

中華民國第 51 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組 數學科

第三名

030412

數字天平

學校名稱：新北市立江翠國民中學

作者： 國二 顏嘉佑	指導老師： 張綺芳 顏榮皇
-------------------	-----------------------------

關鍵詞：力矩、最小值、排序不等式

摘要

「數字天平」常出現數學益智題目裡，或當作數學競賽訓練題，但本研究的數字天平是採用新的條件，此題於 2011 年 1 月在某研討會被提出來，當日與會者沒有人解出，題目如下：

一個天平支點的左右兩側，每隔一個單位長各設一個掛勾，今有 n 個砝碼，其重量分別是 $1, 2, 3, \dots, n$ 個單位重，設定條件如下：

1. n 個砝碼都必須要被掛上
2. 每個掛勾下**最多**只能掛一個砝碼，
3. 不考慮掛天平本身、掛勾及掛勾下細繩的重量。

在天平力矩平衡的情況下，設支點左側掛有砝碼的最長力臂為 L ，

支點右側掛有砝碼的最長力臂為 R ，

規定符號 $W_n : \{1, 2, 3, \dots, n\}$ ，其 $L + R$ 的最小值記作 $R(W_n)$ 。

問 $L + R$ 的最小值為何。

本研究得到的結論有二個部份，第一部份為：

1. $R(W_2) = 3$ ， $R(W_3) = 6$ ， $R(W_4) = 5$ 。

2. 當 $n \geq 5$ ， $R(W_n) = n$ 。

第二部份是研究重量一般化的情形，探索了任意 n 個相異整數重量的砝碼，得到 $L + R$ 最小值大於 n 單位長的一些充份條件。

1、前言

1.1 問題的來源

2011 年 1 月 7 日，指導老師參加了「資優教育在職教師專業發展研習班」研習，與會的老師們討論完授課講義第 44 頁的題目後(請見附錄 A)，授課教授另外出了題目給老師們挑戰：

問題 1 一個天平支點的左右兩側，每隔一個單位長各設一個掛勾，今有 n 個重量相異砝碼，其重量分別是 $1, 2, 3, \dots, n$ 個單位重，設定條件如下：

1. n 個砝碼都必須要被掛上
2. 每個掛勾下最多只能掛一個砝碼，
3. 不考慮掛天平本身、掛勾及掛勾下細繩的重量。

補充說明 2：上述條件也適用在砝碼重量為任意 n 個相異正整數重量砝碼的情形。

在天平力矩平衡的情況下，設 L 為砝碼掛在支點左側最長力臂， R 為砝碼中掛在支點右側最長力臂，主要目的是求 $L+R$ 的最小值。當日尚無老師解答出來，授課教授表示這題似乎不簡單，他也很想知道答案是多少，之後本研究指導老師便將這題介紹給我，希望可以試著探索。

1.2 符號

定義 3：天平力矩平衡的情況下，設 L 為砝碼掛在支點左側最長力臂。

定義 4：天平力矩平衡的情況下，設 R 為砝碼中掛在支點右側最長力臂，

定義 5：本研究用 $w_n, w_{n-1}, w_{n-2}, \dots, w_3, w_2, w_1$ 代表 n 個砝碼的重量是相異正整數，並規定 $w_n > w_{n-1} > w_{n-2} > \dots > w_3 > w_2 > w_1$ 。

定義 6： $W_n := \{w_i = i : 1 \leq i \leq n\}$ ，天平達到力矩平衡時的左右兩側砝碼吊掛處離支點最遠的力臂長之和的最小值 $R(W_n)$ 。

1.3 存在性

命題 7：當砝碼數量 $n \geq 2$ ，至少存在一種掛法能使天平平衡。

【證明】

將 w_1 單位重砝碼掛在天平右側 $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 1$ 單位長，

將 w_j 單位重砝碼掛在天平左側 w_j 單位長，其中 $2 \leq j \leq n$ 。

$$\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 1\right) \times 1 = \text{右側力矩和} = \text{左側力矩和} = \sum_{j=2}^n j \times j$$

□

由命題 7 得知： $n \leq R(W_n) \leq \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 1 + n$ 。

本研究將尋找 $R(W_n)$ 的最小上界，分別觀察 $2 \leq n \leq 4$ 的 $R(W_n)$ 值。

1.4 直觀觀察

觀察 $n=2$ 的情形，試著找 $R(W_2)$ (如圖 1)，並且將圖 1 轉換成表 1 以方便計算左右側各自的力矩，圖中的數字代表砝碼重量。

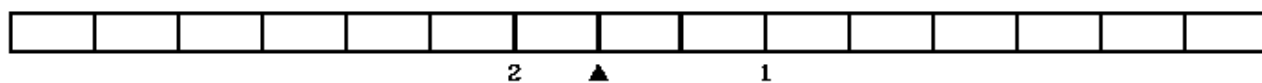


圖 1、 $R(W_2)=3$

表 1、 $R(W_2)=3$

左側掛的砝碼重量	力臂	右側掛的砝碼重量
2	1	
	2	1
	3	
	4	
	5	

$1 \times 2 = \text{左側力矩和} = \text{右側力矩和} = 2 \times 1$ ，當 $n=2$ 則 $R(W_2)=3$ 。

觀察 $R(W_3)$ ，見圖 2 及表 2。

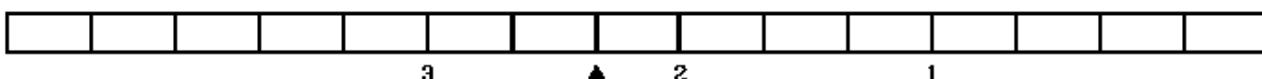


圖 2、 $R(W_3)=6$

表 2、 $R(W_3)=6$

左側掛的砝碼重量	力臂	右側掛的砝碼重量
	1	2
3	2	
	3	
	4	1
	5	

$2 \times 3 = \text{左側力矩和} = \text{右側力矩和} = 1 \times 2 + 4 \times 1$ ，當 $n=3$ 則 $R(W_3)=6$ 。

觀察 $R(W_4)$ ，見圖 3 及表 3

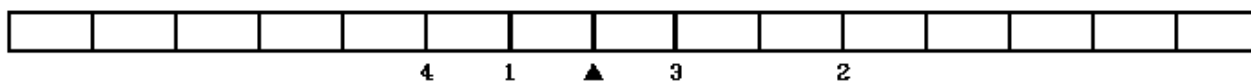


圖 3、 $R(W_4)=5$

表 3、 $R(W_4)=5$

左側掛的砝碼重量	力臂	右側掛的砝碼重量
1	1	3
4	2	
	3	2
	4	
	5	

$1 \times 1 + 2 \times 4 = \text{左側力矩和} = \text{右側力矩和} = 1 \times 3 + 3 \times 2$ ，當 $n=4$ 則 $R(W_4)=5$ 。

從上述觀察得到命題 8。

命題 8： $R(W_2) = 3$ ， $R(W_3) = 6$ ， $R(W_4) = 5$ 。

1.5、天平示意表格

承圖 1~圖 3、表 1~表 3，本研究將會用表格來代替實際天平掛砝碼的情形。

舉例來說，圖 4 表示重量是 1~15 單位重的一種掛法，圖中的數字代表砝碼重量，而此掛法未達到天平平衡。

本研究將繼續討論天平的砝碼掛法、平衡方法及尋找 $R(W_n)$ 最小上界。

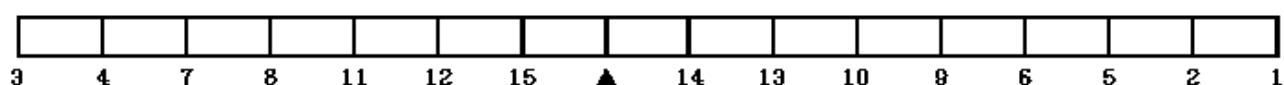


圖 4、15 個砝碼的掛法

用表格來表示圖 4，以利接下來的研究，並可更清楚砝碼重與力臂的關係。

表 4、圖 4 的 15 個砝碼的掛法

左側掛的砝碼重量	力臂	右側掛的砝碼重量
15	1	14
12	2	13
11	3	10
8	4	9
7	5	6
4	6	5
3	7	2
	8	1
	9	

2.證明當 $n \geq 5$, $R(W_n) = n$

2.1 研究策略

研究策略有二個。

策略一：將重量 1,2,3,...,13,14,15 單位重的砝碼依圖 1 的順序去掛上，則天平兩側的力矩值應不會差太多。

我猜測左右兩側相等力臂長所掛的重量應該要儘量接近，使得兩側力矩值會相近，之後靠著調動砝碼也許可使天平平衡。

策略一的掛法是來自國中段考的計分方式：加權計分，如果兩名同班學生的各科分數很接近，又都乘以相同節數，則兩人的總分會相差不大，現應用在本研究，砝碼重如同單科得分，力臂長即為節數，因此我擬了策略一。

由於圖 5 掛砝碼的順序很像「螺旋形狀」，所以稱之為「螺旋掛法」。

定義 9：螺旋掛法：

在天秤上，把最重的砝碼 w_n 單位重擺在左側力臂長為 1 單位長的地方，把次重的砝碼 w_{n-1} 單位重擺在右側力臂長為 1 單位長的地方，把砝碼 w_{n-2} 單位重擺在右側力臂長為 2 單位長的地方，把砝碼 w_{n-3} 單位重擺在左側力臂長為 2 單位長的地方，...，直到所有砝碼掛完為止。

策略二：砝碼依螺旋掛法掛完後，去計算左右兩側的力矩差，如果力矩差不為 0，則希望能找到方法去對調同側 2 顆砝碼或去對調異側 2 顆砝碼，如此操作有限次後，使得兩側的力矩差為 0，可以達到天平平衡。

總而言之，先將砝碼依「螺旋掛法」掛上，去計算掛完後的兩側力矩差，本研究根據力矩差值，去對調同側 2 顆砝碼或異側 2 顆砝碼，經過若干有限次後，天平應可達到平衡。

2.2 數據觀察及分析

取數據試掛的結果，發覺要依 $n \div 4$ 的餘數不同，把螺旋掛法的情形分成 4 類，見圖 6

$n_1 = 4k - 3$		$n_2 = 4k - 2$		$n_3 = 4k - 1$		$n_4 = 4k$	
數字表示		數字表示		數字表示		數字表示	
4k-3	4k-4	4k-2	4k-3	4k-1	4k-2	4k	4k-1
.....							
5	4	6	5	7	6	8	7
2	3	3	4	4	5	5	6
1		2	1	3	2	4	3
					1	1	2

圖 5、螺旋狀掛法

2.3 求力矩差： $\tau(n)$ 的值

定義 10： $\tau(n)$ ：依螺旋掛法掛完砝碼後，左側力矩和減去右側力矩和的值。

利用 EXCEL 去試算 $1 \leq n \leq 12$ 的 $\tau(n)$ ，並依 n 模 4 的剩餘類去分類，見表 5。

表 5、 $1 \leq n \leq 12$ 的 $\tau(n)$ 值分類

$k \backslash n \text{ 模 } 4 \text{ 的剩餘類}$	$n = 4k - 3$	$n = 4k - 2$	$n = 4k - 1$	$n = 4k$
1	1	1	-1	-1
2	2	2	-2	-2
3	3	3	-3	-3

從表 5 得到命題如下

命題 11： $\tau(4k) = \tau(4k - 1) = -k$ ， $\tau(4k - 2) = \tau(4k - 3) = k$ ； $\forall k \in N$ 。

【證明】直觀觀察如表 5，再看一個對任意比 3 大的正整數 w 都成立的事實

表 6

左側掛的砝碼重	力臂長	右側掛的砝碼重
n		$n - 1$
$n - 3$		$n - 2$
$\vdots$		$\vdots$
w	d	$w - 1$
$w - 3$	$d + 1$	$w - 2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

如表 6，在螺旋掛法中，從一開始每 4 個重量一組，一般化的情形如 w 、 $w - 1$ 、 $w - 2$ 、 $w - 3$ 四種重量的排法如表 6 的黃色網底表格，再計算黃色網底部份的左側力矩減右側力矩的差。

$$\begin{aligned}
 & w \times d + (w - 3) \times (d + 1) - [(w - 1) \times d + (w - 2) \times (d + 1)] \\
 &= wd + wd + w - 3d - 3 - [wd - d + wd + w - 2d - 2] \\
 &= 2wd + w - 3d - 3 - [2wd + w - 3d - 2] \\
 &= -3 + 2 \\
 &= -1
 \end{aligned} \tag{1}$$

這表示在螺旋掛法中，任意連續 4 個重量如表 7 的配置位置，所得的左右力矩差均為 “-1”

由於

$$n = 4k - r = 4 \times (k - 1) + (4 - r) \quad (2)$$

承(2)式，再觀察圖 5，便得到

$$\tau(n) = (k - 1) \times (-1) + [(4 - r) \text{ 個砝碼形成的力矩差}] \quad (3)$$

這裡 $(4 - r)$ 個砝碼即為 0、1、2、3 個砝碼，從(3)可知只要知道 $(4 - r)$ 個砝碼形成的力矩差就能掌握 $\tau(n)$ 值。

以下分 $r = 0, 1, 2, 3$ 等四種情形來證。

(i) $n = 4k$

$$\tau(4k) = (k - 1) \times (-1) + (-1) = -k$$

(ii) $n = 4k - 1$

$$4k - 1 = 4 \times (k - 1) + 3$$

根據圖 5，重量 1、2、3 的三顆砝碼排列如表 7

表 7

左側掛的砝碼重	力臂長	右側掛的砝碼重
$\vdots$		$\vdots$
3	$2k - 1$	2
	$2k$	1

根據(3)式即有

$$\begin{aligned}
 \tau(4k - 1) &= -(k - 1) + 3 \times (2k - 1) - 2 \times (2k - 1) - 1 \times 2k \\
 &= -(k - 1) + 6k - 3 - 4k + 2 - 2k \\
 &= -(k - 1) - 1 \\
 &= -k
 \end{aligned}$$

(iii) $n = 4k - 2$

$$4k - 2 = 4 \times (k - 1) + 2$$

根據圖 5，重量 1、2 的二顆砝碼排列如表 8

表 8

左側掛的砝碼重	力臂長	右側掛的砝碼重
$\vdots$		$\vdots$
3	$2k-2$	4
2	$2k-1$	1

$$\begin{aligned}
 \tau(4k-2) &= -(k-1) + 2 \times (2k-1) - 1 \times (2k-1) \\
 &= -(k-1) + 2k-1 \\
 &= k
 \end{aligned}$$

(iv) $n = 4k-3$

$$4k-3 = 4 \times (k-1) + 1$$

根據圖 5，重量 1 的砝碼排列如表 9

表 9

左側掛的砝碼重	力臂長	右側掛的砝碼重
$\vdots$		$\vdots$
1	$2k-1$	

$$\begin{aligned}
 \tau(4k-3) &= -(k-1) + 1 \times (2k-1) \\
 &= -(k-1) + 2k-1 \\
 &= k
 \end{aligned}$$

□

觀察數據時，也嘗試用 n 來表示 $\tau(n)$ 的值，觀察出兩種表示，分別為命題 12 和命題 13。

命題 12：用 n 表示 $\tau(n)$ ： $\tau(n) = (-1)^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \times \left[\frac{\left[\frac{n+1}{2}\right] + 1}{2} \right]$ ，其中 $[\]$ 為高斯符號。

【證明】

對任意正整數 k 有下列 4 個等式：

$$\tau(4k) = -k = (-1)^{\left[\frac{4k-1}{2}\right]} \times \left[\frac{\left[\frac{4k+1}{2} + 1\right]}{2} \right] = (-1) \times k ,$$

$$\tau(4k-3) = k = (-1)^{(2k-2)} \times \left[\frac{2k}{2} \right] = (-1)^{\left[\frac{4k-3-1}{2}\right]} \times \left[\frac{\left[\frac{4k-3+1}{2}\right] + 1}{2} \right] ;$$

$$\tau(4k-2) = k = (-1)^{(2k-2)} \times \left[\frac{2k}{2} \right] = (-1)^{\left[\frac{4k-2-1}{2}\right]} \times \left[\frac{\left[\frac{4k-2+1}{2}\right] + 1}{2} \right] ;$$

$$\tau(4k-1) = -k = (-1)^{(2k-1)} \times \left[\frac{2k}{2} \right] = (-1)^{\left[\frac{4k-1-1}{2}\right]} \times \left[\frac{\left[\frac{4k-1+1}{2}\right] + 1}{2} \right] .$$

□

命題 13： $\tau(n) = (-1)^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \times \left[\frac{n+3}{4} \right] .$

【證明】

類似命題 12 的證明，也有下列 4 個等式，

$$\tau(4k) = -k = (-1)^{\left[\frac{4k-1}{2}\right]} \times \left[\frac{4k+3}{4} \right] ;$$

$$\tau(4k-1) = -k = (-1)^{\left[\frac{4k-2}{2}\right]} \times \left[\frac{4k+2}{4} \right] ;$$

$$\tau(4k-2) = k = (-1)^{\left[\frac{4k-3}{2}\right]} \times \left[\frac{4k+1}{4} \right] ;$$

$$\tau(4k-3) = k = (-1)^{\left[\frac{4k-4}{2}\right]} \times \left[\frac{4k}{4} \right] .$$

□

比較命題 12 與命題 13 兩邊同時除以 $(-1)^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}$ ，得到

命題 14、對任意自然數 n ，
$$\left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor + 1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n+3}{4} \right\rfloor。$$

補充說明 15：將命題 14 推廣，得到一個更一般的恆等式，但因與本研究關係不大，所以把該恆等式的命題及證明寫在附錄 B。

有了 $\tau(n)$ 的值後，接著要對調同側或異側砝碼，來使天平達到平衡。

2.4 透過對調砝碼使天平平衡

來看對調砝碼後的力矩差之變化，以下分兩類：異側等力臂對調和同側相鄰力臂對調。
異側砝碼對調可以用來觀察力矩差的變化；同側砝碼對調可以用來觀察單側力矩的變化。
以下只計算著色網底部份的力矩值。

(1) 異側等力臂對調

從圖 5 可知異側等力臂的左右側掛的砝碼重量皆差 1，不同的是左大右小或左小右大而已，我只要先計算左大右小的情形即可，如果該情形得到的力矩差變化為 x ，則左小右大的情形將會得到力矩差變化為 $-x$ ，先從力臂長為奇數的看起。

表 10-力臂長為奇數 d ，等臂異側砝碼對調示意

左側掛的砝碼重	力臂長	右側掛的砝碼重
⋮		⋮
w	d	$w-1$
⋮		⋮

甲

乙

左側掛的砝碼重	力臂長	右側掛的砝碼重
⋮		⋮
$w-1$	d	w
⋮		⋮

原力矩差為： $w \times d - (w-1) \times d = d$

對調後的力矩差： $(w-1) \times d - w \times d = -d$

力矩差變化為 $(-d) - d = -2d$ ，本研究是以左側減右側為基準。表示力矩差會減少 $2d$ 。

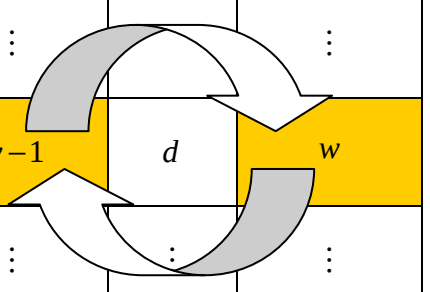
另一例當力臂長為偶數 d 時，如表 11 所示。

表 11-力臂長為偶數 d ，等臂異側砝碼對調示意

甲

乙

左側掛的砝碼重	力臂長	右側掛的砝碼重
$\vdots$		$\vdots$
$w-1$	d	w
$\vdots$		$\vdots$



左側掛的砝碼重	力臂長	右側掛的砝碼重
$\vdots$		$\vdots$
w	d	$w-1$
$\vdots$		$\vdots$

這裡我可以得知等臂異側砝碼對調力矩變化和對調的砝碼所掛之原力臂長有關，並且力矩差的增或減要看是下列兩種情形中的哪一種

- (i)左大右小 $\rightarrow$ 左小右大，力矩差減少 $2d$ ，如表 10，注意此時對調的砝碼掛的力臂長是奇數；
- (ii)左小右大 $\rightarrow$ 左大右小，力矩差增加 $2d$ ，如表 11，注意此時對調的砝碼掛的力臂長是偶數。

寫成命題即有

命題 16：砝碼重量 $1 \sim n$ ，依螺旋掛法掛上天平後，如果對調異側等臂 d 所掛的砝碼，力矩差變化為：當 d 為奇數，則力臂差減少 $2d$ 個單位；
當 d 為偶數，則力臂差增加 $2d$ 個單位。

(2)同側相鄰力臂砝碼對調

我只要關心單側，所以依螺旋排法的連續 4 個重量，配置如下。

表 12 兩種依螺旋排法的連續 4 個重量配置表

甲

乙

左側掛的砝碼重	力臂長	右側掛的砝碼重
$\vdots$		$\vdots$
w	d	$w-1$
$w-3$	$d+1$	$w-2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

左側掛的砝碼重	力臂長	右側掛的砝碼重
$\vdots$		$\vdots$
$w-1$	d	w
$w-2$	$d+1$	$w-3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

同側相鄰的砝碼重差不是 1 就是 3，所以接下來分重量差 1 和重量差 3 兩種來探討。

(i)綠色網底部份(重量差 3 的兩顆砝碼對調)，如表 14。

$$\text{原力矩值：} w \times d + (w-3) \times (d+1) = 2wd + w - 3d - 3$$

$$\text{對調後的力矩值：} (w-3) \times d + w \times (d+1) = 2wd + w - 3d$$

$$2wd + w - 3d - (2wd + w - 3d - 3) = 3$$

表 13 表示重量差 3 的兩顆砝碼對調後力矩會改變 3 個單位。

表 13 左側相鄰重量差 3 的兩顆砝碼對調示意

甲

丙

左側掛的砝碼重	力臂長	右側掛的砝碼重		左側掛的砝碼重	力臂長	右側掛的砝碼重
⋮		⋮		⋮		⋮
w	d	w-1		w-3	d	w-2
w-3	d+1	w-2		w	d+1	w-1
⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮

(ii)淺藍色網底部份(重量差 1 的兩顆砝碼對調)，如表 14

$$\text{原力矩值：} (w-1) \times d + (w-2) \times (d+1) = 2wd + w - 3d - 2$$

$$\text{對調後的力矩值：} (w-2) \times d + (w-1) \times (d+1) = 2wd + w - d - 1$$

$$2wd + w - 3d - 1 - (2wd + w - 3d - 2) = 1$$

表 14 表示重量差 3 的兩顆砝碼對調後力矩會改變 1 個單位。

表 14-右側相鄰重量差 1 的兩顆砝碼對調示意

甲

丁

左側掛的砝碼重	力臂長	右側掛的砝碼重		左側掛的砝碼重	力臂長	右側掛的砝碼重
⋮		⋮		⋮		⋮
w	d	w-1		w	d	w-2
w-3	d+1	w-2		w-3	d+1	w-1
⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮

(3)最重砝碼的對調

從異側對調及同側對調砝碼的討論之中，我要利用最大的 6 個砝碼，來使得**力矩差**能增減 1、2 個單位，以幫助之後的力矩差調整，如表 15。

表 15-最重的 6 顆砝碼配置表

左側掛的砝碼重	力臂長	右側掛的砝碼重
n	1	$n-1$
$n-3$	2	$n-2$
$n-4$	3	$n-5$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

命題 17：利用最重砝碼的對調構造出調動砝碼使力矩差 ± 1 或 ± 2 個單位的步驟。

【證明】

(i)力矩差+1

A.將砝碼 $n-3$ 和 $n-4$ 對調即可。

(ii)力矩差+2

B.將砝碼 $n-1$ 和 $n-2$ 對調，此時力矩差-1。

C.將砝碼 n 和 $n-3$ 對調即可，此時力矩差會+3。

經過上述(B)、(C)的操作後，力矩差變化為 $(-1)+3=2$ 。

(iii)力矩差-1

D 將砝碼 n 和 $n-1$ 對調即，此時力矩差-2，

E.將砝碼 $n-3$ 和 $n-4$ 對調即可，此時力矩差+1。

經過上述(D)、(E)的操作後，力矩差變化為 $(-2)+1=-1$ 。

(iv)力矩差-2

F.將砝碼 n 和 $n-1$ 對調，此時力矩差-2。

□

補充說明 18：

力矩差增加的意義：因為本研究的力矩差是用左側力矩減去右側力矩，所以力矩差增加的情形包含右側力矩不變，左側力矩變大。

力矩差減少的意義：因為本研究的力矩差是用左側力矩減去右側力矩，所以力矩差減少的情形包含右側力矩不變，左側力矩變小。

對調砝碼而產生力矩差變化之統整：

- 1.異側等臂 d 砝碼對調，力矩差變化為 $\pm 2d$ (視 d 奇偶而定，見命題 16)。
- 2.同側相鄰砝碼對調，單側力矩變化為增加 1 或 3 個單位。
- 3.可利用最重的 6 個砝碼，使力矩差加減 1 或 2 個單位(命題 17)。

2.5 當 $n \geq 5$ ， $R(W_n)$ 的證明

命題 19：當 $n \geq 5$ ，則 $R(W_n) = n$ 。

【證明】

首先，從數據去檢驗，我檢驗了命題對 $5 \leq n \leq 36$ 都成立。

表 16-命題 14 對 $5 \leq n \leq 36$ 都成立

n	$\tau(n)$	(l_1, r_1)	(l_2, r_2)	(l_3, r_3)	(l_4, r_4)	(l_5, r_5)	(l_1, l_2)	(l_2, l_3)	(l_3, l_4)	(r_1, r_2)	(r_2, r_3)	(r_3, r_4)
5~6	2											
9~10	3											
13~14	4											
17~18	5											
21~22	6											
25~26	7											
29~30	8											
33~34	9											
7~8	-2											
11~12	-3											
15~16	-4											
19~20	-5											
23~24	-6											
27~28	-7											
31~32	-8											
35~36	-9											

表 16 的說明：

- (i) l_i 代表左側力臂長 i 的吊掛處、 r_j 代表右側力臂長 j 的吊掛處。
- (ii) 承上，小括號裡的兩個力臂長即表示該兩處吊掛的砝碼做對調的動作。
- (iii) 有著色部份即表示有執行該兩處砝碼的對調。
- (iv) 以 $n = 11, 12$ 舉例，其調動砝碼的程序為 (l_2, r_2) 、 (r_3, r_4) 。

接著討論給定 $n \geq 29$ ，使天平平衡的步驟。意即將重量 $1 \sim n$ 的砝碼依螺旋掛法吊掛後，能構造出對調砝碼的步驟，使得數字天平達到平衡。

給定 $n \geq 29$ ，依螺旋掛法吊掛後對調砝碼達到天平平衡的主要步驟有二：

步驟一：依命題 16 先進行異側對調，使得力矩差變成 ± 1 或 ± 2 個單位。

步驟二：根據命題 17，再進行力矩差 ∓ 1 或 ∓ 2 的調動砝碼之步驟。

(i) $\tau(n) = k$

$n = 4k - 2$ 、 $n = 4k - 3$

$\tau(n) = k$ 的意思是指左側力矩比右側力矩多 k 個單位。

以下分 k 為奇或偶來討論，並且用紅色的字母代表某種調動砝碼方法的編碼。

若 k 為偶數

設 $k = 2m$ ， $m \geq 4$ 。

- a. 若 m 是奇數，表示力臂長 m 的砝碼重是左側比右側大 1 個單位重，對調該兩顆砝碼，則力矩差會減少 $2m = k$ 個單位(命題 16)，此時天平就會平衡。

b.若 m 是偶數，表示力臂長 m 的砝碼重是右側比左側大 1 個單位重，對調力臂長 $m+1$ 的左右兩顆砝碼即可，此時力矩差會減少 $2 \times (m+1)$ ，再操作力矩差 $+2$ 的方法即可。

若 k 為奇數，設 $k = 2m+1$ ， $m \geq 4$ 。

c.若 m 是奇數，表示力臂長 m 的砝碼重是左側比右側大 1 個單位重，對調該兩顆砝碼，則力矩差會減少 $2m$ 個單位，再操作力矩差減 1 個單位力矩的作法，此時天平就會平衡。。

d.若 m 是偶數，表示力臂長 m 的砝碼重是右側比左側大 1 個單位重，對調力臂長 $m+1$ 的左右兩顆砝碼即可，此時力矩差會減少 $2 \times (m+1)$ ，再操作力矩差 $+1$ 的方法。

(ii) $\tau(n) = -k$

$$n = 4k, n = 4k - 1$$

$\tau(n) = -k$ 的意思是指左側力矩比右側力矩少 k 個單位。

以下分 k 為奇或偶來討論。

若 k 為偶數

$$\text{設 } k = 2m, m \geq 4.$$

e.若 m 是奇數，表示力臂長 m 的砝碼重是左側比右側大 1 個單位重，對調力臂長 $m+1$ 的左右兩顆砝碼，則力矩差會增加 $2 \times (m+1) = k+2$ 個單位，再操作力矩差減 2 個單位的作法，此時天平就會平衡。。

f.若 m 是偶數，表示力臂長 m 的砝碼重是右側比左側大 1 個單位重，對調力臂長 m 的左右兩顆砝碼即可，此時力矩差會增加 $2 \times m = k$ 個單位，天平即達到平衡。

若 k 為奇數，設 $k = 2m+1$ ， $m \geq 4$ 。

g.若 m 是奇數，表示力臂長 $m+1$ 的砝碼重是右側比左側大 1 個單位重，對調該兩顆砝碼，則力矩差會增加 $2 \times (m+1) = k+1$ 個單位，再操作力矩差減 1 個單位的方法，此時天平就會平衡。。

h.若 m 是偶數，表示力臂長 m 的砝碼重是右側比左側大 1 個單位重，對調力臂長 m 的左右兩顆砝碼即可，此時力矩差會增加 $2 \times (m+1) = k+1$ ，再操作力矩差 -1 個單位的方法，天平即能平衡。

最後，命題 19 證明完畢。

□

補充說明 20(設定 $m \geq 4$ 的理由)：

我希望最重的 6 顆砝碼要在最後拿來使力矩差增減 1 或 2 個單位，所以調動砝碼第一步就都不要動到那 6 顆砝碼，而最重的 6 顆砝碼掛的力臂最長是 3，因此一開始會調動的砝碼其力臂長必需大於或等於 4，這就是我設定 $m \geq 4$ 的理由。

2.6 具體的調動砝碼的方法

(1)依據命題 19 的 a~h 討論順序，來看看 n 的分類

以下只要談到 m 為奇數，則設 $m = 2t+1$ ；若 m 為偶數，則設 $m = 2t$ ；

(i) $n = 4k - 2$

$$k = 2m, m \text{ 為奇數}, n = 4k - 2 = 4 \times 2m - 2 = 4 \times 2 \times (2t+1) - 2 = 16t + 6.$$

$$k = 2m, m \text{ 為偶數}, n = 4k - 2 = 4 \times 2m - 2 = 4 \times 2 \times 2t - 2 = 16t - 2.$$

$$(ii) n = 4k - 3$$

$$k = 2m, m \text{ 為奇數}, n = 4k - 2 - 1 = 16t + 6 - 1 = 16t + 5。$$

$$k = 2m, m \text{ 為偶數}, n = 4k - 2 - 1 = 16t - 2 - 1 = 16t - 3。$$

$$(iii) n = 4k - 2$$

$$k = 2m + 1, m \text{ 為奇數}, n = 4k - 2 = 4 \times (2m + 1) - 2 = 4 \times [2 \times (2t + 1) + 1] - 2 = 16t + 10。$$

$$k = 2m + 1, m \text{ 為偶數}, n = 4k - 2 = 4 \times (2m + 1) - 2 = 4 \times (2 \times 2t + 1) - 2 = 16t + 2。$$

$$(iv) n = 4k - 3$$

$$k = 2m + 1, m \text{ 為奇數}, n = 4k - 2 - 1 = 16t + 10 - 1 = 16t + 9。$$

$$k = 2m + 1, m \text{ 為偶數}, n = 4k - 2 - 1 = 16t + 2 - 1 = 16t + 1。$$

$$(v) n = 4k$$

$$k = 2m, m \text{ 為奇數}, n = 4k = 4 \times 2m = 4 \times 2 \times (2t + 1) = 16t + 8。$$

$$k = 2m, m \text{ 為偶數}, n = 4k = 4 \times 2m = 4 \times 2 \times 2t = 16t。$$

$$(vi) n = 4k - 1$$

$$k = 2m, m \text{ 為奇數}, n = 4k - 1 = 16t + 8 - 1 = 16t + 7$$

$$k = 2m, m \text{ 為偶數}, n = 4k - 1 = 16t - 1。$$

$$(vii) n = 4k$$

$$k = 2m + 1, m \text{ 為奇數}, n = 4k = 4 \times (2m + 1) = 4 \times [2 \times (2t + 1) + 1] = 16t + 12。$$

$$k = 2m + 1, m \text{ 為偶數}, n = 4k = 4 \times (2m + 1) = 4 \times [2 \times (2t + 1) + 1] = 16t + 4。$$

$$(viii) n = 4k - 1$$

$$k = 2m + 1, m \text{ 為奇數}, n = 4k - 1 = 16t + 12 - 1 = 16t + 11$$

$$k = 2m + 1, m \text{ 為偶數}, n = 4k - 1 = 16t + 4 - 1 = 16t + 3。$$

上述(i)~(viii)的結果得到 n 模16的剩餘的每一類。

(2) 設 $n \geq 29$ ，調動砝碼使天平平衡的方法

針對 n 分類後，接著把調動砝碼的方法統整成如下一頁的表17，其說明如下：

(i) **調動砝碼使天平平衡的方法**是依據命題19的a~h的討論。

(ii) 以 $n = 16t - 3$ 舉例說明表17，其讓天平平衡的方法是先對調力臂長 $m + 1$ 的左右兩顆砝碼，因為這裡的 $m = 2t$ ，我用高斯符號使得 $m + 1$ 可以用 n 表示：

$$m + 1 = 2t + 1 = \frac{16t}{8} + 1 = \left\lceil \frac{16t - 3 + 3}{8} \right\rceil + 1 = \left\lceil \frac{n + 3}{8} \right\rceil + 1，$$

接著是使力矩差+2，根據命題17得到操作方法為：將砝碼 $n - 1$ 和 $n - 2$ 對調， n 和 $n - 3$ 對調，即為表17中 $n = 16t - 3$ 該列**應對調的砝碼重量**的著色部份。

問題1也可使用另一種方法證明其存在性，我把存在性證明放在附錄C。

表 17 調動砝碼使天平平衡的方法

n 模 16 同餘的每一類, $t \geq 2$	調動砝碼使天平可以平衡的方法	先對調異側等臂之砝碼的力臂長	使力矩差 ± 1 、 ± 2 個單位的方法 (著色格子表示對調該兩顆砝碼)			
			n 和 $n-1$	$n-1$ 和 $n-2$	n 和 $n-3$	$n-3$ 和 $n-4$
$n = 16t - 3$	b	$\left\lfloor \frac{n+3}{8} \right\rfloor + 1$				
$n = 16t - 2$	b	$\left\lfloor \frac{n+3}{8} \right\rfloor + 1$				
$n = 16t - 1$	f	$\left\lfloor \frac{n+1}{8} \right\rfloor$				
$n = 16t$	f	$\left\lfloor \frac{n+1}{8} \right\rfloor$				
$n = 16t + 1$	d	$\left\lfloor \frac{n}{8} \right\rfloor + 1$				
$n = 16t + 2$	d	$\left\lfloor \frac{n}{8} \right\rfloor + 1$				
$n = 16t + 3$	h	$\left\lfloor \frac{n}{8} \right\rfloor$				
$n = 16t + 4$	h	$\left\lfloor \frac{n}{8} \right\rfloor$				
$n = 16t + 5$	a	$\left\lfloor \frac{n}{8} \right\rfloor + 1$				
$n = 16t + 6$	a	$\left\lfloor \frac{n}{8} \right\rfloor + 1$				
$n = 16t + 7$	e	$\left\lfloor \frac{n+1}{8} \right\rfloor + 1$				
$n = 16t + 8$	e	$\left\lfloor \frac{n+1}{8} \right\rfloor + 1$				
$n = 16t + 9$	c	$\left\lfloor \frac{n}{8} \right\rfloor + 1$				
$n = 16t + 10$	c	$\left\lfloor \frac{n}{8} \right\rfloor + 1$				
$n = 16t + 11$	g	$\left\lfloor \frac{n}{8} \right\rfloor + 1$				
$n = 16t + 12$	g	$\left\lfloor \frac{n}{8} \right\rfloor + 1$				

3.一般化的重量

這裡針對一些特殊重量形成的集合去探討；例如等差數列或等比數列的重量集合。

定義 21： $R(W)$

一個天平支點的左右兩側，每隔一個單位長各設一個掛勾，今有 n 個砝碼，其重量分別是相異任意單位重，設定條件如下：

1. n 個砝碼都必須要掛上
2. 每個掛勾下最多只能掛一個砝碼，
3. 不考慮掛天平本身、掛勾及掛勾下細繩的重量。

則天平左側掛有砝碼最長力臂與天平右側掛有砝碼最長力臂的長度最小值定為 $R(W)$ 。

3.1 $R(W)$ 的上下界

命題 22： $(R(W)$ 的範圍)對任意的 W 及偶數 $n \geq 2$ ， $n \leq R(W) \leq w_n + w_{n-1}$

【證明】：

要證明至少有一個掛法可以使給定的 W 能掛在天平上達到力矩平衡，把這個掛法得到的兩側最長力臂之和看作 $R(W)$ 的上界。

當 n 為偶數，令 $n = 2i$ ，採取以下掛法

左側： w_1 掛在力臂長 w_2 的吊掛處， w_3 掛在力臂長 w_4 的吊掛處， $\dots$ ， w_{2i-1} 掛在力臂長 w_{2i} 的吊掛處， $\dots$ ， w_{n-1} 掛在力臂長 w_n 的吊掛處。

右側： w_2 掛在力臂長 w_1 的吊掛處， w_4 掛在力臂長 w_3 的吊掛處， $\dots$ ， w_{2i} 掛在力臂長 w_{2i-1} 的吊掛處， $\dots$ ， w_n 掛在力臂長 w_{n-1} 的吊掛處。

此時左右側離支點最遠的力臂長分別為 w_n 、 w_{n-1} ，故命題對 n 為偶數得證。

□

3.2 當偶數 $n \geq 6$ ，且砝碼重量是等差數列

定義 23： $W_A := \{w_i = a + id : a, d \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq n\}$ (等差數列)。

命題 24：當 $n \geq 6$ 為偶數， $R(W_A) = n$ 。

【證明】：

要利用 $1 \sim n$ 的掛法去完成等差級數重量的掛法。

給定重量 $1 \sim n$ 的砝碼，偶數 $n \geq 6$ ，可找到掛法使得 $R(W_A) = n$ 。同時左右兩側砝碼數相等。

規定

(i) $n = 2k$,

(ii) $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k$ 為天平力矩平衡時掛支點左側的 k 個砝碼的重量, a_i 表示掛在力臂長 i 的砝碼重量;

(iii) $b_1, b_2, b_3, \dots, b_k$ 為天平力矩平衡時掛支點右側的 k 個砝碼的重量, b_i 表示掛在力臂長 i 的砝碼重量。

注意 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k$ 、 $b_1, b_2, b_3, \dots, b_k$ 為 n 個相異的正整數, 且數值範圍為 $1 \sim n$ 。

因為天平達到平衡, 故有

$$a_1 \times 1 + a_2 \times 2 + a_3 \times 3 + \dots + a_k \times k = b_1 \times 1 + b_2 \times 2 + b_3 \times 3 + \dots + b_k \times k$$

等號兩邊同乘以 d

$$a_1 d \times 1 + a_2 d \times 2 + a_3 d \times 3 + \dots + a_k d \times k = b_1 d \times 1 + b_2 d \times 2 + b_3 d \times 3 + \dots + b_k d \times k$$

等號兩邊同加上 $(1 + 2 + 3 + \dots + k) \times a$

$$\begin{aligned} & (a + a_1 d) \times 1 + (a + a_2 d) \times 2 + (a + a_3 d) \times 3 + \dots + (a + a_k d) \times k = \\ & = (a + b_1 d) \times 1 + (a + b_2 d) \times 2 + (a + b_3 d) \times 3 + \dots + (a + b_k d) \times k \end{aligned}$$

而全部的 $a + a_i d$ 及 $a + b_i d$ 即代表等差數列 $\langle a + id \rangle_{1 \leq i \leq n}$, 命題得證。

□

3.3 $R(W) > n$ 的充份條件

從物理實驗來思考。

如果有 n 個相異重量的砝碼, 把最重的砝碼掛在天平左側力臂長為 1 的地方, 其它 $n-1$ 個砝碼掛在右側。如果最重的砝碼重非常大, 則右側的砝碼掛在力臂長 1、2、3、 $\dots$ 、 $n-1$ 時, 仍可能無法平衡, 這就表示若天平要平衡則 $L + R > n$ 。

此時要注意, 如果把右側一些砝碼移到左側去掛, 則只會使兩邊最大力臂和之值更大而已, 因為此時右側會需要形成更大的力矩去和左側平衡。

換句話說, 如果 w_n 掛在力臂長為 1 形成的力矩, 比 $w_1, w_2, w_3, \dots, w_{n-1}$ 任意掛在 1、2、3、 $\dots$ 、 $n-1$ 力臂長而得到的力矩還來得大, 則 $R(W) > n$ 。

也就是要知道 $w_1, w_2, w_3, \dots, w_{n-1}$ 任意掛在 1、2、3、 $\dots$ 、 $n-1$ 力臂長而得到的力矩的最大值及最小值如何處理? 在老師的建議下, 利用「排序不等式」處理。

引理 25：排序不等式：

如果

$$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_n, \text{ 和 } y_1 \leq y_2 \leq y_3 \leq \cdots \leq y_n$$

是兩組實數。而

$$x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \cdots, x_{\sigma(n)}$$

是 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的一個排列，則排序不等式指出

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n \geq x_{\sigma(1)} y_1 + x_{\sigma(2)} y_2 + \cdots + x_{\sigma(n)} y_n \geq x_n y_1 + x_{n-1} y_2 + \cdots + x_1 y_n$$

如果令 $x_i = w_i$ ， $y_i = i$ ，則有

$$w_1 + w_2 \times 2 + \cdots + w_n \times n \geq w_{\sigma(1)} + w_{\sigma(2)} \times 2 + \cdots + w_{\sigma(n)} \times n \quad (4)$$

(1)最大重量大於某個值

定義 26： $W^* := \left\{ w_i : w_n > \sum_{i=1}^{n-1} i w_i, 1 \leq i \leq n \right\}$ ，即此集合表示最重的砝碼之重量大於 $\sum_{i=1}^{n-1} i w_i$ 。

命題 27： $R(W^*) > n$ ， $n \geq 2$ 。

【證明】：

要證明無論如何掛 W^* ， $R(W^*) > n$ 。

(i)從(1)式可知， $w_1 \times 1 + w_2 \times 2 + w_3 \times 3 + \cdots + w_{n-1} \times (n-1)$ 的力矩，會大於等於

$w_1, w_2, w_3, \cdots, w_{n-1}$ 任意掛在 1、2、3、 $\cdots$ 、 $n-1$ 力臂長而得到的力矩。

(ii)假設有 k 個砝碼(k 可以是 0)和 w_n 掛在天平同一側，接著來看它們形成的力矩與異側砝碼的力矩之大小比較：

w_n 和 k 個砝碼形成的力矩

$\geq w_n$ 形成的力矩

$> w_1 \times 1 + w_2 \times 2 + w_3 \times 3 + \cdots + w_{n-1} \times (n-1)$

$\geq w_1, w_2, w_3, \cdots, w_{n-1}$ 任意掛在 1、2、3、 $\cdots$ 、 $n-1$ 力臂長而得到的力矩。

$\geq$ 天平異側其餘 $n-k-1$ 個砝碼任意掛在 1、2、3、 $\cdots$ 、 $n-k-1$ 力臂長而得到的力矩。

這就表示如果要在兩側最遠力臂長和為 n 的情況下達到力矩平衡是不可能的，命題得證。

□

(2)等差數列的重量

定義 28 : $W_A^* := \left\{ w_i = a + id : \text{GCD}(d, a) = 1, d > \frac{n(n-1)}{2}, a, d \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq n \right\}$

(公差大於 $\frac{n(n-1)}{2}$ 的等差數列，且公差與首項互質)。

命題 29 : 當 $n > 2$ 為奇數， $R(W_A^*) > n$ 。

【證明】：使用反證法來證。

假設找得到一種掛法使得 $R(W_A^*) = n$ ，設天平達到平衡時，左側有 k 個砝碼，右側有 $n-k$ 個砝碼，注意 $k \leq n-1$ ，接著有等式如下

$$\begin{aligned} (a + a_1 d) \times 1 + (a + a_2 d) \times 2 + (a + a_3 d) \times 3 + \cdots + (a + a_k d) \times k \\ = (a + b_1 d) \times 1 + (a + b_2 d) \times 2 + (a + b_3 d) \times 3 + \cdots + (a + b_{n-k} d) \times (n-k) \end{aligned} \quad (5)$$

不妨令 $k > n-k$ ，此時等號兩邊同減 $[1+2+3+\cdots+(n-k)] \times a$ ，即有

$$\begin{aligned} a_1 d \times 1 + a_2 d \times 2 + a_3 d \times 3 + \cdots + a_{n-k} d \times (n-k) + (a + a_{n-k+1} d) \times (n-k+1) + \cdots + (a + a_k d) \times k \\ = b_1 d \times 1 + b_2 d \times 2 + b_3 d \times 3 + \cdots + b_{n-k} d \times (n-k) \end{aligned}$$

整理上面的等式，把所有含因數 d 的項作合併，可得

$$a \times [(n-k+1) + (n-k+2) + \cdots + k] = d \times A \quad (6)$$

其中

$$\begin{aligned} A = b_1 + 2b_2 + 3b_3 + \cdots + (n-k)b_{n-k} - [a_{n-k+1}(n-k+1) + \cdots + a_k k + a_1 + \\ + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + (n-k)a_{n-k}] \end{aligned}$$

觀察(6)式可知， $d \mid a \times [(n-k+1) + (n-k+2) + \cdots + k]$ ，根據命題條件， d 與 a 互質，表示

$$d \mid (n-k+1) + (n-k+2) + \cdots + k \quad (7)$$

但 $d > \frac{n(n-1)}{2} = 1+2+3+\cdots+(n-1) \geq (n-k+1) + (n-k+2) + \cdots + k$ ，表示(7)式不可能成立，

故命題得証。

□

定義 30 : $W_A^{**} := \left\{ w_i = a + id : GCD(d, a) = 1, a \geq \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}, a, d \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq n \right\}$

(首項大於等於 $\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$ 的等差數列，且公差與首項互質)。

命題 31 : 當 $n > 2$ 為奇數， $R(W_A^{**}) > n$ 。

【證明】：本命題同樣用反證法來證。

承命題 29 的論述，觀察

$$A = b_1 + 2b_2 + 3b_3 + \cdots + (n-k)b_{n-k} - [a_{n-k+1}(n-k+1) + \cdots + a_k k + a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + (n-k)a_{n-k}] \quad (8)$$

因為 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k, b_1, b_2, b_3, \dots, b_{n-k}$ 為 n 個相異的正整數，且數值範圍為 $1 \sim n$ ，又 $k \leq n-1$ ，根據排序不等式可推得

$$\begin{aligned} A &< b_1 + 2b_2 + 3b_3 + \cdots + (n-k)b_{n-k} - [a_{n-k+1}(n-k+1) + \cdots + a_k k] \\ &< b_1 + 2b_2 + 3b_3 + \cdots + (n-k)b_{n-k} + a_{n-k+1}(n-k+1) + \cdots + a_k k \\ &\leq 1 \times 1 + 2 \times 2 + 3 \times 3 + \cdots + k \times k + \cdots + (n-1) \times (n-1) \\ &= \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} \end{aligned}$$

接著回想(6)式

$$a \times [(n-k+1) + (n-k+2) + \cdots + k] = d \times A$$

根據命題條件， a 與 d 互質，表示

$$a \mid A \quad (9)$$

但 $a \geq \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$ 且從(6)式知 $A \neq 0$ ，表示(9)式不可能成立，故命題得証。

□

(3)等比級數的重量

定義 32 : $W_r^* := \{w_i = r^i : r \geq n, r \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq n\}$ (公比大於 n 的等比數列),

命題 33 : 當 $n \geq 2$, 則 $R(W_r^*) > n$ 。

【證】: 已知條件 $r \geq n$, 於是有 $\frac{n-1}{r-1} \leq 1$ 。

所以

$$\begin{aligned} w_n = r^n &\geq \frac{n-1}{r-1} \times r^n \\ &> (n-1) \times \frac{r^n - r}{r-1} \\ &= (n-1) \times (r + r^2 + r^3 + \cdots + r^{n-1}) \\ &> r + 2 \times r^2 + 3 \times r^3 + \cdots + (n-1) \times r^{n-1} \\ &= w_1 + 2w_2 + 3w_3 + \cdots + (n-1)w_{n-1} \end{aligned}$$

即知 $R(W_r^*) > n$ 。

□

(4) $R(W) > n$ 的充份條件

命題 34 : $w_n > \sum_{i=1}^{n-1} i w_i$ 不是 $R(W) > n$ 的必要條件。

【證明】:

已知 $w_n > \sum_{i=1}^{n-1} i w_i$ 為 $R(W) > n$ 的充份條件, 但可以找到例子使得當 $w_n < \sum_{i=1}^{n-1} i w_i$ 時, $R(W) > n$ 。

對任意的 W_A 及 $n \geq 3$ 有

$$\begin{aligned} w_n = a + nd &< (n-1)a + \frac{(n-1)}{2} \times nd = (a+d) + (a+2d) + (a+3d) + \cdots + [a+(n-1)d] \\ &= w_1 + w_2 + w_3 + \cdots + w_{n-1} \\ &< w_1 + 2w_2 + 3w_3 + \cdots + (n-1)w_{n-1} \end{aligned}$$

從命題 29, 已知 $R(W_A^*) > n$; 從命題 31 已知 $R(W_A^{**}) > n$, 故本命題得證。

□

4、結論

本研究以構造方法做為研究主軸，得到六個結論；並意外發現二個等式。

一、在 $W_n := \{w_i = i : 1 \leq i \leq n\}$ 下，不考慮最短距離 $R(W_n)$ 的條件：

當 $n \geq 2$ ，至少有一種方法使 n 個砝碼都掛在天平兩端。

二、本研究的主要結果：在 $W_n := \{w_i = i : 1 \leq i \leq n\}$ 下：

1. 當 $n = 2$ 則 $R(W_2) = 3$ ，當 $n = 3$ 則 $R(W_3) = 6$ ，當 $n = 4$ 則 $R(W_4) = 5$ 。

2. 使用螺旋狀掛法可證明：當 $n \geq 5$ 則 $R(W_n) = n$ 。

3. 使用週期 4 方法也可以證明：當 $n \geq 5$ 則 $R(W_n) = n$ 。

三、 $R(W)$ 的上下界問題：

1. 對任意的 W 及偶數 $n \geq 2$ ， $n \leq R(W) \leq w_n + w_{n-1}$ 。

2. 設 $W^* := \left\{ w_i : w_n > \sum_{i=1}^{n-1} i w_i, 1 \leq i \leq n \right\}$ ，當 $n \geq 2$ 則 $R(W^*) > n$ 。

四、任意 n 個砝碼，其重量是等差數列：

1. 設 $W_A := \{w_i = a + id : a, d \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq n\}$ ，當 $n \geq 6$ 為偶數，則 $R(W_A) = n$ 。

2. 設 $W_A^* := \left\{ w_i = a + id : \text{GCD}(d, a) = 1, d > \frac{n(n-1)}{2}, a, d \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq n \right\}$ ，

當 $n > 2$ 為奇數，則 $R(W_A^*) > n$ 。

3. 設 $W_A^{**} := \left\{ w_i = a + id : \text{GCD}(d, a) = 1, a \geq \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}, a, d \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq n \right\}$ ，

當 $n > 2$ 為奇數，則 $R(W_A^{**}) > n$ 。

五、任意 n 個砝碼，其重量是等比數列：

設 $W_r^* := \{w_i = r^i : r \geq n, r \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq n\}$ ，當 $n \geq 2$ ，則 $R(W_r^*) > n$ 。

六、必要條件的討論： $w_n > \sum_{i=1}^{n-1} i w_i$ 不是 $R(W) > n$ 的必要條件。

意外發現兩個恆等式：設 n 及 N 均為任意自然數：

$$\text{命題 14 : } \left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor + 1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n+3}{4} \right\rfloor ;$$

$$\text{命題 B : } \left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{n+N-1}{N} \right\rfloor + N-1}{N} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n+N^2-1}{N^2} \right\rfloor 。$$

5.參考資料

1. 中華資優教育學會(民 100 年 1 月 7 日及 1 月 8 日)。資優教育在職教師專業發展研習班。
台北。
2. 力矩。上網日期：民 100 年 2 月。取自：
<http://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%8A%9B%E7%9F%A9>
3. 排序不等式。上網日期：民 100 年 2 月 1 日。取自：
<http://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%8E%92%E5%BA%8F%E4%B8%8D%E7%AD%89%E5%BC%8F>

附錄 A

如圖 6：有 9 個砝碼，其重量分別為 1、2、3、4、5、6、7、8、9 整數各一個，不考慮天平本身及吊掛的繩子重量，解 A~I 的數值。

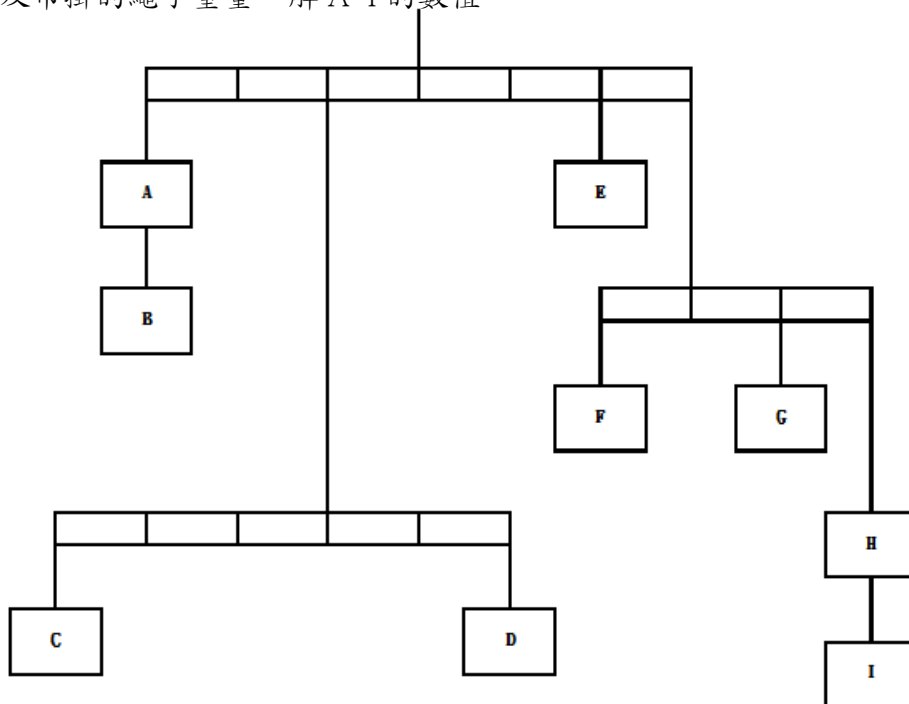


圖 6、資優教育研習的原始題目

依照槓桿原理，

$2C=3D$ ，三種可能： $C=2$ ， $D=3$ ，太小，暫不考慮。

$C=4$ ， $D=6$ ，

$C=6$ ， $D=9$ ，太大，暫不考慮。

$F=2 \times (H+1)+G$ ，若且為若 F 為奇數，則 G 為奇數。

F 儘量取最大， $F=9$ ， $G=3$ ， $H=2$ ， $I=1$ ；或 $F=9$ ， $G=3$ ， $H=1$ ， $I=2$ 。

$$3 \times (A+B) + 1 \times (C+D) = 2 \times E + 3 \times (F+G+H+I)。$$

儘量讓 $1 \times (C+D) = 2 \times E$ ，儘量讓 $A+B+F+G+H+I=15$ 。

一組可存在的答案：確定答案有 4 個，4 種情形答案可選擇。

確定答案：C=4，D=6，E=5，F=9，G=3，

4 種可選擇答案：A=8，B=7，H=2，I=1；

A=8，B=7，H=1，I=2；

A=7，B=8，H=2，I=1；

A=7，B=8，H=1，I=2。

附錄 B

命題 B(命題 14 的一般化)：對任意正整數 n, N ，有恆等式

$$\left[\frac{\left[\frac{n+N-1}{N} \right] + N - 1}{N} \right] = \left[\frac{n+N^2-1}{N^2} \right]。$$

【證明】

設 $n = Nk + r$ ， $k, r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ， $0 \leq r \leq N-1$ ，但 k 和 r 不能同時為 0，即 $k^2 + r^2 \geq 1$ 。

以下分 $r=0$ 及 $1 \leq r \leq N-1$ 來討論。

(i) $r=0$

$$\text{左式} = \left[\frac{\left[\frac{Nk+N-1}{N} \right] + N - 1}{N} \right] = \left[\frac{k+N-1}{N} \right] = \left[1 + \frac{k-1}{N} \right]，$$

$$\text{右式} = \left[\frac{Nk+N^2-1}{N^2} \right] = \left[\frac{k+N-\frac{1}{N}}{N} \right] = \left[1 + \frac{k-\frac{1}{N}}{N} \right]。$$

接著只要證明 $\left[\frac{k-1}{N} \right] = \left[\frac{k-\frac{1}{N}}{N} \right]$ 就可知當 $r=0$ 時恆等式成立。

令 $\left\lfloor \frac{k-1}{N} \right\rfloor = m$ ，因為

$$m \leq \frac{k-1}{N} < \frac{k - \frac{1}{N}}{N} < \frac{k}{N} \leq m+1,$$

因此 $\left\lfloor \frac{k-1}{N} \right\rfloor = m = \left\lfloor \frac{k - \frac{1}{N}}{N} \right\rfloor$ 。

(ii) $1 \leq r \leq N-1$

$$\text{左式} = \left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{Nk+r+N-1}{N} \right\rfloor + N-1}{N} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\left\lfloor k + \frac{r+N-1}{N} \right\rfloor + N-1}{N} \right\rfloor,$$

注意到 $1 \leq \frac{r+N-1}{N} \leq \frac{N-1+N-1}{N} = \frac{2N-2}{N} < 2$ ，

所以左式 $= \left\lfloor \frac{k+1+N-1}{N} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{k+N}{N} \right\rfloor = \left\lfloor 1 + \frac{k}{N} \right\rfloor$ 。

$$\text{右式} = \left\lfloor \frac{Nk+r+N^2-1}{N^2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{k+N+\frac{r-1}{N}}{N} \right\rfloor = \left\lfloor 1 + \frac{k+\frac{r-1}{N}}{N} \right\rfloor。$$

接著只要證明 $\left\lfloor \frac{k}{N} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{k+\frac{r-1}{N}}{N} \right\rfloor$ 就可知當 $1 \leq r \leq N-1$ 時恆等式成立。

令 $\left\lfloor \frac{k-1}{N} \right\rfloor = m$ ，因為

$$m \leq \frac{k}{N} < \frac{k + \frac{r-1}{N}}{N} < \frac{k+1}{N} \leq m+1$$

因此 $\left\lfloor \frac{k}{N} \right\rfloor = m = \left\lfloor \frac{k + \frac{r-1}{N}}{N} \right\rfloor$ ，最後，命題 B 證明完畢。

□

附錄 C、問題 1 的另一種存在性證明

針對命題 19，考慮 $W_n := \{w_i = i : 1 \leq i \leq n\}$ 下， $n \geq 5$ ，則 $R(W_n) = n$ ，做另一種存在性證明。

【證明】

第一部分、當 $n_2 = 4k - 3$ 時：

如圖 7 的甲，當 $n = 5$ ，則 $R(W_5) = 5$ 。考慮圖 7 的甲，每個砝碼重分別加上 4，則左右兩邊的力矩平衡如圖 7 的乙。再掛上 3、2、1 砝碼，如圖 7 的丙。再將圖 7 的丙中做一次 (l_3, l_4) 對調，如圖 7 的丁，當 $n = 9$ ，則 $R(W_9) = 9$ 。

甲			乙			丙			丁		
左砝碼	力臂長	右砝碼	左砝碼	力臂長	右砝碼	左砝碼	力臂長	右砝碼	左砝碼	力臂長	右砝碼
5	1	4	4+5	1	4+4	9	1	8	9	1	8
3	2	2	4+3	2	4+2	7	2	6	7	2	6
	3	1	4+0	3	4+1	4	3	5	3	3	5
	4			4		3	4	2	4	4	2
	5			5			5	1		5	1
	6			6			6			6	

圖 7、當 $n_2 = 4k - 3$ 時的直觀觀察

設 $n_2 = 4k - 3$ 時， $k = i \geq 2$ 掛法存在，如圖 8 的甲。欲證明 $k = i + 1$ 也成立。

如圖 8 的甲，當 $n = 4i - 3$ ，則 $R(W_{4i-3}) = 4i - 3$ 。考慮圖 8 的甲，每個砝碼重分別加上 4，則左右兩邊的力矩平衡如圖 8 的乙。再掛上 3、2、1 砝碼，如圖 8 的丙。再將圖 8 的丙中做一次 (l_{2i-1}, l_{2i}) 對調，如圖 8 的丁。

當 $n = 4i + 1 = 4(i + 1) - 3$ 則 $R(W_{4i+1}) = 4i + 1$ 。

依數學歸納法，當 $n_2 = 4k - 3$ 時， $n_2 \geq 5$ ，則 $R(W_{4k-3}) = 4k - 3$ 。

甲			乙			丙			丁		
左砝碼	力臂長	右砝碼	左砝碼	力臂長	右砝碼	左砝碼	力臂長	右砝碼	左砝碼	力臂長	右砝碼
$4i-3$	1	$4i-4$	$4+4i-3$	1	$4+4i-4$	$4i+1$	1	$4i$	$4i+1$	1	$4i$
...	...		...	...		...	...		...	...	
5	$2i-3$	4	4+5	$2i-3$	4+4	9	$2i-3$	8	9	$2i-3$	8
3	$2i-2$	2	4+3	$2i-2$	4+2	7	$2i-2$	6	7	$2i-2$	6
	$2i-1$	1	4+0	$2i-1$	4+1	4	$2i-1$	5	3	$2i-1$	5
	$2i$			$2i$		3	$2i$	2	4	$2i$	2
	$2i+1$			$2i+1$			$2i+1$	1		$2i+1$	1
	$2i+2$			$2i+2$			$2i+2$			$2i+2$	

圖 8、當 $n_2 = 4k - 3$ 時的推論

第二部分、當 $n_3 = 4k - 2$ 時：

如圖 9 的甲，當 $n = 6$ ，則 $R(W_6) = 6$ 。考慮圖 9 的甲，每個砝碼重分別加上 4，則左右兩邊的力矩平衡如圖 9 的乙。再掛上 4、3、2、1 砝碼，如圖 9 的丙。再將圖 9 的丙中做一次 (r_3, r_4) 對調，如圖 9 的丁，當 $n = 10$ ，則 $R(W_{10}) = 10$ 。

甲			乙			丙			丁		
左砝碼	力臂長	右砝碼	左砝碼	力臂長	右砝碼	左砝碼	力臂長	右砝碼	左砝碼	力臂長	右砝碼
5	1	6	4+5	1	4+6	9	1	10	9	1	10
3	2	4	4+3	2	4+4	7	2	8	7	2	8
2	3	1	4+2	3	4+1	6	3	5	6	3	4
	4			4		3	4	4	3	4	5
	5			5		2	5	1	2	5	1
	6			6			6			6	

圖 9、當 $n_3 = 4k - 2$ 時的直觀觀察

設 $n_3 = 4k - 2$ 時， $k = i \geq 2$ 掛法存在，如圖 11 的甲。欲證明 $k = i + 1$ 也成立。

如圖 10 的甲，當 $n_3 = 4k - 2$ ，則 $R(W_{4i-2}) = 4i - 2$ 。考慮圖 10 的甲，每個砝碼重分別加上 4，則左右兩邊的力矩平衡如圖 10 的乙。再掛上 4、3、2、1 砝碼，如圖 10 的丙。再將圖 10 的丙中做一次 (r_{2i-1}, r_{2i}) 對調，如圖 10 的丁。

當 $n = 4i + 2 = 4(i + 1) - 2$ 則 $R(W_{4i+2}) = 4i + 2$ 。

依數學歸納法，當 $n_3 = 4k - 2$ 時， $n_3 \geq 6$ ，則 $R(W_{4k-2}) = 4k - 2$ 。

甲			乙			丙			丁		
左砝碼	力臂長	右砝碼	左砝碼	力臂長	右砝碼	左砝碼	力臂長	右砝碼	左砝碼	力臂長	右砝碼
$4i-3$	1	$4i-2$	$4+4i-3$	1	$4+4i-2$	$4i+1$	1	$4i+2$	$4i+1$	1	$4i+2$
...			...			...			...		
5	$2i-3$	6	$4+5$	$2i-3$	$4+6$	9	$2i-3$	10	9	$2i-3$	10
3	$2i-2$	4	$4+3$	$2i-2$	$4+4$	7	$2i-2$	8	7	$2i-2$	8
2	$2i-1$	1	$4+2$	$2i-1$	$4+1$	6	$2i-1$	5	6	$2i-1$	4
	$2i$			$2i$		3	$2i$	4	3	$2i$	5
	$2i+1$			$2i+1$		2	$2i+1$	1	2	$2i+1$	1
	$2i+2$			$2i+2$			$2i+2$			$2i+2$	

圖 10、當 $n_3 = 4k - 2$ 時的推論

第三部分：當 $n_4 = 4k - 1$ 時：

如圖 11 的甲，當 $n = 7$ ，則 $R(W_7) = 7$ 。考慮圖 11 的甲，每個砝碼重分別加上 4，則左右兩邊的力矩平衡如圖 11 的乙。再掛上 3、2、1 砝碼，如圖 11 的丙。

再將圖 11 的丙中做一次 (l_4, l_5) 對調，如圖 11 的丁，當 $n = 11$ ，則 $R(W_{11}) = 11$ 。

甲			乙			丙			丁		
左砝碼	力臂長	右砝碼	左砝碼	力臂長	右砝碼	左砝碼	力臂長	右砝碼	左砝碼	力臂長	右砝碼
6	1	7	$4+6$	1	$4+7$	10	1	11	10	1	11
5	2	4	$4+5$	2	$4+4$	9	2	8	9	2	8
3	3	2	$4+3$	3	$4+2$	7	3	6	7	3	6
	4	1	4	4	$4+1$	4	4	5	3	4	5
	5			5		3	5	2	4	5	2
	6			6			6	1		6	1

圖 11、當 $n_4 = 4k - 1$ 時的直觀觀察

設 $n_4 = 4k - 1$ 時， $k = i \geq 2$ 周期 4 的掛法存在，如圖 12 的甲。欲證明 $k = i + 1$ 也成立。

如圖 12 的甲，當 $n_4 = 4k - 1$ ，則 $R(W_{4i-1}) = 4i - 1$ 。考慮圖 12 的甲，每個砝碼重分別加上 4，則左右兩邊的力矩平衡如圖 12 的乙。再掛上 3、2、1 砝碼，如圖 12 的丙。再將圖 12 的丙中做一次 (l_{2i}, l_{2i+1}) 對調，如圖 12 的丁。

當 $n = 4i + 3 = 4(i + 1) - 1$ 則 $R(W_{4i+3}) = 4i + 3$ 。

依數學歸納法，當 $n_4 = 4k - 1$ 時， $n_4 \geq 7$ ，則 $R(W_{4k-1}) = 4k - 1$ 。

甲			乙			丙			丁		
左砝碼	力臂長	右砝碼	左砝碼	力臂長	右砝碼	左砝碼	力臂長	右砝碼	左砝碼	力臂長	右砝碼
$4i-2$	1	$4i-1$	$4+4i-2$	1	$4+4i-1$	$4i+2$	1	$4i+3$	$4i+2$	1	$4i+3$
...			...			...			...		
6	$2i-3$	7	$4+6$	$2i-3$	$4+7$	10	$2i-3$	11	10	$2i-3$	11
5	$2i-2$	4	$4+5$	$2i-2$	$4+4$	9	$2i-2$	8	9	$2i-2$	8
3	$2i-1$	2	$4+3$	$2i-1$	$4+2$	7	$2i-1$	6	7	$2i-1$	6
	$2i$	1	4	$2i$	$4+1$	4	$2i$	5	3	$2i$	5
	$2i+1$			$2i+1$		3	$2i+1$	2	4	$2i+1$	2
	$2i+2$			$2i+2$			$2i+2$	1		$2i+2$	1

圖 12、當 $n_4 = 4k - 1$ 時的推論

第四部分：當 $n_5 = 4k$ 時：

如圖 13 的甲，當 $n=8$ ，則 $R(W_8)=8$ 。考慮圖 13 的甲，每個砝碼重分別加上 4，則左右兩邊的力矩平衡如圖 13 的乙。再掛上 4、3、2、1 砝碼，如圖 13 的丙。

再將圖 13 的丙中做一次 (l_4, l_5) 對調，如圖 13 的丁，當 $n=12$ ，則 $R(W_{12})=12$ 。

甲			乙			丙			丁		
左砝碼	力臂長	右砝碼	左砝碼	力臂長	右砝碼	左砝碼	力臂長	右砝碼	左砝碼	力臂長	右砝碼
7	1	8	4+7	1	4+8	11	1	12	11	1	12
6	2	5	4+6	2	4+5	10	2	9	10	2	9
4	3	3	4+4	3	4+3	8	3	7	8	3	7
1	4	2	4+1	4	4+2	5	4	6	4	4	6
	5			5		4	5	3	5	5	3
	6			6		1	6	2	1	6	2

圖 13、當 $n_5 = 4k$ 時的直觀觀察

設 $n_5 = 4k$ 時， $k = i \geq 2$ 周期 4 的掛法成立，如圖 14 的甲。欲證明 $k = i+1$ 也成立。

如圖 14 的甲，當 $n_5 = 4k$ ，則 $R(W_{4i}) = 4i$ 。考慮圖 14 的甲，每個砝碼重分別加上 4，則左右兩邊的力矩平衡如圖 14 的乙。再掛上 4、3、2、1 砝碼，如圖 14 的丙。再將圖 14 的丙中做一次 (l_{2i}, l_{2i+1}) 對調，如圖 14 的丁。

當 $n = 4i + 4 = 4(i+1)$ 則 $R(W_{4i+4}) = 4i + 4$ 。

依數學歸納法，當 $n_5 = 4k$ 時， $n_5 \geq 8$ ，則 $R(W_{4k}) = 4k$ 。

甲			乙			丙			丁		
左砝碼	力臂長	右砝碼	左砝碼	力臂長	右砝碼	左砝碼	力臂長	右砝碼	左砝碼	力臂長	右砝碼
$4i-1$	1	$4i$	$4i-1$	1	$4i$	$4i-1$	1	$4i$	$4i-1$	1	$4i$
	...			...			...			...	
7	$2i-3$	8	$4+7$	$2i-3$	$4+8$	11	$2i-3$	12	11	$2i-3$	12
6	$2i-2$	5	$4+6$	$2i-2$	$4+5$	10	$2i-2$	9	10	$2i-2$	9
4	$2i-1$	3	$4+4$	$2i-1$	$4+3$	8	$2i-1$	7	8	$2i-1$	7
1	$2i$	2	$4+1$	$2i$	$4+2$	5	$2i$	6	4	$2i$	6
	$2i+1$			$2i+1$		4	$2i+1$	3	5	$2i+1$	3
	$2i+2$			$2i+2$		1	$2i+2$	2	1	$2i+2$	2

圖 14、當 $n_5 = 4k$ 時的推論

綜合上述，命題得證。

□

【評語】 030412

本研究探討砝碼放置天平兩側整數位置，達到平衡，並求取位置越靠近中心點越佳。當重量為 $1, 2, \dots, n$ 時，作者以一個螺旋式排法開始，求出欲達平衡位置至多只須移動 3 次，且調整後的位置，證明為最佳解，研究結果清楚，是一件不錯的作品。