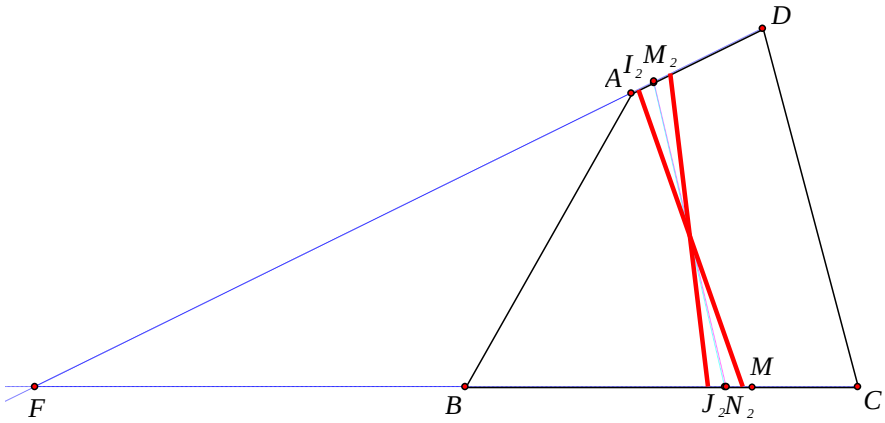
(1) 作 $\angle F$ 的基本等積線 $\overline{I_2J_2}$ 及基本等周線 $\overline{M_2N_2}$

其中：① $\overline{FM_2}=\overline{FN_2}=\frac{1}{2}[\frac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DA})-\overline{AB}+\overline{AF}+\overline{BF}]$

$=\frac{1}{4}(\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DA}-\overline{AB}+\overline{AF}+\overline{BF})$

② 作 $\overline{BE}$ 中點 M ，$\overline{FI_2}=\overline{FJ_2}=\sqrt{\overline{AF}\times\overline{MF}}$

(2) 作 $x=\sqrt{\overline{FM_2}^2-\overline{FI_2}^2}$ ，接著同三角形的完美分割線作圖

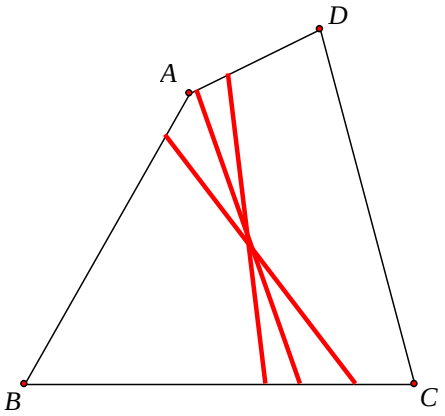


同上述的作圖方式，

再考慮其他可能的分割。

最後，我們作出四邊形

$ABCD$ 的所有完美分割線，如圖



從上面的作圖，我們發現要完整的作出全部的完美分割線，其過程甚為複雜。因此，我們看是否能找到完美分割線必存在於某區間以簡化作圖？

[研究二之 4]：完美分割線存在區間的判斷

根據[定理 2] (*P*.7)，要存在完美分割線，針對的指定角其基本等積線與基本等周線排列，須符合[定理 2]中的位置關係。討論如下：

[討論 1]：

1. 作出ΔABC中，$\angle B$的基本等積線$\overline{I_1J_1}$及基本等周線$\overline{M_1N_1}$，比較$\overline{I_1J_1}$與$\overline{M_1N_1}$的位置關係

   (1) 若$\overline{I_1J_1}=\overline{M_1N_1}$，則$\overline{I_1J_1}$即為一條完美分割線

   (2) 若M_1介於B、I_1之間($M_1 \neq I_1$)則根據[定理 2]可知在$\angle B$兩邊無完美分割線

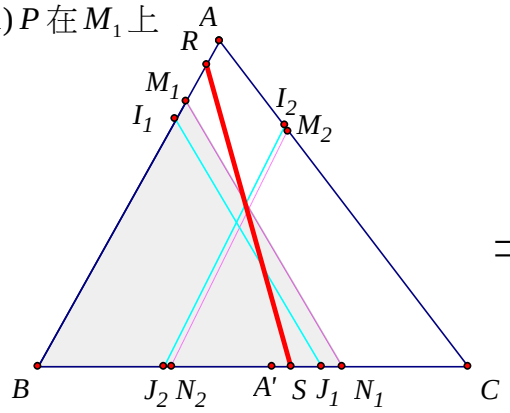
   (3) 若I_1介於B、M_1之間($I_1 \neq M_1$)則仍須考慮$\angle C$(或$\angle A$)的基本等積線$\overline{I_2J_2}$與基本等周線$\overline{M_2N_2}$

   取兩動點P、Q，分別自M_1、N_1順時針沿著ΔABC的周界等速率移動至M_2、N_2(即$\overline{PQ}$維持等周線移動)考慮其面積變化，如下：

若$\angle C$的基本等積線$\overline{I_2J_2}$、基本等周線$\overline{M_2N_2}$，

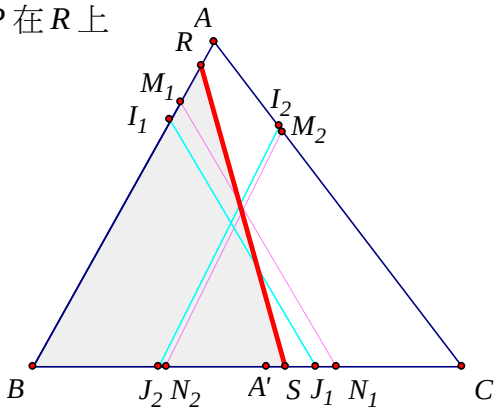
[情況一] M_2介於C、I_2之間，假設存在$\overline{AM_1}$上一點R，使得$\overline{RS}$為完美分割線，則

(1) P在M_1上

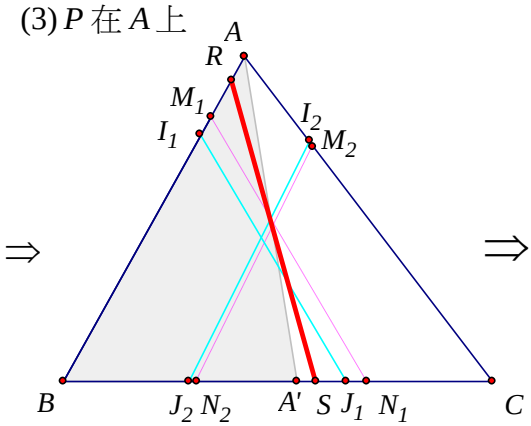


$\Rightarrow$

(2) P在R上

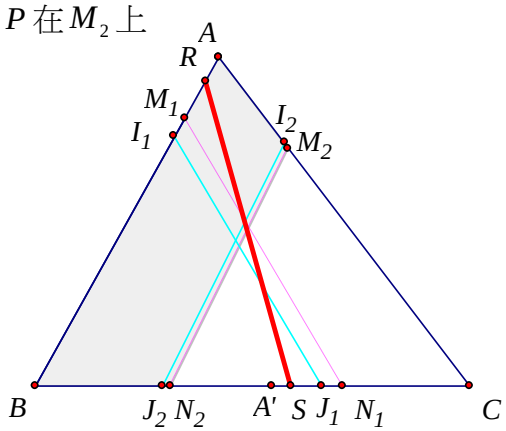


(3) P在A上



$\Rightarrow$ $\Rightarrow$

(4) P在M_2上



P 點所在位置		M_1	…	R	…	A	…	M_2
面積大小	灰	大	遞減	=	遞減	小	遞減	大
	白	小	遞增	=	遞增	大	遞增	小

(矛盾)

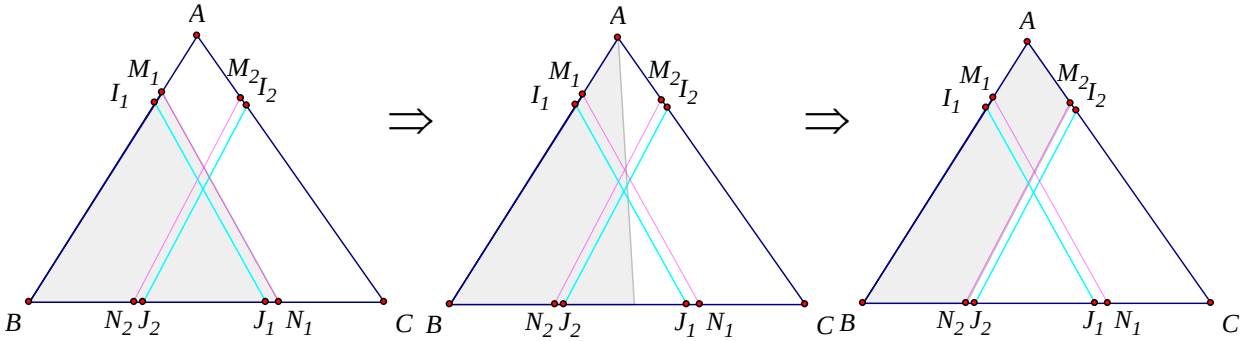
註：表中「面積大小」是與 $\frac{1}{2}\Delta ABC$ 面積作比較。

從表格中可得知 P 在 A 與 M_2 之間產生面積變化的矛盾，與假設不合，即 A、M_1 之間不存在完美分割線。又根據[定理 2]得知 $\angle C$ 兩邊不存在任何完美分割線。可得[情況一]，P 從 M_1 到 M_2 的移動區間無完美分割線。

[情況二] I_2 介於 C、M_2 之間

(1) 假設在 $\overline{AM_1}$ 上不存在完美分割線，則

① P 在 M_1 上　　② P 在 A 上　　③ P 在 M_2 上

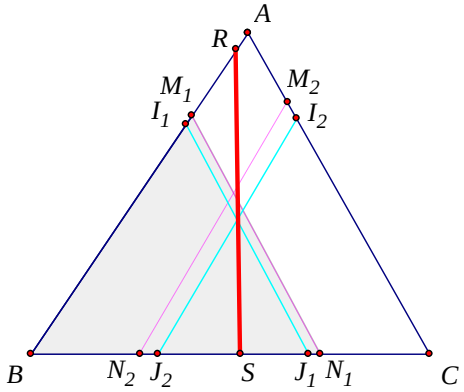


P 點所在位置		M_1	…	A	…	M_2
面積大小	灰	大	遞減	大	遞減	小
			大		小	
	白	小	遞增	小	遞增	大
			小		大	

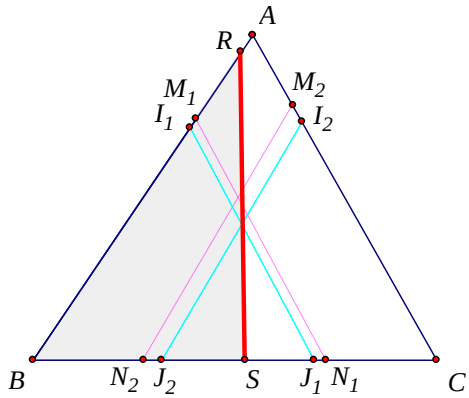
可得此條件下，P 在 A 與 M_2 之間存在一條完美分割線。

(2) 假設在 $\overline{AM_1}$ 上存在一點 R，使得 $\overline{RS}$ 為完美分割線，則

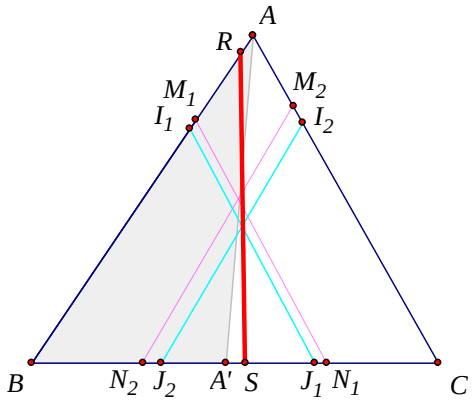
(1) P 在 M_1 上



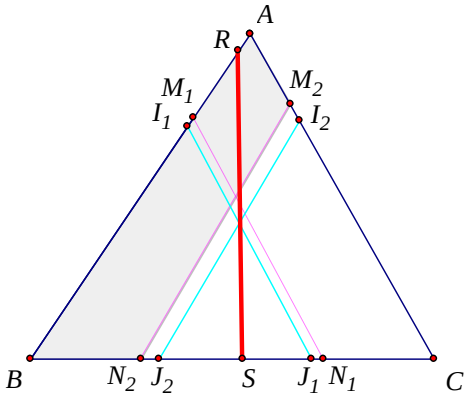
(2) P 在 R 上



(3) P 在 A 上



(4) P 在 M_2 上



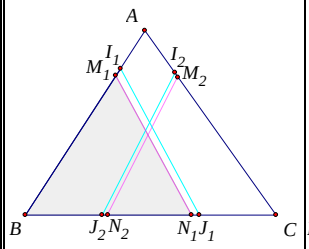
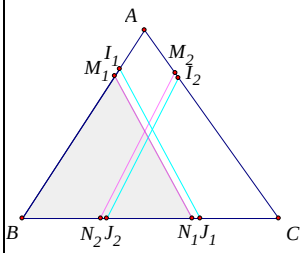
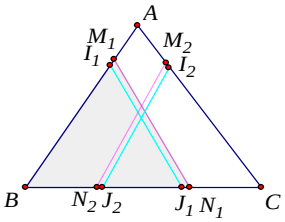
P 點所在位置		M_1	…	R	…	A	…	M_2
面積大小	灰	大	遞減	=	遞減	小	遞減	小
			大		小		小	
	白	小	遞增	=	遞增	大	遞增	大
			小		大		大	

從表格中可知，此移動區間除了 $\overline{RS}$ 外無完美分割線。

即<情況二>，P 從 M_1 到 M_2 的移動區間必存在一條完美分割線。

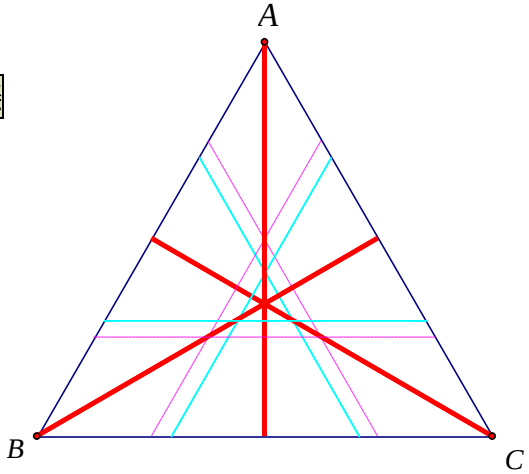
可得

[結論四]：若 ΔABC 中，$\angle B$ 的基本等積線、基本等周線分別為 $\overline{I_1J_1}$ 、$\overline{M_1N_1}$ ；$\angle C$ 的基本等積線、基本等周線分別為 $\overline{I_2J_2}$ 、$\overline{M_2N_2}$ ，則

基本等積線 基本等周線 位置關係			
完美分割線數量	0	0	1

利用上述[結論四]，可得

三角形的完美分割線最多有 3 條



[討論 2]：若 $\overline{I_1J_1}$ 、$\overline{M_1N_1}$ 分別為四邊形 $ABCD$ 中 $\angle B$ 的基本等積線、基本等周線。

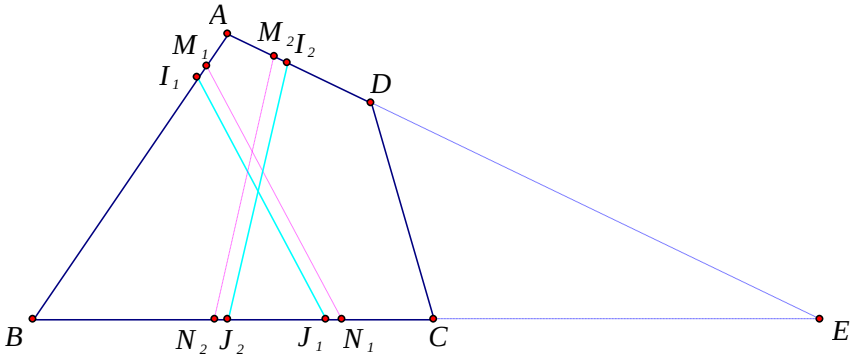
比較 $\overline{I_1J_1}$ 、$\overline{M_1N_1}$ 的位置關係：

因為要尋找完美分割線存在於何處？所以同[討論 1] ($P.11$)，我們只需討論：

I_1 介於 B、M_1 之間($I_1 \neq M_1$)。接著，同上述利用等周線 $\overleftrightarrow{PQ}$ 移動產生的面積變化來判斷。我們發現四邊形需分成兩種情況來考慮：

[情況一]

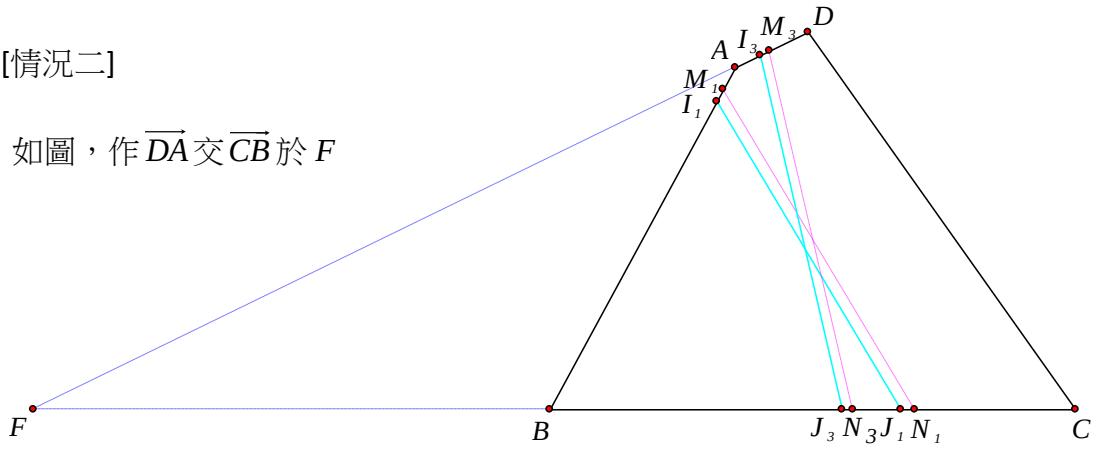
如圖，



作 $\overrightarrow{AD}$ 交 $\overrightarrow{BC}$ 於 E，形成 ΔABE ，過 $\angle E$ 的兩邊，作基本等積線 $\overline{I_2J_2}$ 、基本等周線 $\overline{M_2N_2}$ ， 接著，判斷方式同[討論一]。

[情況二]

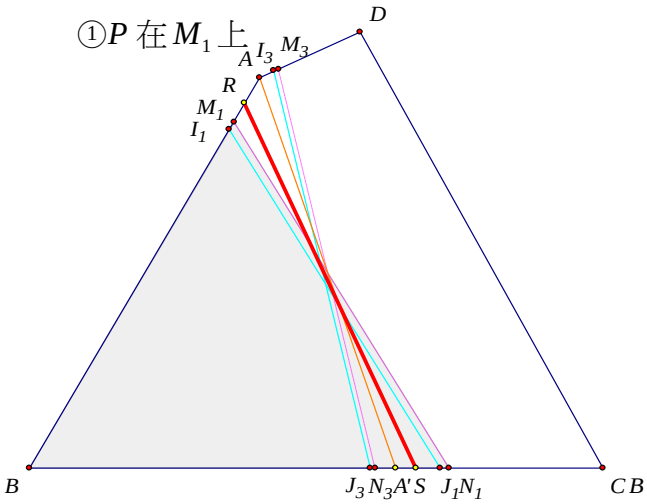
如圖，作 $\overrightarrow{DA}$ 交 $\overrightarrow{CB}$ 於 F



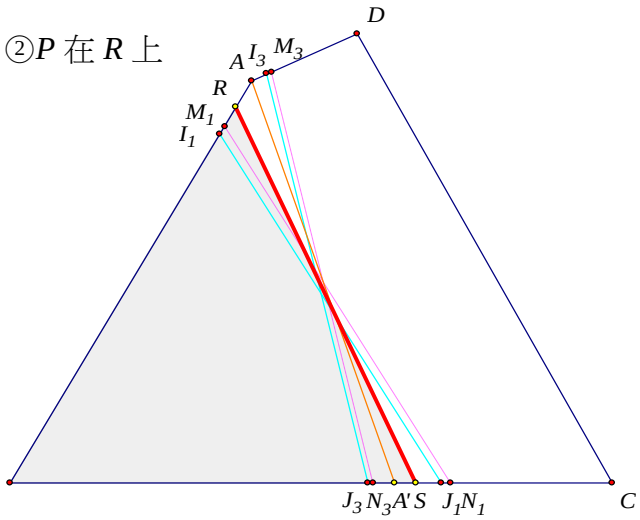
若 $\overline{I_3J_3}$ 、$\overline{M_3N_3}$ 分別為 $\angle F$ 的基本等積線、基本等周線(針對四邊形 $ABCD$ 的分割)，則：

(1) 假設在 $\overline{AM_1}$ 上存在 $\overline{RS}$ 為完美分割線：

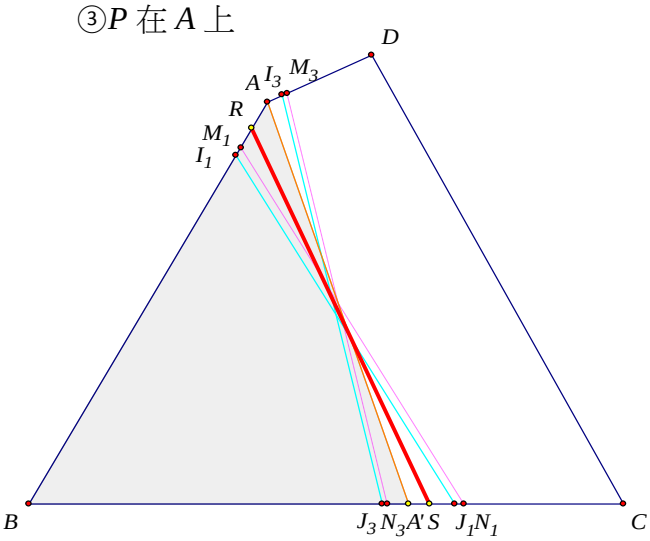
①P 在 M_1 上



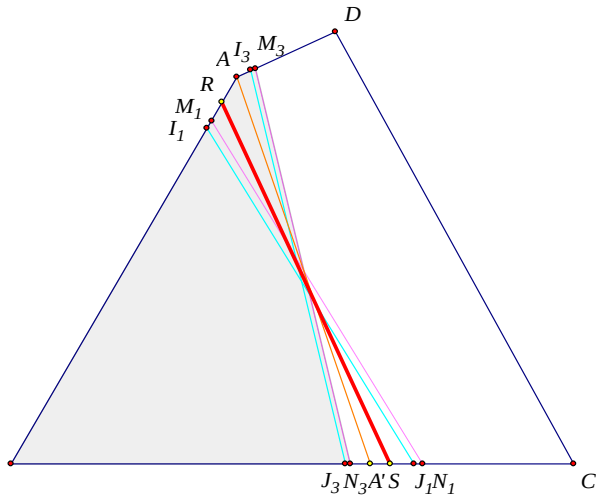
②P 在 R 上



③P 在 A 上



④P 在 M_3 上



P 點所在位置		M_1	…	R	…	A	…	M_3
面積大小	灰	大	遞減 大	=	遞減	小	遞增	大
	白	小	遞增 小	=	遞增	大	遞減	小

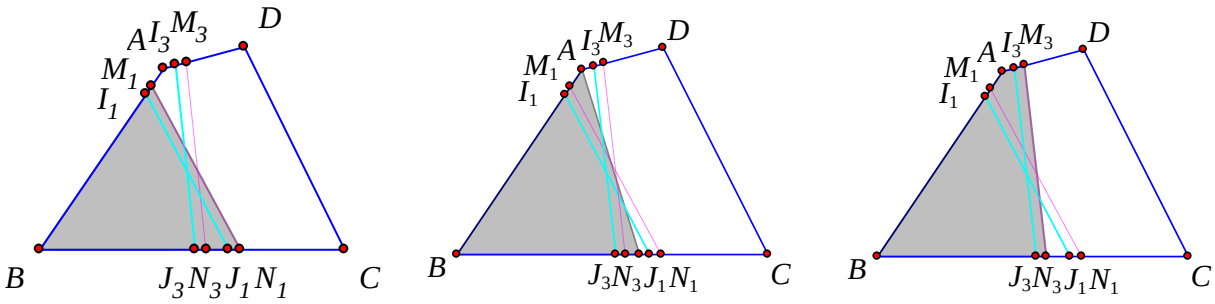
註：表中「面積大小」是與 $\frac{1}{2}$ 四邊形 $ABCD$ 面積作比較。

上表可發現在 A 、 M_3 之間存在另一條完美分割線。

可得此條件下存在兩條完美分割線。

(2) 假設在 $\overline{AM_1}$ 上不存在完美分割線：

① P 在 M_1 上　　② P 在 A 上　　③ P 在 M_3 上

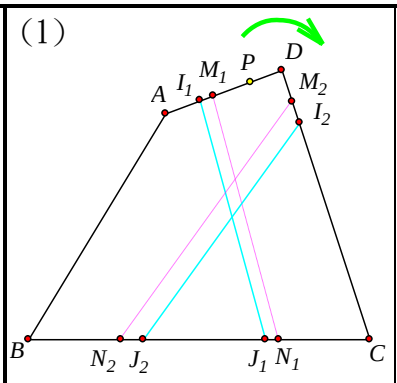
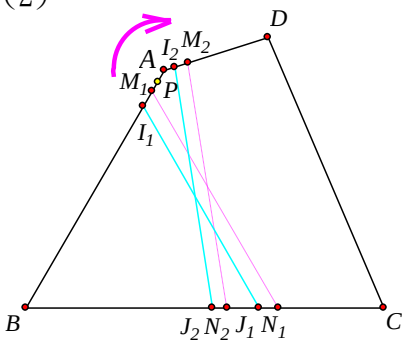


P 點所在位置		M_1	…	A	…	M_3
面積大小	灰	大	遞減 大	大	遞增 大	大
	白	小	遞增 小	小	遞減 小	小

可得此條件下，不存在完美分割線。.

可得

[結論五]：若四邊形 $ABCD$ 中，兩組基本等積線 $\overline{I_1J_1}$、$\overline{I_2J_2}$ 與基本等周線 $\overline{M_1N_1}$、$\overline{M_2N_2}$ 的位置關係，如下表圖(1)(2)

基本等積線 與 基本等周線 位置關係	(1)  	(2) 
完美分割線數量	1	2 或 1 或 0

註：上圖(2)中，若僅 1 條完美分割線，則此條完美分割線必過移動區間之頂點。

至於，四邊形最多有幾條完美分割線？以下，是我們的研究。

[研究二之 5]：非平行凸 n 邊形完美分割線最多幾條？

由**[研究二之 4]完美分割線存在區間的判斷法** (*P*.10)，我們將此方法推廣到凸 n 邊形：

1. 假如 $\overline{MN}$ 為凸 n 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的一條基本等周線，動線 $\overline{PQ}$ 為等周線，當動點 P 點自 M 點(此時 Q 點必在 N)(實際上，P 可從周界上任意一點出發)，依順(或逆)時針移動至 N ，則動線 $\overline{PQ}$ 必經過 n 個頂點。

   理由：因為 P 自 M 移動至 N ，則 P 、Q 兩點，其移動路徑和剛好為凸 n 邊形周界。

   因此，動線 $\overline{PQ}$ 必經過 n 個頂點。

2. 如何才能產生最多條完美分割線？

   分析如下：

   (1) 由[研究二之 4]的判斷法知道：對於<u>相鄰兩條基本等周線</u>(註)，至多存在兩條完美分割線。

   註：<u>相鄰兩條基本等周線</u>是指動線 $\overline{PQ}$ 沿著周界順(或逆)時針移動，依序所經過的兩條基本等周線，稱之。

(2) 動線 $\overline{PQ}$ 共經過 n 個頂點，會產生 n 組<u>相鄰兩條基本等周線</u>。

(3) 我們發現：動點 P 在頂點 A_i 時，此時假設 Q 在 $\overline{A_jA_{j+1}}$。因為凸 n 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ 為非平行多邊形，考慮 A_i 與 $\overleftrightarrow{A_jA_{j+1}}$ 的距離會出現下面兩種情形：

[Case1]： A_i <u>是</u>凸 n 邊形周界上與 $\overleftrightarrow{A_jA_{j+1}}$ 距離最遠的點。

[Case2]： A_i <u>不是</u>凸 n 邊形周界上與 $\overleftrightarrow{A_jA_{j+1}}$ 距離最遠的點。

根據這兩種情形，我們定義下面名稱：

[逆坡移動]：[Case1]為 P 在 A_i 所在的兩邊，作<u>上、下坡移動</u>，我們稱為[逆坡移動]。

ⓘ 如[研究二之 4]的[討論 1] (P.11)及[討論 2]之[情況一] (P.14)

ⓘⓘ 若[逆坡移動]能產生完美分割線，則我們稱此為[有效逆坡移動]。

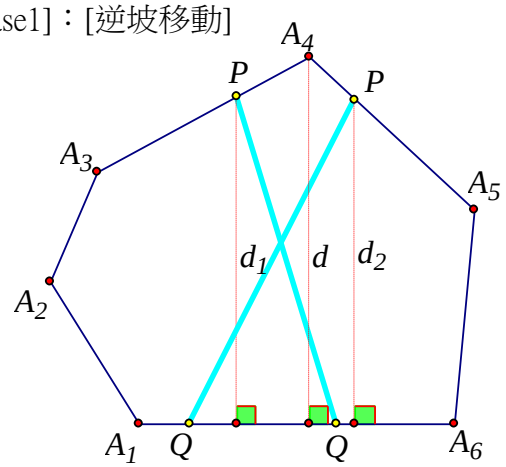
[順坡移動]：[Case2]為 P 在 A_i 所在的兩邊，作<u>連續上坡</u>或<u>連續下坡</u>移動，我們統稱為[順坡移動]。

ⓘ 如[研究二之 4]的[討論 2]之[情況二] (P.15)。

ⓘⓘ 若[順坡移動]能產生完美分割線，則我們稱此為[有效順坡移動]。

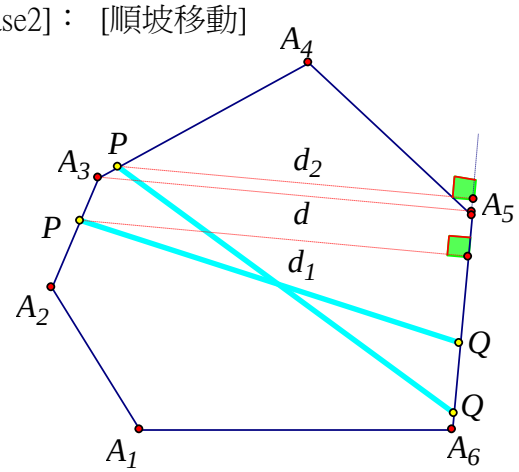
以六邊形為例：

[Case1]：[逆坡移動]



$d > d_1$ 且 $d > d_2$

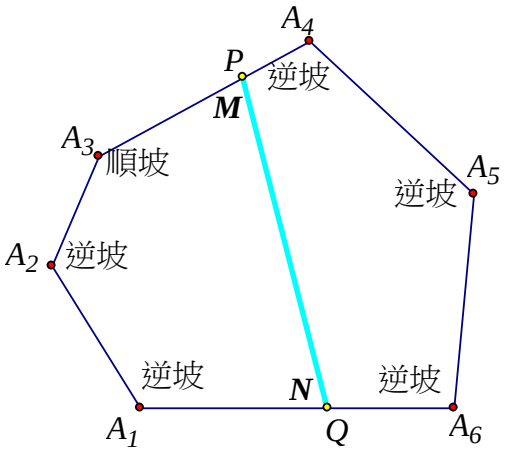
[Case2]： [順坡移動]



$d_1 > d$

當動點 P 點自 M 點依順時針移動至 N ，根據上述的定義，可得此六邊形完整的

移動情形如下：



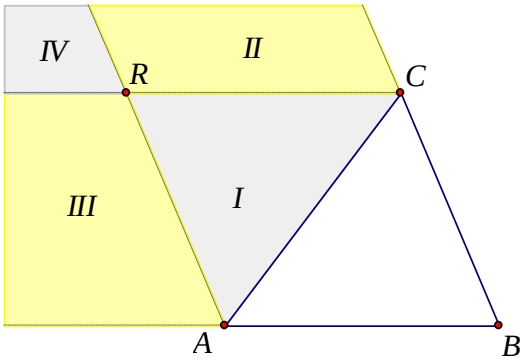
(4) 對於非平行凸 n 邊形，針對動線 $\overline{PQ}$ 的移動最多會產生幾個[順坡移動]？

① 根據定義，可得知**任意三角形不存在[順坡移動]**。

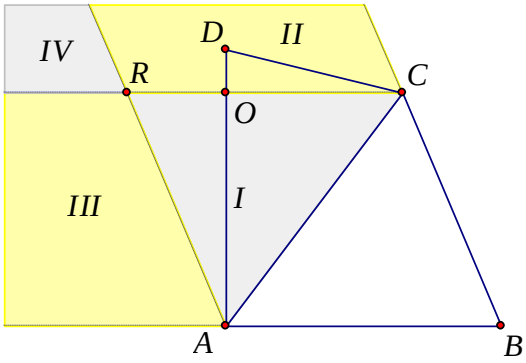
② **四邊形[順坡移動]最多存在幾個？**

任意取一 ΔABC ，在 $\overline{AC}$ 的左側作凸四邊形 $ABCD$ 。

過 A 、C 分別作 $\overleftrightarrow{BC}$ 、$\overleftrightarrow{AB}$ 的平行線，將 $\overline{AC}$ 的左側分成四區域(如圖 1-1)，當



(圖 1-1)



(圖 1-2)

ⓐ D 在第 I 區可得：3 個[逆坡移動]；1 個[順坡移動](產生於 D 點)

理由：因為 D 點落在平行四邊形內部。

ⓑ D 在第 II 區可得：3 個[逆坡移動]；1 個[順坡移動] (產生於 C 點)

理由：須證明過 D 點的等周線通過 $\overline{AB}$ 。因為

$$\overline{DA}+\overline{AB}=\overline{DA}+\overline{RC}=\overline{OA}+\overline{OR}+\overline{OC}+\overline{OD}>\overline{RA}+\overline{DC}=\overline{BC}+\overline{CD}$$

所以過 D 點的等周線通過 $\overline{AB}$ 。

ⓒ D 在第 III 區可得：3 個[逆坡移動]；1 個[順坡移動] (產生於 A 點)

ⓓ D 在第 IV 區可得：3 個[逆坡移動]；1 個[順坡移動] (產生於 B 點)

理由：因為 D 點落在 $\overleftrightarrow{RC}$ 之上側與 $\overleftrightarrow{AR}$ 之左側。

綜合上述，可得：**四邊形必存在 1 個[順坡移動]。**

③ **五邊形[順坡移動]最多存在幾個？**

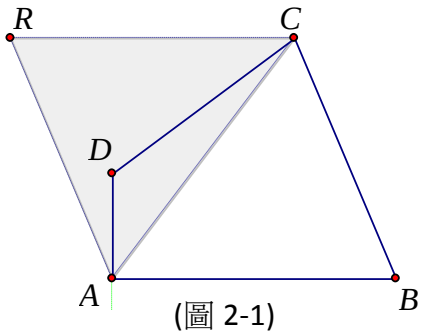
利用(圖 1-1)，我們選擇 D 點在第 I 區(如圖 2-1)(不影響其一般化)。

ⓐ 考慮在 $\overline{BC}$ 的右側作凸五邊形 $CDABE$ 。

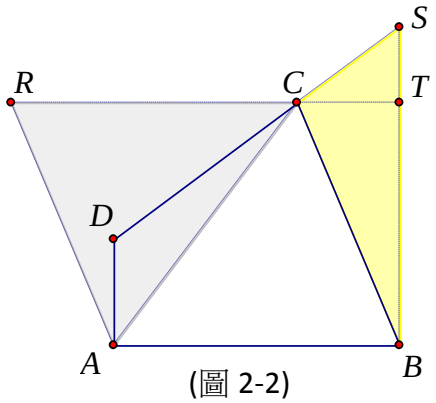
當要滿足：① 凸五邊形 ② D 點產生[順坡移動]。

則 E 點必落在(圖 2-2) ΔBCS 內部。(其中：S 為 $\overline{DC}$ 的延長線與過 B 點 $\overline{AD}$ 的平行線之交點，$\overleftrightarrow{RC}$ 交 $\overline{BS}$ 於 T 。)

當

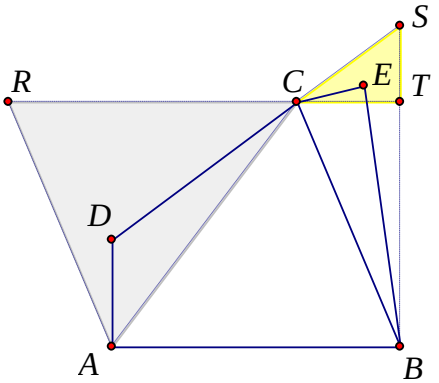


(圖 2-1)

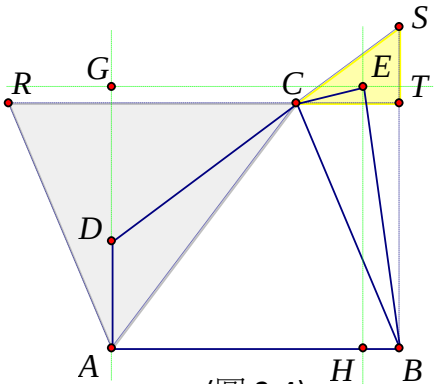


(圖 2-2)

ⓘ E 在 ΔCST 內部(如圖 2-3)



(圖 2-3)



(圖 2-4)

可得：3 個[逆坡移動]；2 個[順坡移動](產生於 C 、 D 兩點)。

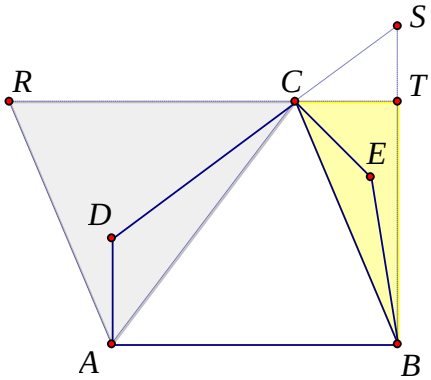
理由：須證明過 E 點的等周線通過 $\overline{AB}$ 。

過 E 點做平行四邊形 $EHAG$ (如圖 2-4)可得

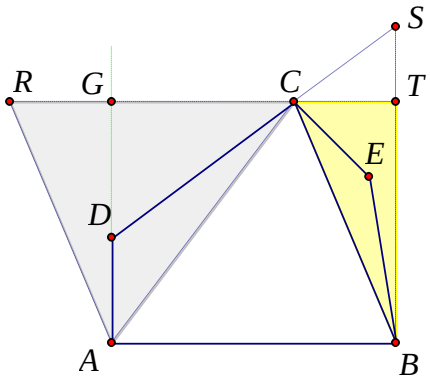
$$\overline{EB}+\overline{BA}=\overline{EB}+\overline{BH}+\overline{HA}>\overline{EH}+\overline{HA}=\overline{AG}+\overline{GE}>\overline{EC}+\overline{CD}+\overline{DA}$$

所以過 E 點的等周線通過 $\overline{AB}$ 。

ⅱ E 在 ΔBCT 內部(如圖 2-5)



(圖 2-5)



(圖 2-6)

可得：3 個[逆坡移動]；2 個[順坡移動](產生於 D 、 E 兩點)。

理由：因為 E 點落在平行四邊形 $ABTG$ 內部(如圖 2-6)。

討論：從(圖 2-4)與(圖 2-6)可知：當要滿足 D 點產生[順坡移動]。則 C 、 E 兩點處，必僅存在一個為[順坡移動]。

ⓑ 考慮在 $\overline{AB}$ 的下側作凸五邊形 $ADCBE$ ，其結果相同。

可得：3 個[逆坡移動]；2 個[順坡移動](產生於 A 、 D 或 A 、 E 兩點)。

綜合上述，可得：**五邊形最多存在 2 個[順坡移動]**。

④ **六邊形[順坡移動]最多存在幾個？**

利用(圖 2-3)，凸五邊形 $CDABE$ (如圖 3-1)

ⓐ 考慮在 $\overline{BE}$ 的右側作凸六邊形 $ECDABF$ 。

當要滿足：① 凸六邊形 ② D 、 C 點產生[順坡移動]。

則 F 點必落在(圖 3-2) ΔBES 內部。

(其中： S 為 $\overline{CE}$ 的延長線與過 B 點 $\overline{AD}$ 的平行線之交點， $\overline{ET}$ // $\overline{AB}$ 交 $\overline{SB}$ 於 T 。)

當

ⓘ F 在 ΔEST 內部(如圖 3-3)

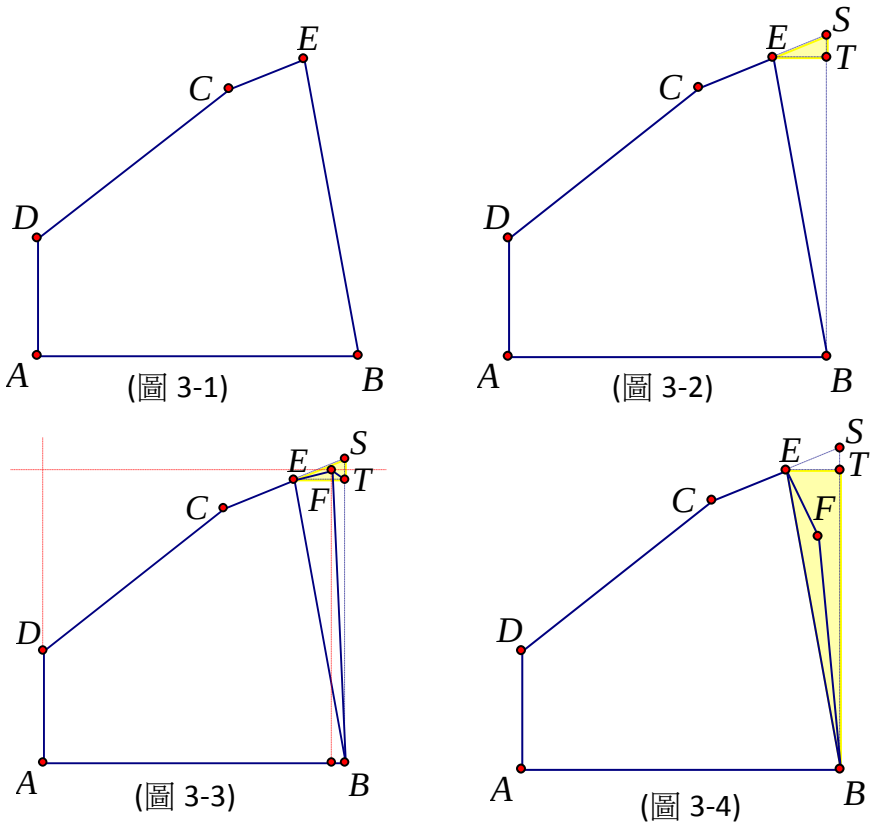
可得：3 個[逆坡移動]；3 個[順坡移動](產生於 C 、 D 、 E 三點)。

理由證明同上述③-ⓐ-ⓘ

ⓘⓘ F 在 ΔBET 內部(如圖 3-4)

可得：3 個[逆坡移動]；3 個[順坡移動](產生於 C 、 D 、 F 三點)。

理由同上述③-ⓐ-ⓘⓘ



可得：3 個[逆坡移動]；3 個[順坡移動]。

討論：從(圖 3-3)與(圖 3-4)，可知：當要滿足 C 、 D 點產生[順坡移動]。

則 E 、 F 兩點處，必僅存在一個為[順坡移動]。

ⓑ 考慮在 $\overline{AB}$ 的下側作凸六邊形 $ADCEBF$ ，其結果相同。

可得：3 個[逆坡移動]；3 個[順坡移動]。

綜合上述，可得：**六邊形最多存在 3 個[順坡移動]**。

我們把上述的建構法，稱為「**最多[順坡移動]建構法**」。

⑤ n 邊形[順坡移動]最多存在幾個？

接續上述「最多[順坡移動]建構法」，由凸 k 多邊形建構凸 $(k+1)$ 多邊形

當要滿足：① 凸 $(k+1)$ 多邊形　② 最多個[順坡移動]。

則因新增頂點與相鄰頂點的其中一個，此兩點必只能存在一個為[順坡移動]。即每增 1 個頂點，最多會新增 1 個[順坡移動]。

可得：n 邊形最多存在 $(n-3)$ 個[順坡移動]。

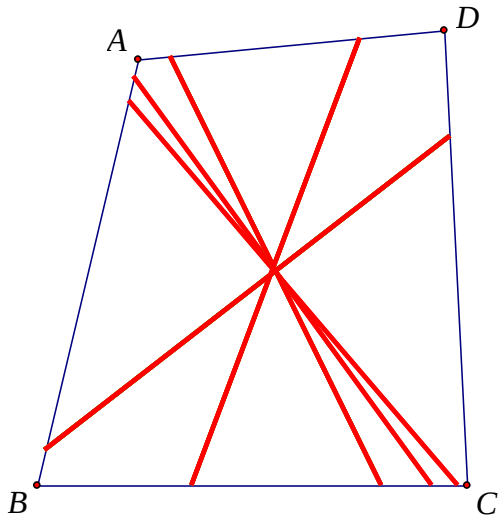
綜合上述分析，得到結論如下：

[結論六]：對於非平行凸 n 邊形，

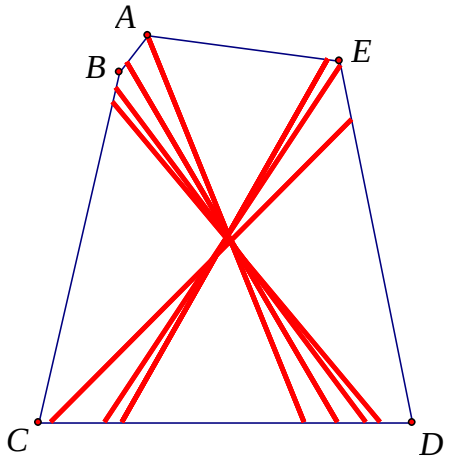
1. **最多存在 $n-3$ 組[順坡移動]。**
2. **若滿足上述，且皆分別為[有效順坡移動]及[有效逆坡移動]，則此 n 邊形共有 $2(n-3)+3=2n-3$ 條完美分割線。**

以下，我們試著作出具有最多數量[非平行四邊形]、[非平行五邊形]、[非平行六邊形]的完美分割線：

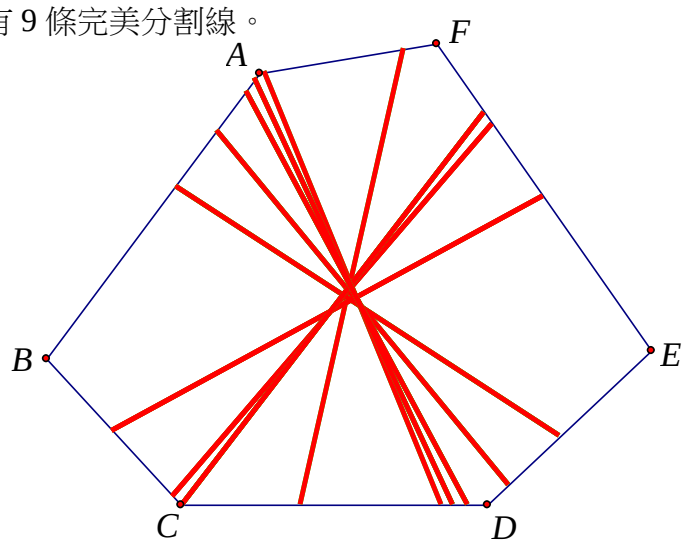
[四邊形]：共有 5 條完美分割線。



[五邊形]：共有 7 條完美分割線。



[六邊形]：共有 9 條完美分割線。



至於，異於上述非平行凸 n 邊形，其完美分割線該如何尋找？

[研究二之 6]：特殊情況下的完美分割線探討

1. 線對稱圖形：根據完美分割線定義，可知對稱軸皆為完美分割線。

   例如：正 $(2k+1)$ 邊形，共有 $(2k+1)$ 條對稱軸，所以有 $(2k+1)$ 條完美分割線。

2. 點對稱圖形：根據完美分割線定義，可知通過圖形中心的分割線皆為完美分割線，所以有無線多條完美分割線。

   例如：正 $2k$ 邊形。

3. 完美分割線通過平行邊的凸 n 邊形：根據條件需要，我們做出下面定理：

[定理三]：若 $\overline{PQ}$ 為凸 n 邊形的完美分割線，且 P 、 Q 所在的邊 $\overline{A_iA_{i+1}}//\overline{A_jA_{j+1}}$

(如圖 6-1 但不為圖 6-2)，**則**

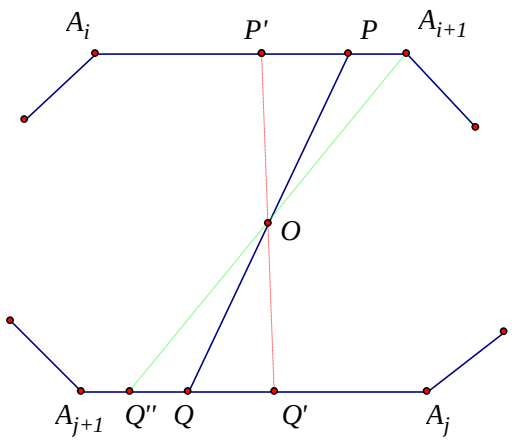


圖 6-1

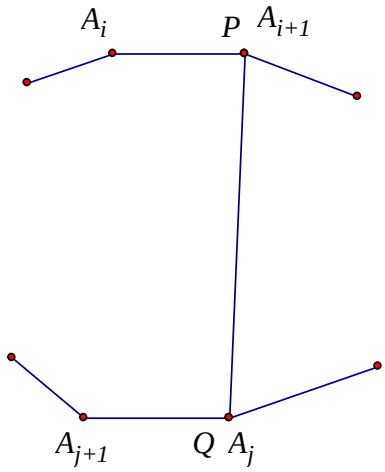


圖 6-2

（1）在$\overline{PQ}$的異側分別於$\overline{A_iA_{i+1}}$、$\overline{A_jA_{j+1}}$上取$\overline{PP'}=\overline{QQ'}$，則$\overline{P'Q'}$為一條完美分割線。

證明：$\because \overline{PP'}//\overline{QQ'}$

$\therefore \angle OPP'=\angle OQQ'$，$\therefore \angle OP'P=\angle OQ'Q$

又$\because \overline{PP'}=\overline{QQ'}$

$\therefore \Delta OPP'\cong \Delta OQQ'(ASA)$

即$\overline{P'Q'}$為一條完美分割線。

（2）若$\overline{PA_{i+1}}\le \overline{QA_{j+1}}$，則在$\overline{QA_{j+1}}$上取$\overline{QQ''}=\overline{PA_{i+1}}$，可得$\overline{A_{i+1}Q''}$為一條完美分線。

證明：方法同(1)。

1. 根據[定理三之(1)]，我們可得：若凸n邊形的一條完美分割線通過一組平行邊(如圖 6-1)，則此凸n邊形有無限多條完美分割線。
2. 根據[定理三之(2)]，上述的分割必存在過頂點的完美分割線(如圖 6-1)，所以仍可以以[**完美分割線畢氏作圖法**]先作出過頂點的完美分割線，再利用[定理三之(1)]作出任意此類的完美分割線。

[研究二之 7]：[完美分割線畢氏作圖法]的應用

為了方便說明，我們定義以下名詞：

1. **α-基本周長線**：若一條基本線將凸n邊形周長分成兩部分，其中較短部分與較長部分的比值=α，則此基本線稱之。
2. **β-基本面積線**：若一條基本線將凸n邊形面積分成兩區域，其中較小區域面積與較大面積的比值=β，則此基本線稱之。
3. **完全分割線**：若一直線上(或線段)同時將凸n邊形的周長與面積分割成$a:b(a\le b)$則此直線(或線段)稱為完全分割線。

[應用一]完全分割線的尺規作圖

利用[完美分割線畢氏作圖法]我們可作出完全分割線。方法如下：

已知：ΔABC

求作： 50：51 的完全分割線

作法：(1) 針對$\angle B$的分割

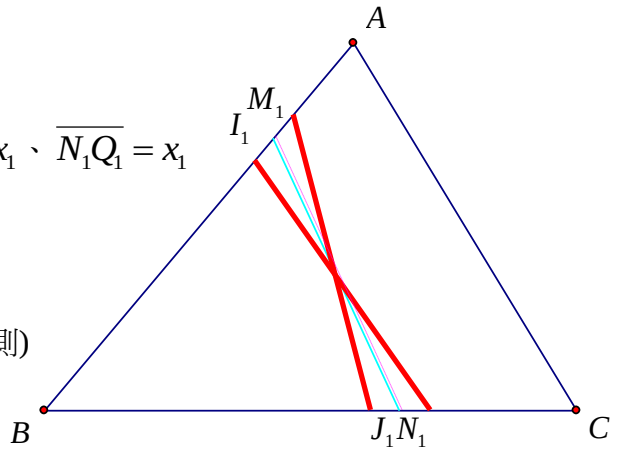
① 作$\angle B$的$\dfrac{50}{51}$－基本面積線$\overline{I_1J_1}$及$\dfrac{50}{51}$－基本周長線$\overline{M_1N_1}$

② 作$x_1=\sqrt{\overline{BM_1}^2-\overline{BI_1}^2}$

③ 分別在$\overline{AB}$、$\overline{BC}$上作$\overline{M_1P_1}=x_1$、$\overline{N_1Q_1}=x_1$

④ 連接$\overline{P_1Q_1}$，即為所求。

(其中P_1、Q_1分別在$\overline{M_1N_1}$的異側)



(2) 針對$\angle B$的分割

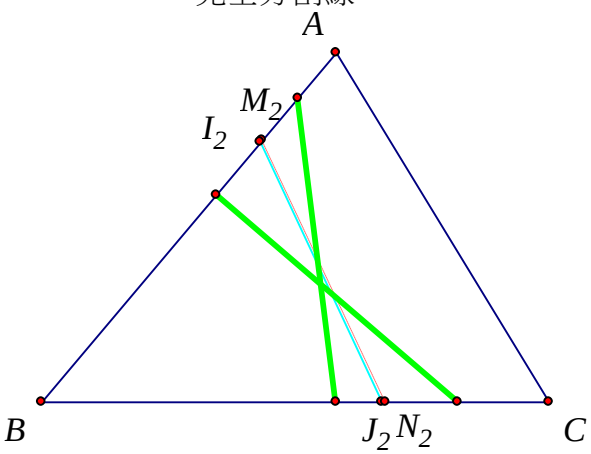
① 作$\angle B$的另一組$\dfrac{50}{51}$－基本面積線$\overline{I_2J_2}$及$\dfrac{50}{51}$－基本周長線$\overline{M_2N_2}$

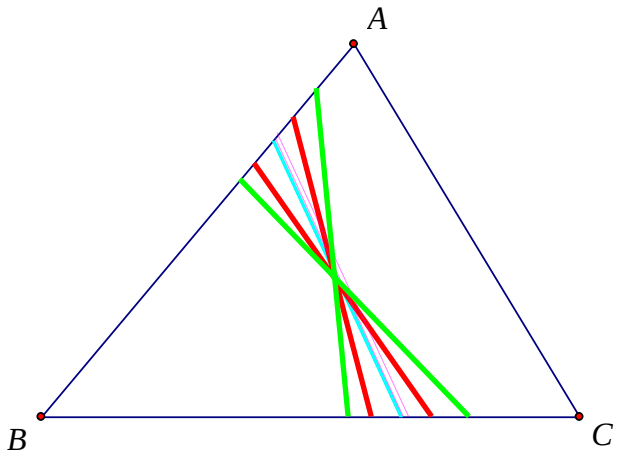
② 作$x_2=\sqrt{\overline{BM_2}^2-\overline{BI_2}^2}$

③ 分別在$\overline{AB}$、$\overline{BC}$上作$\overline{M_2P_2}=x_2$、$\overline{N_2Q_2}=x_2$

④ 連接$\overline{P_2Q_2}$ (其中P_2、Q_2分別在$\overline{M_2N_2}$的異側)，即為所求。

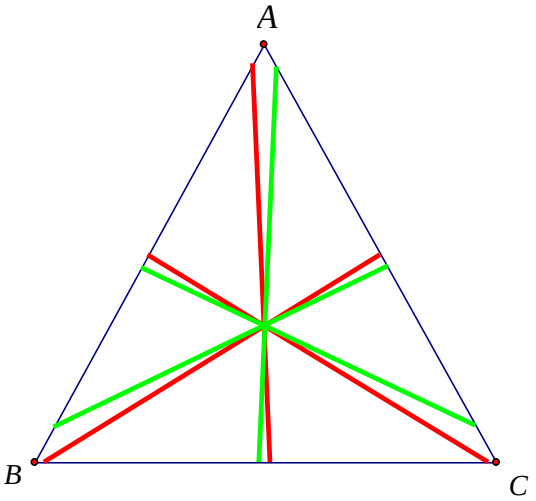
⑤ 重複上述的步驟，分別過$\angle A$、$\angle C$兩邊的分割可得全部 50：51 的完全分割線





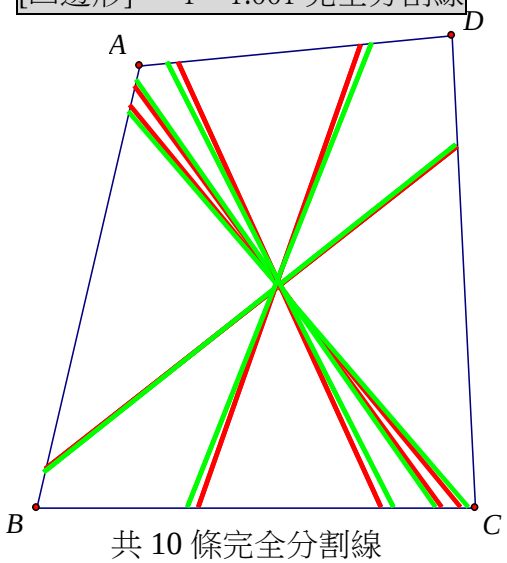
同樣的方式，我們可作出下面的完全分割線：

[三角形]： 1：1.05 完全分割線



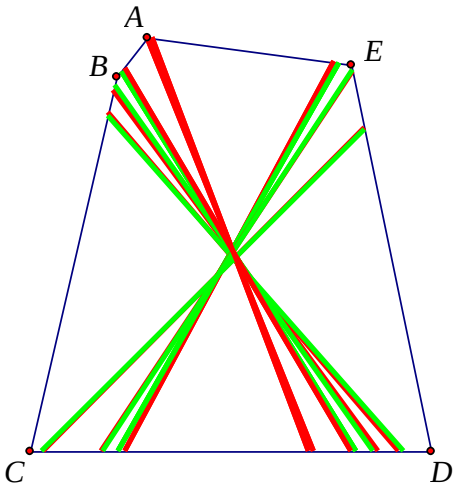
共 6 條完全分割線

[四邊形]： 1：1.001 完全分割線



共 10 條完全分割線

[五邊形]： 1：1.001 完全分割線



共 14 條完全分割線

[應用二]非完全分割線的尺規作圖

已知：ΔABC

求作：一直線 L 將 ΔABC 的原周長

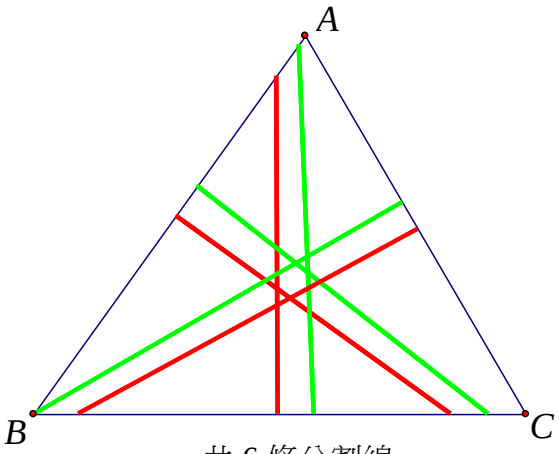
分成 $9:10$，且原面積分成 $4:5$

作法：同 *P.26* (ΔABC 的完全分割線作法)

只是將

α -基本周長線的 α，以 $\frac{9}{10}$ 取代

β -基本面積線的 β，以 $\frac{4}{5}$ 取代。



共 6 條分割線

[結論七]：對於凸 n 邊形，當指定周長或面積其分割值不同時為 1：1 時，則最多可存在 $2(2n-3)$條分割線。

伍、研究結果與文獻比較：

第 45 屆國中組數學科 ---『同時平分三角形、四邊形的周長與面積之研究』
1. 利用周長與面積條件，造出兩個方程式，解出關係。並針對給定的特殊條件討論相關結論。 2. 文中提到三角形在某一條件下，不存在完美分割線。 3. 利用方程式得到的結果，可找出完美分割線位置。

本研究結果與上述比較：

1. 從文獻內文，可得知其解方程式過程甚為複雜，但不能更一般化。換言之，五邊形以上的分割，將陷入困境。

   本研究以[**完美分割線畢氏作圖法**]，可輕易以尺規作圖的方式，作出任意凸多邊形的完美分割線。
2. 針對第 2 點，本研究以簡易方式，證明出：**凸 n 邊形必存在完美分割線**。顯然文獻討論有瑕疵。
3. 針對第 3 點，根據其研究結果，得到的完美分割線位置與某頂點之距離得到的 x、y 值(其實，只是一個複雜的關係)，並不能直接以尺規作圖的方式來完成。

2007 年台灣國際科展數學科---『凸多邊完美分割線的尋找』
1. 凸多邊形完美分割線必通過同角的等周有效段與等積曲線段之交點。

本研究結果與上述比較：

文獻中，得到的交點(完美分割線必通過之點)，實際上是以 *G.S.P* 繪出等積曲線段，而此曲線段在 *G.S.P* 軟體功能中，並不能得出與等周有效段產生交點。所以並不能以尺規作圖的方式作出完美分割線。而本研究發展出的[**完美分割線畢氏作圖法**]，不但可以以尺規作圖的方式，作出任意凸多邊形的完美分割線，對

於「當周長或面積其分割值不同時為 1：1」時，一樣可作出其分割線。並且，我們也研究出完美分割線的數量問題。

陸、結論：

一、凸 n 邊形完美分割線必存在。(P.6)

二、以[**完美分割線畢氏作圖法**]，可作出凸 n 邊形所有的完美分割線。(P.8)

三、對於非平行凸 n 邊形，最少存在 3 個[逆坡移動]。(P.19)

四、對於非平行凸 n 邊形，最多存在 1：1 的完美分割線 $2n$-3 條。(P.23)

柒、參考資料：

一、作者：劉易青、史宜平、林彥辰、李屹

作品名稱：中華民國第四十五屆中小學科學展覽國中數學科---

『同時平分三角形、四邊形的周長與面積之研究』

二、作者：廖文偉、劉立晴、鄭慈、林士捷

作品名稱：中華民國第四十六屆中小學科學展覽國中數學科---

『三角形周長等分線的作圖與數量的分布』

三、作者：鄭巧君、廖文偉

作品名稱：2007 年台灣國際科展數學科---『凸多邊完美分割線的尋找』

四、 笹部貞市郎

九章編輯部

九章出版社

幾何學辭典 *P*486---第 2209 題

【評語】030416

有關多邊形完美分割線的研究，已在歷屆科展中有諸多的討論。但本件作品將多邊形完美分割線的尺規作圖與數量分析，有條不紊的討論，並補充與修正了舊有研究上的不足和缺失，並有完整的結論，是一件頗為費心的幾何研究作品。