中華民國第51屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

第三名

030409

製『圓』高手

—捲葉搖籃『內接正多邊形』的探討

學校名稱：南投縣立宏仁國民中學

作者：	指導老師：
國二 陳秋綾	李佩珊
國二 潘育萩	李季篤
國二 徐妙凡	

關鍵詞：捲葉搖籃、等腰三角形、GSP 幾何繪圖

壹、摘要

本研究探討象鼻蟲製作捲葉前在葉面上戳洞行為與圓柱狀捲葉關係。研究過程中測量葉面上孔洞記號的連接距離，發現可呈現許多相似等腰三角形，將所畫出的三角形組合成七邊形後，再利用三角函數及餘弦定理來驗證孔洞與捲葉間數學的規律。探討全等性質的等腰三角形及相似等腰三角形面積關係，並以手作摺紙及 GSP 軟體繪製圖形觀察。結果可以得知：

(一)在一面積相等的正七邊形中，全等三角形合併時（內部為中心點）與相似等腰三角形合併時（內部為任意點）的面積公式為 $\frac{a}{2}\times(h_1+h_2+...h_n)=n\times\frac{a}{4\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^2}\times\sin\frac{2\pi}{n}$，則可知兩者面積相等。

(二)我們利用餘弦定理進行演算，結果發現等腰三角形頂角約為 50.6°，底角約為 64.7°，與正七邊形內角相近，所以可得知捲葉搖籃內部約為正七邊形，而有接近圓的模式，符合捲葉搖籃的外觀形態。

貳、研究動機

我們曾經在學長姐的研究報告上看過有關於象鼻蟲捲葉的相關資料，從他們的研究報告可以得知象鼻蟲捲葉時都按照著一定的定律與角度。這是非常有趣的實驗，也激起了我們研究的興趣，由於他們的報告中沒有詳實的數學演算過程，因此我們試著以數學演算概念，求證捲葉中的數學意義，並以他們研究為基礎，進一步延伸探討象鼻蟲搖籃內的數學意義。

參、研究目的

一、觀察象鼻蟲製造圓及捲葉搖籃上的數學意義

二、求證捲葉搖籃內部裡的三角形、多邊形及圓的數學關係

三、探討捲葉裡圓內接正七邊形面積之理想狀態

四、探討象鼻蟲捲葉上的洞距，求證構成多邊形內的任意形狀三角形與正 n 邊形面積之關係式

五、探討捲葉上的三角形合併成多邊形時，求三角形邊長比例的平均值與利用三角函數定理及餘弦定理來證明

肆、研究設備與器材

研究器材：GSP 幾何繪圖軟體、捲葉搖籃標本、直尺、數位相機、紙、筆、筆記型電腦。

伍、研究過程

研究一：觀察象鼻蟲製造圓及捲葉搖籃上的數學意義

步驟 1：觀察象鼻蟲「製圓」的過程

我們整理前人研究資料中得知，象鼻蟲做圓過程有 11 項步驟，其過程會將一片平面的葉片製作成一個圓柱狀的形態。

(圖 1)象鼻蟲在葉面上戳洞

(圖 2)象鼻蟲開始進行捲葉

(圖 3)搖籃完成後呈現圓柱狀

(圖 4)幼蟲在搖籃中成長

(圖 5)將象鼻蟲製造的搖籃採集下來

(圖 6)採集下的搖籃剪開後所呈現的剖面圖

(圖 7)攤開後的搖籃，會有許多的小孔洞分布

(圖 8)放大後的搖籃，摺痕非常清楚

結果 1：

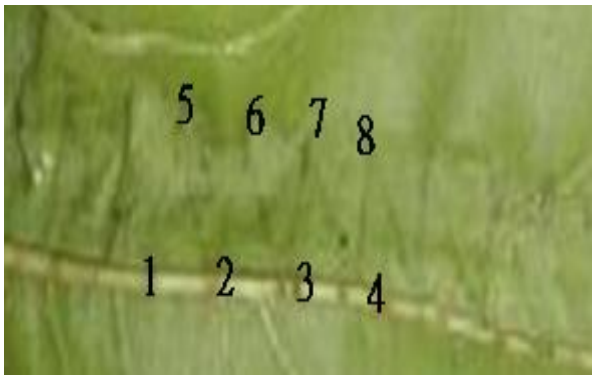
1.我們發現象鼻蟲可以將一片葉子，裁切後製作成一個圓柱狀的捲葉。

2.將搖籃剪斷，由剖面圖發現內部是一圈圈摺疊而成的圓。

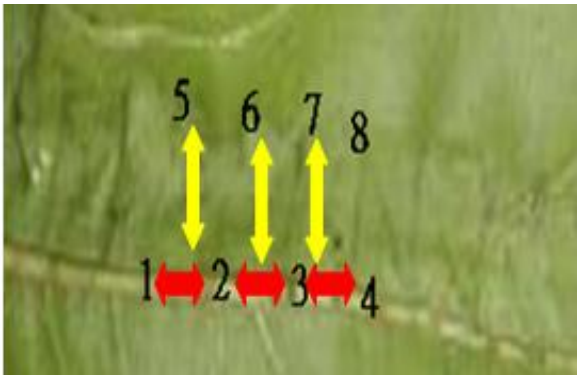
3.再將其他搖籃攤開，上面有象鼻蟲戳的小洞與摺過的痕跡，我們嘗試將小洞與摺痕串連起來，發現痕跡有明顯的規律或是數學上的意義。

步驟 2：探討葉片上摺痕的數學意義

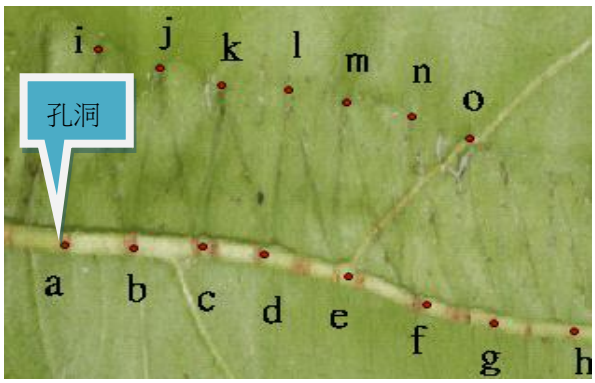
1. 將葉片打開後，看見葉片上有許多象鼻蟲在捲葉時所做的小孔洞記號，沿著這些記號，我們標上數字 1 至 8，如(圖 9)。
2. 將數字 1、2 串連，2、3 串連，3、4 串連，找出跟數學有相關的意義，如(圖 10)。
3. 在攤開的葉片上分別標上英文字母 a 至 o 表示為葉片上的小孔洞，以 3 個英文字母為一個單位，如(圖 11)。
4. 分別將 abi、bcj、cdk、del、efm、fgn、gho 等串連，找出跟數學有相關的意義，如(圖 12)。



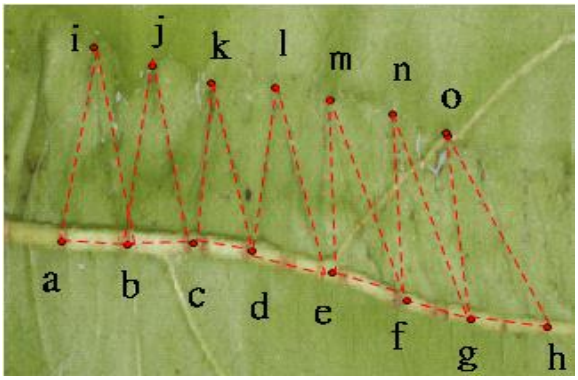
(圖 9)標上記號



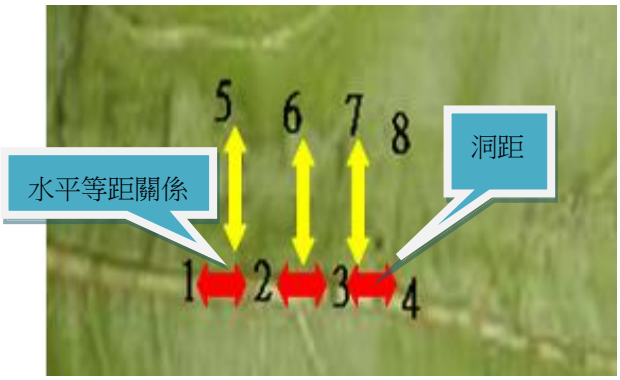
(圖 10)連接孔洞



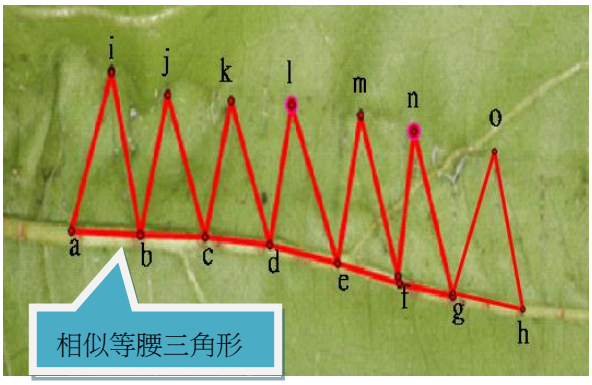
(圖 11)標示孔洞



(圖 12)將每個孔洞作連接



(圖 13)有著水平等距關係



(圖 14)有著相似等腰三角形關係

結果 2：

1.<u>發現水平等距關係</u>：若將相鄰兩旁的各小孔洞串聯後，可以發現葉片上擁有著水平等距關係，如：將點 1 與點 2 串連起的距離 ＝ 將點 2 與點 3 串起的距離（$\overline{12}=\overline{23}$），以此類推，結果如(圖 13)。

2. <u>發現等腰三角形</u>：若將葉片上的小孔洞串聯起來後，可發現葉片上擁有著相似等腰三角形的規律，如：將小孔洞 i、小孔洞 a 與 b 串聯起來後為 Δiab ；將小孔洞 j、小孔洞 b 與 c 串聯起來後為 Δjbc，以此類推，結果如(圖 14)。

研究二：求證捲葉內部裡的三角形、多邊形及圓的數學關係

步驟 1：找出三角形、多邊形及圓的數學相關資料

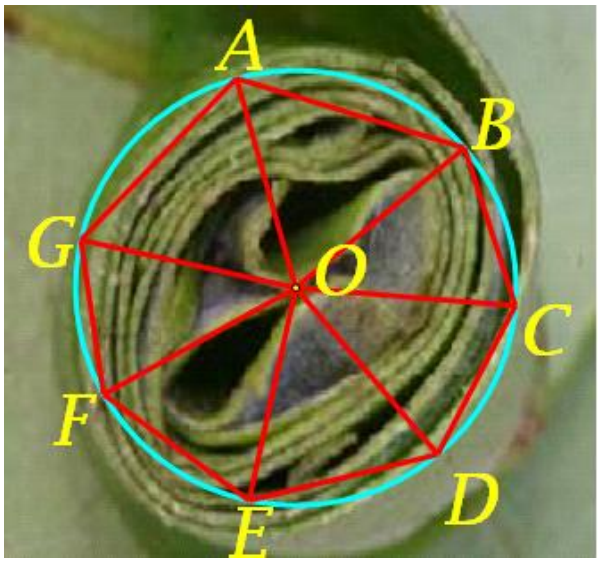
我們從前人研究資料可以得知，將象鼻蟲捲的葉子攤開後可以發現葉片上擁有著排列的小孔洞，若沿著象鼻蟲所做的小孔洞記號之路徑用摺紙的方式可以摺出一個平面的正六邊形。但是我們觀察實際上的捲葉是立體圓柱狀，跟平面正六邊形是否相關聯？應如何演算求證?

於是我們另外參考了文獻資料，得知在數學的定義裡，當一個平面圓若內接正六邊形、正十二邊形、正二十四邊形…等，會發現內接的正多邊形，邊數愈大，其正多邊形的面積就會越趨近於圓形。同時，若將多邊形中心點至各頂點作直線連接，此時會呈現出正多邊形可由多個三角形所組合成。**因此得到的結論是 n 個三角形可組合成一個 n 邊形，邊數越大，其面積會越趨近於圓。**

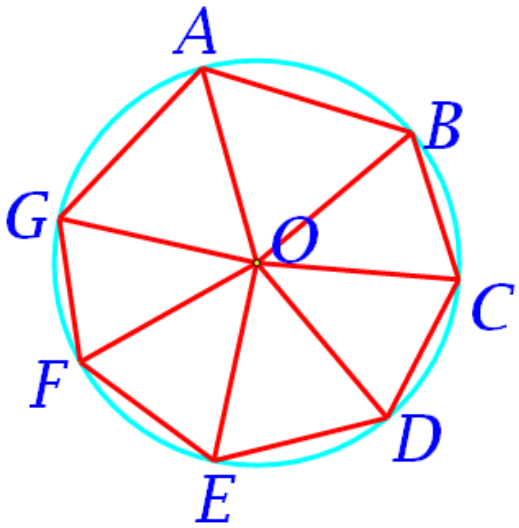
步驟 2：找出捲葉內部的中心點及三角形

由步驟 1 知道三角形、多邊形與圓形之間的關係後，我們就將搖籃剪開觀察內部情況，明顯看到捲葉的內部是由一圈一圈的圓捲成，於是以捲葉剖面圖中最外一圈為例。

試著由捲葉上點出大約的中心位置，為 O 點，剖面圖中葉子摺痕的方向點出 A、B、C、D、E、F、G 七個點，並將 O 點分別向外延伸到 A 至 G 等各頂點作直線連接，最後將點 A 與點 B 連接；點 C 與點 D 連接；點 E 與點 F 連接；點 G 與點 A 連接。如(圖 28)



(圖 28) 將搖籃剪開後發現了相似三角形規律



(圖 29) 模擬搖籃內相似三角形的內部圖

結果 1：

1. 以各頂點互相連接 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CD}$、$\overline{DE}$、$\overline{EF}$、$\overline{FG}$、$\overline{GA}$ 為多邊形的邊長。如(圖 28)
2. 以中心點 O 點至各頂點可連接為 $\overline{OA}$、$\overline{OB}$、$\overline{OC}$、$\overline{OD}$、$\overline{OE}$、$\overline{OF}$、$\overline{OG}$，由圖觀察，發現這些線段會是圓的半徑。如(圖 29)
3. 圓內由 ΔOAB、ΔOBC、ΔOCD、ΔODE、ΔOEF、ΔOFG、ΔOGA 等 7 個類似等腰三角形組合，可成為一個七邊形的圖形。如(圖 28、29)
4. 發現捲葉內的圓，有 7 個類似等腰三角形組合成的七邊形。

步驟 3： **模擬捲葉內部情形**

從上述步驟 2 的搖籃剖面圖中，我們依捲葉摺痕的痕跡標上記號後，可畫出一個七邊形，於是我們按照捲葉內所畫出的痕跡，嘗試模擬平面、單層的七邊形圖形，分別用手作摺紙與 GSP 幾何繪圖軟體兩種方法模擬實驗，其過程與結果如下：

1. **手作摺紙的方式模擬：**

①在一張長 35 公分的長條紙上，摺出底邊為 5 公分的等腰三角形，並分別標上大、小寫英文字母表示點與邊，如(圖 15)。

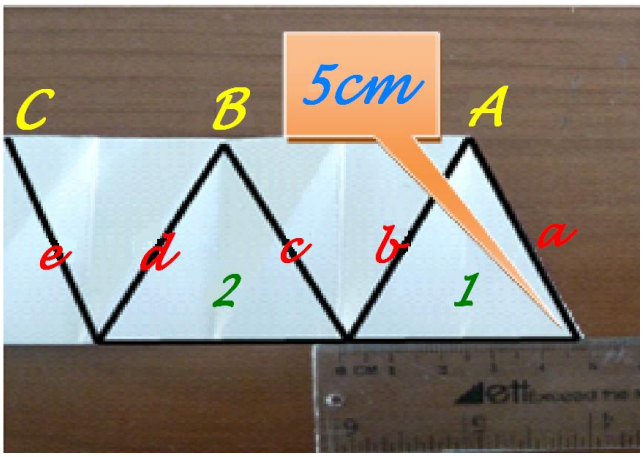
②當最右邊等腰三角形向左疊起時，相鄰的兩邊則會互相疊合，例如：當 Δ1與Δ2 疊合，邊 b 與邊 c 會疊合，且點 A 與點 B 相交於一點，如(圖 16)。

③當 Δ1、Δ2與Δ3互相疊合時，邊 d 與邊 e 也會互相疊合，則點 A、點 B、點 C 會相交於一點，如(圖 17)。

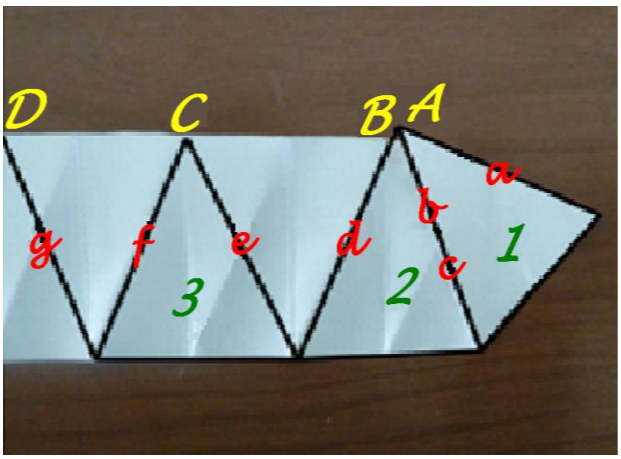
④ Δ1、Δ2、Δ3與Δ4 互相疊合時，邊 f 與邊 g 也會互相疊合，則點 A、點 B、點 C、點 D 相交於一點，如(圖 18)。

⑤ Δ1、Δ2、Δ3、Δ4與Δ5 互相疊合時，邊 h 與邊 i 也會互相疊合，則點 A、點 B、點 C、點 D、點 E 相交於一點，如(圖 19)。

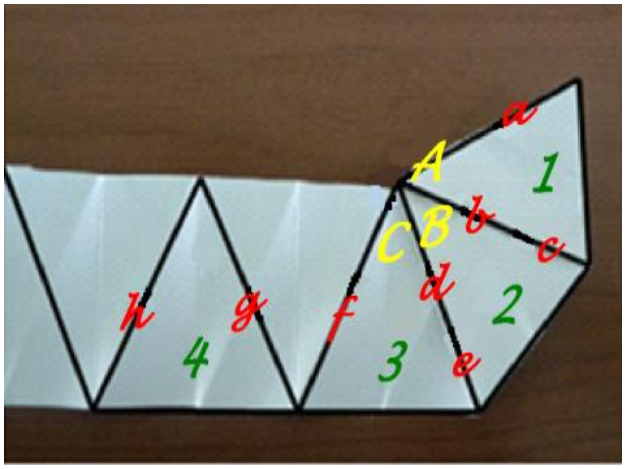
⑥ Δ1、Δ2、Δ3、Δ4、Δ5、Δ6與Δ7 互相疊合時，邊 j 與邊 k；邊 l 與邊 m；邊 n 與邊 a 也會互相疊合，則點 A、點 B、點 C、點 D、點 E、點 F 與點 G 相交於一點，如(圖 20)。



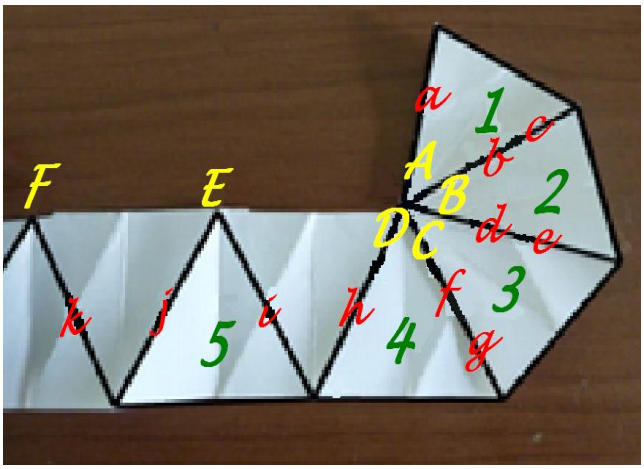
(圖 15)標上記號



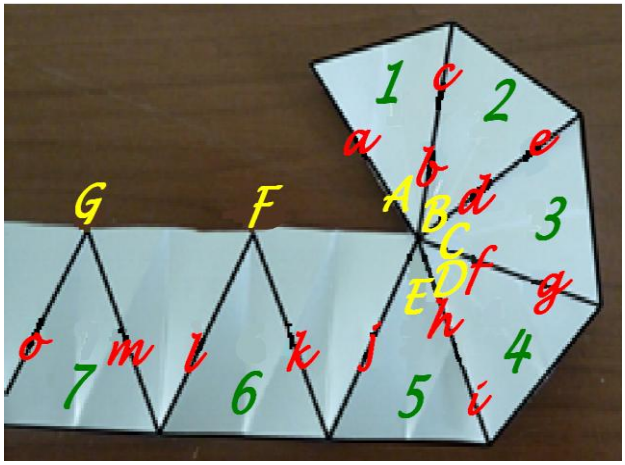
(圖 16)邊 b 與邊 c 疊合



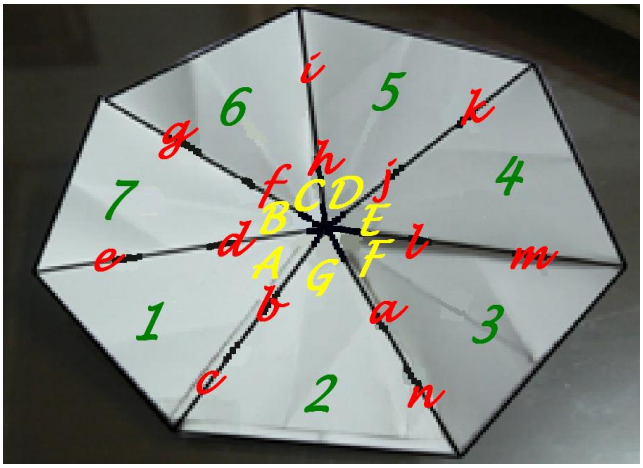
(圖 17)邊 d 與邊 e 疊合



(圖 18)邊 f 與邊 g 疊合



(圖 19)邊 h 與邊 i 互相疊合



(圖 20)七邊形的完成圖

結果 3-1：

經此手作摺紙模擬實驗可仿象鼻蟲製作搖籃時的路徑，並可摺出一平面七邊形。

2. 利用 GSP 繪圖軟體模擬七邊形圖形，其語法與模擬過程如下：

① n：假設為正 n 邊形

② $\frac{1}{n}$：假設其任意的一水平線段為一個單位長，並設此水平線段與正多形邊長比例為 $1:n=\frac{1}{n}$，確定每個邊長比例都相同

③ x：一個水平線段真實的長度

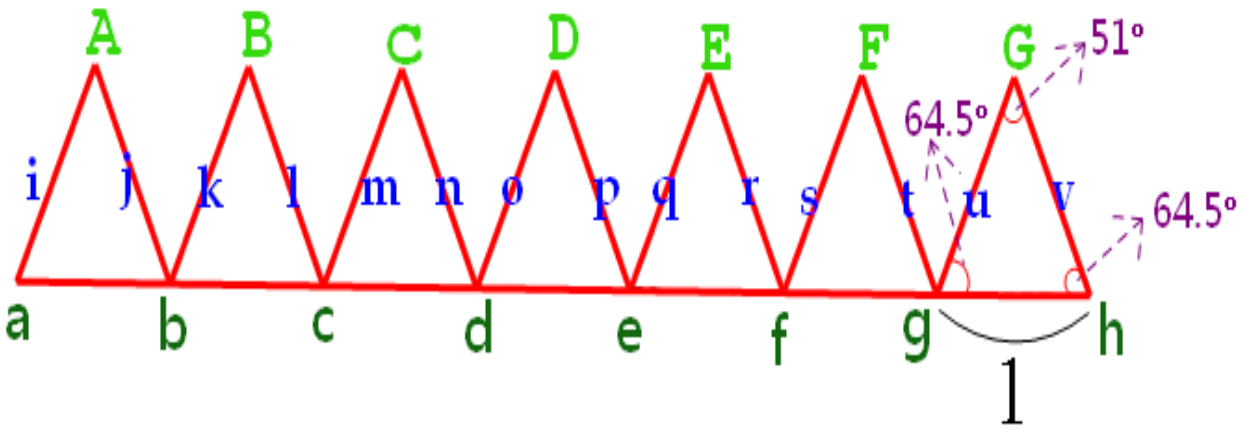
註：trun 為刪去函數。將輸入值計算結果的小數部分刪去，取整數值。

例如：trunc（2.6）= 2 及 trunc（- 7.8）= - 7。

④ $\frac{360°}{n}$：代表每個全等三角形頂角的角度

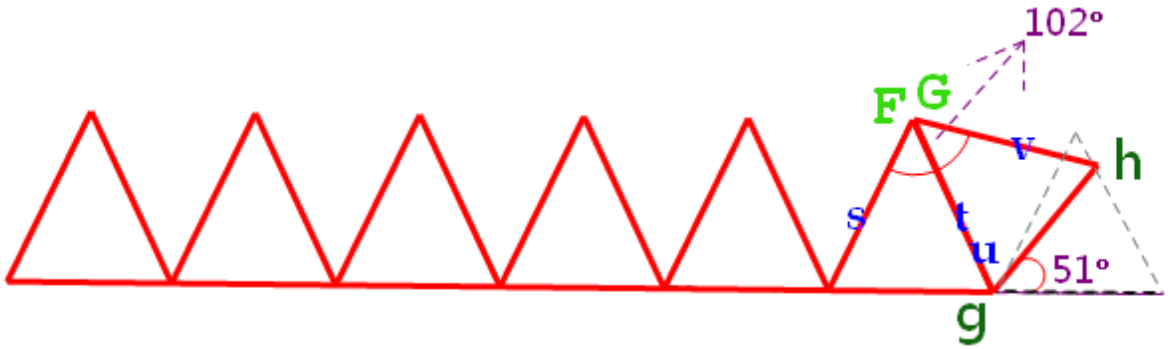
⑤GSP 繪圖軟體模擬七邊形圖形－模擬過程：

（1）分別標上點 a 至點 h，表示為葉片上象鼻蟲捲葉時所戳的水平方向小孔洞；且標上點 A 至點 G，表示三角形的頂點；此時 A 至 $\overline{ab}$ 的垂直距離即表示葉片上的垂直距離，假設 n 為正多邊形的邊數，當 n = 7 時，則表示此模擬圖合併後為正七邊形。此時正七邊形每個邊長是 1 公分，則周長（即 $\overline{ah}$ ）為 7 公分，而頂角為 $\frac{360°}{7}=51°$、底角為 $\frac{(180°-51°)}{2}=64.5°$。如（圖 21）



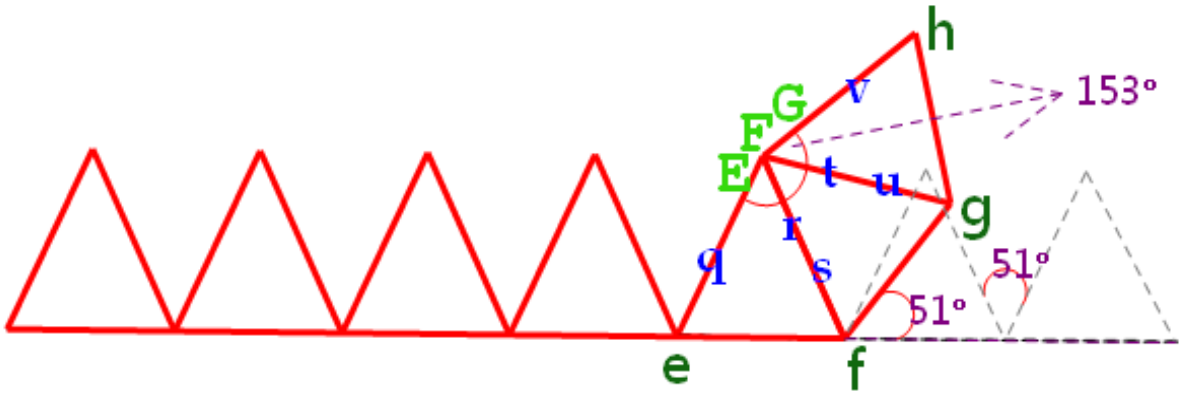
(圖 21)計算結果頂角為 51°、底角各為 64.5°

（2）當模擬圖第 1 個三角形捲起時，邊 t、邊 u 會互相疊合；已合併的頂角總角度合約為 102°；而捲起的角度量為51°。如（圖 22）



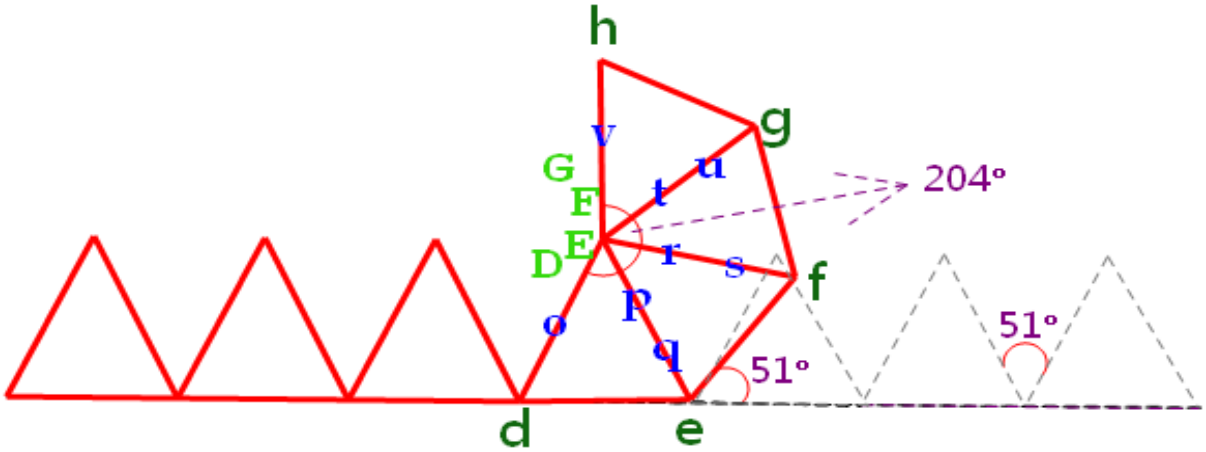
(圖 22)兩個頂角相加為102°

（3）當模擬圖第 2 個三角形捲起時，邊 r、邊 s 會互相疊合；已合併的頂角總角度合約為153°；三角形開始轉動時的角度量為51°，因為 7 個三角形為全等，所以每個轉動的角度量皆會相同。如(圖 23)



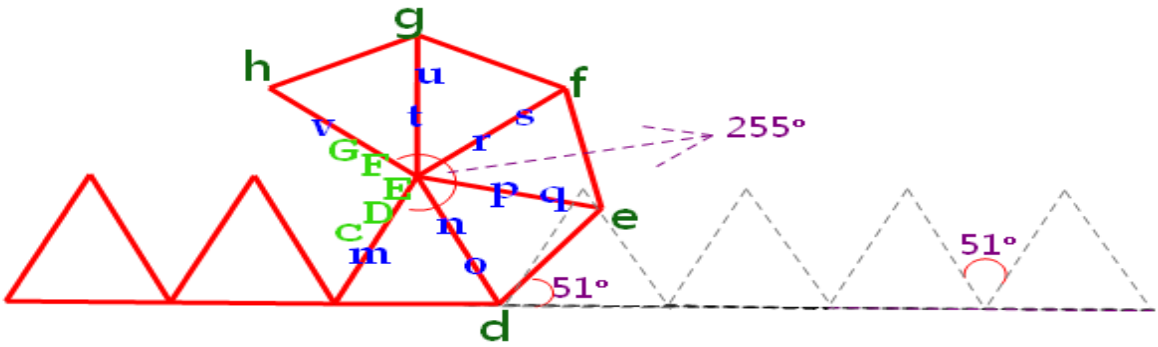
(圖 23)三個頂角相加為153°

（4）模擬圖第 3 個三角形捲起時，則邊 p、邊 q 會互相疊合；已合併的頂角總角度合約為 204°；而三角形開始轉動時的角度量為51°。如(圖 24)



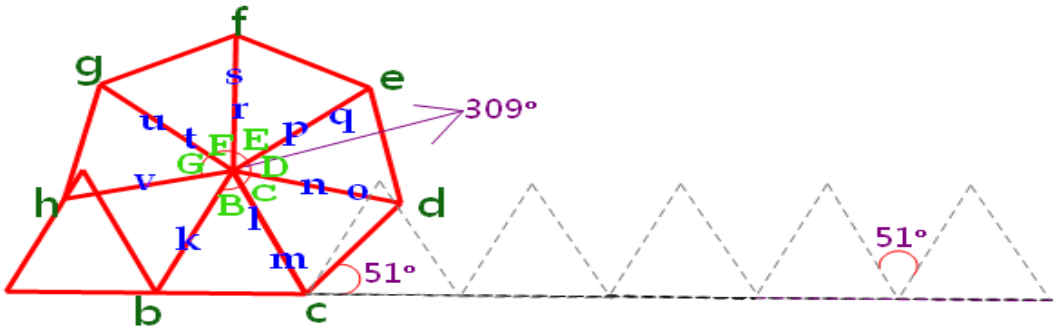
(圖 24)四個頂角相加為 204°

(5)模擬圖第 4 個三角形捲起時，則邊 n、邊 o 會互相疊合；已合併的頂角總角度合約為 255°；而三角形開始轉動時的角度量為 51°。如(圖 25)



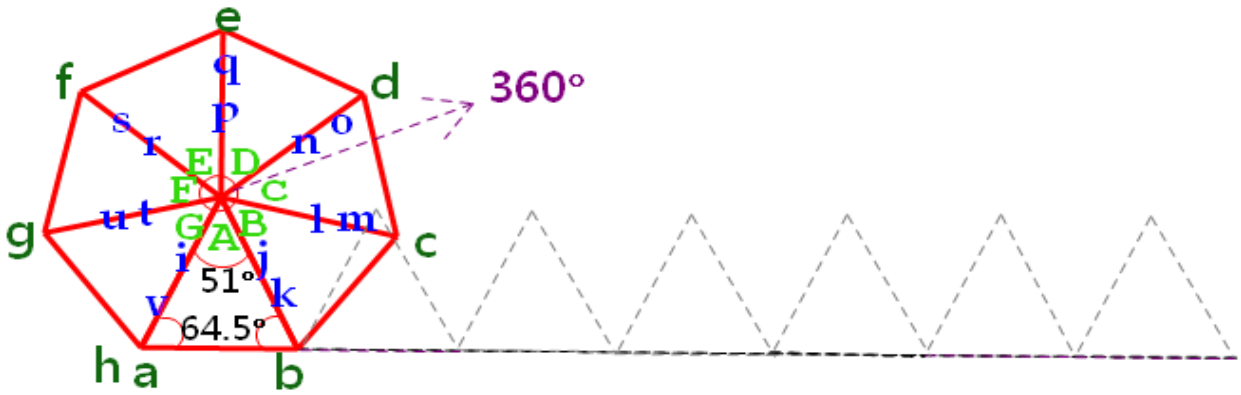
(圖 25)五個頂角相加為 255°

(6)模擬圖第 4 個三角形捲起時，則邊 l、邊 m 會互相疊合；已合併的頂角總角度合約為 309°；而三角形開始轉動時的角度量為 51°。如(圖 26)



(圖 26)六個頂角相加為 309°

(7)當邊 j 與邊 k、邊 i 與邊 v 互相疊合時，正七邊形內角和為 360°，即形成一正七邊形。如(圖 27)



(圖 27)七個頂角相加為 360°、剛好為一圓心角

結果 3-2：

當七個等腰三角形組合成正七邊形時，每個相鄰的邊會互相疊合，其內角呈現 360°，每個三角形底角角度為 64.5°、頂角為 51°。

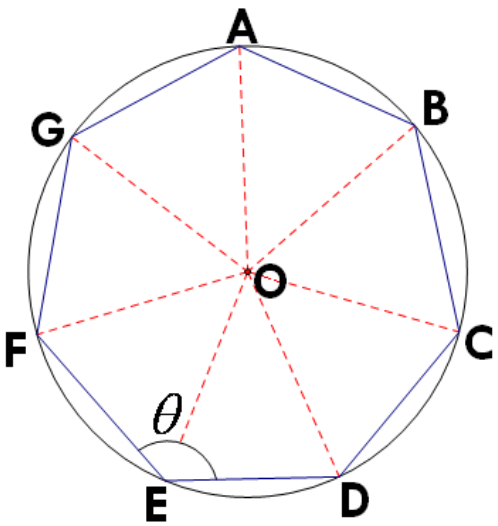
研究三：探討捲葉裡圓內接正七邊形面積之理想狀態，並藉由 GSP 幾何作圖軟體來輔助觀察圖形

步驟 1：演算圓內接正七邊形理想狀態的面積

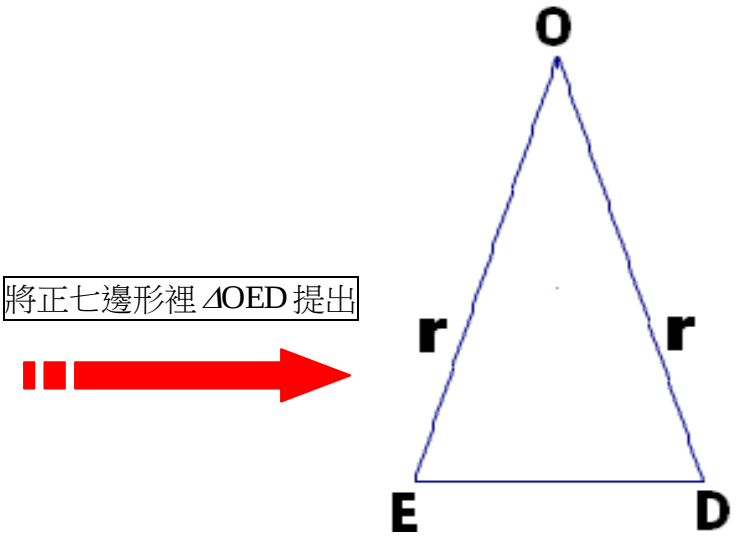
1. 從研究二結果，我們先假設象鼻蟲製作捲葉內的摺痕是具有等腰及全等性質，並使用 GSP 繪圖軟體先模擬出圓內接正七邊形的理想狀態圖。如(圖 30)

2. 我們找出中心點，以其中一個 ΔOED 中 $\overline{OE}=\overline{OD}=$半徑 r，將各頂點連接的線段當作正七邊形的邊長，並由正七邊形內部其中一個三角形觀察，以 ΔOED 為例，過 O 點作 $\overline{ED}$ 的垂直線交於 H 點，則 $\overline{OH}$ 為 ΔOED 的高。如(圖 31)

3. 由演算角度關係得到三角形頂角及底角的大小，因此我們得知圓內接正七邊形之中心點會等同於圓心。我們利用面積方式說明，其演算過程如下：



(圖 30)圓內接正七邊形



(圖 31)從圓內接正七邊形提出的等腰三角形

(一)演算一個圓內三角形底角

1. 邊長關係：

(1)在 ΔOED 中，過中心點 O 作 $\overline{ED}$ 的垂線交於 H 點，且 r 為圓的半徑。如(圖 32)

(2) 假設正七邊形之每個邊長為 a，則 $\overline{ED}=a$，$\overline{EH}=\overline{HD}=\frac{a}{2}$。如(圖 33)

2. 角度關係：

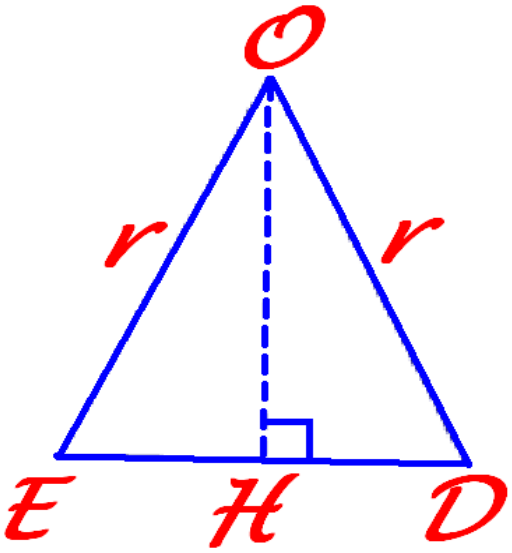
(1)如(圖 32)，三角形之 $\angle EOD$(頂角)為 $\frac{360°}{n}=\frac{360°}{7}=51°$(四捨五入) (n =邊數)

(2)正 n 邊形內角和公式：$180°\times(n-2)$，代入 n=7 進行計算

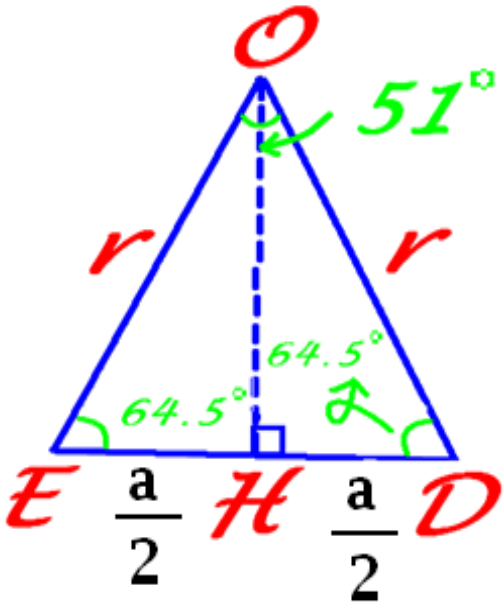
$\Rightarrow$ 正七邊形內角和：$180°\times(7-2)=900°$

$\Rightarrow$ 正七邊形的一個內角約為 $\frac{900°}{7}=129°$(因無法整除，故取四捨五入後的值)

(3)則 $\angle OED=\angle ODE=\frac{129°}{2}=64.5°$ (為 ΔOED 兩側底角)。如 (圖 33)



(圖 32) $\overline{OH}$為ΔOED的高



(圖 33)頂角為 51°，底角各為 64.5°

(二)正七邊形之面積演算：

(1)我們由邊長與角度關係，利用三角函數基本定理計算出邊長

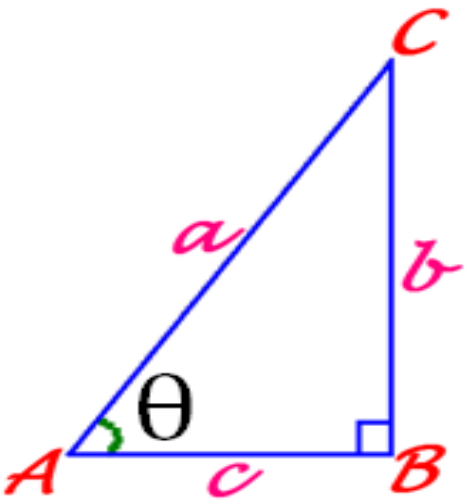
$$\overline{OE}=\overline{OD}=r：\quad \cos 64.5°=\frac{\frac{a}{2}}{r}\ \Rightarrow\ r=\frac{\frac{a}{2}}{\cos 64.5°}=\frac{a}{2\times\cos 64.5°}$$

(2)由(圖 34)得知， $\sin\theta$、$\cos\theta$ 及 $\tan\theta$ 三者之間的關係：

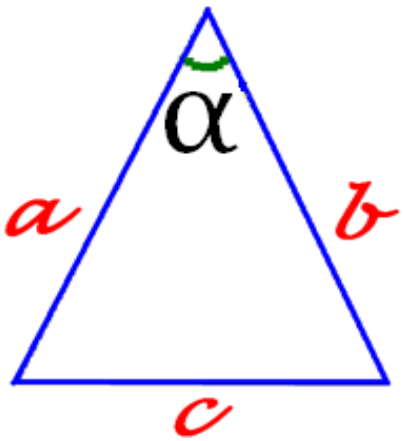
$$\sin\theta=\frac{b}{a}\qquad \tan\theta=\frac{b}{c}\qquad \cos\theta=\frac{c}{a}$$

(3)三角形面積公式。如(圖 35)：

$$\boxed{\text{面積}=\frac{1}{2}\times\text{底}\times\text{高}=\frac{1}{2}\times a\times b\times\sin\alpha}$$



(圖 34)三角函數基本定理



(圖 35)三角形面積公式圖

(4)綜合以上 1、2、3 點結果，並代入第 3 點三角形面積公式，求出 ΔOED 面積：

$$\Delta OED\text{ 面積}=\frac{1}{2}\times r\times r\times\sin 51^\circ$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{a}{2\times\cos 64.5^\circ}\times\frac{a}{2\times\cos 64.5^\circ}\times\sin 51^\circ$$

$$=\frac{a^2}{8(\cos 64.5^\circ)^2}\times\sin 51^\circ$$

正七邊形 ABCDEFG 的面積 $=7\times\dfrac{a^2}{8(\cos 64.5^\circ)^2}\times\sin 51^\circ$

結果 1：

1. 各頂點連接為正七邊形的邊長，如 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CD}$、$\overline{DE}$、$\overline{EF}$、$\overline{FG}$、$\overline{GA}$，並假設邊長為 a。演算過程中利用三角函數基本定理求得正七邊形內部任一個三角形，以

   ΔOED 為例，其面積結果為 $\dfrac{a^2}{8(\cos 64.5°)^2}\times\sin 51°$。

2. 因為假設的三角形為等腰及全等性質，捲起時可聚集成一個正七邊形，同時每個三角形的頂點可交於一點，此點即為正七邊形的中心點，則面積和為 $\Delta OED\times 7$，即：

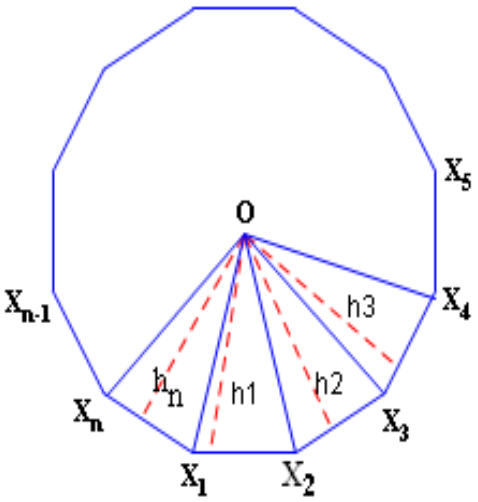
   內部為中心點的正七邊形面積 $= 7\times\dfrac{a^2}{8(\cos 64.5°)^2}\times\sin 51°$

研究四：象鼻蟲搖籃上的洞距，求證構成多邊形內的任意形狀三角形與正 n 邊形面積之關係式

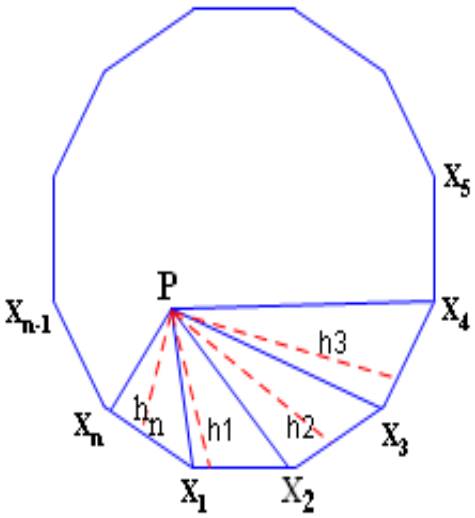
步驟 1：探討構成多邊形內的三角形及正 n 邊形面積之關係式

實驗假設：

假設條件相同時(正 n 邊形邊長皆為 a、內角皆為 θ)，當同樣一個正 n 邊形內部正中央一點 O 與各頂點連接形成的 n 個等腰三角形的情況，亦與內部任意一點 P，由不同大小的三角形所組成的面積和應為相等，如(圖 36、37)。



(面積相等)



(圖 36)全等三角形組合成正 n 邊形

(圖 37)三角形組合成正 n 邊形

求出正 n 邊形面積計算關係式：

1. 內部為中心點的面積公式：

$$\Delta X_1OX_2+\Delta X_2OX_3+\cdots+\Delta X_{n-1}OX_n=n\times\frac{a^2}{8\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^2}\times\sin\frac{2\pi}{n}$$

2. 內部為任意點的面積公式：

$$\Delta X_1PX_2+\Delta X_2+PX_2+\cdots+X_{n-1}PX_n=\frac{a}{2}\times(h_1+h_2+...h_n)$$

3. 面積相等關係式：

$$\frac{a}{2}\times(h_1+h_2+...h_n)=n\times\frac{a^2}{8\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^2}\times\sin\frac{2\pi}{n}$$

$$\Rightarrow\frac{a}{2}\times(h_1+h_2+...h_n)=n\times\frac{a^2}{8\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^2}\times\sin\frac{2\pi}{n}\times\frac{2}{a}\quad（同乘以\frac{2}{a}）$$

$$\Rightarrow(h_1+h_2+...h_n)=n\times\frac{a}{4\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^2}\times\sin\frac{2\pi}{n}$$

結果 1：

我們在研究中發現正 n 邊形內部的任意一點到各邊垂直距離的和是每個三角形的高相加$(h1+h2+\cdots+hn)$，因此我們了解到不管其三角形頂角所組成的點是否在正 n 邊形中心，其面積皆會相等。

其計算結果如下：

1. 正 n 邊形內部為中心點的面積公式結果：$=n\times\frac{a^2}{8\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^2}\times\sin\frac{2\pi}{n}$

2. 正 n 邊形內部為任意一點的面積公式結果：$\frac{a}{2}\times(h_1+h_2+...h_n)$

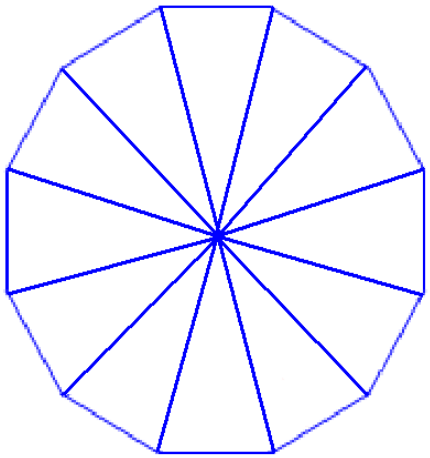
3. 因為其兩者面積相等，所以最後經過化簡的結果為 $(h_1+h_2+...h_n)=n\times\frac{a}{4\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^2}\times\sin\frac{2\pi}{n}$，則代表內部為任意點與內部為中心點的正 n 邊形面積相等。

步驟 2：以角度及邊長來證明正 n 邊形面積關係

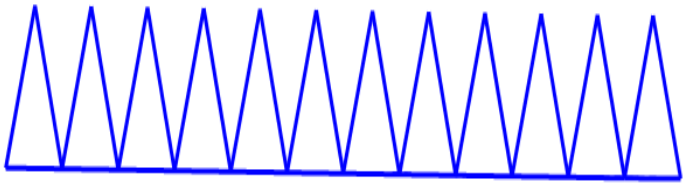
由步驟 1 的結果中，我們利用正 n 邊形內部三角形的高來證明無論內部為任意點的面積及內部為中心點的面積都會相同。而我們觀察，象鼻蟲在進行捲葉時並沒有依照等腰三角形的摺痕，如(圖 38)，但最後仍能將搖籃完整製成；我們推測其中必有一定的規律性，使任意三角形能密合形成一個正 n 邊形。其研究模擬過程如下：

(圖 38)葉片摺痕上的三角形大小不一

1. 我們一開始先以正十二邊形為例，繪製模擬圖及其展開圖如(圖 39)、(圖 40)，並在正十二邊形中分割成十二個底邊相同、高相等的等腰三角形。我們發現等腰三角形所形成的展開圖，因其腰長、高均相同，所以能匯集在正十二邊形的中心。



(圖 39)等腰三角形所合併的正十二邊形

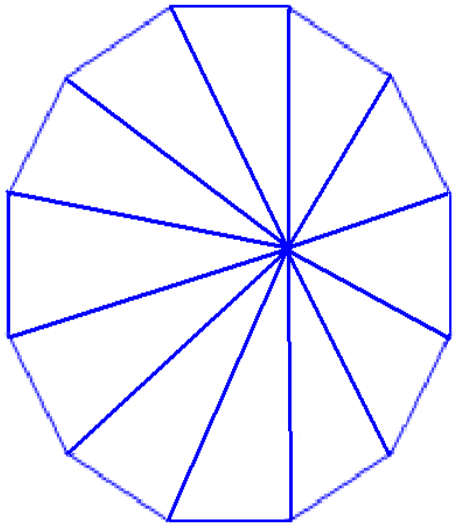


(圖 40) 等腰三角形的展開圖

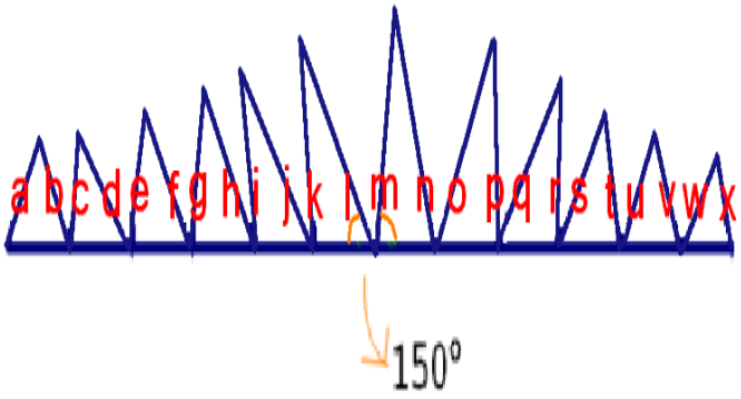
2. 接著我們再繪製一個正十二邊形，並在其中分割成十二個底邊相同、高不相等的三角形及一個任意三角形展開圖。在任意三角形的展開圖當中，我們發現三角形雖邊長、高均不相等，但仍擁有以下兩點規律：

①兩個三角形相鄰的邊相等、且相鄰的角度相加會等於正 n 邊形一內角度數，如(圖 42)。

②在任意三角形的展開圖當中，兩個相鄰的邊會等長，但三角形的高會依序遞增、遞減。



(圖 41)任意邊長三角形所合併的正十二邊形



(圖 42)不等三角形合併為十二邊形的展開圖

<u>※演算過程</u>：

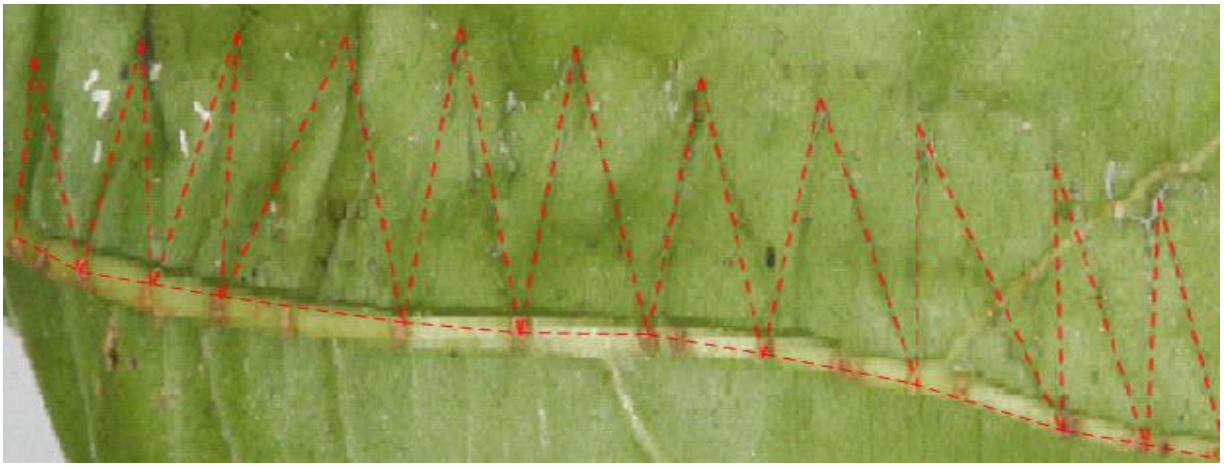
我們利用正 n 邊形內角和公式 $\frac{180°\times(n-2)}{n}$ 計算出正 n 邊形的一內角度數。

⇒代入 n=12 進行計算：$\frac{180°\times(12-2)}{12}=\frac{180°\times10}{12}=150°$

∵我們可得知正十二邊形一內角等於150°

∴當任意邊長的三角形符合相鄰兩邊等長時，即可組成正十二邊形，而我們便可得知其一內角會等於150°

3. 我們在觀察象鼻蟲時，發現其葉片孔洞所形成的三角形會由葉柄到葉尖依序遞增、遞減的順序排列，如(圖 43)因此我們可由步驟 2 的證明得知：我們取平均值所繪製的等腰三角形所組成的正七邊形面積，與實際葉片上所組成的正七邊形面積相等，且並不會因為其三角形兩腰長的不同而影響面積。



(圖 43)實際葉片上的三角形

結果 1：

根據研究四步驟二的實驗過程，我們利用邊長及角度的關係，以正十二邊形為例，證明了正 n 邊形中分割的三角形頂角所匯集成的點無論是否在中心，只要符合兩個三角形相鄰的邊等長、且相鄰的角度相加會等於正 n 邊形一內角度數 $\frac{180^\circ \times (n-2)}{n}$，其面積皆相等。

研究五：探討捲葉上的三角形合併成多邊形時，求三角形邊長比例的平均值與利用三角函數定理及餘弦定理來證明

步驟 1：由觀察結果取邊長比例的平均值

我們將捲葉上可記錄到的小孔洞連接，有將近 15 個相似等腰三角形，以計算出其股與底邊之邊長比例為 1.17，如(附錄一)。

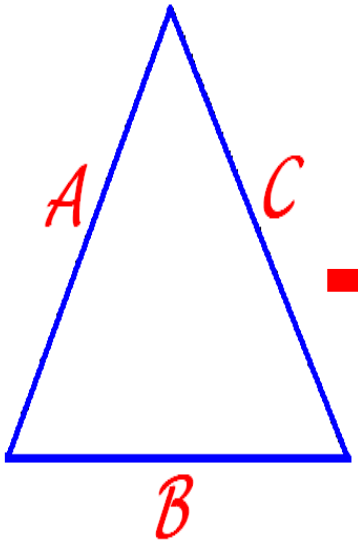
1. 我們以葉片中央葉脈地方的洞距距離為底邊，並量測每個三角形實際的兩股長度。
2. 首先假設葉片上的相似等腰三角形的兩股及底邊分別為 A、B、C，如(圖 44)，我們知道以等腰三角形的邊長比例來看，兩股與底邊的比值應為相同，即 A：B = C：B。

※ 演算過程：

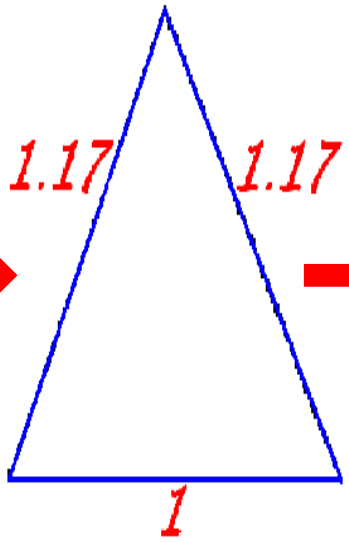
因為我們實際在捲葉上的三角形僅為相似，所以我們將所有量測到的兩股與底邊長度作比例計算，並將所有的比例值(即 15 個三角形，共 30 個比例值)取平均數進行計算。

設底邊(B)為 1 $\Rightarrow \frac{A}{B} : \frac{C}{B} = \frac{A}{B} : \frac{A}{B} = \frac{腰}{底} = \frac{1.17}{1}$

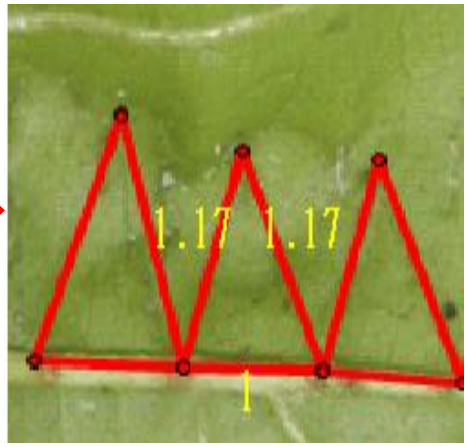
所以得到最後比例為 $\boxed{A : B = C : B = 1.17 : 1}$ 如圖(44、45、46)



(圖 44)設葉片上兩股及底邊為 A、B、C



(圖 45)兩股為 1.17 底邊為 1



(圖 46)葉片上腰長約為 1.17 底長為 1

結果 1：

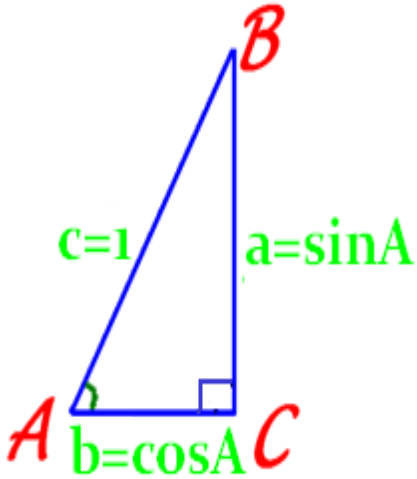
我們假設三角形腰長為 A、C，底邊為 B，然後在實際葉片上進行測量，並取每個三角形邊長的比例進行平均值的計算(利用四捨五入的方式)，得到的數據為 A：B：C = 1.17：1：1.17，即得到腰及底的比例為 腰：底 = 1.17：1。

步驟 2：由三角函數定理與洞距比例間之數學關係

由於象鼻蟲在捲葉時，我們只能從葉片上觀察洞距的關係，而無法觀測角度大小，所以我們利用上述步驟 1 所計算出來的邊長比例關係，代入三角函數及餘弦定理，來證明捲葉內所含的多邊形型態。我們由研究三得知三角函數的基本定理 $\sin\theta$、$\cos\theta$ 及 $\tan\theta$ 三者關係，並

利用**勾股定理**、**畢達哥拉斯恆等式及**差的平方公式推導出**餘弦定理**，再利用餘弦定理進行三角形角度與邊長的關係運算。

(一)證明畢達哥拉斯恆等式：



(圖 47)勾股定理關係圖

根據右(圖 47)我們假設直角三角形三邊長為 a、b、c。

當斜邊長 c= 1 時

①根據三角函數的定義，可知：

$\sin A = \frac{a}{c} \Rightarrow a = \sin A$

$\cos A = \frac{b}{c} \Rightarrow b = \cos A$

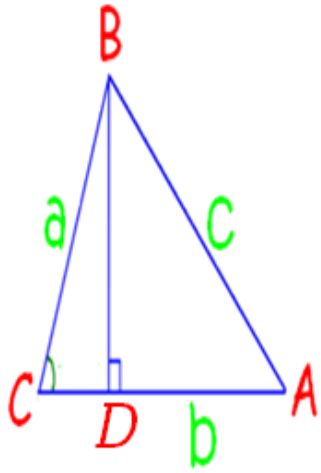
②根據勾股定理，在一直角三角形內兩股平方和等於斜邊平方

即 $a^2 + b^2 = c^2$ 可得 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ ，如(圖 47)。

(二)餘弦定理定義：

餘弦定理為三角形中三邊長度與一個角的餘弦值（cos）之數學式 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$ 。

※餘弦定理證明如下：



(圖 48) 設三角形邊長為 a、b、c

如(圖 48)所示，假設 ΔABC 中，$\overline{AB} = c$，$\overline{BC} = a$，$\overline{AC} = b$ 。

過 B 點作 $\overline{AC}$ 的垂線交於 D 點，若 D 點在 $\overline{AC}$ 上，

則 $\overline{BD} = a\sin C$ ，$\overline{CD} = a\cos C$ ，$\overline{AD} = b - a\cos C$ 。

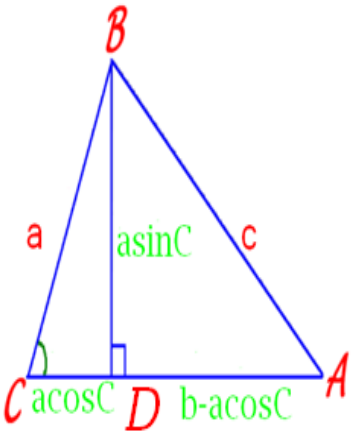
(三)根據勾股定理得知：

$$c^2=(a\sin C)^2+(b-a\cos C)^2$$

根據差的平方公式$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$，可得知：

$$\Rightarrow c^2=a^2\sin^2C+b^2-2ab\cos C+a^2\cos^2C$$

$$\Rightarrow c^2=a^2\left(\sin^2C+\cos^2C\right)+b^2-2ab\cos C$$



(圖 49) 餘弦定理基本圖

(四)接著利用畢達哥拉斯恆等式$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$代入上式，化簡可得$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

從上述定理中我們得知以下證明：

1. 當已知三角形的兩邊和一角時，可利用餘弦定理來計算第三邊的長。

2. 當知道三邊的長度時，可以由餘弦定理得到三角形的三個內角。

(五)利用上述的基本定理，代入我們實際的數據(1.17)算出底角度數

根據步驟 1 得到的等腰三角形之邊長比例式，我們將結果利用餘弦定理進行計算。

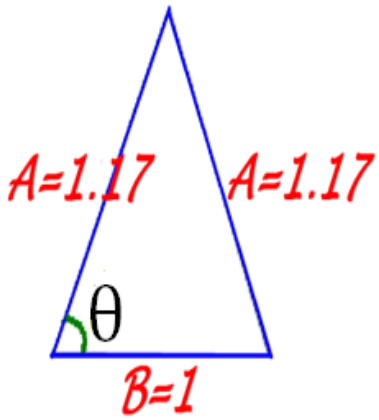
假設兩邊的股為 A，底邊為 B 如(圖 50)，可得下列公式:

$$\cos\theta=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{(\text{兩鄰邊平方總和})-(\text{對邊平方})}{2\times(\text{兩鄰邊乘積})}$$

$$\cos\theta=\frac{A^2+B^2-A^2}{2AB}=\frac{1.17^2+1^2-1.17^2}{2\times1.17\times1}=0.42735$$

(利用四捨五入取小數點以下五位)

$\theta=\cos^{-1}(0.42735)=64.7°$ (三角形中一個底角的角度)

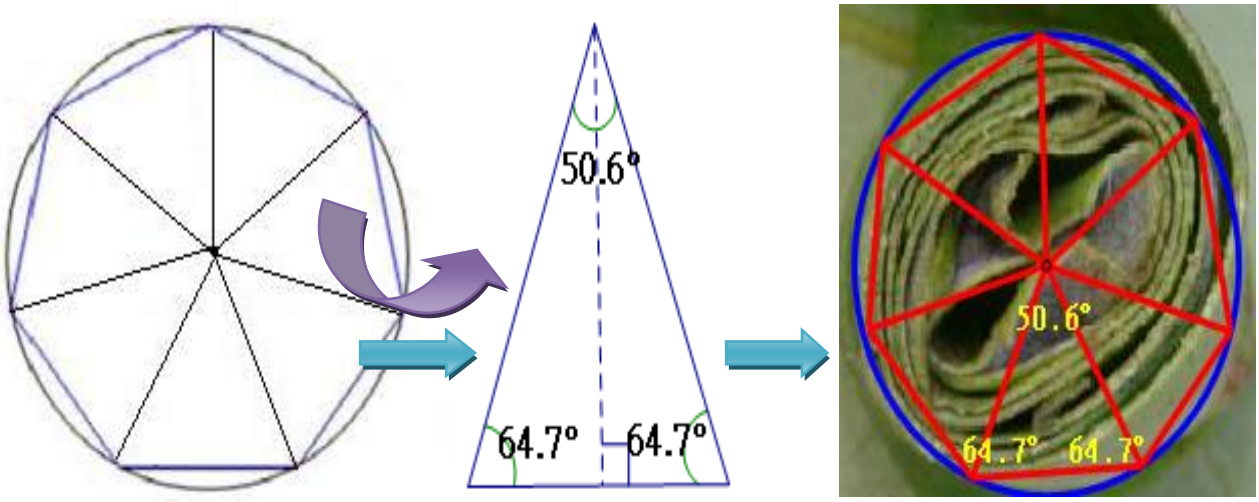


(圖 50)等腰三角形邊長比例式圖

(六)根據上述所假設的等腰三角形：

得知底角大約為 $64.7°$，頂角為 $180° - (2 \times 64.7°) = 50.6°$ ，

因此根據研究三的結果為 $\frac{360°}{\text{頂角角度}} = \text{n邊形}$ ，當我們已知頂角度數為 $50.6°$ 時，即可代入公式 $\frac{360°}{50.6°} = 7.12$ (小數點以下四捨五入)，**則 n=7，求出為正七邊形**，如下圖 51、52、53。



(圖 51) 正七邊形　(圖 52)由正七邊形所提出之三角形　(圖 53)求出捲葉內三角形的度數

結果 2：

我們先計算出假設的全等等腰三角形之邊長比例為 1.17 關係後，再由三角函數的基本定理及餘弦定理的觀念代入驗算，我們得到等腰三角形**頂角約為 50.6°**，**底角約為 64.7°**，此結果與先前在研究三的步驟一所計算出正七邊形內角大小相近，所以我們可以知道捲葉上的洞距比例與數學的關係，約為正七邊形的圖形。

步驟 3：比較餘弦定理所計算出的角度與理論上正 n 邊形的角度之誤差範圍

底角：

理論值(全等等腰三角形)：$\frac{180°\times(7-2)}{7}\times\frac{1}{2}=64.5°$

實際值(相似等腰三角形)= 64.7°

誤差=$\frac{實際-理論}{理論}\times100\%=\frac{64.7°-64.5°}{64.5°}\times100\%=0.3\%$

頂角：

理論值(全等等腰三角形)：$\frac{360°}{7}=51.43°$

實際值(相似等腰三角形)=50.6°

誤差=$\frac{實際-理論}{理論}\times100\%=\frac{50.6°-51.43°}{51.43°}\times100\%=-1.61\%$

結果 3：

由餘弦定理所計算出的角度與正 n 邊形的角度的理論值之底角誤差值為 0.3%；頂角誤差值為-1.61%，故可判斷出此捲葉內部摺痕可呈現約正七邊形的圖形。

陸、討論

1. 我們在做實驗的過程中，曾經參考過第四十八屆的幾何高手-探討姬胡麻斑捲葉象鼻蟲之『搖籃』數學規律的送件報告，由前人的報告顯示葉片擁有著平行、等距以及「直角」三角形的關係，然而當我們觀察到葉片上的規律時，卻發現前人所謂的直角三角形並不是完全真正的直角，似乎卻比較接近兩腰相等的相似等腰三角形，所以我們以『平行、等距以及相似等腰三角形』等規律來研究。

2. 我們試著以直觀的方式觀察捲葉剖面圖上捲葉摺痕的痕跡，並作畫上記號，呈現出一個平面的七邊形圖形；但實際上的捲葉卻是立體的圓柱狀，所以使用這樣的直觀方法，

其精確性有限制。因為剖面圖上顯示的七邊形亦屬為平面二維，而實際捲葉為立體圓柱狀，是屬於三維空間，期許未來可以朝向圓柱體結構作觀察與研究。

3. 我們以直觀方式將孔洞作連接，其捲葉內部會有將近 15 個三角形；於是我們先以手作摺紙的方式模擬摺出七邊形並觀察，實際上七邊形由 7 個三角形組合成，將近 15 個三角形就約可成為 2~3 層捲葉；但在捲葉剖面圖以直接觀察卻是大約為 9 層，這是為何種關係呢？

我們再由前人研究資料顯示，得知象鼻蟲會先從葉片的最末端開始進行捲葉，等捲到 2~3 層間，會咬破葉片將卵產下。所以我們推論象鼻蟲剛開始在整脈的時候會以戳洞作記號，可能是因為需要先取適當的一部分葉片距離作為保護搖籃的基本厚度，接著後續再將剩餘的葉片捲曲到 L 型的缺口作封口，所以在葉片上的小孔洞並非佈滿全部葉片，而只取中央葉脈附近的部分而已。

4.由此一來，整個搖籃結構分配推論是開始的 2~3 層為固定搖籃形狀之用，產卵之後，繼續將捲葉用力向內壓，直至保護搖籃的基本厚度 2~3 層完成，接而再將其餘葉片往內摺彎，準備收尾的部分也分配為 2~3 層左右，所以整個捲葉的剖面圖看起來才會是大約 9 層的厚度。

5.由式子 $(h_1+h_2+...h_n)_{=}=n\times\frac{a}{4\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^2}\times\sin\frac{2\pi}{n}$ 中，我們由 n 個等腰三角形組成 n 邊形的面積論點來進行探討，即只要知道 n 邊形內三角形的高，就可以得到平面捲葉內接多邊形的面積；因邊數越大越趨近於圓，所以我們便可以求得趨近於圓的面積，即三角形的高就是葉面上排列整齊的小孔洞垂直距離。雖然我們決定洞距距離的方式是使用直尺以直觀方法量測，可能會有一些誤差值產生，但我們不需要精密的量測工具，就可以推論無論何種三角形所組成的多邊形，只要知道洞距的垂直距離(等於 n 邊形內部任一點至各邊上的垂直距離)，就可以得知 n 邊形面積 $\frac{a}{2}\times(h_1+h_2+...h_n)=n\times\frac{a^2}{8\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^2}\times\sin\frac{2\pi}{n}$ 。

柒、結論

1. 將捲葉打開發現排列整齊的小孔洞有水平等距關係以及等腰三角形關係。
2. 剪開捲葉後，在剖面圖上標記，呈現出 7 個類似等腰三角形組合成的七邊形。
3. 以捲葉內部摺痕探討若標上記號時為任意正 n 邊形，其面積關係以 2 種不同方式表示：

   ①葉片上的全等等腰三角形合併時，三角形頂角若重疊於中心點：

   面積公式：$n \times \dfrac{a^2}{8\left(\cos\dfrac{\theta}{2}\right)^2} \times \sin\dfrac{2\pi}{n}$

   ②若葉片上是以相似等腰三角形(但底邊相同)合併時，三角形頂角重疊於任一點：

   面積公式：$\dfrac{a}{2} \times (h_1 + h_2 + \ldots h_n)$

4. 不論何種三角形的頂角合併時所形成的點是否在中心，其形成的正七邊形面積應都相同。

   ①內部中心點與任一點的面積關係式：$\dfrac{a}{2} \times (h_1 + h_2 + \ldots h_n) = n \times \dfrac{a^2}{8\left(\cos\dfrac{\theta}{2}\right)^2} \times \sin\dfrac{2\pi}{n}$

   ②演算結果：$(h_1 + h_2 + \ldots h_n) = n \times \dfrac{a}{4\left(\cos\dfrac{\theta}{2}\right)^2} \times \sin\dfrac{2\pi}{n}$

   只要曉得每個三角形的高相加之總和$(h_1 + h_2 + \ldots h_n)$，就可以求出正 n 邊形的面積，所以得知捲葉中的洞距垂直距離間含有一個規律性數學關係。

5. 將求得的等腰三角形之邊長比例式(股：底 = 1.17：1)代入餘弦定理，求得頂角角度約為 50.6°、底角角度約為 64.7°。
6. 再將頂角 50.6°，帶入式子 $\dfrac{360°}{\text{頂角角度}} = n\text{邊形}$，$\dfrac{360°}{50.6°} = 7.12$ (小數點以下四捨五入) 約為正 7 邊形。
7. 比較餘弦定理所計算出的角度與正 n 邊形角度的理論值之誤差範圍，底角誤差為 0.3%；頂角誤差為 -1.61%，故可判斷出此捲葉內部摺痕可呈現約正七邊形的圖形。
8. 經數學演算數據得知象鼻蟲所製作的捲葉搖籃，剖面圖可呈現約為一個正七邊形，在數學

上有接近圓的模式，符合捲葉搖籃外觀的形態。

捌、參考資料

1. 歐書晴、施喬心、周欣穎、陳詩涵 中華民國第 48 屆中小學科學展覽會作品 幾何高手-探討姬胡麻斑捲葉象鼻蟲之『搖籃』數學規律
2. 國中數學 翰林版 七年級下冊 第 3 章 比例式
3. 國中數學 康軒版 八年級下冊 第 2 章 平方根與勾股定理
4. 國中數學 康軒版 九年級上冊 第 1 章 相似形
5. 高中數學 龍騰版 二年級上冊 三角函數基本定理 餘弦定理
6. 小林吹代 最想上的數學課-用看的學數學 世茂出版
7. 川久保勝夫 圖解數學基礎入門 世茂出版
8. 昌爸數學工作坊 http://www.mathland.idv.tw/
9. GSP 入門影音教學課程 http://easytry.tyc.edu.tw/homepage.php?id=2658
10. The Geometer's Sketchpad 動態幾何軟體 學習指南 參考手冊

玖、附錄(一)：葉片上洞距長度的比例關係

編號	底	腰	比例值
1	$\overline{ab}=0.4$	$\overline{aB}=0.6$	1.5
		$\overline{bB}=0.7$	1.8
2	$\overline{bc}=0.5$	$\overline{bC}=0.7$	1.4
		$\overline{cC}=0.7$	1.4
3	$\overline{cd}=0.5$	$\overline{cD}=0.8$	1.6
		$\overline{dD}=0.7$	1.4
4	$\overline{de}=0.4$	$\overline{dE}=0.7$	1.8
		$\overline{eE}=0.6$	1.5
5	$\overline{ef}=0.4$	$\overline{eF}=0.6$	1.5
		$\overline{fF}=0.6$	1.5
6	$\overline{fg}=0.5$	$\overline{fG}=0.6$	1.2
		$\overline{gG}=0.6$	1.2
7	$\overline{gh}=0.4$	$\overline{gH}=0.6$	1.5
		$\overline{hH}=0.5$	1.3

8	$\overline{hi}=0.5$	$\overline{hI}=0.5$	1
		$\overline{iI}=0.4$	0.8
9	$\overline{iJ}=0.4$	$\overline{iJ}=0.4$	1
		$\overline{jK}=0.4$	1
10	$\overline{jk}=0.4$	$\overline{kK}=0.4$	1
		$\overline{kL}=0.4$	1
11	$\overline{kl}=0.4$	$\overline{lL}=0.4$	1
		$\overline{lM}=0.3$	0.8
12	$\overline{lm}=0.3$	$\overline{mM}=0.4$	1.3
		$\overline{mN}=0.4$	1.3
13	$\overline{mn}=0.4$	$\overline{nN}=0.3$	0.8
		$\overline{nO}=0.3$	0.8
14	$\overline{no}=0.4$	$\overline{oO}=0.3$	0.8
		$\overline{oP}=0.3$	0.8
15	$\overline{op}=0.6$	$\overline{pP}=0.3$	0.5
		$\overline{pQ}=0.4$	0.6
所有比例值之平均為 1.17			

【評語】030409

1. 將大自然中題材以數學觀點研究，值得鼓勵的作品
2. 研究手法裡的數學推論部分宜更嚴謹。
3. 團隊合作良好。
4. 照片資料極佳。