中華民國第51屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

030415

愛『拼』才會『轉』

學校名稱：臺南市私立長榮高級中學(附設國中)

作者：	指導老師：
國三 林家宇 國三 施伯穎 國三 韋霖謙	阮啟銘

關鍵詞：走法、步數、等差

愛『拼』才會『轉』

摘要

智慧拼圖現在已是一種處處可見的益智遊戲。在本研究中我們利用矩陣去定義智慧拼圖的位置，實際去操作a_{11}與其他位置互換的狀況。我們將矩陣分成長方形與正方形兩部分來討論，並且在兩種不同形狀的矩陣中找出基本變換型，並且定義出一些固定走法，讓我們推導出不管是$m \times n$矩陣或是 n 階方陣我們一樣可按照固定走法配合基本變換型進行a_{11}與a_{ij}的最短路徑的位置互換。最後我們嘗試點對稱的倒轉，也就是將矩陣內所有a_{ij}與$a_{(m+1-i)(n+1-j)}$對調，去找出倒轉的可行性及步法規則，並且利用遞迴數列推導出在我們的固定走法下的步數通式。

壹、 研究動機

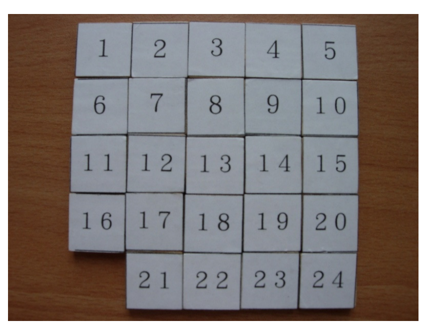
只要把握住一些簡單要領，大部分的人玩智慧拼圖時都可輕易上手。在玩的過程中，我們突然想到有沒有更快的方法，類似魔術方塊一樣透過一些基本公式，能讓我們更迅速的把圖片放到正確的位置。於是我們開始了我們的研究之路，我們先從最小的2×3開始找尋最快速的路徑，然後2×4，2×5，…。結果我們在玩的過程中發現如果透過一些固定的走法，我們所走出來的步數剛剛好是數學第四冊所學到的『等差』。之後我們開始增大我們的矩陣，去觀察增加行數與列數時會發生什麼變化，並且設計更多的走法讓步法可以呈現規律性，就這樣，智慧拼圖就成了我們的研究對象了。

貳、 研究目的

一、探討$m \times n$矩陣的$(a_{11}) \leftrightarrow (a_{mn})$
二、探討 n 階方陣的$(a_{11}) \leftrightarrow (a_{nn})$
三、探討$m \times n$矩陣的點對稱倒轉
四、探討 n 階方陣點對稱倒轉

參、 研究設備及器材

智慧拼圖、小積木、紙、筆、電腦



肆、 研究過程與方法

一、 探討$m\times n$矩陣的$(a_{11})\leftrightarrow(a_{mn})$

研究過程中我們都是以最有規律且最短路徑爲目標來操作並研究，但到目前爲止還是無法具體證明我們的走法是否爲最短路徑。

在所有研究過程中我們定義 **左下角(a_{m1})爲唯一空格**，P**代表步數**。

(一) $2\times n$的矩陣〔$(a_{11})\leftrightarrow(a_{1n})$〕

$2\times n$矩陣，n 恆≥3，2 代表列數，n 代表行數。

首先我們先操作2×3矩陣 [$(a_{11})\leftrightarrow(a_{12})$] 如下：

$\begin{pmatrix}1&2&3\\ &4&5\end{pmatrix}$

$\rightarrow\begin{pmatrix}1&2&3\\4& &5\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1& &3\\4&2&5\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} &1&3\\4&2&5\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}4&1&3\\ &2&5\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}4&1&3\\2& &5\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}4&1&3\\2&5& \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}4&1& \\2&5&3\end{pmatrix}$

$\rightarrow\begin{pmatrix}4& &1\\2&5&3\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} &4&1\\2&5&3\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}2&4&1\\ &5&3\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}2&4&1\\5& &3\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}2& &1\\5&4&3\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}2&1& \\5&4&3\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}2&1&3\\5&4& \end{pmatrix}$

$\rightarrow\begin{pmatrix}2&1&3\\5& &4\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}2&1&3\\ &5&4\end{pmatrix}$

但此走法步數過多，且此走法無法適用到$m\times n$矩陣最短路徑步法上。

1. **定義：**

   (1) **2×3基本變換型①** —— 變換規則：$\begin{pmatrix}①&2&③\\ &4&5\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}③&4&①\\ &2&5\end{pmatrix}$

   說明：

   A. 2×3基本變換型①爲使$1\leftrightarrow3$。

   B. $P=14$。

$\begin{pmatrix}1&2&3\\ &4&5\end{pmatrix}$

$\rightarrow\begin{pmatrix} &2&3\\1&4&5\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}2& &3\\1&4&5\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}2&3& \\1&4&5\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}2&3&5\\1&4& \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}2&3&5\\1& &4\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}2&3&5\\ &1&4\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} &3&5\\2&1&4\end{pmatrix}$

$\rightarrow\begin{pmatrix}3& &5\\2&1&4\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}3&1&5\\2& &4\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}3&1&5\\2&4& \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}3&1& \\2&4&5\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}3& &1\\2&4&5\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}3&4&1\\2& &5\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}3&4&1\\ &2&5\end{pmatrix}$

   (2) **右移** —— 變換規則：$\begin{pmatrix}①&2\\ &3\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}3&①\\2& \end{pmatrix}$

   說明：

   A. 右移爲 1 右移 1 格，空格保持在下方。

   B. $P=5$。

$\begin{pmatrix}1&2\\ &3\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&2\\3& \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1& \\3&2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} &1\\3&2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}3&1\\ &2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}3&1\\2& \end{pmatrix}$

(3) **左移** —— 變換規則：$\begin{pmatrix}2 & ① \\ 3 & \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}① & 3 \\ & 2\end{pmatrix}$

說明：

A. 左移爲 1 往左移 1 格，空格保持在下方。

B. Ｐ＝5。

$$\begin{pmatrix}2 & 1 \\ 3 & \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}2 & 1 \\ & 3\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} & 1 \\ 2 & 3\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & \\ 2 & 3\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 3 \\ 2 & \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 3 \\ & 2\end{pmatrix}$$

可得$\mathbf{2 \times n}$矩陣最短路徑走法 如下：

最短路徑走法：右移 → 2×3基本變換型① → 左移。

2. 舉例：

$\mathbf{2 \times 5}$矩陣走法（步數）分解：

原始型：$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ & 6 & 7 & 8 & 9\end{pmatrix}$

目標：$(a_{11}) \leftrightarrow (a_{15})$

走法：

(1) 第一次右移：

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & & 7 & 8 & 9\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 2 & 7 & 8 & 9\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} & 1 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 2 & 7 & 8 & 9\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}6 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ & 2 & 7 & 8 & 9\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}6 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & & 7 & 8 & 9\end{pmatrix}$$

(2) 第二次右移：

$$\begin{pmatrix}6 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 7 & & 8 & 9\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}6 & 1 & & 4 & 5 \\ 2 & 7 & 3 & 8 & 9\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}6 & & 1 & 4 & 5 \\ 2 & 7 & 3 & 8 & 9\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}6 & 7 & 1 & 4 & 5 \\ 2 & & 3 & 8 & 9\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}6 & 7 & 1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & & 8 & 9\end{pmatrix}$$

(3) 2×3基本變換型①：

$$\begin{pmatrix}6 & 7 & & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 8 & 9\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}6 & 7 & 4 & & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 8 & 9\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}6 & 7 & 4 & 5 & \\ 2 & 3 & 1 & 8 & 9\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}6 & 7 & 4 & 5 & 9 \\ 2 & 3 & 1 & 8 & \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}6 & 7 & 4 & 5 & 9 \\ 2 & 3 & 1 & & 8\end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix}6 & 7 & 4 & 5 & 9 \\ 2 & 3 & & 1 & 8\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}6 & 7 & & 5 & 9 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 8\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}6 & 7 & 5 & & 9 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 8\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}6 & 7 & 5 & 1 & 9 \\ 2 & 3 & 4 & & 8\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}6 & 7 & 5 & 1 & 9 \\ 2 & 3 & 4 & 8 & \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix}6 & 7 & 5 & 1 & \\ 2 & 3 & 4 & 8 & 9\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}6 & 7 & 5 & & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 8 & 9\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}6 & 7 & 5 & 8 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & & 9\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}6 & 7 & 5 & 8 & 1 \\ 2 & 3 & & 4 & 9\end{pmatrix}$$

(4) 第一次左移：

$$\begin{pmatrix}6 & 7 & 5 & 8 & 1 \\ 2 & & 3 & 4 & 9\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}6 & & 5 & 8 & 1 \\ 2 & 7 & 3 & 4 & 9\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}6 & 5 & & 8 & 1 \\ 2 & 7 & 3 & 4 & 9\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}6 & 5 & 3 & 8 & 1 \\ 2 & 7 & & 4 & 9\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}6 & 5 & 3 & 8 & 1 \\ 2 & & 7 & 4 & 9\end{pmatrix}$$

(5) 第二次左移：

$$\begin{pmatrix}6 & 5 & 3 & 8 & 1 \\ & 2 & 7 & 4 & 9\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} & 5 & 3 & 8 & 1 \\ 6 & 2 & 7 & 4 & 9\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}5 & & 3 & 8 & 1 \\ 6 & 2 & 7 & 4 & 9\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}5 & 2 & 3 & 8 & 1 \\ 6 & & 7 & 4 & 9\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}5 & 2 & 3 & 8 & 1 \\ & 6 & 7 & 4 & 9\end{pmatrix}$$

3. **表格統整 —— 2×3、2×4、2×5矩陣的比較：**

	右移次數	2×3基本變換型①次數	左移次數	P總	跟著變換的位置 $a_{1,(n-1)} \leftrightarrow a_{2,(n-1)} (n\geq3)$
2×3矩陣	0	1	0	$0+14+0=14$	$\begin{pmatrix} ③ & \boxed{4} & ① \\ & \boxed{2} & 5 \end{pmatrix}$
2×4矩陣	1	1	1	$5+14+5=24$	$\begin{pmatrix} ④ & 2 & \boxed{6} & ① \\ & 5 & \boxed{3} & 7 \end{pmatrix}$
2×5矩陣	2	1	2	$10+14+10=34$	$\begin{pmatrix} ⑤ & 2 & 3 & \boxed{8} & ① \\ & 6 & 7 & \boxed{4} & 9 \end{pmatrix}$

由表格可以推得：

$2\times(n+1)$矩陣會比$2\times n$矩陣多一個右移、左移，皆有一個2×3基本變換型①。之後若固定$2\times n$矩陣的列數，每當行數+1，則會多一個右移及左移，但皆有一個2×3基本變換型①。

[公式推導]：

假設有一個$2\times n(n\geq3)$矩陣，則有$(n-3)$個右移與左移。

P總$=(n-3)$右移$+2\times3$基本變換型①$+(n-3)$左移

$=5\times(n-3)+14+5\times(n-3)$

$=10n-16$。

4. **結論**

一個 $2\times n$ 矩陣，若(a_{11})與(a_{1n})兩數對調，則
(1) 最短路徑走法爲右移 → 2×3基本變換型① → 左移。
(2) 最短路徑走法的移動步數爲 $10n-16$。
(3) 跟著變換的位置爲$a_{1(n-1)} \leftrightarrow a_{2(n-1)} (n\geq3)$。

在此提出說明：(a_{11})與(a_{1n})兩數對調步法也不適用於到之後要推廣的m×n矩陣。

(二) **$2\times n$的矩陣〔$(a_{11})\leftrightarrow(a_{2n})$〕**

我們觀察若只是把$(a_{11})\leftrightarrow(a_{21})$，變成前述的$(a_{21})\leftrightarrow(a_{2n})$，則步數須增加 1 步，但我們找出另一種走法，可使步數不增加，如下：

1. **定義：**

(1) **2×3基本變換型② ——** 變換規則：$\begin{pmatrix} ① & 2 & 3 \\ & 4 & ⑤ \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} ⑤ & 4 & 3 \\ & 2 & ① \end{pmatrix}$

說明：

A. 2×3基本變換型②爲使 1↔ 5。

B. P $=14$。

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\ &4&5\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix} &2&3\\1&4&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2& &3\\1&4&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&4&3\\1& &5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&4&3\\1&5& \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&4& \\1&5&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2& &4\\1&5&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&5&4\\1& &3\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}2&5&4\\ &1&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} &5&4\\2&1&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}5& &4\\2&1&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}5&4& \\2&1&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}5&4&3\\2&1& \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}5&4&3\\2& &1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}5&4&3\\ &2&1\end{pmatrix}$$

(2) **右移** —— 沿用$2\times n$矩陣〔$(a_{11})\leftrightarrow(a_{1n})$〕的右移

(3) **左移** —— 沿用$2\times n$矩陣〔$(a_{11})\leftrightarrow(a_{1n})$〕的左移

可得$2\times n$矩陣最短路徑走法 如下：

最短路徑走法：右移→ 2×3變換基本型② →左移。

2. **舉例：**

2×5矩陣走法（步數）分解：

原始型：$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\ &6&7&8&9\end{pmatrix}$

目標：$(a_{11})\leftrightarrow(a_{25})$

走法：

(1) 第一次右移：

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\6& &7&8&9\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1& &3&4&5\\6&2&7&8&9\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} &1&3&4&5\\6&2&7&8&9\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}6&1&3&4&5\\ &2&7&8&9\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}6&1&3&4&5\\2& &7&8&9\end{pmatrix}$$

(2) 第二次右移：

$$\begin{pmatrix}6&1&3&4&5\\2&7& &8&9\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}6&1& &4&5\\2&7&3&8&9\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}6& &1&4&5\\2&7&3&8&9\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}6&7&1&4&5\\2& &3&8&9\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}6&7&1&4&5\\2&3& &8&9\end{pmatrix}$$

(3) 2×3 基本變換型②：

$$\begin{pmatrix}6&7& &4&5\\2&3&1&8&9\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}6&7&4& &5\\2&3&1&8&9\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}6&7&4&8&5\\2&3&1& &9\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}6&7&4&8&5\\2&3&1&9& \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}6&7&4&8& \\2&3&1&9&5\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}6&7&4& &8\\2&3&1&9&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}6&7&4&9&8\\2&3&1& &5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}6&7&4&9&8\\2&3& &1&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}6&7& &9&8\\2&3&4&1&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}6&7&9& &8\\2&3&4&1&5\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}6&7&9&8& \\2&3&4&1&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}6&7&9&8&5\\2&3&4&1& \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}6&7&9&8&5\\2&3&4& &1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}6&7&9&8&5\\2&3& &4&1\end{pmatrix}$$

(4) 第一次左移：

$$\begin{pmatrix}6&7&9&8&5\\2& &3&4&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}6& &9&8&5\\2&7&3&4&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}6&9& &8&5\\2&7&3&4&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}6&9&3&8&5\\2&7& &4&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}6&9&3&8&5\\2& &7&4&1\end{pmatrix}$$

(5) 第二次左移：

$$\begin{pmatrix}6&9&3&8&5\\ &2&7&4&9\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} &9&3&8&5\\6&2&7&4&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}9& &3&8&5\\6&2&7&4&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}9&2&3&8&5\\6& &7&4&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}9&2&3&8&5\\ &6&7&4&1\end{pmatrix}$$

3. **表格統整 —— 2 × 3、2 × 4、2 × 5矩陣的比較：**

	右移次數	2 × 3基本變換型②次數	左移次數	P總	跟著變換的位置 $a_{1(n-1)} \leftrightarrow a_{2(n-1)}(n\geq 3)$
2 × 3矩陣	0	1	0	$0+14+0=14$	$\begin{pmatrix} ⑤ & \boxed{4} & 3 \\ & \boxed{2} & ① \end{pmatrix}$
2 × 4矩陣	1	1	1	$5+14+5=24$	$\begin{pmatrix} ⑦ & 2 & \boxed{6} & 4 \\ & 5 & \boxed{3} & ① \end{pmatrix}$
2 × 5矩陣	2	1	2	$10+14+10=34$	$\begin{pmatrix} ⑨ & 2 & 3 & \boxed{8} & 5 \\ & 6 & 7 & \boxed{4} & ① \end{pmatrix}$

由表格可以推得：

$2\times(n+1)$矩陣會比$2\times n$矩陣多一個右移、左移，皆有一個2×3基本變換型②。之後固定$2\times n$矩陣的列數，每當行數+1則會多一個右移及左移，但都只有一個2×3基本變換型②。

[公式推導]：

假設有一個$2\times n(n\geq 3)$矩陣，則有$(n-3)$個右移與左移。

P總 $=(n-3)$右移＋2×3基本變換型②＋$(n-3)$左移

$=5\times(n-3)+14+5\times(n-3)$

$=10n-16$。

4. **結論：**

> 一個 $2\times n$ 矩陣，若(a_{11})與(a_{2n})兩數對調，則
> (1) 最短路徑走法為右移 → 2×3基本變換型② → 左移。
> (2) 最短走法的移動步數為 $10n-16$。
> (3) 跟著變換的位置為$a_{1(n-1)} \leftrightarrow a_{2(n-1)}(n\geq 3)$。

(三) **$3\times n$矩陣〔$(a_{11}) \leftrightarrow (a_{3n})$〕**

$3\times n$矩陣，n 恆≥ 4，3 代表列數，n 代表行數。

1. **定義：**

(1) **起始步** —— 變換規則：舉例⇒ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ & 7 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 6 \\ 4 & 7 & 8 \end{pmatrix}$

說明：

A. 起始步為將空格由a_{n1}移到a_{11}。

B. P $=n-1$。

> 走法⇒$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ & 7 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & 5 & 6 \\ 4 & 7 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 6 \\ 4 & 7 & 8 \end{pmatrix}$

(2) **返始步** —— 變換規則：舉例 ⇒ $\begin{pmatrix} & 2 & 3 \\ 8 & 5 & 7 \\ 4 & 6 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 8 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \\ & 6 & 1 \end{pmatrix}$

說明：

A. 返始步爲將空格由a_{11}移到a_{n1}。

B. $P = n - 1$。

走法⇒$\begin{pmatrix} & 2 & 3 \\ 8 & 5 & 7 \\ 4 & 6 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 8 & 2 & 3 \\ & 5 & 7 \\ 4 & 6 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 8 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \\ & 6 & 1 \end{pmatrix}$

(3) **$2 \times n$矩陣** —— 沿用$2 \times n$矩陣〔$(a_{11}) \leftrightarrow (a_{2n})$〕的走法

(4) **下樓梯①** —— 變換規則：走法 ⇒ $\begin{pmatrix} & a \\ b & c \\ d & e \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & c \\ d & b \\ e & \end{pmatrix}$

說明：

A. 下樓梯①爲 b 往右，空格由上方變到下方。

B. $P = 5$。

走法 ⇒ $\begin{pmatrix} & a \\ b & c \\ d & e \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & \\ b & c \\ d & e \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & c \\ b & \\ d & e \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & c \\ & b \\ d & e \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & c \\ d & b \\ & e \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & c \\ d & b \\ e & \end{pmatrix}$

(5) **上樓梯①** —— 變換規則：走法⇒$\begin{pmatrix} a & b \\ c & \\ e & d \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} b & \\ a & d \\ c & e \end{pmatrix}$

說明：

A. 上樓梯①爲 d 往上，空格保持在上方。

B. $P = 5$。

走法 ⇒ $\begin{pmatrix} a & b \\ c & \\ e & d \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ & e \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ & d \\ c & e \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} & b \\ a & d \\ c & e \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} b & \\ a & d \\ c & e \end{pmatrix}$

可得$3 \times n$矩陣固定走法 如下：

最短路徑走法：起始步→下樓梯①→$2 \times (n-1)$矩陣→上樓梯①→返始步

2. 舉例：

3×6矩陣走法（步數）分解：

原始型：$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 \end{pmatrix}$

目標：$(a_{11}) \leftrightarrow (a_{36})$

走法：

(1) 起始步：

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}1\\ \\7\end{matrix}} & \begin{matrix}2&3&4&5&6\\8&9&10&11&12\\13&14&15&16&17\end{matrix}\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \\1\\7\end{matrix}} & \begin{matrix}2&3&4&5&6\\8&9&10&11&12\\13&14&15&16&17\end{matrix}\end{pmatrix}$$

(2) 下樓梯①：

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}2& \\1&8\\7&13\end{matrix}} & \begin{matrix}3&4&5&6\\9&10&11&12\\14&15&16&17\end{matrix}\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}2&8&3&4&5&6\\1& &9&10&11&12\\7&13&14&15&16&17\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}2&8&3&4&5&6\\ &1&9&10&11&12\\7&13&14&15&16&17\end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix}2&8&3&4&5&6\\7&1&9&10&11&12\\ &13&14&15&16&17\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}2&8\\7&1\\13& \end{matrix}} & \begin{matrix}3&4&5&6\\9&10&11&12\\14&15&16&17\end{matrix}\end{pmatrix}$$

(3) 套用2×5矩陣：

$$\begin{pmatrix} \begin{matrix}2\\7\\13\end{matrix} & \begin{matrix}8&3&4&5&6\\ \boxed{\begin{matrix}1&9&10&11&12\\ &14&15&16&17\end{matrix}}\end{matrix}\end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} \begin{matrix}2\\7\\13\end{matrix} & \begin{matrix}8&3&4&5&6\\ \boxed{\begin{matrix}17&9&10&16&12\\ &14&15&11&1\end{matrix}}\end{matrix}\end{pmatrix}$$

(4) 上樓梯①：

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}2&8\\7&17\\ &13\end{matrix}} & \begin{matrix}3&4&5&6\\9&10&16&12\\14&15&11&1\end{matrix}\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}2&8&3&4&5&6\\ &17&9&10&16&12\\7&13&14&15&11&1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}2&8&3&4&5&6\\17& &9&10&16&12\\7&13&14&15&11&1\end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix}2& &3&4&5&6\\17&8&9&10&16&12\\7&13&14&15&11&1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} &2\\17&8\\7&13\end{matrix}} & \begin{matrix}3&4&5&6\\9&10&16&12\\14&15&11&1\end{matrix}\end{pmatrix}$$

(5) 返始步：

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}17\\ \\7\end{matrix}} & \begin{matrix}2&3&4&5&6\\8&9&10&16&12\\13&14&15&11&1\end{matrix}\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}17\\7\\ \end{matrix}} & \begin{matrix}2&3&4&5&6\\8&9&10&16&12\\13&14&15&11&1\end{matrix}\end{pmatrix}$$

3. **表格統整 —— 3×4、3×5、3×6的比較：**

	起始步次數	下樓梯次數①	$2 \times n$ 矩陣	上樓梯次數①	返始步次數	$P_{總}$	跟著變換的位置：$a_{2(n-1)} \leftrightarrow a_{3(n-1)}$ $(n \geq 4)$
3×4 矩陣	1	1	2×3	1	1	$2+5+14$ $+5+2=28$	$\begin{pmatrix}11&2&3&4\\5&6&\boxed{10}&8\\ &9&\boxed{7}&1\end{pmatrix}$
3×5 矩陣	1	1	2×4	1	1	$2+5+24$ $+5+2=38$	$\begin{pmatrix}14&2&3&4&5\\6&7&8&\boxed{13}&10\\ &11&12&\boxed{9}&1\end{pmatrix}$
3×6 矩陣	1	1	2×5	1	1	$2+5+34$ $+5+2=48$	$\begin{pmatrix}17&2&3&4&5&6\\7&8&9&10&\boxed{16}&12\\ &13&14&15&\boxed{11}&1\end{pmatrix}$

由表格可以推得：

在$3 \times n$矩陣中，有一個起始步、返始步、上下樓梯①、有一個$2 \times (n-1)$矩陣的形式。又在前面$2 \times n$矩陣中，我們已找出公式。

[公式推導]：

假設有一個$3 \times n (n \geq 4)$矩陣，則有 1 個上、下樓梯①。

$P_{總}$＝起始步＋下樓梯①＋$2\times(n-1)$矩陣＋上樓梯①＋返始步

$= 2+5+[10(n-1)-16]+5+2$

$= 10n-12 \rightarrow$ $\boxed{\textbf{比}2\times n\textbf{矩陣多 4 步}}$

4. 結論：

一個 $3\times n$ 矩陣，若(a_{11})與(a_{3n})兩數對調，則
(1) 最短路徑走法爲起始步→下樓梯①→$2\times(n-1)$矩陣→上樓梯①→返始步。
(2) 最短走法的移動步數爲 $10n-12$。
(3) 跟著變換的位置爲$a_{2(n-1)}\leftrightarrow a_{3(n-1)}$（$n\geq 4$）。

(四) **$4\times n$矩陣〔$(a_{11})\leftrightarrow(a_{4n})$〕**

$4\times n$矩陣，n 恆≥ 5，4 代表列數，n 代表行數。

1. **定義：**

(1) **起始步** —— 沿用$3\times n$矩陣〔$(a_{11})\leftrightarrow(a_{3n})$〕的起始步
(2) **返始步** —— 沿用$3\times n$矩陣〔$(a_{11})\leftrightarrow(a_{3n})$〕的返始步
(3) **下樓梯①** —— 沿用 $3\times n$矩陣〔$(a_{11})\leftrightarrow(a_{3n})$〕的下樓梯①
(4) **上樓梯①** —— 沿用 $3\times n$矩陣〔$(a_{11})\leftrightarrow(a_{3n})$〕的下樓梯①
(5) **下樓梯②** —— 變換規則：走法⇒$\begin{pmatrix} & a \\ b & c \\ d & e \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} a & c \\ d & \\ e & b \end{pmatrix}$

說明：

A. 下樓梯②爲 b 往右再往下，空格保持在上方。

B. $P=6$。

走法⇒$\begin{pmatrix} & a \\ b & c \\ d & e \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} a & \\ b & c \\ d & e \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} a & c \\ b & \\ d & e \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} a & c \\ & b \\ d & e \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} a & c \\ d & b \\ & e \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} a & c \\ d & b \\ e & \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} a & c \\ d & \\ e & b \end{pmatrix}$

(6) **上樓梯②** —— 變換規則：走法⇒$\begin{pmatrix} a & b \\ c & \\ e & d \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} & a \\ d & b \\ c & e \end{pmatrix}$

說明：

A. 上樓梯②爲 d 往上往左，空格保持在上方。

B. $P=6$。

走法⇒$\begin{pmatrix} a & b \\ c & \\ e & d \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ & e \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} a & b \\ & d \\ c & e \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} a & b \\ d & \\ c & e \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} a & \\ d & b \\ c & e \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} & a \\ d & b \\ c & e \end{pmatrix}$

(7) **$2\times n$矩陣** —— 沿用$2\times n$矩陣〔$(a_{11})\leftrightarrow(a_{2n})$〕的走法

可得$4\times n$矩陣固定走法 如下：

最短路徑走法：
起始步→下樓梯②→下樓梯①→$2\times(n-2)$矩陣→上樓梯①→上樓梯②→返始步

2. **舉例：**

4×6矩陣走法（步數）分解：

原始型：$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 \\ & 19 & 20 & 21 & 22 & 23 \end{pmatrix}$

目標：$(a_{11}) \leftrightarrow (a_{46})$

走法：

(1) 起始步：

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 \\ 13 & 19 & 20 & 21 & 22 & 23 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 7 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 \\ 13 & 19 & 20 & 21 & 22 & 23 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 7 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 \\ 13 & 19 & 20 & 21 & 22 & 23 \end{pmatrix}$$

(2) 下樓梯②：

$$\begin{pmatrix} 2 & & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 7 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 \\ 13 & 19 & 20 & 21 & 22 & 23 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 8 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 7 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 \\ 13 & 19 & 20 & 21 & 22 & 23 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 8 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ & 1 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 7 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 \\ 13 & 19 & 20 & 21 & 22 & 23 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 8 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 1 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 \\ 13 & 19 & 20 & 21 & 22 & 23 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 8 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 1 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 14 & & 15 & 16 & 17 & 18 \\ 13 & 19 & 20 & 21 & 22 & 23 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 8 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 14 & 1 & 15 & 16 & 17 & 18 \\ 13 & 19 & 20 & 21 & 22 & 23 \end{pmatrix}$$

(3) 下樓梯①：

$$\begin{pmatrix} 2 & 8 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 9 & & 10 & 11 & 12 \\ 14 & 1 & 15 & 16 & 17 & 18 \\ 13 & 19 & 20 & 21 & 22 & 23 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 8 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 9 & 15 & 10 & 11 & 12 \\ 14 & 1 & & 16 & 17 & 18 \\ 13 & 19 & 20 & 21 & 22 & 23 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 8 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 9 & 15 & 10 & 11 & 12 \\ 14 & & 1 & 16 & 17 & 18 \\ 13 & 19 & 20 & 21 & 22 & 23 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 8 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 9 & 15 & 10 & 11 & 12 \\ 14 & 19 & 1 & 16 & 17 & 18 \\ 13 & & 20 & 21 & 22 & 23 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 8 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 9 & 15 & 10 & 11 & 12 \\ 14 & 19 & 1 & 16 & 17 & 18 \\ 13 & 20 & & 21 & 22 & 23 \end{pmatrix}$$

(4) 套用2×4矩陣：

$$\begin{pmatrix} 2 & 8 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 9 & 15 & 10 & 11 & 12 \\ 14 & 19 & 1 & 16 & 17 & 18 \\ 13 & 20 & & 21 & 22 & 23 \end{pmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 8 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 9 & 15 & 10 & 11 & 12 \\ 14 & 19 & 23 & 16 & 22 & 18 \\ 13 & 20 & & 21 & 17 & 1 \end{pmatrix}$$

(5) 上樓梯①：

$$\begin{pmatrix} 2 & 8 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 9 & 15 & 10 & 11 & 12 \\ 14 & 19 & 23 & 16 & 22 & 18 \\ 13 & & 20 & 21 & 17 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 8 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 9 & 15 & 10 & 11 & 12 \\ 14 & 1 & & 16 & 17 & 18 \\ 13 & 19 & 20 & 21 & 22 & 23 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 8 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 9 & 15 & 10 & 11 & 12 \\ 14 & & 1 & 16 & 17 & 18 \\ 13 & 19 & 20 & 21 & 22 & 23 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 8 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 9 & 15 & 10 & 11 & 12 \\ 14 & 19 & 1 & 16 & 17 & 18 \\ 13 & & 20 & 21 & 22 & 23 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 8 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 14 & 23 & 15 & 16 & 22 & 18 \\ 13 & 19 & 20 & 21 & 17 & 1 \end{pmatrix}$$

(6) 上樓梯②：

$$\begin{pmatrix} 2 & 8 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 23 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 14 & & 15 & 16 & 22 & 18 \\ 13 & 19 & 20 & 21 & 17 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 8 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 23 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ & 14 & 15 & 16 & 22 & 18 \\ 13 & 19 & 20 & 21 & 17 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 8 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ & 23 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 7 & 14 & 15 & 16 & 22 & 18 \\ 13 & 19 & 20 & 21 & 17 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 2 & 8 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 23 & & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 7 & 14 & 15 & 16 & 22 & 18 \\ 13 & 19 & 20 & 21 & 17 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 23 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 7 & 14 & 15 & 16 & 22 & 18 \\ 13 & 19 & 20 & 21 & 17 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 23 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 7 & 14 & 15 & 16 & 22 & 18 \\ 13 & 19 & 20 & 21 & 17 & 1 \end{pmatrix}$$

(7) 返始步：

$$\begin{pmatrix} 23 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 7 & 14 & 15 & 16 & 22 & 18 \\ 13 & 19 & 20 & 21 & 17 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 23 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ & 14 & 15 & 16 & 22 & 18 \\ 13 & 19 & 20 & 21 & 17 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 23 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 & 22 & 18 \\ & 19 & 20 & 21 & 17 & 1 \end{pmatrix}$$

3. **表格統整 —— 4×5、4×6、4×7矩陣比較：**

	起始步次數	下樓梯②次數	下樓梯①次數	$2 \times n$ 矩陣	上樓梯①次數	上樓梯②次數	返始步次數	$P_{總}$	跟著變換的位置 $a_{11} \leftrightarrow a_{4n}$ $a_{3(n-1)} \leftrightarrow a_{4(n-1)}$ $(n \geq 5)$
4×5 矩陣	1	1	1	2×3 $1 \to 5$	1	1	1	$3+6+5+14$ $+5+6+3=42$	$\begin{pmatrix} 19 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & \boxed{18} & 15 \\ & 16 & 17 & \boxed{14} & 1 \end{pmatrix}$
4×6 矩陣	1	1	1	2×4 $1 \to 7$	1	1	1	$3+6+5+24$ $+5+6+3=52$	$\begin{pmatrix} 23 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 & \boxed{22} & 18 \\ & 19 & 20 & 21 & \boxed{17} & 1 \end{pmatrix}$
4×7 矩陣	1	1	1	2×5 $1 \to 9$	1	1	1	$3+6+5+34$ $+5+6+3=62$	$\begin{pmatrix} 27 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & \boxed{26} & 21 \\ & 22 & 23 & 24 & 25 & \boxed{20} & 1 \end{pmatrix}$

由表格可以推得：

在$4 \times n$矩陣中，有一個起始步、返始步、下樓梯①和②、上樓梯①和②、$2 \times (n-2)$矩陣。又在前面$2 \times n$矩陣中，我們已找出公式。

[公式推導]：

假設有一個$4 \times n(n \geq 5)$矩陣，則有１個下樓梯①、②，１個上樓梯①、②。

$P_{總}$＝起始步＋下樓梯②＋下樓梯①＋$2 \times (n-2)$矩陣＋上樓梯①＋上樓梯②＋返始步

＝ $3+6+5+[10(n-2)16]+6+5+3$

＝ $10n-8 \to$ $\boxed{\text{比}\mathbf{3 \times n}\text{矩陣多 4 步}}$

4. **結論：**

一個 $4 \times n$矩陣，若〔$(a_{11}) \leftrightarrow (a_{4n})$〕兩數對調，則

(1) 最短路徑走法爲

起始步→下樓梯①→下樓梯②→ $2 \times (n-2)$矩陣→上樓梯②→上樓梯①→返始步。

(2) 最短走法的移動步數爲 $10n - 8$。

(3) 跟著變換的位置爲$a_{3(n-1)} \leftrightarrow a_{4(n-1)}$（$n \geq 5$）。

(五) **$m \times n$矩陣公式推導：**

1. **固定行數，增加列數：**

3×7、4×7、5×7、6×7矩陣的比較：

	起始步次數	下樓梯②次數	下樓梯①次數	$2 \times n$ 矩陣	上樓梯①次數	上樓梯②次數	返始步次數	$P_{總}$	跟著變換的位置 $a_{(m-1)6} \leftrightarrow a_{m6}$ $(m = 3、4、5、6)$
3×7 矩陣	1	0	1	2×6 （1→11）	1	0	1	$2+0+5$ $+44+5$ $+0+2$ $=58$	$\begin{pmatrix} \text{⑳} & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & \boxed{19} & 14 \\ & 15 & 16 & 17 & 18 & \boxed{13} & \text{①} \end{pmatrix}$
4×7 矩陣	1	1	1	2×5 （1→9）	1	1	1	$3+6+5$ $+34+5$ $+6+3$ $=62$	$\begin{pmatrix} \text{㉗} & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & \boxed{26} & 21 \\ & 22 & 23 & 24 & 25 & \boxed{20} & \text{①} \end{pmatrix}$
5×7 矩陣	1	2	1	2×4 （1→7）	1	2	1	$4+12+5$ $+24+5$ $+12+4$ $=66$	$\begin{pmatrix} \text{㉞} & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 \\ 22 & 23 & 24 & 25 & 26 & \boxed{33} & 28 \\ & 29 & 30 & 31 & 32 & \boxed{27} & \text{①} \end{pmatrix}$
6×7 矩陣	1	3	1	2×3 （1→5）	1	3	1	$5+18+5$ $+14+5$ $+18+8$ $=70$	$\begin{pmatrix} \text{㊶} & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 \\ 22 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 & 28 \\ 29 & 30 & 31 & 32 & 33 & \boxed{40} & 35 \\ & 36 & 37 & 38 & 39 & \boxed{34} & \text{①} \end{pmatrix}$

由表格可以推得：

有一矩陣，當我們**『固定』其行數**，**『增加』其列數**時：

每當列數加K，則：

(1) $\begin{cases} P_{起始步} \text{ 也跟著加 } K \\ P_{返始步} \text{ 也跟著加 } K \end{cases}$

(2) $\begin{cases}\text{下樓梯②移動次數也跟著加 K，所以 P 要多加 6K} \\ \text{上樓梯②移動次數也跟著加 K，所以 P 要多加 6K}\end{cases}$

(3) $\begin{cases}\text{下樓梯①不管是其移動次數不變，所以 P 不變} \\ \text{上樓梯①不管是其移動次數不變，所以 P 不變}\end{cases}$

(4) $2\times n$ 矩陣的 n 行數會跟著減 K，所以 P 要多減 10K

(5) 最後 P 增加 $(K+K+6K+6K-10K)=4K$

2. **『同時增加』行數與列數：**

3×4、4×5、5×6、6×7矩陣的比較：

	起始步次數	下樓梯②次數	下樓梯①次數	$2\times n$ 矩陣	上樓梯①次數	上樓梯②次數	返始步次數	$P_{總}$	跟著變換的位置 $a_{(m-1)m}\leftrightarrow a_{mm}$ $(m=3、4、5、6)$
3×4 矩陣	1	0	1	2×3 (1→3)	1	0	1	$2+0+5$ $+14+5$ $+0+2$ $=28$	$\begin{pmatrix} 11 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & \boxed{10} & 8 \\ & 9 & \boxed{7} & 1 \end{pmatrix}$
4×5 矩陣	1	1	1	2×3 (1→3)	1	1	1	$3+6+5$ $+14+5$ $+6+3$ $=42$	$\begin{pmatrix} 19 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & \boxed{18} & 15 \\ & 16 & 17 & \boxed{14} & 1 \end{pmatrix}$
5×6 矩陣	1	2	1	2×3 (1→3)	1	2	1	$4+12+5$ $+14+5$ $+12+4$ $=56$	$\begin{pmatrix} 29 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 \\ 19 & 20 & 21 & 22 & \boxed{28} & 24 \\ & 25 & 26 & 27 & \boxed{23} & 1 \end{pmatrix}$
6×7 矩陣	1	3	1	2×3 (1→3)	1	3	1	$5+18+5$ $+14+5$ $+18+8$ $=70$	$\begin{pmatrix} 41 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 \\ 22 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 & 28 \\ 29 & 30 & 31 & 32 & 33 & \boxed{40} & 35 \\ & 36 & 37 & 38 & 39 & \boxed{34} & 1 \end{pmatrix}$

由表格可以推得：

有一矩陣，當我們**『同時增加』其行數與列數**時：

當列數與行數同時增加K，則：

(1) $\begin{cases} P_{起始步} \text{也跟著加 K} \\ P_{返始步} \text{也跟著加 K} \end{cases}$

(2) $\begin{cases} \text{下樓梯②次數也跟著加 K，所以 P 要多加 6K} \\ \text{上樓梯②次數也跟著加 K，所以 P 要多加 6K} \end{cases}$

(3) $\begin{cases} \text{下樓梯①不管是其移動次數不變，所以 P 不變} \\ \text{上樓梯①不管是其移動次數不變，所以 P 不變} \end{cases}$

(4) $2 \times n$ 矩陣的邊長 n不變，P亦不變

(5) 最後P增加$(K + K + 6K + 6K) = 14K$

3. **得知**：

(1) 當列數與行數同時+K時，會有相同的$2 \times n$矩形

(2) $P_{起始步}$與$P_{返始步}$只與列數增加有關

(當列數加 K，$P_{起始步}$與$P_{返始步}$也跟著加 K)

(3) 上下樓梯②只與列數增加有關

〔當列數加 K，則上下樓梯②次數會加 1，所以P要多加 6K〕

(4) 上下樓梯①不受列數或行數增加而影響

(5) $2 \times n$矩陣會受列數或行數增加而影響：

A. 『固定』列數，『增加』行數：當行數+K，則 n 也會+K

B. 固定行數增加列數：當列數+K，則 n 也會+K

C. 同時增加列數與行數：列數與行數同時+K，$2 \times n$矩形不受影響

4. **[公式推導]**：

設 m 爲列數，n 爲行數，$m \geq 2$，$n \geq 3$，且$n \geq m$

$P_{總}$＝起始步＋下樓梯②＋下樓梯①＋ $2 \times n$ 矩陣＋上樓梯①＋上樓梯②＋返始步

$$= (m-1) + 6 \times (m-3) + 5 + 10[n-(m-2)] - 16 + 5 + 6(m-3) + (m-1)$$
$$= (m + 6m - 10m + 6m + m) + 10n + [(-1) + (-18) + 5 + 20 + (-16) + 5 + (-18) + (-1)]$$
$$= 4m + 10n - 24。$$

5. **結論：**

1. $m \times n$矩陣($m < n$且 $m \neq n$)的最短路徑走法爲：
起始步→下樓梯②→下樓梯①→$2 \times n$矩陣→上樓梯①→上樓梯②→返始步

2. $m \times n$矩陣($m < n$且 $m \neq n$)的最少步數公式爲：$4m + 10n - 24$。

二、 探討 n 階方陣的$(\mathbf{a_{11}})\leftrightarrow(\mathbf{a_{nn}})$

(一) 定義：

1. **3 × 3基本變換型 ——** 變換規則：$\begin{pmatrix} & 2 & 3 \\ ① & 5 & 6 \\ 4 & 7 & ⑧ \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} & 2 & 3 \\ ⑧ & 5 & 7 \\ 4 & 6 & ① \end{pmatrix}$

說明：

A. 這邊的3×3基本變換型與前述的$m \times n$矩陣不同，1 的位置不在a_{11}而在a_{21}主要是因爲要配合推廣到n階方陣時所需，後面的舉例可看出原因。

B. 3×3基本變換型爲$1 \leftrightarrow 8$。

C. $P = 18$。

$$\begin{pmatrix} & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 6 \\ 4 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 2 & & 3 \\ 1 & 5 & 6 \\ 4 & 7 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & & 6 \\ 4 & 7 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ & 1 & 6 \\ 4 & 7 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \\ & 7 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \\ 7 & & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \\ 7 & 8 & \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 4 & 1 & \\ 7 & 8 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 4 & & 1 \\ 7 & 8 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 4 & 8 & 1 \\ 7 & & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 4 & 8 & 1 \\ & 7 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ & 8 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 8 & & 1 \\ 4 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 8 & 7 & 1 \\ 4 & & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 8 & 7 & 1 \\ 4 & 6 & \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 8 & 7 & \\ 4 & 6 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 8 & & 7 \\ 4 & 6 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & & 3 \\ 8 & 5 & 7 \\ 4 & 6 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} & 2 & 3 \\ 8 & 5 & 7 \\ 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

2. **起始步** ——沿用 $3 \times n$ 矩陣〔$(a_{11}) \leftrightarrow (a_{3n})$〕
3. **返始步** ——沿用 $3 \times n$ 矩陣〔$(a_{11}) \leftrightarrow (a_{3n})$〕
4. **下樓梯②** ——沿用 $4 \times n$矩陣〔$(a_{11}) \leftrightarrow (a_{3n})$〕
5. **上樓梯②** ——沿用 $4 \times n$矩陣〔$(a_{11}) \leftrightarrow (a_{3n})$〕

可得n × n矩陣固定走法 如下：

最短路徑走法：起始步 → 下樓梯② → 3 × 3基本變換型 → 上樓梯② → 返始步

(二) n × n矩陣$[(a_{11}) \leftrightarrow (a_{nn})]$走法與探討：

1. 舉例：

5 × 5矩陣走法（步數）分解：

原始型：$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ & 21 & 22 & 23 & 24 \end{pmatrix}$

目標：$(a_{11}) \leftrightarrow (a_{55})$

走法：

(1) 起始步：

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 16 & 21 & 22 & 23 & 24 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 6 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 11 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 16 & 21 & 22 & 23 & 24 \end{pmatrix}$$

(2) 第一次下樓梯②：

$$\begin{pmatrix} 2 & & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 6 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 11 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 16 & 21 & 22 & 23 & 24 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & & 8 & 9 & 10 \\ 12 & 1 & 13 & 14 & 15 \\ 11 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 16 & 21 & 22 & 23 & 24 \end{pmatrix}$$

(3) 第二次下樓梯②：

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 8 & & 9 & 10 \\ 12 & 1 & 13 & 14 & 15 \\ 11 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 16 & 21 & 22 & 23 & 24 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 8 & 13 & 9 & 10 \\ 12 & 17 & & 14 & 15 \\ 11 & 18 & 1 & 19 & 20 \\ 16 & 21 & 22 & 23 & 24 \end{pmatrix}$$

(4) 3×3基本變換型：

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 8 & 13 & 9 & 10 \\ 12 & 17 & & 14 & 15 \\ 11 & 18 & 1 & 19 & 20 \\ 16 & 21 & 22 & 23 & 24 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 8 & 13 & 9 & 10 \\ 12 & 17 & & 14 & 15 \\ 11 & 18 & 24 & 19 & 23 \\ 16 & 21 & 22 & 20 & 1 \end{pmatrix}$$

(5) 第一次上樓梯②：

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 8 & 13 & 9 & 10 \\ 12 & 17 & 24 & 14 & 15 \\ 11 & 18 & & 19 & 23 \\ 16 & 21 & 22 & 20 & 1 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & & 8 & 9 & 10 \\ 12 & 24 & 13 & 14 & 15 \\ 11 & 17 & 18 & 19 & 23 \\ 16 & 21 & 22 & 20 & 1 \end{pmatrix}$$

(6) 第二次上樓梯②：

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 24 & 8 & 9 & 10 \\ 12 & & 13 & 14 & 15 \\ 11 & 17 & 18 & 19 & 23 \\ 16 & 21 & 22 & 20 & 1 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 24 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 6 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 11 & 17 & 18 & 19 & 23 \\ 16 & 21 & 22 & 20 & 1 \end{pmatrix}$$

(7) 返始步：

$$\begin{pmatrix} 24 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 6 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 11 & 17 & 18 & 19 & 23 \\ 16 & 21 & 22 & 20 & 1 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 24 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 23 \\ & 21 & 22 & 20 & 1 \end{pmatrix}$$

2. **表格統整 —— 3×3、4×4、5×5矩陣的比較：**

	起始步次數	下樓梯②次數	3×3基本型次數	上樓梯②次數	返始步次數	$P_{總}$	跟著變換的位置 $a_{(n-1)n}\leftrightarrow a_{n(n-1)}$ $(n\geq3)$
3×3矩陣	2	0	1	0	2	$2+0+18+0+2$ $=22$	$\begin{pmatrix} 8 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & \boxed{7} \\ & \boxed{6} & 1 \end{pmatrix}$
4×4矩陣	3	1	1	1	3	$3+6+18+6+3$ $=36$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & \boxed{12} \\ & 13 & \boxed{14} & 15 \end{pmatrix}$
5×5矩陣	4	2	1	2	4	$4+12+18+12+4$ $=50$	$\begin{pmatrix} 24 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & \boxed{23} \\ & 21 & 22 & \boxed{20} & 1 \end{pmatrix}$

可推得：

$(n+1)\times(n+1)$矩陣會比$n\times n$矩陣多一步起始步與返始步和一個下樓梯②與上樓梯②，皆有一個3×3基本變換型。

[公式推導]：

假設有一個$n\times n(n\geq3)$矩陣，則有$(n-3)$個上、下樓梯②。

$P_{總}$＝起始步→下樓梯②→3×3基本變換型→上樓梯②→返始步

$=(n-1)+6\times(n-3)+18+6\times(n-3)+(n-1)$

$=14n-20$。

(三) 結論

一個 $n\times n$ 矩陣，若(a_{11})與(a_{nn})兩數對調，則

1. 最短路徑走法爲：起始步→下樓梯②→3×3基本型→上樓梯②→返始步。
2. 最短走法的移動步數爲 $14n-20$。
3. 跟著變換的位置爲$a_{(n-1)n}\leftrightarrow a_{n(n-1)}(n\geq3)$。

三、 探討m×n矩陣的點對稱倒轉

(一) 定義：利用固定規律將矩陣旋轉成**點對稱**。

本研究中我們定義**點對稱倒轉**是將矩陣內所有$\mathbf{a_{ij}}$與$\mathbf{a_{(m+1-i)(n+1-j)}}$**對調**，

例如：在3×5的矩陣中，一口氣將$a_{11}\leftrightarrow a_{35}$、$a_{12}\leftrightarrow a_{34}$、$a_{13}\leftrightarrow a_{33}$、$a_{14}\leftrightarrow a_{32}$、$a_{15}\leftrightarrow a_{31}$、$a_{21}\leftrightarrow a_{25}$、$a_{22}\leftrightarrow a_{24}$，$a_{23}$不變，如圖例：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_{35} & a_{34} & a_{33} & a_{32} & a_{31} \\ a_{25} & a_{24} & a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{15} & a_{14} & a_{13} & a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}$$

我們只判斷$m\times n$矩陣$(m\neq n)$倒轉的$\boxed{\text{可行性}}$，

倒轉走法及步數推導我們目前沒有研究結果。

走法及步數推導在 n 階方陣的點對稱倒轉(下個探討主題)有詳細說明，在這邊只用：

外圈 180° 旋轉 —— 變換規則：$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} \\ & \mathbf{7} & \mathbf{8} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \mathbf{8} & \mathbf{7} & \\ \mathbf{6} & \mathbf{5} & \mathbf{4} \\ \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

(二) 『可倒轉性』推導：

1. $2\times n$矩陣：

(1) 2×3矩陣：

$$\begin{pmatrix} & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & & 3 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 3 & \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & & 5 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 5 & \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 2 & & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ & 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 5 & & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 5 & 4 & \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) 2×4矩陣：

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 7 \\ 1 & & 5 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 & 6 \\ 2 & 1 & & 5 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 7 & 6 & 5 & \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(3) 結論〔由(1)、(2)可推出〕:

$2\times n$矩陣皆可點對稱倒轉，且倒轉走法皆只運用到**外圈 180° 旋轉**
$2\times n$矩陣點對稱倒轉的步數為：$n(2n-1)$

說明：

A. n為先將 1 移到最下方再移至最右方所需步數。

B. $(2n-1)$為將最外圍的數字各移動一格所需步數

2. $3\times n$矩陣：

(1) 3×4矩陣：

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ & 9 & 10 & 11 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 8 \\ 1 & 6 & 7 & 11 \\ 5 & & 9 & 10 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 4 & 8 & 11 \\ 2 & 6 & 7 & 10 \\ 1 & & 5 & 9 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 11 & 10 & 9 & \\ 8 & 6 & 7 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \boxed{\text{失敗}}$$

(2) 3×5矩陣：

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ & 11 & 12 & 13 & 14 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 10 \\ 1 & 7 & 8 & 9 & 14 \\ 6 & & 11 & 12 & 13 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 10 & 14 \\ 2 & 7 & 8 & 9 & 13 \\ 1 & 6 & & 11 & 12 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 14 & 13 & 12 & 11 & \\ 10 & 7 & 8 & 9 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \boxed{\text{失敗}}$$

(3) 從3×4矩陣、3×5矩陣可推出：

外圈180° 旋轉完之後，內圈只剩下1×2 矩陣與 1×3 矩陣，從之前$m \times n$矩陣的操作發現，在矩陣中如果要兩個數字互換，就必定會互換另外兩個數字，所以3×4 矩陣、3×5 矩陣倒轉時，內圈無法找到另外 2個數字一起互換，故無法完整倒轉。

(4) 3×6矩陣：

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\7&8&9&10&11&12\\&13&14&15&16&17\end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix}17&16&15&14&&13\\12&8&9&10&11&7\\6&5&4&3&2&1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}17&16&15&14&11&13\\12&8&9&10&&7\\6&5&4&3&2&1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}17&16&15&14&11&13\\12&8&9&&10&7\\6&5&4&3&2&1\end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix}17&16&15&14&11&13\\12&8&&9&10&7\\6&5&4&3&2&1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}17&16&15&14&11&13\\12&&8&9&10&7\\6&5&4&3&2&1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}17&&15&14&11&13\\12&16&8&9&10&7\\6&5&4&3&2&1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}17&15&&14&11&13\\12&16&8&9&10&7\\6&5&4&3&2&1\end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix}17&15&14&&11&13\\12&16&8&9&10&7\\6&5&4&3&2&1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}17&15&14&11&&13\\12&16&8&9&10&7\\6&5&4&3&2&1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}17&15&14&11&10&13\\12&16&8&9&&7\\6&5&4&3&2&1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}17&15&14&11&10&13\\12&16&8&&9&7\\6&5&4&3&2&1\end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix}17&15&14&&10&13\\12&16&8&11&9&7\\6&5&4&3&2&1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}17&15&&14&10&13\\12&16&8&11&9&7\\6&5&4&3&2&1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}17&15&8&14&10&13\\12&16&&11&9&7\\6&5&4&3&2&1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}17&15&8&14&10&13\\12&16&11&&9&7\\6&5&4&3&2&1\end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix}17&15&8&14&10&13\\12&16&11&9&&7\\6&5&4&3&2&1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}17&15&8&14&&13\\12&16&11&9&10&7\\6&5&4&3&2&1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}17&15&8&&14&13\\12&16&11&9&10&7\\6&5&4&3&2&1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}17&15&8&9&14&13\\12&16&11&&10&7\\6&5&4&3&2&1\end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix}17&15&8&9&14&13\\12&16&11&10&&7\\6&5&4&3&2&1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}17&15&8&9&&13\\12&16&11&10&14&7\\6&5&4&3&2&1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}17&15&8&&9&13\\12&16&11&10&14&7\\6&5&4&3&2&1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}17&15&&8&9&13\\12&16&11&10&14&7\\6&5&4&3&2&1\end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix}17&&15&8&9&13\\12&16&11&10&14&7\\6&5&4&3&2&1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}17&16&15&8&9&13\\12&&11&10&14&7\\6&5&4&3&2&1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}17&16&15&8&9&13\\12&11&&10&14&7\\6&5&4&3&2&1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}17&16&15&8&9&13\\12&11&10&&14&7\\6&5&4&3&2&1\end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix}17&16&15&8&9&13\\12&11&10&14&&7\\6&5&4&3&2&1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}17&16&15&8&&13\\12&11&10&14&9&7\\6&5&4&3&2&1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}17&16&15&&8&13\\12&11&10&14&9&7\\6&5&4&3&2&1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}17&16&15&14&8&13\\12&11&10&&9&7\\6&5&4&3&2&1\end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix}17&16&15&14&8&13\\12&11&10&9&&7\\6&5&4&3&2&1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}17&16&15&14&&13\\12&11&10&9&8&7\\6&5&4&3&2&1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}17&16&15&14&13&\\12&11&10&9&8&7\\6&5&4&3&2&1\end{pmatrix}$$

(5) 3×7矩陣：

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\8&9&10&11&12&13&14\\&15&16&17&18&19&20\end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix}20&19&18&17&16&&15\\14&9&10&11&12&13&8\\7&6&5&4&3&2&1\end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix}20&18&16&13&12&11&15\\14&19&17&&9&10&8\\7&6&5&4&3&2&1\end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix}20&18&16&&12&11&15\\14&19&17&13&9&10&8\\7&6&5&4&3&2&1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}20&18&&16&12&11&15\\14&19&17&13&9&10&8\\7&6&5&4&3&2&1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}20&18&17&16&12&11&15\\14&19&&13&9&10&8\\7&6&5&4&3&2&1\end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix}20&18&17&16&12&11&15\\14&19&13&&9&10&8\\7&6&5&4&3&2&1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}20&18&17&16&12&11&15\\14&19&13&9&&10&8\\7&6&5&4&3&2&1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}20&18&17&16&&11&15\\14&19&13&9&12&10&8\\7&6&5&4&3&2&1\end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix}20&18&17&&16&11&15\\14&19&13&9&12&10&8\\7&6&5&4&3&2&1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}20&18&17&9&16&11&15\\14&19&13&&12&10&8\\7&6&5&4&3&2&1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}20&18&17&9&16&11&15\\14&19&13&12&&10&8\\7&6&5&4&3&2&1\end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix}20&18&17&9&16&11&15\\14&19&13&12&10&&8\\7&6&5&4&3&2&1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}20&18&17&9&16&&15\\14&19&13&12&10&11&8\\7&6&5&4&3&2&1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}20&18&17&9&&16&15\\14&19&13&12&10&11&8\\7&6&5&4&3&2&1\end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix}20&18&17&9&10&16&15\\14&19&13&12&&11&8\\7&6&5&4&3&2&1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}20&18&17&9&10&16&15\\14&19&13&12&11&&8\\7&6&5&4&3&2&1\end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix}20&19&18&17&9&10&15\\14&13&12&11&&16&8\\7&6&5&4&3&2&1\end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix}20&19&18&17&9&10&15\\14&13&12&11&16&&8\\7&6&5&4&3&2&1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}20&19&18&17&9&&15\\14&13&12&11&16&10&8\\7&6&5&4&3&2&1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}20&19&18&17&&9&15\\14&13&12&11&16&10&8\\7&6&5&4&3&2&1\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}20&19&18&17&16&9&15\\14&13&12&11&&10&8\\7&6&5&4&3&2&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}20&19&18&17&16&9&15\\14&13&12&11&10&&8\\7&6&5&4&3&2&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}20&19&18&17&16&&15\\14&13&12&11&10&9&8\\7&6&5&4&3&2&1\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}20&19&18&17&16&15&\\14&13&12&11&10&9&8\\7&6&5&4&3&2&1\end{pmatrix}$$

(6) 結論〔由(1)～(6)可推出〕:

$3\times$ n矩陣屬於可點對稱倒轉的矩陣時：

則$n=4t+2$ 或 $4t+3$，t爲正整數。

說明：

$3\times$ n矩陣內圈爲$1\times$ n矩陣，其內圈無法 **180° 旋轉**，故走法與其他矩陣及正方形矩陣倒轉法不同。

3. $4\times$ n矩陣：

(1) 4×5矩陣：

4×5矩陣內圈爲2×3矩陣，但2×3 矩陣這時已是第一內圈，有6個數字，也就是有3對，我們由上述操作推知，當第一內圈倒轉時爲奇數對時，將無法完整倒轉，故4×5矩陣無法倒轉。

(2) 4×6 矩陣：

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\7&8&9&10&11&12\\13&14&15&16&17&18\\&19&20&21&22&23\end{pmatrix}\rightarrow\cdots\rightarrow\begin{pmatrix}23&22&21&&20&19\\18&8&9&10&11&13\\12&14&15&16&17&7\\6&5&4&3&2&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}23&22&21&10&20&19\\18&8&9&&11&13\\12&14&15&16&17&7\\6&5&4&3&2&1\end{pmatrix}\rightarrow\cdots\rightarrow\begin{pmatrix}23&22&21&10&20&19\\18&14&8&9&&13\\12&15&16&17&11&7\\6&5&4&3&2&1\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}23&22&21&10&20&19\\18&14&8&&9&13\\12&15&16&17&11&7\\6&5&4&3&2&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}23&22&21&&20&19\\18&14&8&10&9&13\\12&15&16&17&11&7\\6&5&4&3&2&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}23&22&21&20&&19\\18&14&8&10&9&13\\12&15&16&17&11&7\\6&5&4&3&2&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}23&22&21&20&9&19\\18&14&8&10&&13\\12&15&16&17&11&7\\6&5&4&3&2&1\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}23&22&21&20&9&19\\18&14&8&&10&13\\12&15&16&17&11&7\\6&5&4&3&2&1\end{pmatrix}\rightarrow\cdots\rightarrow\begin{pmatrix}23&22&21&20&9&19\\18&15&14&8&&13\\12&16&17&11&10&7\\6&5&4&3&2&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}23&22&21&20&&19\\18&15&14&8&9&13\\12&16&17&11&10&7\\6&5&4&3&2&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}23&22&21&&20&19\\18&15&14&8&9&13\\12&16&17&11&10&7\\6&5&4&3&2&1\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}23&22&21&8&20&19\\18&15&14&&9&13\\12&16&17&11&10&7\\6&5&4&3&2&1\end{pmatrix}\rightarrow\cdots\rightarrow\begin{pmatrix}23&22&21&8&20&19\\18&16&15&14&&13\\12&17&11&10&9&7\\6&5&4&3&2&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}23&22&21&8&20&19\\18&16&15&&14&13\\12&17&11&10&9&7\\6&5&4&3&2&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}23&22&21&&20&19\\18&16&15&8&14&13\\12&17&11&10&9&7\\6&5&4&3&2&1\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}23&22&21&20&&19\\18&16&15&8&14&13\\12&17&11&10&9&7\\6&5&4&3&2&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}23&22&21&20&14&19\\18&16&15&8&&13\\12&17&11&10&9&7\\6&5&4&3&2&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}23&22&21&20&14&19\\18&16&15&&8&13\\12&17&11&10&9&7\\6&5&4&3&2&1\end{pmatrix}\rightarrow\cdots\rightarrow\begin{pmatrix}23&22&21&20&14&19\\18&17&16&15&&13\\12&11&10&9&8&7\\6&5&4&3&2&1\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}23&22&21&20&&19\\18&17&16&15&14&13\\12&11&10&9&8&7\\6&5&4&3&2&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}23&22&21&20&19&\\18&17&16&15&14&13\\12&11&10&9&8&7\\6&5&4&3&2&1\end{pmatrix}$$

(3) 結論〔由(1)、(2)可推出〕:

$4\times$ n矩陣屬於可點對稱倒轉的矩陣時，n必爲偶數$n=2t+4$，且t 爲正整數。

4. $5 \times n$矩陣：

(1) 5×6矩陣：

5×6矩陣內圈爲3×4矩陣，因爲 3×4矩陣無法倒轉，故 5×6矩陣也無法倒轉。

(2) 5×7矩陣：

5×7矩陣內圈爲3×5矩陣，因爲 3×5矩陣無法倒轉，故5×7矩陣也無法倒轉。

(3) 5×8矩陣：

5×8矩陣內圈爲3×6矩陣，但3×6矩陣這時已是第一內圈，有 14個數字，也就是有7對，我們由上述操作推知，當第一內圈倒轉時爲奇數對時，將無法完整倒轉，故5×8矩陣無法倒轉。

(4) 5×9矩陣：

5×9矩陣內圈爲3×7矩陣，但3×7矩陣這時已是第一內圈，有16個數字，也就是有8對，我們由上述操作推知，當第一內圈倒轉時爲偶數對時，即可完整倒轉，故5×9矩陣可完整倒轉。

(5) 結論〔由(1)～(4)可推出〕：

$5 \times n$矩陣屬於可點對稱倒轉的矩陣時：n爲$5 + 4t$，t 爲正整數。

5. 推廣$m \times n$矩陣：

從$6 \times n$矩陣開始我們可以直接從矩陣的內圈判斷哪種矩陣可倒轉：

例：

(1) 6×7矩陣的內圈爲4×5矩陣，4×5矩陣內圈爲2×3矩陣，2×3矩陣爲3對(奇數對)，由此可知6×7矩陣**無法**倒轉。

(2) 6×8矩陣的內圈爲4×6矩陣，4×6矩陣內圈爲2×4矩陣，2×4矩陣爲4對(偶數對)，由此可知6×8矩陣**可**倒轉。

(3) 7×8矩陣的內圈爲5×6矩陣，因此7×8矩陣**無法**倒轉。

(4) 7×11矩陣的內圈爲5×9矩陣，因此7×10矩陣**可**倒轉。

以此類推，我們可從偶數矩陣最內圈的$2 \times n$矩陣或奇數矩陣倒數第三圈的$5 \times n$矩陣判斷能否倒轉。

6. 結論：

當$m \times n$矩陣屬於可點對稱倒轉矩陣時：

(1) m爲 2，則 n 爲$t + 2$，t 爲正整數。

(2) m 爲 3，則n爲$4t + 2$或$4t + 3$，t 爲正整數。

(3) $m \geq 4$的偶數，則 n 爲$m + 2t$，t 爲正整數。

(4) $m \geq 5$的奇數，n 爲$m + 4t$，t 爲正整數。

四、 探討 n 階方陣點對稱倒轉：

(一) 定義：利用固定規律將矩陣旋轉成**點對稱**，並找出步數。

所謂點對稱倒轉是將矩陣內所有a_{ij}與$a_{(n+1-i)(n+1-j)}$對調，如前述$m \times n$矩陣所定義。

定義：

1. **外圈 180° 旋轉** —— 變換規則：舉例 ⇒ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ & 7 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 8 & 7 & \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

   說明：

   (1) 外圈 180° 旋轉爲將 n 階方陣外圈每一個數字由$a_{(n-1)1}$做逆時針持續移動，使得a_{11}移動至a_{nn}。

   (2) $\mathrm{P} = 2(n-1)(4n-5)$。

   A. $2(n-1)$爲先將a_{11}移到a_{n1}再移至a_{nn}。

   B. $(4n-5)$爲將最外圈的每一個數字移動一格所需的步數。

走法 ⇒以3×3爲例：$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ & 7 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 8 & 7 & \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

2. **左旋** —— 變換規則：舉例 ⇒ $\begin{pmatrix} a & b \\ c & \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} b & c \\ & a \end{pmatrix}$

   說明：

   (1) $\mathrm{P} = 5$。

   (2) 將 a 以逆時針旋轉方式移至右下角。

走法 ⇒ $\begin{pmatrix} a & b \\ c & \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & b \\ & c \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} & b \\ a & c \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} b & \\ a & c \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} b & c \\ a & \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} b & c \\ & a \end{pmatrix}$

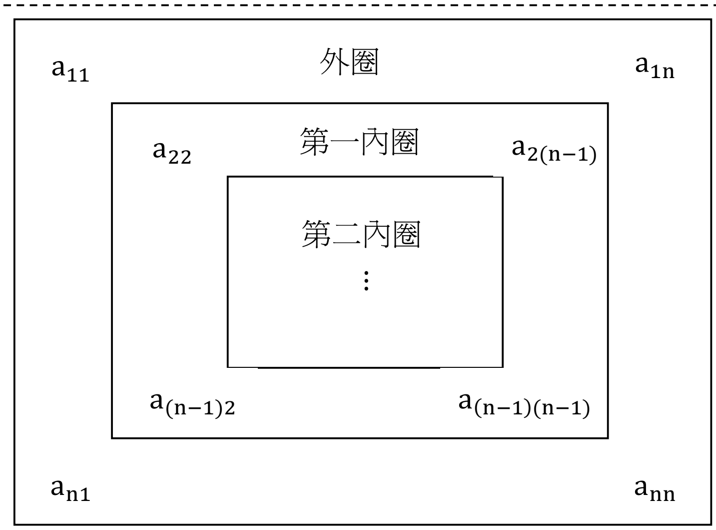
3. **右旋** —— 變換規則：舉例 ⇒ $\begin{pmatrix} a & b \\ c & \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} c & a \\ & b \end{pmatrix}$

   說明：

   (1) $\mathrm{P} = 3$。

   (2) 將 a 以順時針旋轉方式移至右上角。

走法 ⇒ $\begin{pmatrix} a & b \\ c & \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & \\ c & b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} & a \\ c & b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} c & a \\ & b \end{pmatrix}$



(二) 走法及步數推導：

1. 2×2矩陣：

$P=6$。

走法 $\Rightarrow \begin{pmatrix}1&2\\ &3\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} &2\\1&3\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}2& \\1&3\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}2&3\\1& \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}2&3\\ &1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} &3\\2&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}3& \\2&1\end{pmatrix}$

2. 3×3矩陣：

$P=28$。

走法 $\Rightarrow \begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\ &7&8\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}2&3&6\\1&5&8\\4& &7\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}3&6&8\\2&5&7\\1&4& \end{pmatrix}\rightarrow\cdots\rightarrow\begin{pmatrix}8&7& \\6&5&4\\3&2&1\end{pmatrix}$

3. 4×4矩陣：

走法：我們用分解步驟來解釋：

(1) 將4×4矩陣作外圈$180°$旋轉，如下圖：

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\\9&10&11&12\\ &13&14&15\end{pmatrix}\rightarrow\cdots\rightarrow\begin{pmatrix}15& &14&13\\12&6&7&9\\8&10&11&5\\4&3&2&1\end{pmatrix}$$

(2) 我們發現第一行及第四列皆已到所對應的位置，除了第一列及第四行為了調整內圈的2×2矩陣所以還未完成。

(3) 接著我們把a_{22}與上面空格互換，然後把中間2×2矩陣的外圈每一個數字做順時針旋轉移動一格，如下圖：

$$\begin{pmatrix}15&6&14&13\\12& &7&9\\8&10&11&5\\4&3&2&1\end{pmatrix}\rightarrow\cdots\rightarrow\begin{pmatrix}15&6&14&13\\12&10& &9\\8&11&7&5\\4&3&2&1\end{pmatrix}$$

(4) 然後把$\begin{pmatrix}a_{12}&a_{13}\\a_{22}& \end{pmatrix}\xrightarrow{左旋}\begin{pmatrix}a_{13}&a_{22}\\ &a_{12}\end{pmatrix}$，也就是$\begin{pmatrix}6&14\\10& \end{pmatrix}\xrightarrow{左旋}\begin{pmatrix}14&10\\ &6\end{pmatrix}$

(5) 重複步驟3。$\begin{pmatrix}15&14&10&13\\12& &6&9\\8&11&7&5\\4&3&2&1\end{pmatrix}\rightarrow\cdots\rightarrow\begin{pmatrix}15&14&10&13\\12&11& &9\\8&7&6&5\\4&3&2&1\end{pmatrix}$

(6) 將空格移到a_{14}，步驟完成。

分析：

從4×4矩陣中：

$$P_{總}=2(4-1)(4\times 4-5)-2+1+\boxed{3}+5+\boxed{3}+1+1$$

$$=66+2\times\boxed{3}+5+1=78$$

其中$2\times\boxed{3}$為2×2走法及步數。

4. 5×5矩陣：

走法：我們一樣用分解步驟來解釋：

(1) 將 5 × 5 矩陣作外圈 180° 旋轉，如下圖：

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ & 21 & 22 & 23 & 24 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 24 & 23 & & 22 & 21 \\ 20 & 7 & 8 & 9 & 16 \\ 15 & 12 & 13 & 14 & 11 \\ 10 & 17 & 18 & 19 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) 我們發現第一行及第五列皆已到所對應的位置，除了第一列及第五行爲了調整內圈的3×3 矩陣所以還未完成。

(3) 接著我們把a_{23}與上面空格互換，把中間3×3矩陣的外圈每一個數字做順時針旋轉移動一格，如下圖：

$$\begin{pmatrix} 24 & 23 & 8 & 22 & 21 \\ 20 & 7 & & 9 & 16 \\ 15 & 12 & 13 & 14 & 11 \\ 10 & 17 & 18 & 19 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 24 & 23 & 8 & 22 & 21 \\ 20 & 12 & 7 & & 16 \\ 15 & 17 & 13 & 9 & 11 \\ 10 & 18 & 19 & 14 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(4) 然後把$\begin{pmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{左旋}} \begin{pmatrix} a_{14} & a_{23} \\ & a_{13} \end{pmatrix}$，也就是$\begin{pmatrix} 8 & 22 \\ 7 & \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{左旋}} \begin{pmatrix} 22 & 7 \\ & 8 \end{pmatrix}$

(5) 重複步驟 3。$\begin{pmatrix} 24 & 23 & 22 & 7 & 21 \\ 20 & 12 & & 8 & 16 \\ 15 & 17 & 13 & 9 & 11 \\ 10 & 18 & 19 & 14 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 24 & 23 & 22 & 7 & 21 \\ 20 & 17 & 12 & & 16 \\ 15 & 18 & 13 & 8 & 11 \\ 10 & 19 & 14 & 9 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

(6) 然後把$\begin{pmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{右旋}} \begin{pmatrix} a_{23} & a_{13} \\ & a_{14} \end{pmatrix}$，也就是$\begin{pmatrix} 22 & 7 \\ 12 & \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{右旋}} \begin{pmatrix} 12 & 22 \\ & 7 \end{pmatrix}$

(7) 重複步驟 3。$\begin{pmatrix} 24 & 23 & 12 & 22 & 21 \\ 20 & 17 & & 7 & 16 \\ 15 & 18 & 13 & 8 & 11 \\ 10 & 19 & 14 & 9 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 24 & 23 & 12 & 22 & 21 \\ 20 & 18 & 17 & & 16 \\ 15 & 19 & 13 & 7 & 11 \\ 10 & 14 & 9 & 8 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

(8) 重複步驟 4。$\begin{pmatrix} 12 & 22 \\ 17 & \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{左旋}} \begin{pmatrix} 22 & 17 \\ & 12 \end{pmatrix}$

(9) 重複步驟 3。$\begin{pmatrix} 24 & 23 & 22 & 17 & 21 \\ 20 & 18 & & 12 & 16 \\ 15 & 19 & 13 & 7 & 11 \\ 10 & 14 & 9 & 8 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 24 & 23 & 22 & 17 & 21 \\ 20 & 19 & 18 & & 16 \\ 15 & 14 & 13 & 12 & 11 \\ 10 & 9 & 8 & 7 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

(10) 將空格將移到a_{15}，步驟完成。

分析：

(1) 從5×5走法中發現，$P_{\text{總}} = 2(5-1)(4 \times 5 - 5) - 2 + 1 + \boxed{7} + 5 + \boxed{7}$

$$\begin{aligned} &+ 3 + \boxed{7} + 5 + \boxed{7} + 1 + 1 \\ &= 120 + 4 \times \boxed{7} + 2 \times 5 + 1 \times 3 + 1 \\ &= 162 \end{aligned}$$

(2) 其中$4 \times \boxed{7}$爲3×3走法及步數

(3) 由4×4及5×5的走法中發現

$a_{nn} = 2(n-1)(4n-5) + \boxed{5(n-3) + 3(n-4)} + \boxed{a_{(n-2)(n-2)}} + 1$ 。其中當正方形矩陣邊長大於 3 時，可將正方形矩陣分爲外圈與內圈兩個正方形，此時走完最外圈時，內圈的正方形的邊長爲外圈邊長減 2，但在移動時，必先移出一個數字，讓內圈正方形行矩陣移動一格，再移回去，由此發現

$\boxed{5(n-3)+3(n-4)}$，又因內圈的正方形的邊長爲外圈邊長減 2 所以發現 $\boxed{a_{(n-2)(n-2)}}$，但計算結果4×4、5×5皆與實際值差 1，所以先+1(下段討論)

5. 6×6矩陣：

$P=292$。

(1) 走法：外圈爲6×6矩陣，將外圈做 180° 旋轉後，內圈爲4×4矩陣。這時就像5×5矩陣狀況一樣，內圈雖然是3×3矩陣，但所對應的位置不對，我們必須比4×4矩陣再多做$\boxed{\text{3 次左旋+2 次右旋}}$才能完成點對稱倒轉。

分析：

從6×6走法中發現， $P_{總}=190\boxed{-2+1+1+1}+3+5+3+1+11+5$

$+11+3+11+5+11+3+11+5+11\boxed{+1+1}$

$=190+\boxed{2\times3+1\times5+1+6\times11}+\boxed{3\times5+2\times3}+3$

$=292$

6. 7×7矩陣：

$P=470$。

(1) 走法：外圈爲7×7矩陣，將外圈做 180° 旋轉後，內圈爲5×5矩陣。我們必須比5×5矩陣再多做$\boxed{\text{4 次左旋+3 次右旋}}$才能完成點對稱倒轉。

分析：

(1) 從7×7走法中發現，

$P_{總}=276\boxed{-2+1+1+1}+7+5+7+3+7+5+7+1+15+5+15$

$+3+15+5+15+3+15+5+15+3+15+5+15\boxed{+1+1}$

$=276+\boxed{4\times7+2\times5+1\times3+1+8\times15}+\boxed{4\times5+3\times3}+3$

$=470$

(2) 其中算式內的$-2+1+1+1$爲先將空格移動到最內圈的正方形矩陣的右上角的左邊一格，接下來與$(n-2)(n-2)$矩陣相同，然後依照$(4\times4)(5\times5)$討論的方式走到最後兩步即+1+1，再將空格移動到指定位置。

(3) 其中-2的理由是外圈的 180° 旋轉我們不需要將空格走到a_{17}，只需要走到a_{15}，所以少 2 步。

(4) 由上推導後，得公式：

A. 當 n 爲偶數且$n\geq4$，

$a_{nn}=2(n-1)(4n-5)+5(n-3)+3(n-4)+\boxed{n-3}+a_{(n-2)(n-2)}$

B. 當 n 爲奇數且$n\geq5$，

$a_{nn}=2(n-1)(4n-5)+5(n-3)+3(n-4)+\boxed{n-4}+a_{(n-2)(n-2)}$

(三) 找出一般項公式：

1. 當 n 爲偶數且$n \geq 4$，

因爲 $a_{nn} = 2(n-1)(4n-5) + 5(n-3) + 3(n-4) + n - 3 + a_{(n-2)(n-2)}$

令$n = 2k$代入

則$a_{nn} = a_{(2k)(2k)}$

$= 2(2k-1)(8k-5) + 5(2k-3) + 3(2k-4) + 2k - 3 + a_{(2k-2)(2k-2)}$

$= 32k^2 - 18k - 20 + a_{(2k-2)(2k-2)}$

$$
\begin{array}{rl}
 & a_{22} = 6 \\
 & a_{44} = 32 \times 2^2 - 18 \times 2 - 20 + a_{22} \\
 & a_{66} = 32 \times 3^2 - 18 \times 3 - 20 + a_{44} \\
 & \vdots \qquad\qquad \vdots \\
+) & a_{(2k)(2k)} = 32 \times k^2 - 18 \times k - 20 + a_{(2k-2)(2k-2)} \\
\hline
\end{array}
$$

$\Rightarrow a_{nn} = a_{(2k)(2k)}$

$= 32\left(2^2 + 3^2 + \cdots + k^2\right) - 9\left(k+2\right)(k-1) - 20(k-1) + 6$

$= 32 \times \left(\frac{k(k+1)(2k+1)}{3} - 1\right) - 9(k^2 + k - 2) - 20k + 20 + 6$

$= \frac{16k(k+1)(2k+1)}{3} - 9k^2 - 29k + 12$

$= \frac{32k^3+21k^2-71k+36}{3}$

2. 當 n 爲奇數且$n \geq 5$，

因爲$a_{nn} = 2(n-1)(4n-5) + 5(n-3) + 3(n-4) + n - 4 + a_{(n-2)(n-2)}$

令$n = 2t + 1$代入

則$a_{nn} = a_{(2t+1)(2t+1)}$

$= 2 \times 2t(8t-1) + 5(2t-2) + 3(2t-3) + 2t - 3 + a_{(2t-1)(2t-1)}$

$= 32t^2 + 14t - 22 + a_{(2t-1)(2t-1)}$

$$
\begin{array}{rl}
 & a_{33} = 28 \\
 & a_{55} = 32 \times 2^2 + 14 \times 2 - 22 + a_{33} \\
 & a_{77} = 32 \times 3^2 + 14 \times 3 - 22 + a_{55} \\
 & \vdots \qquad\qquad \vdots \\
+) & a_{(2t+1)(2t+1)} = 32 \times t^2 + 14 \times t - 22 + a_{(2t-1)(2t-1)} \\
\hline
\end{array}
$$

$\Rightarrow a_{nn} = a_{(2t+1)(2t+1)}$

$= 32\left(2^2 + 3^2 + \cdots + t^2\right) + 7(t+2)(t-1) - 22(t-1) + 28$

$= \frac{16t(t+1)(2t+1)}{3} + 7t^2 - 15t + 4$

$= \frac{32t^3+69t^2-29t+12}{3}$

伍、　研究結果

一、　在探討m×n矩陣的$(a_{11}) \leftrightarrow (a_{mn})$過程中，我們得到下列結果：

(一) 若$(a_{11}) \leftrightarrow (a_{1n})$，則可得到：

1. 當$n = 2$時屬較特殊情況，有專屬走法，不具一般性。
2. 最短路徑走法為$(n-3)$次右移→2×3基本變換型①→$(n-3)$次左移。
3. 最短路徑走法的移動步數為 $10n - 16$。
4. 跟著變換的位置為$a_{1(n-1)} \leftrightarrow a_{2(n-1)}(n \geq 3)$。

(二) $(a_{11}) \leftrightarrow (a_{2n})$與$(a_{11}) \leftrightarrow (a_{1n})$比較：

1. 走法不變，但需換成2×3變換基本型②。
2. 最短路徑走法的移動步數與跟著變換的位置相同。

(三) 在$(a_{11}) \leftrightarrow (a_{3n})$，我們換掉「右移」、「左移」走法，
改為「起始步」、「下樓梯①」、「上樓梯①」、「返始步」。

1. 最短路徑走法為：起始步→下樓梯①→ $2 \times (n-1)$矩陣→上樓梯①→返始步。
2. 最短路徑走法的移動步數為 $10n - 12$。
3. 跟著變換的位置為$a_{2(n-1)} \leftrightarrow a_{3(n-1)}\ (n \geq 4)$。

(四) 在$(a_{11}) \leftrightarrow (a_{4n})$中，我們最後增加「下樓梯②」、「上樓梯②」兩種步法，得到：

1. 最短路徑走法為：起始步→下樓梯①→下樓梯②→ 2×$(n-2)$矩陣→上樓梯②
→上樓梯①→返始步。
2. 最短路徑走法的移動步數為 $10n - 8$。
3. 跟著變換的位置為$a_{3(n-1)} \leftrightarrow a_{4(n-1)}(n \geq 5)$。

(五) 從上述可發現：

1. 若我們固定列數，逐一增加行數，則步數為等差，公差是 10。
2. 若我們固定行數，逐一增加列數，則步數為等差，公差是 4。

(六) 結論：

1. 當$m \geq 3$ 且 $n \geq 4$ 時，$(a_{11}) \leftrightarrow (a_{mn})$的最短路徑走法為：
(1 次)起始步→$(m-3)$次下樓梯②→(1 次)下樓梯①→$2 \times (-m+n+2)$矩陣
→(1 次)上樓梯①→$(m-3)$次上樓梯②→(1 次)返始步。
2. 最短路徑走法的移動步數為 $4m + 10n - 24$。
3. 跟著變換的位置為$a_{m(n-1)} \leftrightarrow a_{(m-1)(n-1)}$。
4. 若假設在m×n矩陣中，我們要互換的位置並非$(a_{11}) \leftrightarrow (a_{mn})$，例如我們只要$(a_{11}) \leftrightarrow \left(a_{(m-1)(n-2)}\right)$，則我們只需要用$(m-1) \times (n-2)$矩陣來去做走法移動及步數計算，第 m 列和第 $n-1$ 行、第 n 行都不需要變動。
5. 我們的探討都是以$m < n$，若需要$m > n$，只需要做簡單的行列互換來調整走法。

二、在探討 n 階方陣的$(a_{11}) \leftrightarrow (a_{nn})$過程中，我們得到下列結果：

(一) 最短路徑走法為：$(n-1)$次起始步→$(n-3)$次下樓梯②→3×3基本型
→$(n-3)$次上樓梯②→$(n-1)$次返始步。

(二) 最短路徑走法的移動步數為 $14n-20$。

(三) 跟著變換的位置為$a_{(n-1)(n-1)} \leftrightarrow a_{n(n-1)}$$(n \geq 3)$。(與$m \times n$矩陣的變換位置不同)。

三、在探討$m \times n$矩陣的點對稱倒轉的可行性時，我們得到下列結果：

可完整點對稱倒轉須滿足下列任一情況：

(一) m為 2，則 n 為$t+2$，t 為正整數。。

(二) m 為 3，則n為$4t+2$或$4t+3$，t 為正整數。

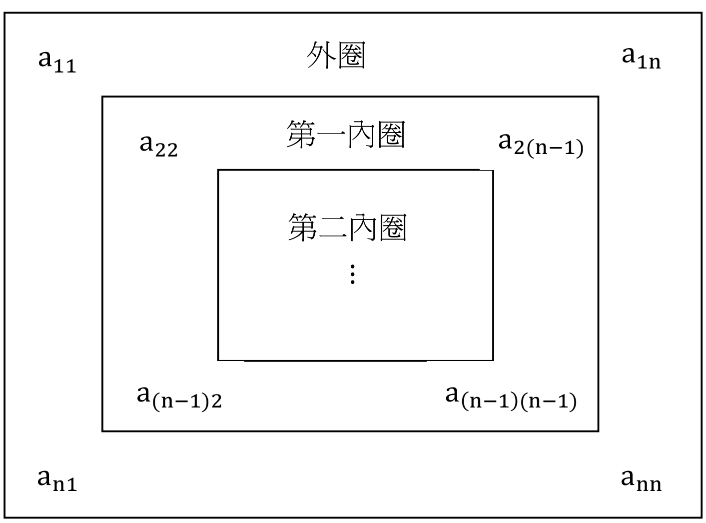
(三) $m \geq 4$的偶數，則 n 為$m+2t$，t 為正整數。

(四) $m \geq 5$的奇數，則 n 為$m+4t$，且 t 為正整數。

四、在探討 n 階方陣點對稱倒轉時，我們得到下列結果：

(一) 走法：

1. 先做外圈的 180° 旋轉。
2. 但只將空格移到$a_{1(n-2)}$，與$a_{2(n-2)}$的數字對調。
3. 開始利用【$(n-3)$次的左旋】、【第一內圈的外圈每個數字做順時針旋轉移動一格】、【$(n-4)$次的右旋】來調整第一內圈。
4. 再將空格移到$a_{2(n-3)}$，與$a_{3(n-3)}$的數字對調。
5. 再利用【$(n-5)$次的左旋】、【第二內圈的外圈每個數字做順時針旋轉移動一格】、【$(n-6)$次的右旋】來調整第二內圈。。
6. 以此類推，直到所有內圈調整到所對應的位置，再將空格移到a_{1n}。



(二) 步數：

對$n \times n$矩陣：

1. 當 n 爲偶數且$n \geq 4$時，令 n=2k，k 爲正整數。

   則步數$= a_{(2k)(2k)} = \frac{32k^3+21k^2-71k+36}{3}$

2. 當 n 爲奇數且$n \geq 5$時，令 $n = 2t+1$，t 爲正整數。

   則步數$= a_{(2t+1)(2t+1)} = \frac{32t^3+69t^2-29t+12}{3}$

陸、　討論

一、研究過程中遇到的難題：

(一) 雖然本研究的走法是我們經操作後得到的最快速走法，但到目前爲止我們無法去證明是否爲最快速的走法。我們在網路上搜尋到的一些相關資料都是博碩士論文，太過深奧，我們都還沒有具備足夠的知識。

(二) $m \times n$矩陣的最短走法步數爲$4m+10n-24$，n階方陣的最短走法步數爲$14n-20$。而方形屬於矩形的一種，但爲何在$4m+10n-24$代入$m=n$卻差了 4 步，難道是走法設計不夠廣義嗎？還是兩種本身就是無法等同呢？

(三) 在探討$m \times n$矩陣的點對稱倒轉時，我們雖然找出了『可行性』，但是還是找不到規律走法來深入探討。

(四) 在探討 n 階方陣點對稱倒轉時，我們有找出了步數的公式，但我們必須分成奇數階的方陣跟偶數階的方陣，兩種走法其實都相同，但是步數公式卻無法統一。

二、未來可繼續發展的動向：

(一) 將走法精簡化：

雖然我們找出了很多種不同的走法來因應不同位置的互換，但因爲我們本研究強調的是『規律性』，所以到目前爲止我們還沒有辦法把某些步法調整成同種類。

或許以後在把這研究當基礎之下，可以發展出更簡單也具規律性的走法。

(二) 將互換「複數」化：

我們在 1 對 1 的互換上面已經研究的很完整，原本是有想研究 2 對 2 的互換，但時間上不夠充裕，有做一點嘗試，但是並沒有找出規律走法，不過這應該可留待將來繼續發展。

(三) 一個隨機智慧拼圖判斷合理性：

在本研究中我們觀察出只要一組數字對調，則必有另一組數字也必須對調，我們也應用了這個觀念去判斷了$m \times n$矩陣點對稱倒轉的『可行性』。

所以若是我們去寫一個簡單程式，讓矩陣內的數字由 1 開始不重複的隨機放入某個位置(像”賓果遊戲”那樣，但須空出一個空格)，那麼能否不靠操作就判斷出這個矩陣是否可將數字照順序排列呢？

(四) 如果互換能更「多數化」，那以後應該能發展出一套智慧拼圖法則：

根據圖片的相關位置就能找出最短路徑走法。

(五) 探討出規律走法來操作$m \times n$矩陣的點對稱倒轉。

(六) 將 n 階方陣點對稱倒轉的步數公式合併成一個公式。

柒、 結論

拼圖已經是一種歷史悠久的東西了，很多相關性的討論也都被研究的差不多了，但我們還是樂在其中，我們透過設計走法，來找尋「規律的美」、「等差的力」。我們從一對一互換的單打獨鬥，到最後再來個「乾坤大挪移」，利用遞迴推導出大挪移秘笈。**『從小地方找到數學』**是我們做完研究後的最大感想，希望我們以後可以一直抱著這種熱衷態度繼續「玩」數學。

捌、 參考資料及其他

一、國中數學第四冊

二、一個智慧拼圖小遊戲的網站：http://i-gameworld.com/games/gc408.php

【評語】030415

此作品探討益智拼盤遊戲中牌子調換所需的最少步數，雖有策略分析，但具體研究成果稍顯不足。