

中華民國第 51 屆中小學科學展覽會 作品說明書

國中組 數學科

030413

現在幾「點」了

—探討多角數、多面體數之通式

學校名稱：彰化縣立陽明國民中學

作者：	指導老師：
國二 黃禹傑	蔡名峯
國二 王貫宇	楊弼雄
國二 洪靖哲	

關鍵詞：多角數、正多面體、多面體數

摘要

本作品主要是探討多角數(或多邊形數)的一般式及關係式，並將其從平面推廣至立體。

在本作品中，本組先以幾何的方式依序定義了三角數、四角數以及五角數並分別介紹了它們的一般式；接著，本組定義了 k 角數($k = 3, 4, 5, \dots$)並求得第 n 個 k 角數的一般式；然後，透過觀察四種 k 角數($k = 3, 4, 5, 6$)的數列，我們得到並證明了一些有趣的關係式，如：連續兩項三角數的和為一個四角數等；而這些關係式除了可以透過 k 角數的一般式獲得驗證(即代數證明)，我們也提供了幾何證明。最後，本組將平面上的 k 角數以不同的方式推廣至立體的多面體數，即第一型多面體數、第二型多面體數及多角錐數，並分別求得它們的一般式及相關性質，這個過程也讓本組意外地接觸了「正多面體」及「錐體」。

壹、研究動機

在一次偶然的機會下，從老師的口中得知三角數、四角數及五角數的定義，老師的介紹中只使用了簡單的幾何圖形、計數的技巧以及級數和的公式，這進而引發了本組研究這個主題的動機。

在研究了多角數的一般式及性質後，本組在老師的建議下將平面的多角數推廣到立體的多面體數及多角錐數，這部份的研究過程讓本組收穫良多，本組深刻地體會了數學上推廣的過程(從二維到三維)、觀察及歸納的重要性、並有機會了解正多面體及錐體的特性，真是感謝老師給予本組這難得的機會及指導。

貳、研究目的

在此研究中，本組從平面的 k 角數出發，先逐一地介紹三角數、四角數及五角數的定義，並分別指出第 n 個三角數、四角數及五角數的一般式。本組的研究目的如下：

- (一) 考慮一般的 k 角數並給出第 n 個 k 角數的一般式；
- (二) 透過觀察，得出並證明一些 k 角數間的有趣關係式；
- (三) 將平面的多角數推廣至立體的多面體數，並求得多面體數(第一型、第二型)的一般式；
- (四) 將平面的多角數推廣至立體的多角錐數，並求得多角錐數的一般式及關係式。

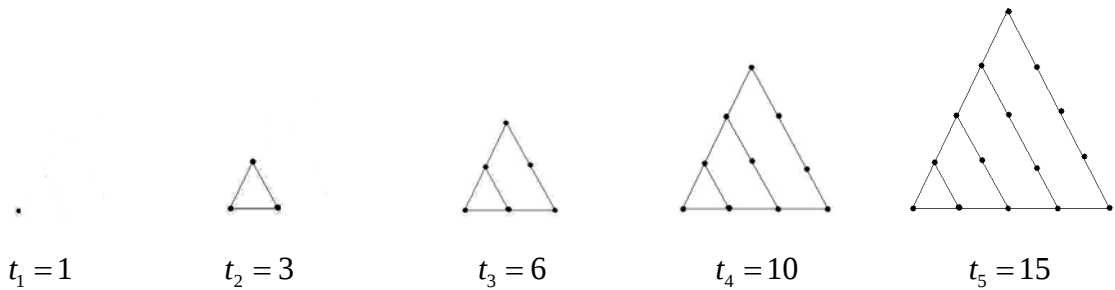
參、研究設備及器材

- 1. 紙、筆、電腦
- 2. Office Word 2003
- 3. .Math Type 6.0
- 4. 小畫家

肆、研究方法及主要結果

一、3、4、5 角數的定義及其一般式

從幾何的觀點來介紹 k 角數，應該較為生動且吸引人。本組先從三角數的定義談起：從 1 個點開始且令第 1 個三角數 $t_1 = 1$ ；以此點為頂點，做一個邊長為 1 單位的正三角形，此時有 3 個頂點，本組令第 2 個三角數 $t_2 = 3$ ；再將剛剛的正三角形延伸成邊長為 2 的正三角形，並在各邊上每一單位長標上一點(如下圖所示)，此時，點數的總數即為 t_3 ，依此類推；因此， $t_3 = 6$ 、 $t_4 = 10$ 、 $t_5 = 15 \cdots$ 等。

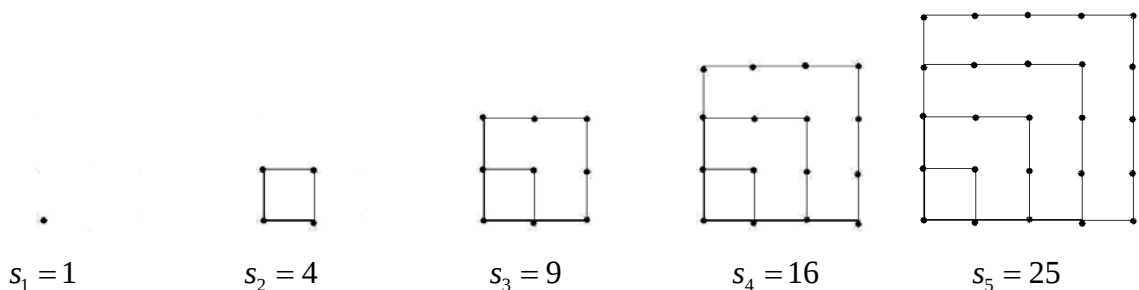


由以上的定義，可知第 n 個三角數 t_n 之一般式為

$$t_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

接下來，仿照類似的方法來定義四角數 s_n (如下圖所示)，則可得 $s_1 = 1$ 、 $s_2 = 4$ 、 $s_3 = 9$ 、 $s_4 = 16$ 、 $s_5 = 25$ 等；此時，第 n 個四角數 s_n 之一般式為

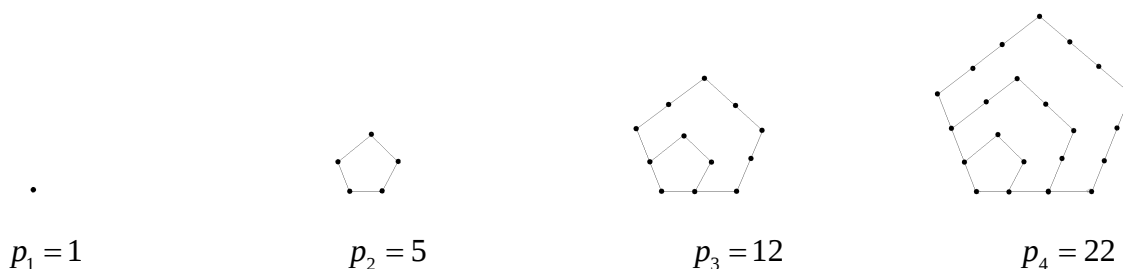
$$s_n = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = \frac{n(1+(2n-1))}{2} = n^2.$$



最後，本組定義五角數 p_n (如下圖所示)，則可得 $p_1 = 1$ 、 $p_2 = 5$ 、 $p_3 = 12$ 、 $p_4 = 22$

等；此時，第 n 個五角數 p_n 的一般式為

$$p_n = 1 + 4 + 7 + \cdots + (1 + 3(n-1)) = \frac{n(3n-1)}{2}.$$



二、第 n 個 k 角數的一般式

仿照以上三、四、五角數的定義，本組可以將其推廣至一般的 k 角數 ($k=3, 4, 5, \cdots$)

並藉由觀察以上 t_n 、 s_n 及 p_n 的計算方法，可歸納出第 n 個 k 角數的一般式如下：

$$\begin{aligned}
 & 1 + [1 + (k-2)] + [1 + 2(k-2)] + [1 + 3(k-2)] + \cdots + [1 + (n-1)(k-2)] \\
 &= 1 \times n + [1 + 2 + \cdots + (n-1)](k-2) \\
 &= n + \frac{n(n-1)(k-2)}{2} \\
 &= \frac{2n + n(n-1)(k-2)}{2} \\
 &= \frac{n[(n-1)(k-2) + 2]}{2}.
 \end{aligned}$$

所以，本組得到了以下的結果：

性質 2-1：第 n 個 k 角數為

$$K_n = \frac{n[(n-1)(k-2) + 2]}{2}.$$

爲了檢驗性質 2-1 的正確性，本組分別將 $k = 3, 4, 5$ 代入性質 2-1 得：

$$\text{第 } n \text{ 個三角數爲 } t_n = \frac{n[(n-1)(3-2)+2]}{2} = \frac{n(n+1)}{2} ;$$

$$\text{第 } n \text{ 個四角數爲 } s_n = \frac{n[(n-1)(4-2)+2]}{2} = \frac{n(2n)}{2} = n^2 ;$$

$$\text{第 } n \text{ 個五角數爲 } p_n = \frac{n[(n-1)(5-2)+2]}{2} = \frac{n(3n-1)}{2} ;$$

如本組所意料，得出的結果與之前的完全吻合，本組也乘勝追擊，求出

$$\text{第 } n \text{ 個六角數爲 } h_n = \frac{n[(n-1)(6-2)+2]}{2} = \frac{n(4n-2)}{2} = n(2n-1) .$$

三、有關 k 角數的有趣性質

觀察三、四、五、六角數所成的數列：

三角數 t_n : 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, ...

四角數 s_n : 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, ...

五角數 p_n : 1, 5, 12, 22, 35, 51, 70, 92, ...

六角數 h_n : 1, 6, 15, 28, 45, 66, 91, 120, ...

可以看出一些有趣的現象，如：(1) 四角數都是完全平方數、(2) 這些數列前後兩項的差會形成等差數列：舉五角數爲例，前後兩項五角數的差爲 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22,...，形成公差爲 3 的等差數列。在本節中，本組先透過觀察以上四個數列得到一些有趣的性質，而這些關係式除了可以透過 k 角數的一般式獲得驗證(即代數證明)，我們也提供了幾何證明。證明雖然不難，但經由觀察、形成規律、證明的過程，讓本組深刻地體會從事科學研究的方法與精神。

性質 3-1：對於所有的大於 1 的正整數 n ，關係式

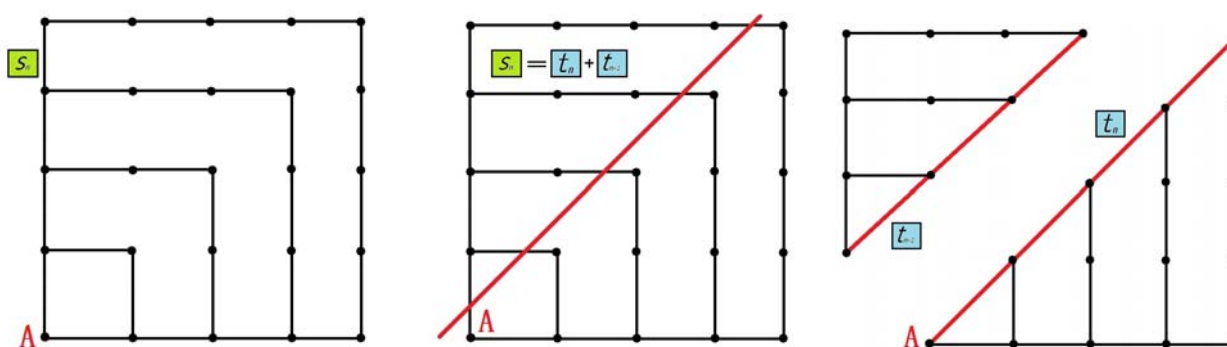
$$t_{n-1} + t_n = s_n.$$

都成立。因此，連續兩項三角數的和為完全平方數(四角數)。

代數證明：

$$t_{n-1} + t_n = \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2 - n + n^2 + n}{2} = n^2 = s_n.$$

幾何證明：在下圖中，我們將四角數 s_n 以紅線切成 2 個部份，即 t_{n-1} 和 t_n 。



性質 3-2：對於所有的大於 1 的正整數 n ，關係式

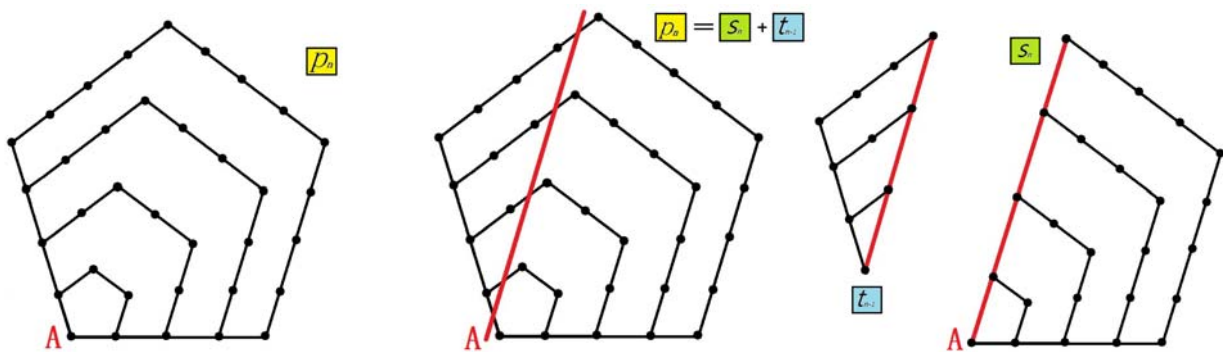
$$p_n - s_n = t_{n-1}.$$

都成立。也就是說，第 n 個五角數與第 n 個四角數的差剛好是第 $n-1$ 個三角數。

代數證明：

$$p_n - s_n = \frac{n(3n-1)}{2} - n^2 = \frac{3n^2 - n - 2n^2}{2} = \frac{n(n-1)}{2} = t_{n-1}.$$

幾何證明：在下圖中，我們將五角數 p_n 以紅線切成 2 個部份，即 t_{n-1} 和 s_n 。



性質 3—3：對於所有的大於 1 的正整數 n ，關係式

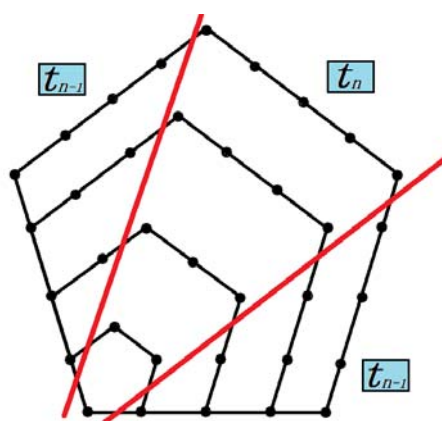
$$p_n - t_n = 2t_{n-1}.$$

都成立。也就是說，第 n 個五角數與第 n 個三角數的差剛好是第 $n-1$ 個三角數的兩倍。

代數證明：

$$p_n - t_n = \frac{n(3n-1)}{2} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{3n^2 - n - n^2 - n}{2} = n^2 - n = 2t_{n-1}.$$

幾何證明：在下圖中，我們將五角數 p_n 以紅線切成 3 個部份，即 t_{n-1} 、 t_{n-1} 和 t_n 。



(其實下面的有趣性質一樣能用幾何來證明，但因版面問題，在此不多加贅述)

性質 3—4：對於所有的正整數 n ，關係式

$$t_n + p_n = 2s_n.$$

都成立。也就是說，第 n 個三角數與第 n 個五角數的和剛好是第 n 個四角數的兩倍。

證明：

$$t_n + p_n = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(3n-1)}{2} = \frac{n^2 + n + 3n^2 - n}{2} = 2n^2 = 2s_n.$$

性質 3—5：對於所有的正整數 n ，關係式

$$t_n + s_n - p_n = n.$$

都成立。也就是說，第 n 個三角數與第 n 個四角數的和剛好比第 n 個五角數多 n 。

證明：

$$t_n + s_n - p_n = \frac{n(n+1)}{2} + n^2 - \frac{n(3n-1)}{2} = \frac{n^2 + n + 2n^2 - 3n^2 + n}{2} = n.$$

性質 3—6：對於所有的正整數 $n > 1$ ，關係式

$$h_n - p_n = t_{n-1}.$$

都成立。也就是說，第 n 個六角數與第 n 個五角數的差剛好是第 $n-1$ 個三角數。

證明：

$$h_n - p_n = n(2n-1) - \frac{n(3n-1)}{2} = \frac{2n(2n-1) - n(3n-1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2} = t_{n-1}.$$

其實，後來本組發現，透過直接觀察 t_n 、 s_n 、 p_n 及 h_n 的一般式，就可寫出許多的關係式，再此不多作贅述。接下來，本組分別考慮這四個數列的前 n 項的和。在計算過程中，本組需要以下知名的等式：

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \quad (\text{平方和公式})$$

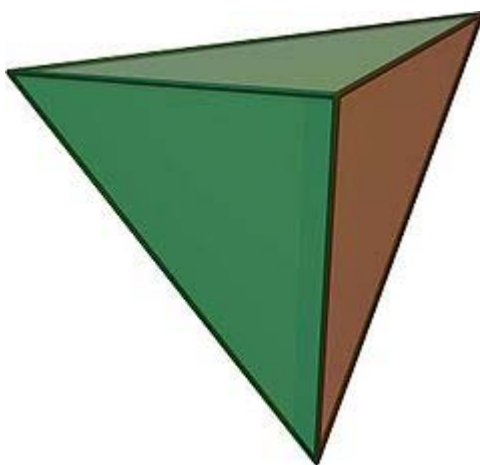
這個等式在高中的數學課本中可以找到，所以本組直接將此等式當成已知結果來使用；相關的證明，請參考[1]。

四、第一型多面體數(只計算邊上的點)

在這一節中，本組將嘗試將平面的 k 角數推廣至立體的 k 面體數，希望能求得 k 面體數的一般式。由於正多面體的種類只有五種，即正四、六、八、十二、二十面體，所以，本組針對這五種分別求出其第 n 個 k 面體數，其中 $k = 4, 6, 8, 12, 20$ 。

首先，從四面體數 T_n 開始，如同三角數的定義一樣，本組從幾何的觀點來出發：

已知正四面體具有 4 面(正三角形)、4 頂點、6 邊且每頂點有 3 邊交會，如下圖：



(此圖形取自維基百科[3])

一開始給定一點 A ，定義第一個四面體數

$$T_1 = 1.$$

然後由 A 點作出邊長為 1 的正四面體，計算頂點的個數得

$$T_2 = 1 + 3 = 4.$$

(T_2 比 T_1 多出 3 個頂點)；

接著，再將剛剛的正四面體，從交會於 A 點的三邊往外延伸成邊長為 2 的正四面體，並在各邊上，每單位長標上 1 點，得

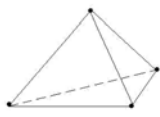
$$T_3 = 1 + 3 + (3 + 1 \cdot 3) = 10.$$

(T_3 比 T_2 再多出 3 個頂點以及該四面體上不交於 A 的 $(6 - 3)$ 個邊上也各多出 1 個中間點)；

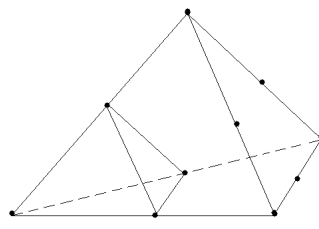
如下圖所示：

.

$$T_1 = 1$$



$$T_2 = 4$$



$$T_3 = 10$$

同樣地，

$$T_4 = 1 + 3 + (3 + 1 \cdot 3) + (3 + 2 \cdot 3) = 19.$$

(T_4 比 T_3 再多出 3 個頂點以及該正四方體上不交於 A 的 3 個邊上也各多出 2 個中間點)；

依此類推可得

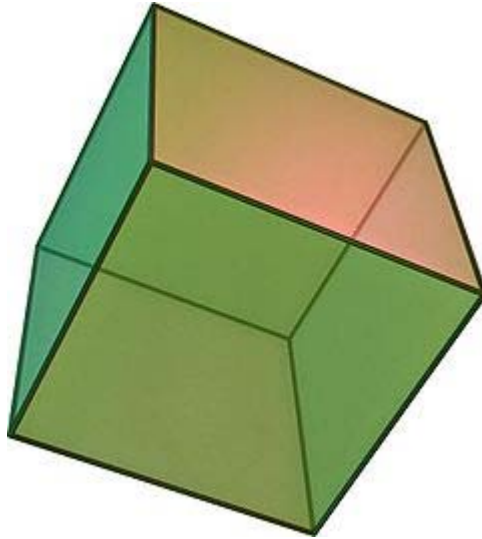
$$\begin{aligned} T_n &= 1 + 3 + (3 + 1 \cdot 3) + (3 + 2 \cdot 3) + \cdots + (3 + (n-2) \cdot 3) \\ &= 1 + 3(n-1) + 3(1 + 2 + \cdots + (n-2)) \\ &= 1 + 3n - 3 + \frac{3(n-1)(n-2)}{2} \\ &= \frac{2 + 6n - 6 + 3n^2 - 9n + 6}{2} \\ &= \frac{3n^2 - 3n + 2}{2}. \end{aligned}$$

(T_n 比 T_{n-1} 多出 3 個頂點以及該邊長為 n 的正方體上不交於 A 的 3 個邊也各多出 $n-2$ 個中間點)；於是得到以下的結果：

性質 4-1：第 n 個四面體數

$$T_n = \frac{3n^2 - 3n + 2}{2}.$$

接下來，本組處理六面體數 S_n 。仿照剛剛處理四面體數的方法：已知正六面體具有 6 面(正四邊形)、8 頂點、12 邊且每頂點有 3 邊交會。



(此圖形取自維基百科[3])

一開始給定一點 A ，定義第一個六面體數

$$S_1 = 1,$$

然後由 A 點作出邊長為 1 的正六面體，得

$$S_2 = 1 + 7 = 8$$

(S_2 比 S_1 多出 7 個頂點)；

接著，再將剛剛的正六面體，從交會於 A 點的三邊往外延伸成邊長為 2 的正六面體，並在各邊上，每單位長標上 1 點，得

$$S_3 = 1 + 7 + (7 + 1 \cdot 9) = 24$$

(S_3 比 S_2 再多出 7 個頂點以及該正六面體上不交於 A 的 $(12 - 3)$ 個邊也各多出 1 個中間點)；

同樣地，

$$S_4 = 1 + 7 + (7 + 1 \cdot 9) + (7 + 2 \cdot 9) = 49$$

(S_4 比 S_3 又多出 7 個頂點以及該邊長為 3 的正六面體上不交於 A 的 9 個邊也各多出 2 個中間點)；依此類推可得

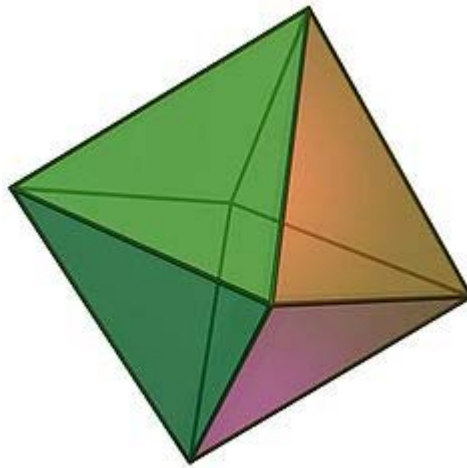
$$\begin{aligned} S_n &= 1 + 7 + (7 + 1 \cdot 9) + (7 + 2 \cdot 9) + \cdots + (7 + (n - 2) \cdot 9) \\ &= 1 + 7(n - 1) + 9(1 + 2 + \cdots + (n - 2)) \\ &= 1 + 7n - 7 + \frac{9(n - 1)(n - 2)}{2} \\ &= \frac{9n^2 - 13n + 6}{2}. \end{aligned}$$

(S_n 比 S_{n-1} 多出 7 個頂點以及該邊長為 n 的正六面體上不交於 A 的 9 個邊也各多出 $n-2$ 個中間點)；於是得到以下的結果：

性質 4-2：第 n 個六面體數

$$S_n = \frac{9n^2 - 13n + 6}{2}.$$

接下來，考慮八面體數 O_n 。已知正八面體具有 8 面(正三角形)、6 頂點、12 邊且每頂點有 4 邊交會。



(此圖形取自維基百科[3])

仿照以上的方法，可以得到

$$O_1 = 1 \text{ (先給定一點 } A \text{)};$$

$$O_2 = 1 + 5 = 6 \text{ (多出 5 個頂點)};$$

$$O_3 = 1 + 5 + (5 + 1 \cdot 8) = 19$$

(再多出 5 個頂點以及不交會於 A 點的 $(12 - 4)$ 個邊上也各多出 1 個中間點)；

$$O_4 = 1 + 5 + (5 + 1 \cdot 8) + (5 + 2 \cdot 8) = 40$$

(再多出 5 個頂點以及不交會於 A 點的 8 個邊上也又各多出 2 個中間點)；

依此類推，本組可得 O_n 的一般式為

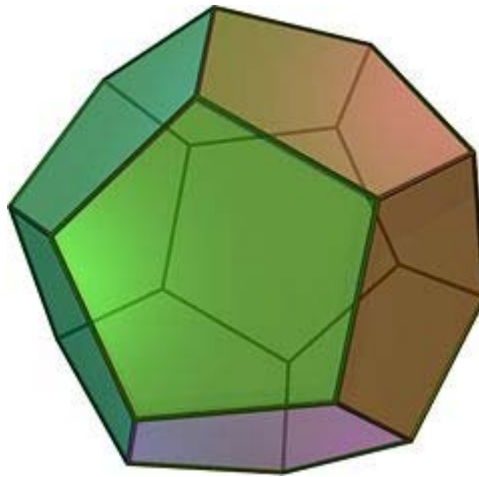
$$\begin{aligned}
O_n &= 1 + 5 + (5 + 1 \cdot 8) + (5 + 2 \cdot 8) + \cdots + (5 + (n-2) \cdot 8) \\
&= 1 + 5(n-1) + 8(1 + 2 + \cdots + (n-2)) \\
&= 1 + 5n - 5 + \frac{8(n-1)(n-2)}{2} \\
&= 1 + 5n - 5 + 4(n-1)(n-2) \\
&= 4n^2 - 7n + 4.
\end{aligned}$$

於是得到以下的結果：

性質 4—3：第 n 個八面體數

$$O_n = 4n^2 - 7n + 4.$$

接下來，考慮十二面體數 P_n 。已知正十二面體具有 12 面(正五邊形)、20 頂點、30 邊且每頂點有 3 邊交會。



(此圖形取自維基百科[3])

仿照以上的方法，可以得到

$$P_1 = 1 \text{ (先給定一點 } A \text{)};$$

$$P_2 = 1 + 19 = 20 \text{ (多出 19 個頂點)};$$

$$P_3 = 1 + 19 + (19 + 1 \cdot 27) = 66$$

(再多出 19 個頂點以及不交會於 A 點的 $(30-3)$ 個邊上也各多出 1 個中間點)；

$$P_4 = 1 + 19 + (19 + 1 \cdot 27) + (19 + 2 \cdot 27) = 139$$

(再多出 19 個頂點以及不交會於 A 點的 $(30-3)$ 個邊上也各多出 2 個中間點)；

依此類推，可得 P_n 的一般式為

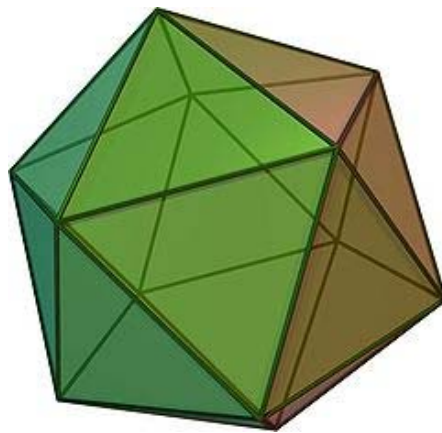
$$\begin{aligned}
 P_n &= 1 + 19 + (19 + 1 \cdot 27) + (19 + 2 \cdot 27) + \cdots + (19 + (n-2) \cdot 27) \\
 &= 1 + 19(n-1) + 27(1 + 2 + \cdots + (n-2)) \\
 &= 1 + 19n - 19 + \frac{27(n-1)(n-2)}{2} \\
 &= \frac{2 + 38n - 38 + 27n^2 - 81n + 54}{2} \\
 &= \frac{27n^2 - 43n + 18}{2}.
 \end{aligned}$$

於是得到以下的結果：

性質 4-4：第 n 個十二面體數

$$P_n = \frac{27n^2 - 43n + 18}{2}.$$

最後，本組處理二十面體數 X_n 。已知正二十面體具有 20 面(正三角形)、12 頂點、30 邊且每頂點有 5 邊交會。



(此圖形取自維基百科[3])

仿照以上的方法，可以得到

$$X_1 = 1 \text{ (先給定一點 } A \text{);}$$

$$X_2 = 1 + 11 = 12 \text{ (多出 11 個頂點);}$$

$$X_3 = 1 + 11 + (11 + 1 \cdot 25) = 48$$

(再多出 11 個頂點以及不交會於 A 點的 $(30-5)$ 個邊上也各多出 1 個中間點)；

$$X_4 = 1 + 11 + (11 + 1 \cdot 25) + (11 + 2 \cdot 25) = 109$$

(再多出 11 個頂點以及不交會於 A 點的 25 個邊上也各多出 2 個中間點)；

依此類推，可得 X_n 的一般式為

$$\begin{aligned} X_n &= 1 + 11 + (11 + 1 \cdot 25) + (11 + 2 \cdot 25) + \cdots + (11 + (n-2) \cdot 25) \\ &= 1 + 11(n-1) + 25(1 + 2 + \cdots + (n-2)) \\ &= 1 + 11n - 11 + \frac{25(n-1)(n-2)}{2} \\ &= \frac{2 + 22n - 22 + 25n^2 - 75n + 50}{2} \\ &= \frac{25n^2 - 53n + 30}{2}. \end{aligned}$$

於是得到以下的結果：

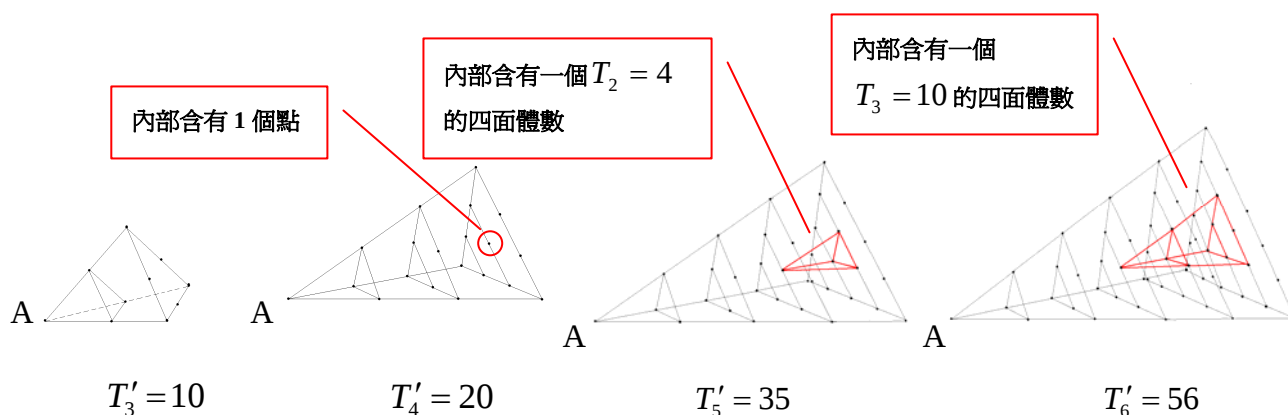
性質 4-5：第 n 個二十面體數

$$X_n = \frac{25n^2 - 53n + 30}{2}.$$

五、第二型多面體數(含邊上、面上及內部的點)

在上一節中，第一型多面體數只計算邊上的點，似乎並非完整地將平面的 k 角數推廣至三度空間。因此，在這一節中，本組將嘗試將平面的 k 角數推廣至第二型多面體數，除了計算邊上的點以外，還加入面上及內部的點。

首先，令 T'_n 代表第 n 個第二型四面體數，則 $T'_1 = T_1 = 1$, $T'_2 = T_2 = 4$, $T'_3 = T_3 = 10$ 。



由上圖，我們可以看出：

第 n 個第二型多面體數 T'_n 會等於第 n 個第一型多面體數 T_n 再加上前 $(n-3)$ 個三角數的和，

也就是說，

$$T'_n = T_n + (1 + 3 + 6 + \cdots + \frac{(n-3)(n-2)}{2}).$$

再利用性質 4-1得：

$$\begin{aligned} T'_n &= \frac{3n^2 - 3n + 2}{2} + \sum_{k=1}^{n-3} \frac{k(k+1)}{2} \\ &= \frac{3n^2 - 3n + 2}{2} + \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{n-3} k^2 + \sum_{k=1}^{n-3} k \right) \\ &= \frac{3n^2 - 3n + 2}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{(n-3)(n-2)(2n-5)}{6} + \frac{(n-3)(n-2)}{2} \right) \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)}{6}. \end{aligned}$$

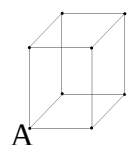
所以，我們已經證出：

性質 5—1：第 n 個第二型四面體數

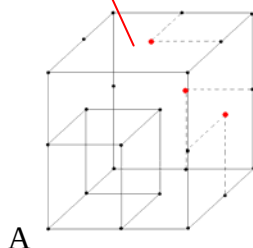
$$T'_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

接下來，令 S'_n 代表第 n 個第二型六面體數，則 $S'_1 = S_1 = 1$, $S'_2 = S_2 = 8$. 爲了方便起見，

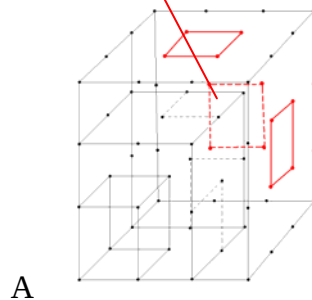
在下圖中，我們將**不與點 A 相接的面**稱爲**非衍生面**。



$$S'_2 = 8$$



$$S'_3 = 27$$



$$S'_4 = 64$$

由上圖，我們可以看出：由於正六面體的非衍生面有三面，加上每面形狀都是正方形，所以，在每一個非衍生面上，多出的點數爲四角數，更精確地說，

$$S'_n = S_n + 3(1^2 + 2^2 + \cdots + (n-2)^2).$$

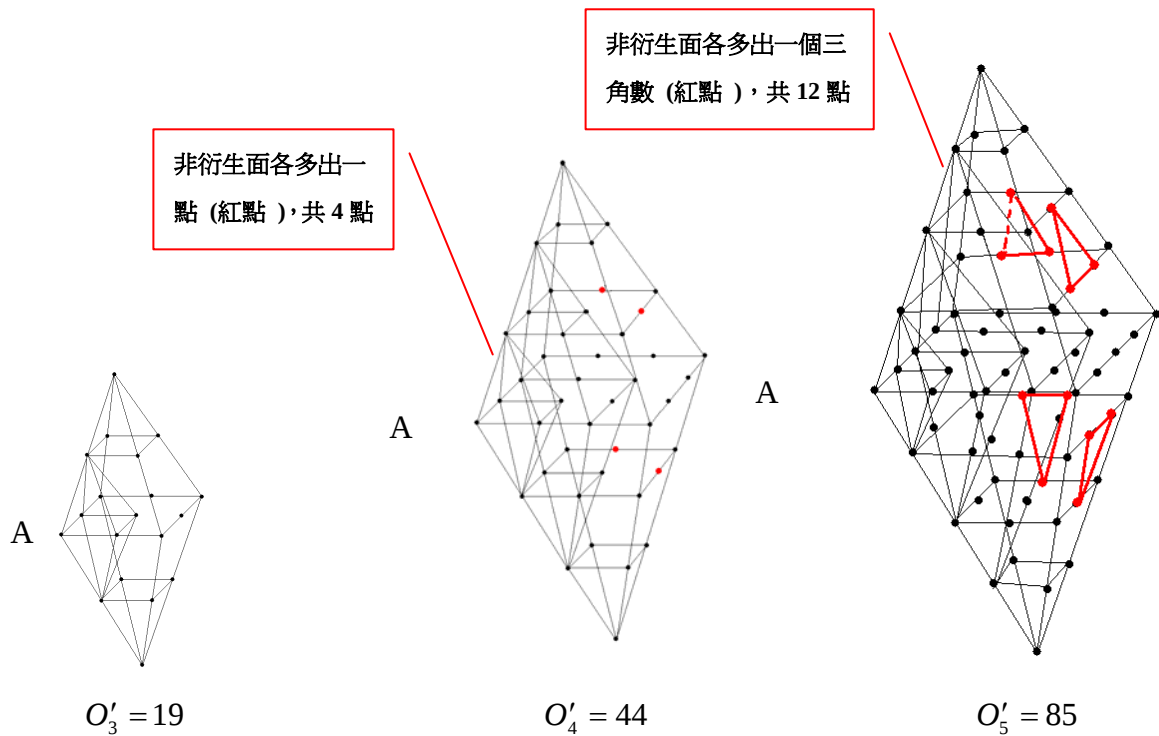
再利用**性質 4—2**得：

$$\begin{aligned} S'_n &= \frac{9n^2 - 13n + 6}{2} + 3 \cdot \frac{(n-2)(n-1)(2n-3)}{6} \\ &= n^3. \end{aligned}$$

性質 5—2：第 n 個第二型六面體數

$$S'_n = n^3.$$

接下來，令 O'_n 代表第 n 個第二型八面體數，則 $O'_1 = O_1 = 1$, $O'_2 = O_2 = 6$, $O'_3 = O_3 = 19$.



由上圖，我們可以看出：由於正八面體的非衍生面有四面，加上每面形狀都是三角形，所以，在每一個非衍生面上，多出來的點數皆為三角數，更精確地說，

$$O'_n = O_n + 4 \sum_{k=1}^{n-3} \frac{k(k+1)}{2}.$$

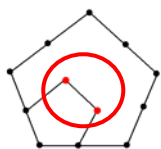
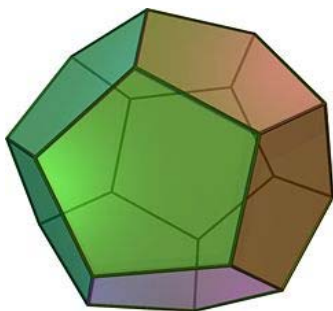
再利用性質 4-3 得：

$$O'_n = \frac{n(2n^2 + 1)}{3}.$$

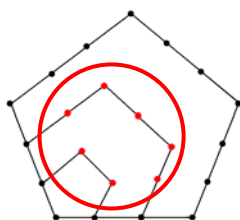
性質 5-3：第 n 個第二型八面體數

$$O'_n = \frac{n(2n^2 + 1)}{3}.$$

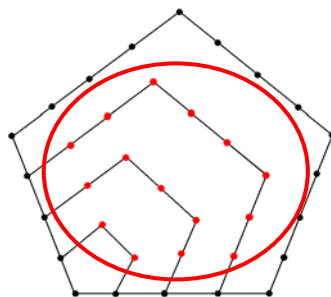
接下來，令 P'_n 代表第 n 個第二型十二面體數，則 $P'_1 = P_1 = 1$ 且 $P'_2 = P_2 = 20$ 。由於第二型十二面體的圖形太過複雜，不容易畫出，我們直接利用下面的圖形來觀察規律。



內部點數： $p_3 - (5 \cdot 3 - 5)$



內部點數： $p_4 - (5 \cdot 4 - 5)$



內部點數： $p_5 - (5 \cdot 5 - 5)$

由上圖，我們可以看出：由於正十二面體的非衍生面有 9 面，在每一個非衍生面上，多出來的點數形如 $p_k - (5k - 5)$ (注意：並非我們預期的五角數 p_k)，更精確地說，

$$P'_n = P_n + 9 \sum_{k=3}^n [p_k - (5k - 5)].$$

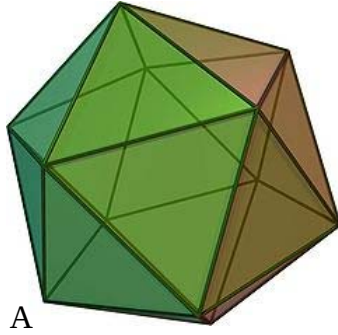
再利用性質 4-4及五角數 p_k 的通式可得：

$$\begin{aligned} P'_n &= \frac{27n^2 - 43n + 18}{2} + 9 \sum_{k=3}^n [p_k - (5k - 5)] \\ &= \frac{27n^2 - 43n + 18}{2} + 9 \sum_{k=3}^n \left[\frac{k(3k-1)}{2} - (5k - 5) \right] \\ &= \frac{n(9n^2 - 9n + 2)}{2}. \end{aligned}$$

性質 5-4：第 n 個第二型十二面體數

$$P'_n = \frac{n(9n^2 - 9n + 2)}{2}.$$

最後，令 X'_n 代表第 n 個第二型二十面體數，則 $X'_1 = X_1 = 1$ ， $X'_2 = X_2 = 12$ ， $X'_3 = X_3 = 48$ 。



由於正二十面體的非衍生面有 15 面，加上每面形狀都是三角形，因此內部多出來的點皆為三角數，但因為要從第四個第二型二十面體數開始才有內部的點，所以

$$X'_n = X_n + 15 \sum_{k=1}^{n-3} \frac{k(k+1)}{2}.$$

再利用性質 4-5 可得：

$$\begin{aligned} X'_n &= \frac{25n^2 - 53n + 30}{2} + 15 \sum_{k=1}^{n-3} \frac{k(k+1)}{2} \\ &= \frac{n(5n^2 - 5n + 2)}{2}. \end{aligned}$$

性質 5-5：第 n 個第二型二十面體數

$$X'_n = \frac{n(5n^2 - 5n + 2)}{2}.$$

六、多角錐數

在前兩節中，我們利用正多面體將平面的多角數推廣到立體空間。但是，正多面體的種類只有五種，這使得我們的推廣受到侷限；爲了彌補這個美中不足，在這一節中，本組將嘗試發展出更一般性的推廣，使不受正多面體的限制，我們將這些數稱爲多角錐數。

首先，我們先定義三角錐數並令 $\mathfrak{T}_n$ 代表第 n 個三角錐數；

一開始給定一點 A ，所以定義

$$\mathfrak{T}_1 = 1,$$

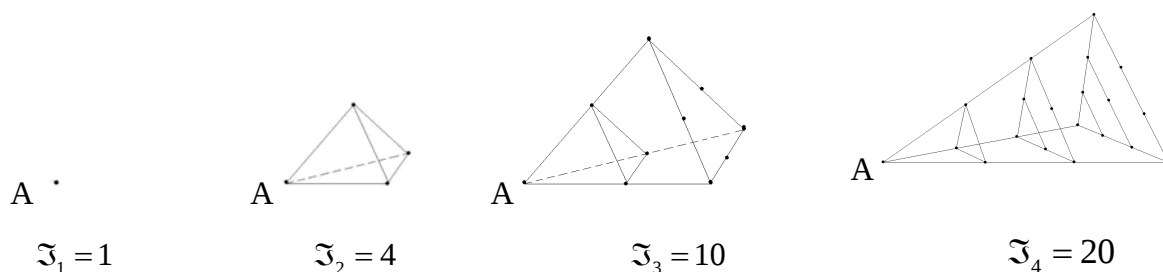
然後由 A 點作出邊長爲 1 的三角錐，定義

$$\mathfrak{T}_2 = 1 + (1 + 2)$$

接著，再將剛剛的三角錐，從交會於 A 點的三邊往外延伸成邊長爲 2 的三角錐，並在各邊上，每單位長標上 1 點，得

$$\mathfrak{T}_3 = 1 + (1 + 2) + (1 + 2 + 3).$$

如下圖所示：



依此類推可得第 n 個三角錐數爲

$$\mathfrak{T}_n = \sum_{k=1}^n \frac{k(k+1)}{2} = 1 + 3 + 6 + 10 + \cdots + \frac{n(n+1)}{2}.$$

因此，利用性質 4-2，

$$\mathfrak{T}_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

性質 6-1：第 n 個三角錐數

$$\mathfrak{T}_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

注意：三角錐數和第二型四面體數是完全相同的。

接下來，我們定義四角錐數 Ω_n 。仿照剛剛處理三角錐數的方法：

一開始給定一點 A ，定義

$$\Omega_1 = 1,$$

然後由 A 點作出邊長為 1 的四角錐，定義

$$\Omega_2 = 1 + 4 = 5$$

接著，再將剛剛的四角錐，從交會於 A 點的四邊往外延伸成邊長為 2 的四角錐，並在各邊上，每單位長標上 1 點，得

$$\Omega_3 = 1 + 4 + 9 = 14$$

依此類推，可得第 n 個四角錐數為：

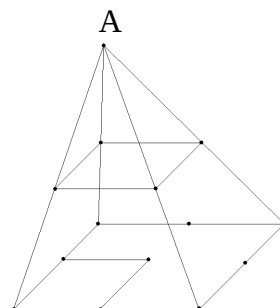
$$\begin{aligned}\Omega_n &= \sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.\end{aligned}$$

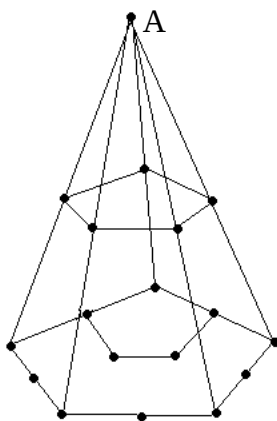
於是得到以下的結果。

性質 6-2：第 n 個四角錐數

$$\Omega_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

接下來，本組處理五角錐點數 $\wp_n$ 。仿照三、四角錐數的方法：





一開始給定一點 A ，定義

$$\wp_1 = 1,$$

然後由 A 點作出邊長為 1 的五角錐，得

$$\wp_2 = 1 + (1 + 4) = 6$$

接著，再將剛剛的五角錐，從交會於 A 點的三邊往外延伸成邊長為 2 的五角錐，並在各邊上，每單位長標上 1 點，得

$$\wp_3 = 1 + (1 + 4) + (1 + 4 + 7) = 18$$

依此類推得第 n 個五角錐數

$$\begin{aligned}\wp_n &= \sum_{k=1}^n \frac{k(3k-1)}{2} = 1 + 5 + 12 + \dots + \frac{n(3n-1)}{2} \\ &= \frac{n^2(n+1)}{2}.\end{aligned}$$

於是得到以下的結果：

性質 6—3： 第 n 個五角錐數

$$\wp_n = \frac{n^2(n+1)}{2}.$$

仿照以上的方法，我們可以先用幾何的方式定義出 k 角錐數($k=3, 4, 5, \dots$)，再利用代數方

法求出第 n 個 k 角錐數的通式。由性質 6-1、6-2、及 6-3 的證明，我們可以發現：第 n 個三角錐數就是前 n 個三角數的和、第 n 個四角錐數就是前 n 個四角數的和且第 n 個五角錐數就是前 n 個五角數的和。所以，我們可以得知：第 n 個 k 角錐數就是前 n 個 k 角數的和，再利用第 n 個 k 角數的通式(即性質 2-1)，便可算出第 n 個 k 角錐數為

$$\begin{aligned}
 \kappa_n &= \sum_{i=1}^n \frac{i[(i-1)(k-2)+2]}{2} \\
 &= (k-2) \sum_{i=1}^n \frac{i(i-1)}{2} + \sum_{i=1}^n i \\
 &= (k-2) \sum_{i=1}^{n-1} \frac{i(i+1)}{2} + \sum_{i=1}^n i \\
 &= (k-2) \frac{(n-1)n(n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \quad (\text{利用性質6-1}) \\
 &= \frac{n(n+1)[n(k-2)-(k-5)]}{6}.
 \end{aligned}$$

於是得到以下的結果：

性質 6-4：第 n 個 k 角錐數為

$$\kappa_n = \frac{n(n+1)[n(k-2)-(k-5)]}{6}.$$

性質 6-5：三角錐數 $\mathfrak{T}_n$ 、四角錐數 Ω_n 及五角錐數 $\wp_n$ 滿足下列的關係式：

$$\mathfrak{T}_{n-1} + \mathfrak{T}_n = \Omega_n;$$

$$\wp_n - \Omega_n = \mathfrak{T}_{n-1};$$

$$\wp_n - \mathfrak{T}_n = 2\mathfrak{T}_{n-1};$$

$$\mathfrak{T}_n + \wp_n = 2\Omega_n;$$

$$\mathfrak{T}_n + \Omega_n - \wp_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

伍、討論

- 一、 從幾何的觀點來定義三、四、五角數，並以代數方法求出他們的一般式。
- 二、 仿照以上三、四、五角數的定義，可以將其推廣至一般的 k 角數 ($k=3, 4, 5, \dots$)
並藉由觀察以上三、四、五角數的計算方法，可求出第 n 個 k 角數的一般式。
- 三、 觀察三、四、五、六角數所成的數列可以看出一些有趣的關係式，如：連續兩項三角數的和為完全平方數。而這些關係式除了可以藉由 k 角數的一般式獲得驗證(即代數證明)，也可利用圖形的切割來證明(幾何證明)。
- 四、 仿照平面多角數的幾何定義，可推廣出立體的多面體數---第一型多面體數(只計算延伸邊上的點)。
- 五、 第一型多面體數只計算邊上的點，似乎並非完整地將平面的 k 角數推廣至三度空間。因此，本組嘗試將平面的 k 角數推廣至第二型多面體數，除了計算邊上的點以外，還加入面上及內部的點。
- 六、 基於定義的方式，第一型及第二型多面體數只適用於正多面體，這使得我們的推廣受到侷限；為了彌補這個美中不足，本組嘗試發展出更一般性的推廣，使不受正多面體的限制，我們將這些數稱為多角錐數。
- 七、 在本作品中，本組發展出平面多角數的三種推廣，包括第一型多面體數、第二型多面體數及多角錐數，其中第一、二型多面體數發展的過程難度較高，但僅適用於正多面體；而多角錐數的定義雖較為簡易，但卻是平面多角數自然又全面的推廣。

陸、結論

(一) 三、四、五角數的一般式

第 n 個三角數 t_n 之一般式為

$$t_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

第 n 個四角數 s_n 之一般式為

$$s_n = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = \frac{n(1+(2n-1))}{2} = n^2.$$

第 n 個五角數 p_n 的一般式為

$$p_n = 1 + 4 + 7 + \cdots + (1+3(n-1)) = \frac{n(3n-1)}{2}.$$

(二) 第 n 個 k 角數的一般式

第 n 個 k 角數為 $\frac{n[(n-1)(k-2)+2]}{2}$, $k \geq 3$.

(三) 一些 k 角數滿足的關係式

觀察三、四、五、六角數所成的數列：

三角數 t_n : 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, ...

四角數 s_n : 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, ...

五角數 p_n : 1, 5, 12, 22, 35, 51, 70, 92, ...

六角數 h_n : 1, 6, 15, 28, 45, 66, 91, 120, ...

可以看出一些有趣的關係式，並提供代數及幾何兩種證明方法：

1. $t_{n-1} + t_n = s_n$. (連續兩項三角數的和為完全平方數)
2. $p_n - s_n = t_{n-1}$. (第 n 個五角數與第 n 個四角數的差剛好是第 $n-1$ 個三角數)
3. $p_n - t_n = 2t_{n-1}$. (第 n 個五角數與第 n 個三角數的差剛好是第 $n-1$ 個三角數的兩倍)
4. $t_n + p_n = 2s_n$. (第 n 個三角數與第 n 個五角數的和剛好是第 n 個四角數的兩倍)
5. $t_n + s_n - p_n = n$. (第 n 個三角數與第 n 個四角數的和比第 n 個五角數多 n)
6. $h_n - p_n = t_{n-1}$. (第 n 個六角數與第 n 個五角數的差剛好是第 $n-1$ 個三角數)

(四) 第一型多面體數(只計算邊上的點)

$$\text{第 } n \text{ 個第一型四面體數 } T_n = \frac{3n^2 - 3n + 2}{2}.$$

$$\text{第 } n \text{ 個第一型六面體數 } S_n = \frac{9n^2 - 13n + 6}{2}.$$

$$\text{第 } n \text{ 個第一型八面體數 } O_n = 4n^2 - 7n + 4.$$

$$\text{第 } n \text{ 個第一型十二面體數 } P_n = \frac{27n^2 - 43n + 18}{2}.$$

$$\text{第 } n \text{ 個第一型二十面體數 } X_n = \frac{25n^2 - 53n + 30}{2}.$$

(五) 第二型多面體數(含邊上、面上及內部的點)

$$\text{第 } n \text{ 個第二型四面體數 } T'_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

$$\text{第 } n \text{ 個第二型六面體數 } S'_n = n^3.$$

$$\text{第 } n \text{ 個第二型八面體數 } O'_n = \frac{n(2n^2 + 1)}{3}.$$

$$\text{第 } n \text{ 個第二型十二面體數 } P'_n = \frac{n(9n^2 - 9n + 2)}{2}.$$

$$\text{第 } n \text{ 個第二型二十面體數 } X'_n = \frac{n(5n^2 - 5n + 2)}{2}.$$

(六) 多角錐數

$$\text{第 } n \text{ 個三角錐數 } \mathfrak{S}_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

$$\text{第 } n \text{ 個四角錐數 } \Omega_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

$$\text{第 } n \text{ 個五角錐數 } \wp_n = \frac{n^2(n+1)}{2}.$$

$$\text{第 } n \text{ 個 } k \text{ 角錐數 : } \kappa_n = \frac{n(n+1)[n(k-2) - (k-5)]}{6}, \quad k \geq 3.$$

三角錐數 $\mathfrak{T}_n$ 、四角錐數 Ω_n 及五角錐數 $\wp_n$ 滿足下列的關係式：

$$\mathfrak{T}_{n-1} + \mathfrak{T}_n = \Omega_n;$$

$$\wp_n - \Omega_n = \mathfrak{T}_{n-1};$$

$$\wp_n - \mathfrak{T}_n = 2\mathfrak{T}_{n-1};$$

$$\mathfrak{T}_n + \wp_n = 2\Omega_n;$$

$$\mathfrak{T}_n + \Omega_n - \wp_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

柒、未來展望

- 一、 在第三節中，本組列舉了一些平面多角數所滿足的關係式，這些關係式都是線性的，或許在未來的研究中可以找出一些非線性的關係式。
- 二、 在第六節中，平面多角數所滿足的關係式，經過適當的修正，也適用於空間的多角錐數；於是，很自然地，本組也想求出第四、五節中第一、二型多面體數所滿足的關係式，這是未來努力的目標之一。
- 三、 在第六節中，本組發現三維空間的多角錐數是由平面多角數累加而來，此推廣方式讓本組認為：若將三維的多角錐數累加可以進而推廣至四維、五維、……、甚至是一般的 m 維空間，本組未來將進一步深入研究並嘗試找出其一般式。

捌、結語與感謝

在這次從事科展研究的過程中，我們很幸運地有個適合的主題，在研究過程中，我們不僅使用了現有的數學知識，也接觸了新的數學範疇，如平方和公式、正多面體等；而其中所需的觀察、歸納、證明更是不折不扣、紮紮實實、令大家印象深刻的，也是我們覺得收穫最多的部份；另外，推廣到立體所需的知識，讓我們接觸了美麗的正多面體，也算是意外的驚喜。

最後，本組要感謝所有幫忙我們的人及單位，讓本組在科展研究中能如沐春風般地得到老師們的指導及鼓勵，學習到正確的研究態度與方法；也感謝學校老師的指導與包容、感謝同學間的支持以及學校在各方面的協助，最後更要感謝我們的父母給我們的支持與鼓勵。

玖、參考資料

1. 許志農，高中數學第一冊，龍騰文化。
2. 昌爸工作坊 <http://www.mathland.idv.tw/graphics3d/polyhedron8.htm>
3. 維基百科 <http://zh.wikipedia.org/zh-tw/>

【評語】 030413

多角數的題材是科展中蠻常見的題目，主要的技巧是級數的分析和探討，題材創新度及作品內容有提升空間。