中華民國第51屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

佳作

030411

「和」成角落方陣

學校名稱：臺南市立安平國民中學

作者：	指導老師：
國二 林琮珉 國二 曾俐茵	余崇銘

關鍵詞：nxn 方陣、角落區塊、對稱性質

「和」成角落方陣

摘要：

一、基於一個手機遊戲的規則：將1~9填入3×3方陣中(不重複)，使四個角落的田字形內數字總和相等，這玩法引發了我們的好奇。

二、本研究主要探討能否找到一種有規律的填法，使四個角落內數字的總和相等並恰好就是最大值或最小值。我們先找出3×3中所有可能的組合，再以類似方法延伸至5×5，再更進一步推到$n\times n$，因而有了驚喜的發現。

三、本研究主要發現有：

（一）當$n=4m-1$時($m\in Z$)，最大值、最小值的填入方法。

（二）當$n=4m+1$時($m\in Z$)，最大值、最小值的填入方法。

壹、研究動機：

這是從手機的一個益智遊戲中引發的聯想，在3×3的九宮格中填入1~9(不重複)，使四個角落「田」字形中的數字總和相同。這遊戲並不難，卻也讓我們有了疑惑，這個九宮格既然有很多不同的填法，那能不能求出它田字形中的最大、最小值，及其填入之方法呢？若推廣至5×5、7×7、甚至是$n\times n$的方陣呢？是不是也能填出或算出它們四個角落區塊數字總和的最大值和最小值？

貳、研究目的：

一、探討3×3、5×5方陣填法中的最大值與最小值。

二、能夠推論出$n\times n$ (n爲奇數，$n\geq 3$)方陣中的最大值與最小值的填入方法。

三、能夠推論出$n\times n$ (n爲奇數，$n\geq 3$)方陣中的最大值與最小值的公式。

參、研究設備器材：

一、筆記型電腦×2

二、紙

三、筆

肆、研究過程或方法：

一、3×3 方陣

由於 3×3 的組合太多種，我們決定先縮小範圍。

令：

a_1	a_2	a_3
a_4	a_5	a_6
a_7	a_8	a_9

其中 $a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8,a_9 \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$有五個奇數四個偶數。

填完時，必須符合 $a_1+a_2+a_4+a_5=a_2+a_3+a_5+a_6=a_4+a_5+a_7+a_8=a_5+a_6+a_8+a_9$ 的條件。

若將四個角落區塊都加起來，會變成：

$(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8+a_9)+(a_2+a_4+a_6+a_8)+3a_5$

$=45+(a_2+a_4+a_6+a_8)+3a_5$

必須要能被 4 整除，故$[(a_2+a_4+a_6+a_8)+3a_5]$必爲奇數，此時有兩種狀況：

（一）$(a_2+a_4+a_6+a_8)$爲奇數，$3a_5$ 爲偶數。

a_2、a_4、a_6、a_8 則有兩種可能：

1.此四數爲一個奇數三個偶數

若 a_5 爲偶數，a_2、a_4、a_6、a_8 爲一個奇數三個偶數時，a_1、a_3、a_7、a_9 只剩四個數能填，則情況如下表：

	偶	
奇	偶	偶
	偶	

	奇	
偶	偶	偶
	偶	

	偶	
偶	偶	偶
	奇	

	偶	
偶	偶	奇
	偶	

此時不管十字區域中奇數放在何處，四個角落區塊的總和會是兩個奇數加兩個偶數，相對的四個角落區塊也要兩奇數和兩偶數才能使總和相等，但只剩四個奇數能填，故 a_2、a_4、a_6、a_8 爲一個奇數三個偶數的可能不討論。

2.此四數爲三個奇數一個偶數

我們將十字區域的可能列出來後再一一嘗試，找到以下 24 組：

$a_5=2$

9	1	8
4	2	5
7	3	6

角落區塊總和：16

9	1	6
5	2	8
7	3	4

角落區塊總和：17

8	1	6
7	2	9
5	4	3

角落區塊總和：18

7	1	6
8	2	9
5	3	4

角落區塊總和：18

8	4	6
5	2	7
3	9	1

角落區塊總和：19

8	3	5
6	2	9
4	7	1

角落區塊總和：19

6	5	4
7	2	9
3	8	1

角落區塊總和：20

a_5=4

9	1	7
3	4	5
8	2	6

角落區塊總和：17

2	7	3
6	4	5
8	1	9

角落區塊總和：19

7	1	6
8	4	9
3	5	2

角落區塊總和：20

8	3	7
5	4	6
2	9	1

角落區塊總和：20

6	3	5
8	4	9
2	7	1

角落區塊總和：21

a_5=6

9	1	5
3	6	7
8	2	4

角落區塊總和：19

8	1	4
5	6	9
7	2	3

角落區塊總和：20

9	1	8
4	6	5
3	7	2

角落區塊總和：20

8	3	7
4	6	5
2	9	1

角落區塊總和：21

4	5	3
8	6	9
2	7	1

角落區塊總和：23

a_5=8

9	1	6
2	8	5
7	3	4

角落區塊總和：20

9	1	7
3	8	5
4	6	2

角落區塊總和：21

9	1	5
3	8	7
6	4	2

角落區塊總和：21

6	1	4
7	8	9
5	2	3

角落區塊總和：22

7	1	4
6	8	9
5	3	2

角落區塊總和：22

6	2	4
7	8	9
3	5	1

角落區塊總和：23

4	5	2
7	8	9
3	6	1

角落區塊總和：24

（二）$(a_2+a_4+a_6+a_8)$爲偶數，$3a_5$ 爲奇數。

若$(a_2+a_4+a_6+a_8)$爲偶數、$3a_5$ 爲奇數，則 a_5 爲奇數。a_2、a_4、a_6、a_8 有三種可能：

1.此四數中皆爲偶數

如果 a_2、a_4、a_6、a_8 皆爲偶數，則 $a_2,a_4,a_6,a_8\in\{2,4,6,8\}$ ，總和會變成：

$45+(a_2+a_4+a_6+a_8)+3a_5$

$=45+20+3a_5$

$=65+3a_5$

又因爲$(65+3a_5)$要能被 4 整除，故 a_5 只能爲 1、5、9，經過嘗試，只找到 1 組：

9	2	7
4	5	6
3	8	1

角落區塊總和爲 20

2.此四數中皆爲奇數

如果 a_2、a_4、a_6、a_8 皆爲奇數，則 $a_2,a_4,a_6,a_8\in\{1,3,5,7,9\}$ ，

$45+(a_2+a_4+a_6+a_8)+3a_5$ 會有 5 種可能：

(1) $45+(1+3+5+7)+3\times9$

(2) $45+(1+3+5+9)+3\times7$

(3) $45+(1+3+7+9)+3\times5$

(4) $45+(1+5+7+9)+3\times3$

(5) $45+(3+5+7+9)+3\times1$

經過嘗試後找到 2 組：

8	1	6
7	3	9
4	5	2

角落區塊總和：19

8	1	4
5	7	9
6	3	2

角落區塊總和：21

3.此四數中兩個奇數兩個偶數

如果 a_2、a_4、a_6、a_8 爲二奇二偶，則 $a_2,a_4,a_6,a_8\in\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ ，

我們先用算的，把四個區塊總和可以被 4 整除的組合挑出來，然後再填入 3×3的方陣中嘗試，總共找到 18 組：

$a_5=1$

5	7	6
3	1	2
8	4	9

角落區塊總和：16

8	2	9
6	1	5
3	7	4

角落區塊總和：17

8	2	5
6	1	9
7	3	4

角落區塊總和：17

7	2	6
8	1	9
4	5	3

角落區塊總和：18

7	4	8
6	1	5
2	9	3

角落區塊總和：18

2	9	5
7	1	4
3	8	6

角落區塊總和：19

a_5=3

5	9	4
1	3	2
8	6	7

角落區塊總和：18

4	7	1
5	3	8
9	2	6

角落區塊總和：19

4	6	5
8	3	7
1	9	2

角落區塊總和：21

a_5=7

8	1	9
3	7	2
5	4	6

角落區塊總和：19

6	3	9
5	7	2
1	8	4

角落區塊總和：21

5	1	6
9	7	8
2	4	3

角落區塊總和：22

a_5=9

8	1	5
3	9	6
7	2	4

角落區塊總和：21

7	1	4
5	9	8
6	2	3

角落區塊總和：22

3	6	2
4	9	5
8	1	7

角落區塊總和：22

6	3	7
5	9	4
1	8	2

角落區塊總和：23

6	1	5
7	9	8
3	4	2

角落區塊總和：23

5	3	4
7	9	8
2	6	1

角落區塊總和：24

最後 3×3 方陣共找到 45 種組合，角落和最大爲 24，最小爲 16。

我們將十字區域中間值 a_5 所填入之數字，以及角落區塊總和與可填入完成之方陣組數加以整理，結果如下表：

十字區域中間值 a_5	1	2	3	4	5	6	7	8	9
可填入完成之方陣組數	6	7	4	5	1	5	4	7	6

角落區塊總和	16	17	18	19	20	21	22	23	24
可填入完成之方陣組數	2	4	5	8	7	8	5	4	2

我們發現分別以十字區域中間值 a_5=5、角落區塊總和=20 爲軸，方陣組數左右兩端具對稱規律性。在 5×5 方陣、7×7 方陣，甚至 n×n 方陣中組數是否亦存在規律性，可另行研究。

二、5×5 方陣

我們試著延伸至 5×5。

先令：

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}
a_{16}	a_{17}	a_{18}	a_{19}	a_{20}
a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}

同樣要符合：

$(a_1+a_2+a_3+a_6+a_7+a_8+a_{11}+a_{12}+a_{13})=(a_3+a_4+a_5+a_8+a_9+a_{10}+a_{13}+a_{14}+a_{15})$

$=(a_{11}+a_{12}+a_{13}+a_{16}+a_{17}+a_{18}+a_{21}+a_{22}+a_{23})=(a_{13}+a_{14}+a_{15}+a_{18}+a_{19}+a_{20}+a_{23}+a_{24}+a_{25})$

一開始我們先嘗試用 3×3 方陣做延伸，找出了幾種組合：

20	13	21	16	24
17	8	2	5	11
19	6	1	9	18
14	7	3	4	15
23	12	22	10	25

角落區塊總和：107

13	15	22	21	11
18	5	3	4	17
23	7	9	8	20
14	2	6	1	24
10	25	19	16	12

角落區塊總和：115

17	1	21	25	15
22	8	2	5	16
13	6	1	9	10
11	7	3	4	23
20	19	24	12	18

角落區塊總和：104

25	17	14	12	24
15	9	1	8	19
11	4	2	5	13
22	7	3	6	16
21	18	10	20	23

角落區塊總和：98

但這些看起來並沒有什麼規律可循，而且也很難說角落區塊總和就是最大值或最小值，於是我們將原本的方陣簡化：

令 $b_1=a_1+a_2+a_6+a_7$、

$b_2=a_3+a_8$、

$b_3=a_4+a_5+a_9+a_{10}$、

$b_4=a_{11}+a_{12}$、

$b_5=a_{13}$、

$b_6=a_{14}+a_{15}$、

$b_7=a_{16}+a_{17}+a_{21}+a_{22}$、

$b_8=a_{18}+a_{23}$、$b_9=a_{19}+a_{20}+a_{24}+a_{25}$。

b_1	b_2	b_3
b_4	b_5	b_6
b_7	b_8	b_9

符合 $b_1+b_2+b_4+b_5=b_2+b_3+b_5+b_6=b_4+b_5+b_7+b_8=b_5+b_6+b_8+b_9$

令四個角落區塊總和 $S=(b_1+b_2+b_3+b_4+b_5+b_6+b_7+b_8+b_9)+(b_2+b_4+b_6+b_8)+3b_5$

那我們假設：因爲角落區塊總和就是 S 除以四，則 S 的最大值或最小值即爲角落區塊總和最大值或最小值！

因爲$(b_1+b_2+b_3+b_4+b_5+b_6+b_7+b_8+b_9)$爲定值，所以總和的大小是被$[(b_2+b_4+b_6+b_8)+3b_5]$所影響的，若要求最大值或最小值，只要將中央十字(黃色部分)用最大的數字或最小的數字代入就行了，於是我們找到以下兩組：

3	11	18	10	2
6	14	23	15	7
17	24	25	22	19
5	13	21	16	8
4	12	20	9	1

角落區塊總和：141(5×5 最大值)

19	16	8	15	20
24	11	3	12	23
9	2	1	4	7
25	10	5	13	22
18	17	6	14	21

角落區塊總和：93(5×5 最小值)

最大值是先嘗試中央十字區域：將中間填入最大數字 25，其餘十字部分再依序填入 24,23,22,……,17，最後再將剩下的數字也依規律填入；最小值填法則相反。

		外圈		
		內圈		
外圈	內圈	中間	內圈	外圈
		內圈		
		外圈		

十字部分(不包括中間)的填法是根據對稱的原理：將 8 格分成內、外圈，內圈依順時針方向由大到小(填最小值則由小到大)填入，外圈再照逆時針方向填入，數字之間的差會因此而抵銷，形成相同的總和；角落區塊也是一樣的道理。

我們也試著把 7×7 照這種方式填入：

9	8	1	39	2	7	10
16	24	25	42	26	23	15
17	32	33	47	34	31	18
40	41	48	49	46	43	38
20	29	36	45	35	30	19
13	21	28	44	27	22	14
12	5	4	37	3	6	11

此時左上角總和 471，右上角總和 470，左下角總和 472，右下角總和 469，並沒有相等，而我們也找到了原因：在 5×5 方陣內，繞的圈數剛好是兩圈，數字間的差可以互相抵銷，但 7×7 卻有三圈，抵銷完後卻多一圈，導致角落區塊總和不相等。而 9×9 則有四圈，11×11 有五圈……，於是我們照圈數將方陣規模加以分類。

剛好可以抵銷(偶數圈)：5×5，9×9，13×13……

會多一圈出來(奇數圈)：3×3，7×7，11×11……

偶數圈的部分如 5,9 等數字都是 4 的倍數再加 1，以下用 $4m+1(m\in Z)$代替。而奇數圈則都是 4 的倍數再減 1，以下用 $4m-1(m\in Z)$代替。

三、延伸至 *n*×*n* 方陣

在探討最大值與最小值的公式前，得要先解決一個問題：$n\times n(n=4m-1)$的方陣要如何填才能使角落區塊的總和相等呢？因爲這類規模大小的方陣照此規律填的話會多一圈，使總和無法相等。我們用相同的方法填入 3×3 的方陣：

1	8	2
7	9	5
4	6	3

若不調整四個角落區塊的數字而先相加總和，結果爲 98，我們找到的最大值爲 24，四個區塊加總後爲 96，剛好多 2。而把上面四個角落區塊總和未相等的 7×7 方陣的四個區塊總和相加，結果爲 1882，除以 4 後竟也餘 2。於是我們提出一個假設：是否在每個 $n\times n$ $(n=4m-1)$的方陣中用繞圈的方法由最大填至最小時，其四個角落區塊總合相加後都會是四的倍數加 2(也可說是四的倍數減 2)呢？

如果是十字部分出了問題，那我們將 $n\times n$ 方陣十字中的數字列出來：

$n^2-1, n^2-2, n^2-3, n^2-4, n^2-5, n^2-6, n^2-7, n^2-8$……

3×3 方陣中有四個數，相加的話爲$(4n^2-10)$，$4n^2-10=4n^2-8-2=4(n^2-2)-2$，除以 4 餘 2；

5×5 方陣中有八個數，相加爲$(8n^2-36)$，兩項都恰好能被 4 整除；

7×7 方陣中有十二個數，相加爲$(12n^2-78)$，除以 4 仍然餘 2。

我們推論出：當 $n=4m-1$ 時，十字部分的數字總和除以 4 會餘 2；而當 $n=4m+1$ 時，十字部分的數字總和爲四的倍數。但是否十字部分中間的數字與其餘的部分也會影響呢？

回到[$(b_1+b_2+b_3+b_4+b_5+b_6+b_7+b_8+b_9)+(b_2+b_4+b_6+b_8)+3b_5$]的式子，若將$(b_1+b_2+b_3+b_4+b_5+b_6+b_7+b_8+b_9)$中的幾個數字提出，則會變成：

$S=(b_1+b_3+b_7+b_9)+2(b_2+b_4+b_6+b_8)+4b_5$

$(b_2+b_4+b_6+b_8)$確定爲偶數，$2(b_2+b_4+b_6+b_8)$則可以被 4 整除，而 $4b_5$ 也可以被 4 整除，所以[$2(b_2+b_4+b_6+b_8)+4b_5$]已經爲 4 的倍數了，那就是$(b_1+b_3+b_7+b_9)$，也就是除了十字以外的部分的問題了。

（一）$n\times n$ 方陣中最大值的情況

$(b_1+b_3+b_7+b_9)$的值，以最大值填法來說是由 1 爲首項，共$(n-1)^2$ 項，末項爲(n^2-2n+1)，則可列出等差級數的式子：

$$1+2+3+\ldots\ldots+(n^2-2n+1)$$

$$=(1+n^2-2n+1)\times(n^2-2n+1)\times\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{2}(n^2-2n+2)(n^2-2n+1)$$

將 $n=4m+1$ 以及 $n=4m-1$ 分別代入此式。

1.若 $n=4m+1$，則：

$$\frac{1}{2}(n^2-2n+2)(n^2-2n+1)$$

$$=\frac{1}{2}(16m^2+8m+1-8m-2+2)(16m^2+8m+1-8m-2+1)$$

$$=\frac{1}{2}\times16m^2(16m^2+1)$$

$$=8m^2(16m^2+1)$$

由於$8m^2$有一個因數 8，所以[$8m^2(16m^2+1)$]確定可被 4 整除。

2.若 $n=4m-1$，則：

$$\frac{1}{2}(n^2-2n+2)(n^2-2n+1)$$

$$=\frac{1}{2}(16m^2-8m+1-8m+2+2)(16m^2-8m+1-8m+2+1)$$

$$=\frac{1}{2}(16m^2-16m+5)(16m^2-16m+4)$$

$$=\frac{1}{2}\times4(16m^2-16m+5)\times(4m^2-4m+1)$$

$$=2(16m^2-16m+5)(4m^2-4m+1)$$

$16m^2,16m,4m^2,4m$ 皆爲偶數，所以$(16m^2-16m+5)$和$(4m^2-4m+1)$都是奇數，可得知 $[2(16m^2-16m+5)(4m^2-4m+1)]$雖然是偶數，但質因數 2 只有一個，所以除以 4 時會餘 2。

（二）$n\times n$ 方陣中最小值的情況

最小值的填法我們想直接將算式列出來，首項爲最大的數字，即 n^2，共有$(n-1)^2$ 項，末項爲$(n^2-n^2+2n-1+1)$，也就是 $2n$，則可列出：

$$n^2+(n^2-1)+.....+2n=\frac{1}{2}(n^2+2n)(n^2-2n+1)$$

一樣分成 $n=4m+1$ 和 $n=4m-1$ 代入

1.若 $n=4m+1$，則：

$$\frac{1}{2}(n^2+2n)(n^2-2n+1)$$
$$=\frac{1}{2}(16m^2+8m+1+8m+2)(16m^2+8m+1-8m-2+1)$$
$$=\frac{1}{2}(16m^2+16m+3)\times 16m^2$$
$$=8m^2(16m^2+16m+3)$$

由於$8m^2$有一個因數 8，所以$[8m^2(16m^2+16m+3)]$確定可被 4 整除。

2.若 $n=4m-1$，則：

$$\frac{1}{2}(n^2+2n)(n^2-2n+1)$$
$$=\frac{1}{2}(16m^2-8m+1+8m-2)(16m^2-8m+1-8m+2+1)$$
$$=\frac{1}{2}(16m^2-1)(16m^2-16m+4)$$
$$=2(16m^2-1)(4m^2-4m+1)$$

$16m^2,4m^2,4m$ 皆爲偶數，所以$(16m^2-1)$和$(4m^2-4m+1)$都是奇數，可得知 $[2(16m^2-1)(4m^2-4m+1)]$雖是偶數，但質因數 2 只有一個，所以除以 4 時會餘 2。

因此我們得到一個結論：在 $n\times n$ 的方陣中，以繞圈的方法由最大填至最小時(或最小填至最大)，若 $n=4m+1$，則四個角落區塊總和相加可被 4 整除；若 $n=4m-1$，則四個角落區塊總和相加後除以 4 會餘 2。

條件充足後，我們將這兩類分開探討。

四、$n\times n$ 方陣，且 $n=4m+1$($m\in Z$)

一樣將方陣簡化為：

b_1	b_2	b_3
b_4	b_5	b_6
b_7	b_8	b_9

此類的方格可以直接用繞圈的方法填出角落區塊總和的最大值或最小值，所以能用 $\{S=(b_1+b_2+b_3+b_4+b_5+b_6+b_7+b_8+b_9)+(b_2+b_4+b_6+b_8)+3b_5\}$直接求出。

但是 $b_1, b_2,\ldots\ldots,b_9$ 都是簡化後的格子，要如何知道每個部份到底有多少格呢？

在 $n\times n$ 的方陣內，最小的數字一定是 1，最大的數字也就是格子的數量，記為 n^2，所以 $(b_1+b_2+b_3+b_4+b_5+b_6+b_7+b_8+b_9)$可用等差級數的公式求總和(公差為 1)，$(b_2+b_4+b_6+b_8)$即十字部分總和(不包括中間)因為是由最大或最小順著填，也可用等差級數求和(公差為 1)，但是 b_2,b_4,b_6,b_8 又有多少個數呢？我們將方陣規模以及對應的十字格子數列出來，試著找出規律：3×3→4 格；5×5→8 格；7×7→12 格；9×9→16 格

根據規律，可推算 $n\times n$ 方陣的十字部分有$(2n-2)$格。

（一）最大值公式

由上述得知：b_5 必須填 n^2，因為十字部分有$(2n-2)$格，所以$(b_2+b_4+b_6+b_8)$的各項為 $[n^2-(2n-2)]$, $[n^2-(2n-1)]$,…… , (n^2-1)，共$(2n-2)$項，將 n 套入 S 後可得新式：

$$(1+2+\ldots\ldots+n^2)+[(n^2-2n+2)+(n^2-2n+3)+\ldots\ldots+(n^2-1)]+3n^2$$

$$=(1+2+\ldots\ldots+n^2)+(2n^2-2n+1)\times(2n-2)\times\frac{1}{2}+3n^2$$

$$=(1+n^2)\times n^2\times\frac{1}{2}+(4n^3-4n^2+2n-4n^2+4n-2)\times\frac{1}{2}+3n^2$$

$$=\frac{1}{2}n^4+\frac{1}{2}n^2+(2n^3-4n^2+3n-1)+3n^2$$

$$=\frac{1}{2}n^4+2n^3-\frac{1}{2}n^2+3n-1$$

$$=\frac{1}{2}(n^4+4n^3-n^2+6n)-1$$

$$=\frac{1}{2}n(n^3+4n^2-n+6)-1$$

$$=\frac{1}{2}n[(n+1)(n^2+3n-4)+10]-1$$

$$=\frac{1}{2}n[(n-1)(n+1)(n+4)+10]-1$$

雖然因式分解無法很完整，但這樣一來就好算多了。而在這裡 $n=4m+1$，所以將$(4m+1)$代入 n，得到下式：

$$\frac{1}{2}(4m+1)[(4m+1-1)(4m+1+1)(4m+1+4)+10]-1$$
$$=\frac{1}{2}(4m+1)[4m(4m+2)(4m+5)+10]-1$$
$$=\frac{1}{2}(4m+1)\times 2[2m(4m+2)(4m+5)+5]-1$$
$$=(4m+1)[4m(2m+1)(4m+5)+5]-1$$

將 $m=1$(即 5×5 方陣)代入得到[5×(4×3×9+5)-1]，結果爲 564，分成四個區塊後爲 141，正是上面所填出之最大值。

（二）最小值公式

$(b_1+b_2+b_3+b_4+b_5+b_6+b_7+b_8+b_9)$仍爲定值，而$[(b_2+b_4+b_6+b_8)+3b_5]$若要最小，$b_5$ 必填 1，b_2,b_4,b_6,b_8 則要由 2 開始填，共有$(2n-2)$個數，則可以列出下式：

$$(1+2+\ldots\ldots+n^2)+[2+3+\ldots\ldots+(2n-1)]+3\times 1$$
$$=(1+n^2)\times n^2\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(2n+1)(2n-2)+3$$
$$=(1+n^2)\times n^2\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(2n+1)(2n-2)+3$$
$$=\frac{1}{2}n^4+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}(4n^2-2n-2)+3$$
$$=\frac{1}{2}n^4+\frac{1}{2}n^2+2n^2-n-1+3$$
$$=\frac{1}{2}n^4+\frac{5}{2}n^2-n+2$$

目前並無法將上面的式子做完整的因式分解，若以提出常數項的方式會有大括號，導致計算較爲繁瑣。

將 $n=5$ 代入得到 $\frac{625}{2}+\frac{125}{2}-5+2$，結果爲 372，分成四個區塊後爲 93，正是上面所填出之最小值。

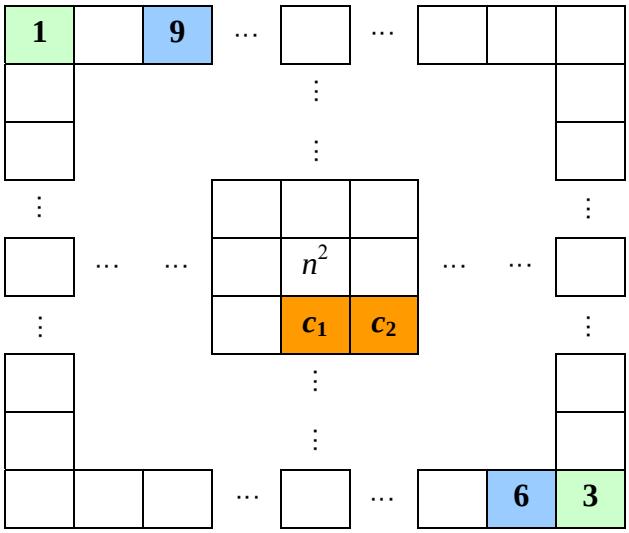
五、$n\times n$ 方陣，且 $n=4m-1$($m\in Z$)

（一）最大值填法

根據上面簡化後的方陣，$S=(b_1+b_2+b_3+b_4+b_5+b_6+b_7+b_8+b_9)+(b_2+b_4+b_6+b_8)+3b_5$，已知此時 S 除以 4 後會餘 2，所以必須將其中一項多 2 或少 2，而 $(b_1+b_2+b_3+b_4+b_5+b_6+b_7+b_8+b_9)$爲定值，$3b_5$ 無法剛好多 2，所以必須調動$(b_2+b_4+b_6+b_8)$的部分。以求最大值來說，全部總和無法再增加，所以要將 b_2,b_4,b_6,b_8 中的一個數字減少 2，也就是跟 b_1,b_3,b_7,b_9 的一個數字換，我們將 b_2,b_4,b_6,b_8 中最小的數字跟 b_1,b_3,b_7,b_9 中第二大的數字調換(爲了讓要換的數字差 2，所以只能找最大的數字和第二小的數字、或最小的數字和第二大的數字。第二小的數字跟最大的數字調換亦可，只是算式會較爲繁雜，故我們不討論)，於是我們試著填填看：

3	8	**6**	47	10	7	2
16	17	24	42	23	18	15
25	32	33	39	34	31	26
48	41	40	49	38	43	46
28	29	36	**35**	**37**	30	27
13	20	21	44	22	19	14
4	5	12	45	11	**9**	**1**

爲了固定順序，我們在十字部分填數字時由外繞到內(由左開始，順時針繞)，角落區塊則由內繞到外(由左下開始，逆時針繞)，上面的表格經過調換(同底色的數字互換)，四個角落區塊的和都爲 470。由於 7×7 之後的方陣在角落區塊皆有 1,3,6,9 四個數字，且位置都相同，因此可將 $n\times n$ 的方陣模擬成：



照上面的填法，1,3,6,9(未經調換)必會在上表中所排的位置，而 c_1 爲 (n^2-2n+2)，c_2 爲 (n^2-2n)，也就是十字部分最小的數字以及其餘部分第二大的數字。填完後，只需將 1 與 3、6 與 9、c_1 與 c_2 互換即可。

（二）最大值公式

在十字部分中， (n^2-2n+2)跟(n^2-2n)互換後剩下的數仍爲等差數列，首項爲(n^2-2n+3)，末項爲$(n^2-2n+2n-1)$，共$(2n-3)$項，只需將(n^2-2n)獨立出來即可，於是列出下式：

$$(1+2+\ldots\ldots+n^2)+[(n^2-2n)+(n^2-2n+3)+(n^2-2n+4)\ldots\ldots+(n^2-2n+2n-1)]+3n^2$$

$$=(1+2+\ldots\ldots+n^2)+[(n^2-2n)+(2n^2-2n+2)\times(2n-3)\times\frac{1}{2}]+3n^2$$

$$=(1+n^2)\times n^2\times\frac{1}{2}+[(n^2-2n)+(4n^3-4n^2+4n-6n^2+6n-6)\times\frac{1}{2}]+3n^2$$

$$=\frac{1}{2}n^4+\frac{1}{2}n^2+[(n^2-2n)+2n^3-5n^2+5n-3]+3n^2$$

$$=\frac{1}{2}n^4+\frac{1}{2}n^2+2n^3-n^2+3n-3$$

$$=\frac{1}{2}n^4+2n^3-\frac{1}{2}n^2+3n-3$$

$$=\frac{1}{2}(n^4+4n^3-n^2+6n)-3$$

$$=\frac{1}{2}n(n^3+4n^2-n+6)-3$$

$$=\frac{1}{2}n[(n+1)(n^2+3n-4)+10]-3$$

$$=\frac{1}{2}n[(n-1)(n+1)(n+4)+10]-3$$

同樣將$(4m-1)$代入 n，得到下式：

$$\frac{1}{2}(4m-1)[(4m-1-1)(4m-1+1)(4m-1+4)+10]-3$$

$$=\frac{1}{2}(4m-1)[4m(4m-2)(4m+3)+10]-3$$

$$=\frac{1}{2}(4m-1)\times 2[2m(4m-2)(4m+3)+5]-3$$

$$=(4m-1)[4m(2m-1)(4m+3)+5]-3$$

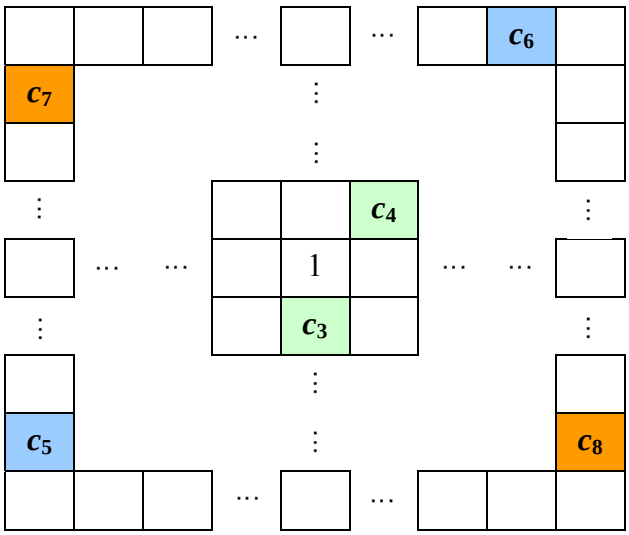
將 $m=1$(即 3×3 方陣)代入得到[3×(4×1×7+5)-3]，結果 96 爲，分成四個區塊後爲 24，正是上面所填出之最大值。

（三）最小值填法

要填出最小值，是從 1 開始填，因爲全部總和除以 4 會餘 2，且無法再減少，所以必須將 b_2,b_4,b_6,b_8 中的一個數字增加 2，也就是跟 b_1,b_3,b_7,b_9 中的一個數字換，我們將 b_2,b_4,b_6,b_8 中最大的數字跟 b_1,b_3,b_7,b_9 中第二小的數字調換(爲了讓要換的數字差 2，所以只能找最大的數字和第二小的數字、或最小的數字和第二大的數字。最小的數字跟第二大的數字調換亦可，只是算式會較爲繁雜，故我們不討論)，用跟上面填最大值時類似的方法填入 7×7 方陣內：

48	40	32	3	31	**42**	47
45	27	19	8	20	28	44
35	24	16	11	**13**	23	36
2	9	10	1	12	7	4
34	25	17	**15**	14	22	37
39	26	18	6	21	29	**43**
49	41	33	5	30	38	46

這裡跟最大值填法不同，十字部分填數字時是由外繞到內(由左開始，順時針繞)，角落區塊則是由內繞到外(由右下開始，順時針繞)，再將同底色的數字互換後，可得到四個角落區塊的總和都爲 330。如果是更大的方陣的話，換的數字可能會不太一樣，但同樣可以模擬成：



上表 c_3 爲$(2n-1)$，c_4 爲$(2n+1)$，即十字中最大的數字和其餘部分中第二小的數字；c_5 爲(n^2-10)，c_6 爲(n^2-7)，c_7 爲(n^2-4)，c_8 爲(n^2-6)，雖然因填的順序不同位置可能會有誤差，但以 b_1 到 b_9 格子的方式來說是一樣的，只要再將 c_3 與 c_4、c_5 與 c_6、c_7 與 c_8 互換即可完成方陣。

（四）最小值公式

列式方面，十字部分(2*n*-1)跟(2*n*+1)互換後剩下的數仍爲等差數列，首項爲 2，末項爲(2*n*-2)，共(2*n*-3)項，只需將(2*n*+1)獨立出來即可，則可列出下式：

$$(1+2+\ldots\ldots+n^2)+[2+3+\ldots\ldots+(2n-2)+(2n+1)]+3\times1$$

$$=(1+n^2)\times n^2\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times 2n(2n-3)+2n+1+3$$

$$=\frac{1}{2}n^4+\frac{1}{2}n^2+2n^2-3n+2n+4$$

$$=\frac{1}{2}n^4+\frac{5}{2}n^2-n+4$$

與要算 $n\times n$ 方陣(n=4m+1)的最小值時相同，無法將上面的式子做完整的因式分解，若以提出常數項的方式化簡則會有大括號，導致計算較爲繁瑣。

而將 n=3 代入得到$\frac{81}{2}+\frac{45}{2}-3+4$，結果爲 64，分成四個區塊後爲 16，正是上面所填出之最小值。

伍、研究結果

一、3×3 方陣最大值爲 24，最小值爲 16；5×5 方陣最大值爲 141，最小值爲 93。

二、$n\times n$ 方陣中，若 $n=4m+1$，先將中間填入 n^2，然後十字部分(除中間)由內而外，最內圈依規律的方式由大到小填入，下一圈以反方向填入……，以此類推；角落區塊則分成 b_1,b_3,b_7,b_9，同樣以規律的方向由大到小填入，一圈之後，再反方向繞回來……，以此類推；最小值則將數字由小到大填入。若 $n=4m-1$，填法跟上面類似，但還需將 1 與 3、6 與 9、c_1 與 c_2 調換；最小值則以同樣方法由小填到大，最後需將 c_3 與 c_4、c_5 與 c_6、c_7 與 c_8 調換即可。

三、 $n\times n$ 方陣中，若 n=4m+1，則代入$\frac{1}{2}n[(n-1)(n+1)(n+4)+10]-1$可求出最大值，代入$\frac{1}{2}n^4+\frac{5}{2}n^2-n+2$可求出最小值；若 $n=4m-1$，則代入$\frac{1}{2}n[(n-1)(n+1)(n+4)+10]-3$可求出最大值，代入$\frac{1}{2}n^4+\frac{5}{2}n^2-n+4$可求出最小值。

陸、討論

此次研究中我們主要利用對稱的性質來填方陣，但能不能找到其他的方法？像魔方陣就有很多種不同的填法，或許其中幾種方法也能套用在我們探討的方陣之中，甚至更爲簡便。上面推論出來的四條公式並沒有做到完整的因式分解，是否能推論出更簡潔的式子？而在填入 3×3 方陣的過程中我們也發現，十字區域中間值 a_5 所填入之數字，以及角落區塊總和與組數之間存在規律性，是否能推論至 $n\times n$ 方陣，可另闢研究。

柒、結論

一、$n\times n$ 方陣(n=4m+1， $m\in Z$)最大值的填入方法：將中間填入 n^2 ，然後十字部分(除中間)由內而外，最內圈依順時針方向由大到小填入，下一圈再照逆時針方向填入，再下一圈依順時針……，以此類推；角落區塊則分成 b_1,b_3,b_7,b_9，由其中一個開始一次填一個區域順時針繞，一圈之後，再逆時針繞回來……，以此類推。求值公式爲：

$\frac{1}{2}n[(n-1)(n+1)(n+4)+10]-1$ ，代入 4m+1 後等於： $(4m+1)[4m(2m+1)(4m+5)+5]-1$ 。

二、$n\times n$ 方陣(n=4m+1， $m\in Z$)最小值的填入方法和最大值的填法類似，差別在中間要填入1，其餘數字則要由小填到大。求值公式爲：$\frac{1}{2}n^4+\frac{5}{2}n^2-n+2$ 。

三、$n\times n$ 方陣(n=4m-1， $m\in Z$)最大值的填入方法：將中間填入 n^2 ，然後十字部分(除中間)照圈數分，最內圈依順時針方向由大到小填入，下一圈再照逆時針方向填入，再下一圈依順時針……，以此類推；角落區塊則分成 b_1,b_3,b_7,b_9，由其中一個開始一次填一個區域順時針繞，一圈之後，再逆時針繞回來……，以此類推；但還需將 1 與 3、6 與 9、$c_1(=n^2-2n+2)$ 與 $c_2(=n^2-2n)$ 互換。求值公式爲：$\frac{1}{2}n[(n-1)(n+1)(n+4)+10]-3$ ，代入 4m-1 後等於： $(4m-1)[4m(2m-1)(4m+3)+5]-3$ 。

四、$n\times n$ 方陣(n=4m-1， $m\in Z$)最小值的填入方法和最大值的填法類似，差別在於中間要填入1，其餘數字則要由小填到大；且還需將 c_3 (=2n-1)與 c_4(=2n+1)、c_5(=n^2-10)與 c_6(=n^2-7)、c_7(=n^2-4)與 c_8(=n^2-6)互換。求值公式爲：$\frac{1}{2}n^4+\frac{5}{2}n^2-n+4$ 。

捌、參考資料及其他

一、徐立民　等。康軒版國中數學課本第三冊。民國 99 年。新北市　康軒文教事業。

二、徐立民　等。康軒版國中數學課本第四冊。民國 100 年。新北市　康軒文教事業。

三、吳孟軒　田字方塊深探祕～田字區等值遊戲的一般解探索與擴張　第三十九屆全國中小學科學展覽

四、馬靖威、吳思穎、陳盈竹、楊順貿　火車快飛　第三十四屆全國中小學科學展覽

五、魔方陣介紹　尤怪魔宮
取自尤怪之家：http://oddest.nc.hcc.edu.tw/

【評語】030411

本作品研究一個手機遊戲的推廣，使得四個角落內數字總合相等，研究使數字總和最大、最小的填法，作者找出一個順時/逆時針填法，並加以做分類整理，雖得出一些不錯的結果，但是內容稍嫌不足。