中華民國第51屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

第三名

030408

「K」金矩形

學校名稱：嘉義市立南興國民中學

作者：	指導老師：
國三 吳曜昇	魏世和
國三 劉昱岑	張永昌
國一 魏文嶔	

關鍵詞：黃金矩形、費氏數列、無窮電阻

作品名稱：『K』金矩形

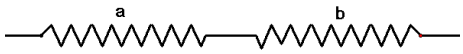
摘要：

從『黃金矩形』的邊長比值中，發現了一個很特別的現象，就是一對具有小數點後的每一個對應的數字都一模一樣的無理數；又從對此數字的研究中，聯想到這樣的一對數是否與某種特殊矩形的邊長比有關。我們將這類特殊矩形命名爲『K 金矩形』，而『K 金矩形』的邊長比具有很多特殊的性質，將它們表示成『繁分數』或『無窮根式』，都具有很美的型式；另外就像『黃金矩形』對應於『費氏數列』，『K 金矩形』的邊長比也可以找到一個類似『費氏數列』的數列來與之對應。

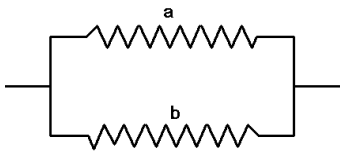
概念說明：

本研究除了一般的數學概念或公式之外，還需用到電阻串、並聯的公式：

1.電阻的串聯公式：兩個電阻分別爲 a、b（Ω）的電阻串聯，其總電阻爲 a＋b（Ω）。



2.電阻的並聯公式：兩個電阻分別爲 a、b（Ω）的電阻並聯，其總電阻爲 $\dfrac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$（Ω）。



壹、研究動機：

在上數理資優班課程的時候，老師帶我們探討了有關『黃金矩形』的性質，讓我們認識了何謂『黃金矩形』，學會計算它的邊長比例，以及它與『費氏數列』的關係。後來我們去圖書館查閱相關資料，在一本叫做「神奇數學 117」的書中，看到了兩個數，一個是：如果你用『黃金矩形』的長邊:短邊，其比值爲 $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$，化成小數爲 1.6180339887498948482045868343656381177203091798057 6…；另一個是短邊：長邊的比值爲 $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$，化成小數爲 0.6180339887498948482045868343656381177203091798057 6…（詳見神奇數學 117 第 152 頁），好特別的兩個數喔！這兩個數都是『無理數』（小數點後無限多位且不循環），而且它們互爲倒數，另外它們除了整數不同之外，小數點後的每一個對應的數字都一模一樣；另外書中還有將『黃金比』$\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ 表示成『繁分數』$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cdots\cdots}}}$ 和

『無窮根式』$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{\cdots\cdots}}}}$（都是很美的型式），這引起我們極大的興趣；雖然我們可以舉出一堆互為倒數的例子（如：$\frac{7}{3}$與$\frac{3}{7}$等…）；也可以舉出一堆小數點後的每一個對應的數字都一模一樣的數（如：$\frac{1}{7}=0.142857142857\cdots\cdots$；$\frac{8}{7}=1.142857142857\cdots\cdots$；$\frac{15}{7}=2.142857142857\cdots\cdots$），可是如果限制『既要為倒數又要小數點後所有的對應的數字都要一模一樣』的話，是否還有這樣的答案呢？如果有，那跟『黃金矩形』和『費氏數列』又有什麼關聯呢？因為想要知道這個問題的答案，因此我們展開對這個問題的研究工作。

本研究『K』金矩形名稱的由來：因為我們研究主題的原始構想來自於『黃金矩形』，而且我們從數字的研究中，發現都與類似『黃金矩形』的矩形有關，因此我們將本研究命名為『K』金矩形，以表示我們對前輩數學家發現『黃金矩形』的敬意。

貳、文獻探討：

為了便於對照「前人已研究」和「本研究繼續探討的部份」，我們將文獻中有提到與本作品相關的部份放在本研究中每一個探討子題的前面，並註明【前人已研究】，以表示是前人的研究成果。

叁、研究目的：

一、探討除了$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$（『黃金矩形』長邊：短邊的比值）、$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$（『黃金矩形』短邊：長邊的比值）之外，是否存在互為倒數的兩數且它們小數點後的每個對應的數字都一模一樣。

二、探討這樣的兩個數，它們與某種特殊矩形的邊長比的關係。

三、探討如何利用尺規作圖作出『K 金矩形』。

四、探討『K 金矩形』的邊長比值與『繁分數』和『無窮根式』的關係。

五、探討『K 金矩形』的邊長比值與對應數列的關係。

肆、研究器材與設備：

計算機、計算紙、筆、電腦和人腦、Excel 軟體、GSP 繪圖軟體。

伍、研究過程與方法：

一、探討除了$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$（『黃金矩形』長邊：短邊的比值）、$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$（『黃金矩形』短邊：長邊的比值）之外，是否存在互為倒數的兩數且它們小數點後的每個對應的數字都一模一樣：

【研究過程說明】因為兩數互為倒數，所以可以假設兩數分別為 x 和$\frac{1}{x}$；且因為它們

小數點後面對應的數字都一模一樣，所以可得 $x-\frac{1}{x}$ 必爲整數，我們分段討論如下：

（一）當 x 爲正數時，

1、 若 1＜x＜2 時，則 $\frac{1}{2}<\frac{1}{x}<1$，

$\Rightarrow -1<-\frac{1}{x}<-\frac{1}{2}$ $\Rightarrow 0<x-\frac{1}{x}<\frac{3}{2}$ 所以 $x-\frac{1}{x}=1$

$\Rightarrow x^2-1=x$ $\Rightarrow x^2-x-1=0$ $\Rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$（取正）

$\Rightarrow x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ 就是『黃金比』.（只有一解） →→→**【前人已研究】**

2、 若 2＜x＜3 時，則 $\frac{1}{3}<\frac{1}{x}<\frac{1}{2}$，

$\Rightarrow -\frac{1}{2}<-\frac{1}{x}<-\frac{1}{3}$ $\Rightarrow 1\frac{1}{2}<x-\frac{1}{x}<2\frac{2}{3}$ 所以 $x-\frac{1}{x}=2$

$\Rightarrow x^2-2x-1=0$ $\Rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{8}}{2}=\frac{2\pm2\sqrt{2}}{2}=1\pm\sqrt{2}$（取正）

$\Rightarrow x=1+\sqrt{2}=2.4142135623730950488016887242097\cdots\cdots\cdots\cdots$（也是只有一解）

而 $\frac{1}{x}=\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1=0.4142135623730950488016887242097\cdots\cdots\cdots\cdots$

3、若 3＜x＜4 時，則 $\frac{1}{4}<\frac{1}{x}<\frac{1}{3}$，

$\Rightarrow -\frac{1}{3}<-\frac{1}{x}<-\frac{1}{4}$ $\Rightarrow 2\frac{2}{3}<x-\frac{1}{x}<3\frac{3}{4}$ 所以 $x-\frac{1}{x}=3$

$\Rightarrow x^2-3x-1=0$ $\Rightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}$（取正）

$\Rightarrow x=\frac{\sqrt{13}+3}{2}=3.3027756377319946465596106337352\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$（也是只有一解）

$\Rightarrow$ 而 $\frac{1}{x}=\frac{\sqrt{13}-3}{2}=0.3027756377319946465596106337352\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

4、同理可得，當 4＜x＜5 時，

$x=\sqrt{5}+2=4.2360679774997896964091736687313\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$\Rightarrow \frac{1}{x}=\sqrt{5}-2=0.2360679774997896964091736687313\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

5、照類似方法，我們將結果列成下表：

	$1<x<2$	$2<x<3$	$3<x<4$	$4<x<5$	$5<x<6$	$6<x<7$	‧‧‧‧
x	$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$	$\sqrt{2}+1$	$\frac{\sqrt{13}+3}{2}$	$\sqrt{5}+2$	$\frac{\sqrt{29}+5}{2}$	$\sqrt{10}+3$	‧‧‧‧
$\frac{1}{x}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$	$\sqrt{2}-1$	$\frac{\sqrt{13}-3}{2}$	$\sqrt{5}-2$	$\frac{\sqrt{29}-5}{2}$	$\sqrt{10}-3$	‧‧‧‧

6、一般化，若 $k<x<k+1$ 時（k 爲自然數），則 $\frac{1}{k+1}<\frac{1}{x}<\frac{1}{k}$，

$\Rightarrow -\frac{1}{k}<-\frac{1}{x}<-\frac{1}{k+1}$ $\Rightarrow k-\frac{1}{k}<x-\frac{1}{x}<(k+1)-\frac{1}{k+1}$ 則可得 $x-\frac{1}{x}=k$

$\Rightarrow x^2-kx-1=0$ $\Rightarrow x=\frac{k\pm\sqrt{k^2+4}}{2}$（取正） $\therefore x=\frac{\sqrt{k^2+4}+k}{2}$

$$\Rightarrow \frac{1}{x}=\frac{2}{\sqrt{k^2+4}+k}=\frac{2\times(\sqrt{k^2+4}-k)}{(\sqrt{k^2+4}+k)\times(\sqrt{k^2+4}-k)}=\frac{\sqrt{k^2+4}-k}{2}$$

7、小結：實際計算後發現，當 x 爲大於 1 的數時，在每兩個連續自然數 k 和 k+1 之間，均正好有一個唯一的數，與其倒數的差爲一個整數。

（二）當 x 爲負數時：

1、若 $-2<x<-1$ 時，則 $-1<\frac{1}{x}<-\frac{1}{2}$，

$\Rightarrow \frac{1}{2}<-\frac{1}{x}<1$ $\Rightarrow -1\frac{1}{2}<x-\frac{1}{x}<0$ 所以 $x-\frac{1}{x}=-1$

$\Rightarrow x^2-1=-x$ $\Rightarrow x^2+x-1=0$ $\Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$（取負）

$\Rightarrow x=\frac{-(1+\sqrt{5})}{2}=-\frac{\sqrt{5}+1}{2}$：只有一個解，而且就是『黃金比』$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$的相反數。

$\Rightarrow \frac{1}{x}=-\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

2、若 $-3<x<-2$ 時，則 $-\frac{1}{2}<\frac{1}{x}<-\frac{1}{3}$，

$\Rightarrow \frac{1}{3}<-\frac{1}{x}<\frac{1}{2}$ $\Rightarrow -2\frac{2}{3}<x-\frac{1}{x}<-1\frac{1}{2}$ 所以 $x-\frac{1}{x}=-2$

$\Rightarrow x^2-1=-2x$ $\Rightarrow x^2+2x-1=0$ $\Rightarrow x=\frac{-2\pm\sqrt{8}}{2}$（取負）

$\Rightarrow x=\frac{-(2+\sqrt{8})}{2}=-\frac{2\sqrt{2}+2}{2}=-1-\sqrt{2}=-(\sqrt{2}+1)$ $\Rightarrow \frac{1}{x}=-(\sqrt{2}-1)$

只有一個解，且正好是 $(\sqrt{2}+1)$ 的相反數。

3、在實際計算之後，發現這樣的答案正好是 x 爲正數時的答案的相反數，我們推論如下：

【已知】若 a 爲大於 1 的正數，且 $a-\frac{1}{a}$ 爲整數

【求證】$(-a)-(\frac{1}{-a})$ 也是整數。

【證明】$(-a)-(\frac{1}{-a})=(-a)+\frac{1}{a}=-(a-\frac{1}{a})$

因爲已知 $a-\frac{1}{a}$ 爲整數　　所以 $-(a-\frac{1}{a})$ 也是整數。

4、小結：”若 x 爲負數，且 $x-\frac{1}{x}$ 爲整數”，答案正好是”若 x 爲正數，且 $x-\frac{1}{x}$ 爲整數”的相反數。

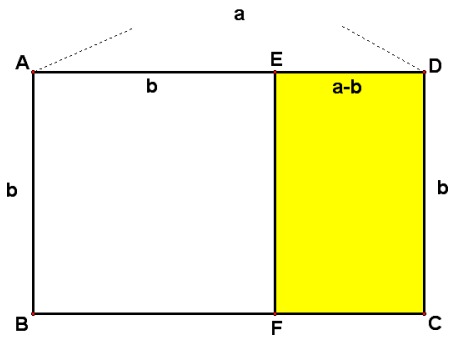
二、探討這樣的兩個數，它們與某種特殊矩形的邊長比的關係：

【研究過程說明】因爲 $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ 和 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 兩數是由『黃金矩形』的長邊：短邊或是短邊：長邊的比值求得的，因此我們『很自然』地想到，上面所得的每一對的數，是否也與某種類似於『黃金矩形』的矩形其邊長的比值有關。

（一）『黃金矩形』的邊長比：**【前人已研究】**

『黃金矩形』的定義：某個矩形若去除掉一個最大的正方形後，剩下的矩形與其本身相似，此矩形就稱爲『黃金矩形』。

如圖，設「黃金矩形」的長邊爲 a，短邊爲 b



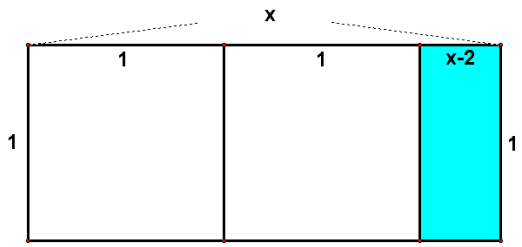
∵ A B C D ～ D E F C　　∴a：b=b：(a－b)　　$\Rightarrow a^2-ab-b^2=0$

同除以 b^2：$\frac{a^2}{b^2}-\frac{a}{b}-1=0$　　$\Rightarrow (\frac{a}{b})^2-(\frac{a}{b})-1=0$　　令 $\frac{a}{b}=x$

可得 $x^2-x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$（取正）$\Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$　　$\Rightarrow \frac{b}{a}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

（二）若將定義修改爲：連續去除掉兩個最大的正方形後，剩下的矩形與本身相似，這樣的矩形存在嗎？

這裡爲了便於討論，令此矩形的短邊爲 1 單位、長邊爲 x 單位



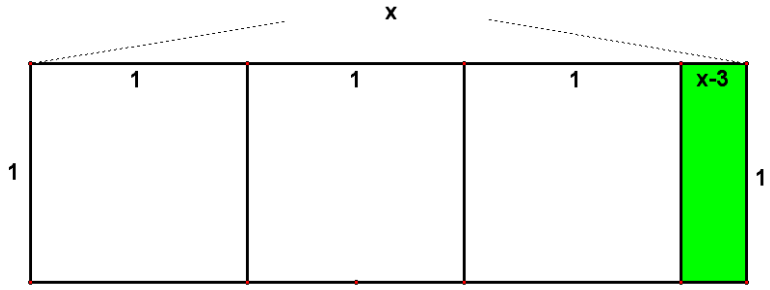
可得比例式 x：1=1：(x－2)

$\Rightarrow x^2-2x-1=0$　　$\Rightarrow x=\dfrac{2\pm\sqrt{8}}{2}=1\pm\sqrt{2}$（取正）　　$\therefore x=1+\sqrt{2}$

此矩形長邊：短邊的比值＝$(1+\sqrt{2})\div 1=\sqrt{2}+1$；而短邊：長邊的比值＝$\sqrt{2}$ -1

正好是前面計算求得的答案。(參考 P4 表格)

（三）若連續去除掉三個最大的正方形後，剩下的矩形與本身相似，有這樣的矩形嗎？



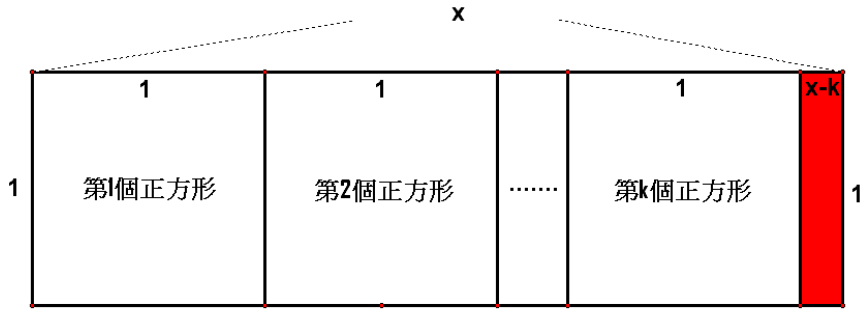
$x:1=1:(x-3)$

$\Rightarrow x^2-3x-1=0$　　$\Rightarrow x=\dfrac{3\pm\sqrt{13}}{2}$（取正）　　$\therefore x=\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$

此矩形長邊：短邊的比值＝$\dfrac{\sqrt{13}+3}{2}$；而短邊：長邊的比值＝$\dfrac{\sqrt{13}-3}{2}$

亦與前面的計算相同。(參考 P4 表格)

（四）一般化，若連續去除掉 k 個正方形（K 爲自然數），而剩下的矩形與本身相似，其邊長比如何呢？



$x:1=1:(x-k)$

$x^2-kx-1=0$　　$x=\dfrac{k\pm\sqrt{k^2+4}}{2}$（取正）　　$\therefore x=\dfrac{\sqrt{k^2+4}+k}{2}$

此矩形的長邊：短邊的比值爲$\dfrac{\sqrt{k^2+4}+k}{2}$；而短邊：長邊的比值爲$\dfrac{\sqrt{k^2+4}-k}{2}$。

（五）『K 金矩形』的定義：為了方便研究說明，我們將這種特殊的矩形做一個定義
若一個矩形，連續去除掉 K 個最大的正方形，而剩下的矩形相似於其本身的話，這樣的矩形，我們就稱為『K 金矩形』。（當 K=1 時，就是『黃金矩形』）

（六）由上面的討論，可知『K 金矩形』的邊長比的比值（長邊：短邊和短邊：長邊）一定是具有小數點後面的每一個對應的數字都完全一模一樣的一對『無理數』。

三、探討如何利用尺規作圖作出『K 金矩形』：

【研究過程說明】設『K 金矩形』的長邊為 a，短邊為 b，

由前面的過程可得 a：b 的比值為 $\dfrac{\sqrt{k^2+4}+k}{2}$

而 b：a 的比值為 $\dfrac{\sqrt{k^2+4}-k}{2}$

所以 $a=\dfrac{\sqrt{k^2+4}+k}{2}\times b$　　而 $b=\dfrac{\sqrt{k^2+4}-k}{2}\times a$

當 K 為已知的自然數時，

若給定短邊 b，則可由 $a=\dfrac{\sqrt{k^2+4}+k}{2}\times b$，用尺規作圖做出長邊 a 的長度，因此可做出此『K 金矩形』；

反之，若給定長邊 a，則亦可由 $b=\dfrac{\sqrt{k^2+4}-k}{2}\times a$，用尺規作圖做出短邊 b 的長度，因此可做出此『K 金矩形』。

（一）給定短邊 b，求作『K 金矩形』：以 K=3 為例，如下圖，

已知：b 為 K=3 的『K 金矩形』的短邊，試用尺規作圖做出此『K 金矩形』。

分析：由前面的計算，可得 $a=\dfrac{\sqrt{3^2+4}+3}{2}\times b=\dfrac{\sqrt{3^2+2^2}+3}{2}\times b$。

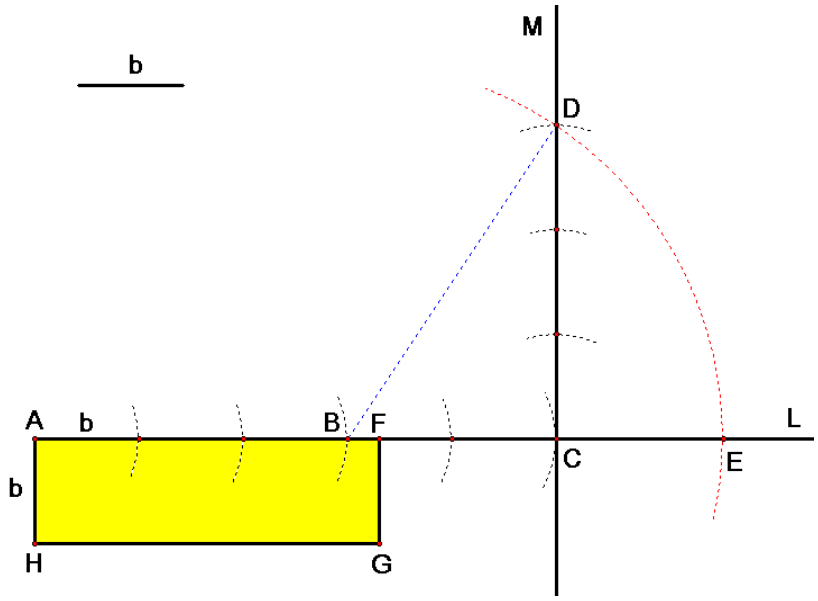
作法：1.作直線 L，並取 A、B、C 三點，使 $\overline{AB}=3b$、$\overline{BC}=2b$。

2.過 C 作直線 M $\perp L$，並取 D 點，使 $\overline{CD}=3b$，連 $\overline{BD}$。

3.在 L 上取 E 點，使 $\overline{BE}=\overline{BD}$。

4.作 $\overline{AE}$ 的中點 F。

5.以 $\overline{AF}$ 和 b 分別為矩形的長邊和短邊，做矩形 AFGH 即為所求。



（二）給定長邊 a，求作『K 金矩形』：以 K=3 爲例，如下圖，

若已知 a 爲 K=3 的『K 金矩形』的長邊，試用尺規作圖做出此『K 金矩形』。

分析：由前面的計算，可得 $b=\dfrac{\sqrt{3^2+4}-3}{2}\times a=\dfrac{\sqrt{3^2+2^2}-3}{2}\times a$ 。

作法：

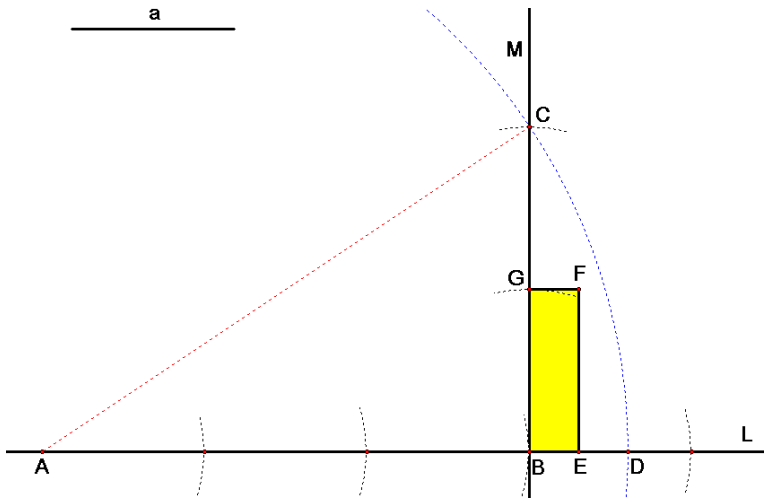
1.作直線 L，並取 A、B 兩點，使 $\overline{AB}=3a$ 。

2.過 B 作直線 M⊥L ，並取 C 點，使 $\overline{BC}=2a$ ，連 $\overline{AC}$ 。

3.在 L 上取 D 點，使 $\overline{AD}=\overline{AC}$ 。

4.作 $\overline{BD}$ 的中點 E。

5.以 a 和 $\overline{BE}$ 分別爲矩形的長邊和短邊，做矩形 BEFG 即爲所求。



【問題】如果知道 k，求出『K 金矩形』的長邊和短邊的關係式後，再做圖並不難，

可是有沒有一般的方法呢?

（三）研究一般的情形：我們將 a、b 的關係式化簡

1.若給定短邊 b：

$$\because a=\frac{\sqrt{k^2+4}+k}{2}\times b$$

$$\therefore a=\frac{k}{2}b+\frac{\sqrt{k^2+4}}{2}\times b=\frac{1}{2}(kb)+\frac{1}{2}\times\sqrt{k^2+4}\times b$$

$$=\frac{1}{2}(kb)+\sqrt{(\frac{1}{2})^2k^2+(\frac{1}{2})^2\times 4\times b}$$

$$=\frac{1}{2}(kb)+\sqrt{(\frac{1}{2}kb)^2+(\frac{1}{2}\times 2\times b)^2}=\frac{1}{2}(kb)+\sqrt{(\frac{1}{2}kb)^2+b^2}$$

所以可以用這樣的關係式作出一般的『K 金矩形』。（註：下圖以 k＝5 爲例做圖）

作法：（1）作直線 L，並取 A、B 兩點，使 $\overline{AB}=b$ 。

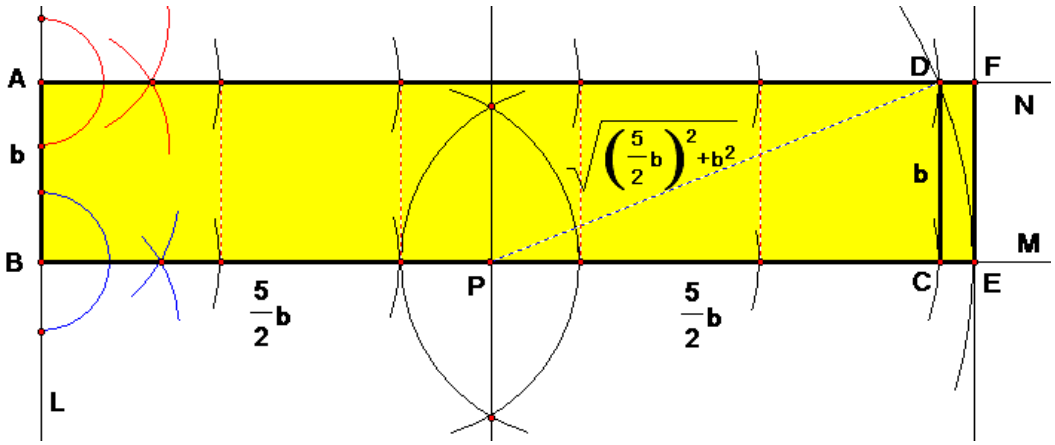
（2）分別過 A、B 作直線 N、M $\perp L$ 。

（3）分別在直線 N、M 上取 D、C 點，使 $\overline{AD}=\overline{BC}=kb$ 。

（4）作 $\overline{BC}$ 的中點 P，連 $\overline{PD}$ ，並在直線 M 上取 E 點，使 $\overline{PE}=\overline{PD}$ 。

（5）過 E 作 $\overline{EF}$ $\perp$ 直線 N 於 F 點。

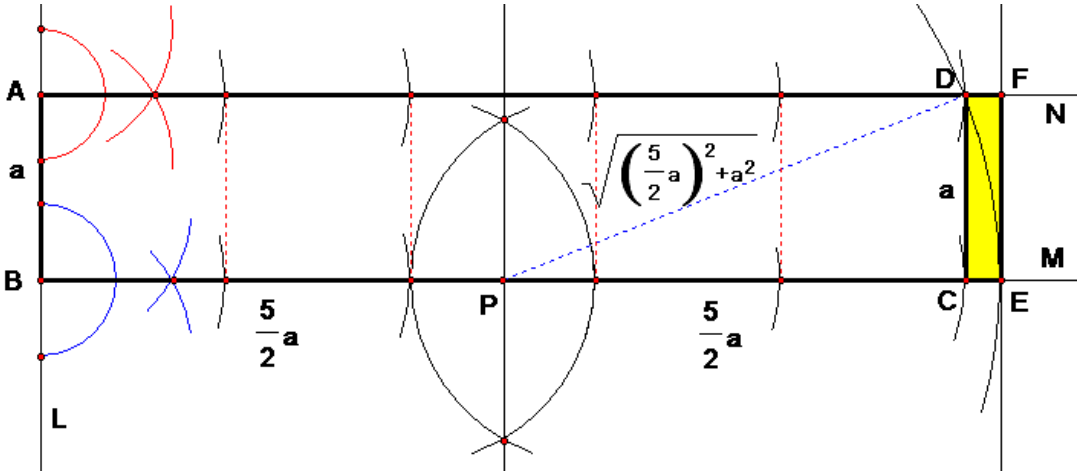
（6）則矩形 ABEF 即爲所求。



2.若給定長邊 a：

因爲 $b=\frac{\sqrt{k^2+4}-k}{2}\times a$　　所以可推得 $b=\sqrt{(\frac{1}{2}ka)^2+a^2}-\frac{1}{2}(ka)$

【作法】將上圖中的 b 改爲 a，則矩形 CDFE 即爲所求。如下圖



四、探討『K 金矩形』的邊長比值與『繁分數』和『無窮根式』的關係：

（一）『黃金比例』與『繁分數』和『無窮根式』:**【前人已研究】**

前面已知『黃金矩形』的長邊：短邊的比值爲 $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

此數（$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$）可以表示成繁分數 $1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cdots\cdots\cdots}}}$

過程如下：$\because 1<\frac{\sqrt{5}+1}{2}<2$

$\therefore \frac{\sqrt{5}+1}{2}=1+(\frac{\sqrt{5}+1}{2}-1)=1+(\frac{\sqrt{5}-1}{2})=1+\frac{1}{(\frac{2}{\sqrt{5}-1})}$ ，將 $\frac{2}{\sqrt{5}-1}$ 分母有理化

$=1+\frac{1}{(\frac{\sqrt{5}+1}{2})}$ 【分母與原來的數一樣】＝……（繼續下去即得）

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cdots\cdots\cdots}}}$$

把整數 1 減掉就是短邊：長邊的比值，也就是 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

即 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cdots\cdots\cdots}}}$

另外 $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ 可以表示成無窮根式 $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{\cdots\cdots\cdots\cdots}}}}$ （請參閱神奇數學 117）

（二）探討 K＝2 的『K 金矩形』的邊長比值如何表示成『繁分數』及『無窮根式』:

1、K＝2 的『K 金矩形』的邊長比值分別爲$\sqrt{2}+1$和$\sqrt{2}-1$，表爲繁分數過程如下：

（1）因爲 2＜$\sqrt{2}+1$＜3

所以$\sqrt{2}+1$＝2＋[$(\sqrt{2}+1)-2$]＝2＋（$\sqrt{2}-1$）＝$2+\cfrac{1}{\cfrac{1}{(\sqrt{2}-1)}}$

$\because \dfrac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1$

$\therefore$原式＝$2+\dfrac{1}{(\sqrt{2}+1)}$　　【分母與原來的數一樣】

＝$2+\dfrac{1}{2+(\sqrt{2}-1)}$　＝$2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\cfrac{1}{\sqrt{2}-1}}}$

＝$2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{(\sqrt{2}+1)}}$　　【分母與原來的數一樣】

＝……（繼續下去）＝$2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\cdots\cdots\cdots}}}$

（2）將整數 2 減去，就得到$\sqrt{2}-1=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\cdots\cdots\cdots}}}$

（3）反過來說：若$x=2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\cdots\cdots\cdots}}}$

則$x=2+\dfrac{1}{x}$　　$\Rightarrow x^2=2x+1$　　$\Rightarrow x^2-2x-1=0$

$\Rightarrow x=\dfrac{2\pm\sqrt{8}}{2\times1}=\dfrac{2\pm2\sqrt{2}}{2}=1\pm\sqrt{2}$（取正）　　所以$x=1+\sqrt{2}$

2、探討 K＝2 的『K 金矩形』的邊長比值如何表示成無窮根式：

（1）將$\sqrt{2}+1$表示成無窮根式：

Ⅰ、原本想參考前人的成果：

前面已知$\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$可以表示成無窮根式爲$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{\cdots\cdots\cdots\cdots}}}}$

所以我們猜$\sqrt{2}+1$表示成無窮根式爲$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{.....}}}}$，對嗎?

[驗證]：令$y=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{.....}}}}$　　兩邊平方

$\Rightarrow y^2=2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{.....}}}}$

$\Rightarrow y^2=2+y$　　$\Rightarrow y^2-y-2=0$　　$\Rightarrow y=\dfrac{1\pm\sqrt{9}}{2\times1}=-1or2$

沒有一根爲$\sqrt{2}+1$

所以事情沒我們想得簡單，在經過討論之後，我們有了以下的想法———

Ⅱ、我們採用『逆向思考』的方式：

若$y=\sqrt{2}+1$　　則$y-1=\sqrt{2}$　　$\Rightarrow (y-1)^2=2$　　$\Rightarrow y^2-2y-1=0$

因此$\sqrt{2}+1$爲$y^2-2y-1=0$之正根　$\therefore y^2=2y+1$

$\Rightarrow y=\sqrt{1+2y}$　　$\Rightarrow$y 應該爲$\sqrt{1+2\sqrt{1+2\sqrt{1+2\sqrt{.....}}}}$

也就是$\sqrt{2}+1$可寫成無窮根式$\sqrt{1+2\sqrt{1+2\sqrt{1+2\sqrt{.....}}}}$

Ⅲ、【證明】

若$y=\sqrt{1+2\sqrt{1+2\sqrt{1+2\sqrt{.....}}}}$

兩邊平方：$y^2=1+2\sqrt{1+2\sqrt{1+2\sqrt{1+2\sqrt{.....}}}}$

所以$y^2=1+2y$　　$\Rightarrow y^2-2y-1=0$

$\Rightarrow y=\dfrac{2\pm\sqrt{8}}{2}=\dfrac{2\pm2\sqrt{2}}{2}=1\pm\sqrt{2}$（取正）　　所以$y=\sqrt{2}+1$

（2）同理可得$\sqrt{2}-1$可寫成無窮根式$\sqrt{1-2\sqrt{1-2\sqrt{1-2\sqrt{.....}}}}$

【證明】若$z=\sqrt{1-2\sqrt{1-2\sqrt{1-2\sqrt{.....}}}}$

兩邊平方：$z^2=1-2\sqrt{1-2\sqrt{1-2\sqrt{1-2\sqrt{.....}}}}$

所以$z^2=1-2z$　　$\Rightarrow z^2+2z-1=0$

$\Rightarrow z=\dfrac{-2\pm\sqrt{8}}{2}=\dfrac{-2\pm2\sqrt{2}}{2}=-1\pm\sqrt{2}$（取正）　　所以$z=\sqrt{2}-1$

（三）探討 K＝3 的『K 金矩形』的邊長比值如何表示成『繁分數』及『無窮根式』：

前面已知 K＝3 的『K 金矩形』的邊長比值，分別爲$\dfrac{\sqrt{13}+3}{2}$和$\dfrac{\sqrt{13}-3}{2}$

1、將$\frac{\sqrt{13}+3}{2}$、$\frac{\sqrt{13}-3}{2}$表示成繁分數，探討過程如下：

$\because 3<\frac{\sqrt{13}+3}{2}<4$，整數部分爲 3

$\therefore \frac{\sqrt{13}+3}{2}=3+(\frac{\sqrt{13}+3}{2}-3)=3+(\frac{\sqrt{13}-3}{2})$，　（此時 $0<\frac{\sqrt{13}-3}{2}<1$）

$=3+\frac{1}{(\frac{2}{\sqrt{13}-3})}$　，　將$\frac{2}{\sqrt{13}-3}$分母有理化

$=3+\frac{1}{(\frac{\sqrt{13}+3}{2})}$　【分母與原來的數一樣】

$=3+\frac{1}{3+\frac{1}{(\frac{\sqrt{13}+3}{2})}}$　$=\cdots\cdots$（繼續下去）

最後得到：$\frac{\sqrt{13}+3}{2}=3+\frac{1}{3+\frac{1}{3+\frac{1}{\cdots\cdots}}}$；而$\frac{\sqrt{13}-3}{2}=\frac{1}{3+\frac{1}{3+\frac{1}{\cdots\cdots}}}$

【證明】請參考前面證明

2、將$\frac{\sqrt{13}+3}{2}$、$\frac{\sqrt{13}-3}{2}$化成無窮根式：探討過程如下

令$x=\frac{\sqrt{13}+3}{2}$，　則$2x=\sqrt{13}+3$　，$2x-3=\sqrt{13}$

兩邊平方：$(2x-3)^2=13$　，$4x^2-12x+9=13$　$\Rightarrow x^2=3x+1$

所以$\frac{\sqrt{13}+3}{2}$爲$x^2=3x+1$之正根　$\Rightarrow x=\sqrt{1+3x}$　可推測

$x=\frac{\sqrt{13}+3}{2}$化成無窮根式爲$\sqrt{1+3\sqrt{1+3\sqrt{1+3\sqrt{\cdots\cdots}}}}$

同理可得$\frac{\sqrt{13}-3}{2}=\sqrt{1-3\sqrt{1-3\sqrt{1-3\sqrt{\cdots\cdots}}}}$

【證明】請參考前面證明

（四）一般化：若 K 爲自然數

則『K 金矩形』之邊長比值分別爲$\frac{\sqrt{k^2+4}+k}{2}$，$\frac{\sqrt{k^2+4}-k}{2}$。

1、將$\frac{\sqrt{k^2+4}+k}{2}$，$\frac{\sqrt{k^2+4}-k}{2}$化成繁分數：

由前面的探討可得，$k<\frac{\sqrt{k^2+4}+k}{2}<k+1$

所以$\dfrac{\sqrt{k^2+4}+k}{2}=k+(\dfrac{\sqrt{k^2+4}+k}{2}-k)=k+\dfrac{\sqrt{k^2+4}-k}{2}$

$=k+\dfrac{1}{(\dfrac{2}{\sqrt{k^2+4}-k})}$ ，將$\dfrac{2}{\sqrt{k^2+4}-k}$分母有理化

$=k+\dfrac{1}{\dfrac{\sqrt{k^2+4}+k}{2}}$ 【分母與原來的數一樣】

持續下去，最後得到：

$\dfrac{\sqrt{k^2+4}+k}{2}=k+\dfrac{1}{k+\dfrac{1}{k+\dfrac{1}{\cdots\cdots\cdots\cdots}}}$ ；而$\dfrac{\sqrt{k^2+4}-k}{2}=\dfrac{1}{k+\dfrac{1}{k+\dfrac{1}{\cdots\cdots\cdots}}}$

2、將$\dfrac{\sqrt{k^2+4}+k}{2}$ ，$\dfrac{\sqrt{k^2+4}-k}{2}$化成無窮根式：

令$x=\dfrac{\sqrt{k^2+4}+k}{2}$ $\Rightarrow 2x-k=\sqrt{k^2+4}$

兩邊平方得：$(2x-k)^2=k^2+4$ ， $4x^2-4kx+k^2=k^2+4$

$4x^2=4kx+4$ 兩邊同除以 4： $x^2=1+kx$

因此$\dfrac{\sqrt{k^2+4}+k}{2}$爲一元二次方程式$x^2=1+kx$之正根 $\Rightarrow x=\sqrt{1+kx}$

可推測得$\dfrac{\sqrt{k^2+4}+k}{2}=\sqrt{1+k\sqrt{1+k\sqrt{1+k\sqrt{\cdots\cdots\cdots\cdots}}}}$

同理可得$\dfrac{\sqrt{k^2+4}-k}{2}=\sqrt{1-k\sqrt{1-k\sqrt{1-k\sqrt{\cdots\cdots\cdots\cdots}}}}$

五、探討『K 金矩形』的邊長比值與數列的關係：

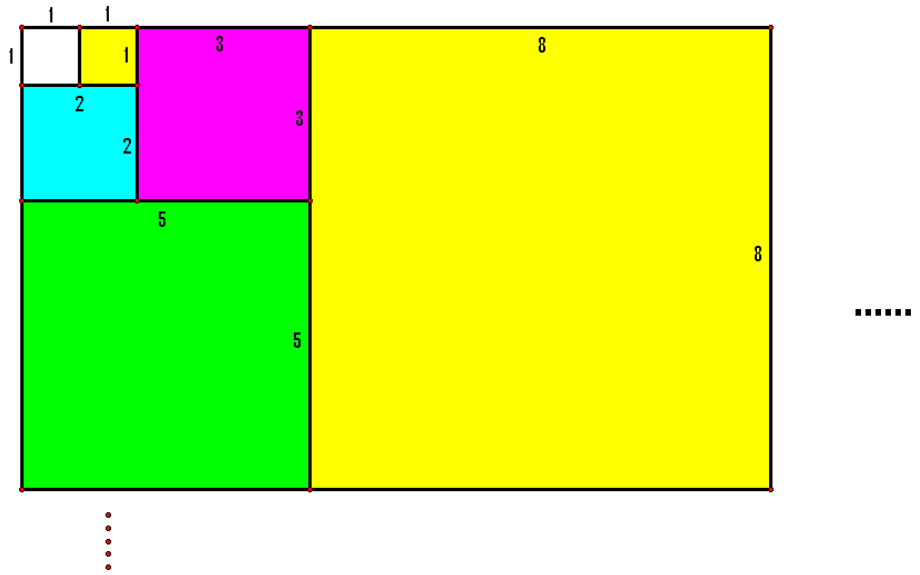
（一）『黃金比例』與『費氏數列』:**【前人已研究】**

1、文獻上記載，費波那奇由一個稱爲「兔子問題」的題目得到了一個很特別的數列『費氏數列』：此數列的$a_1=1$ ，$a_2=1$ ，$a_3=a_1+a_2=2$ ，$a_4=a_2+a_3=3\cdots$

且對於任意自然數 n，$a_{n+2}=a_n+a_{n+1}$

2、再經後人研究，已證得，當 n→∞時，『費氏數列』的$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\to\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$（黃金比）

3、以上的結果可以下圖表示：



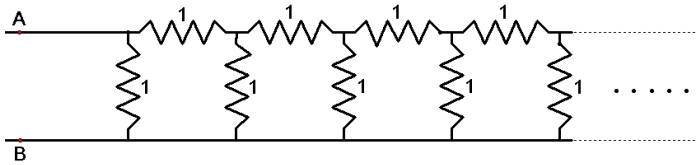
上圖表示，越後面所得的最大矩形的長邊:短邊的比值會越接近黃金比（$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$）

且此矩形的長邊與短邊正好為『費氏數列』相鄰兩項的後項 a_{n+1} 和前項 a_n 。

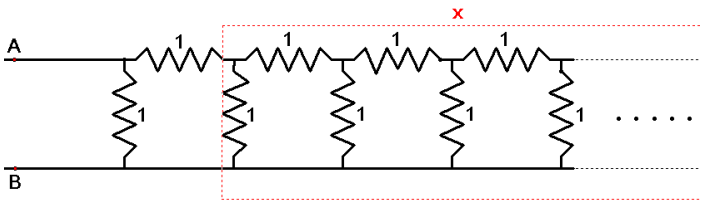
（二）『K 金矩形』的邊長比值與對應數列的關係：

1.利用「排無窮電阻」的方法得到『費氏數列』:

在研究這個題目的期間，我們在做高中數理資優班的考試題目，有一個題目如下:「如圖，下面的電路圖表示了一個由無限多個1Ω 電阻所組成的電路，圖中右邊的虛線，表示不斷重複左邊的裝置，直到無窮無盡。請問 A、B 之間的總電阻為多少Ω ？」



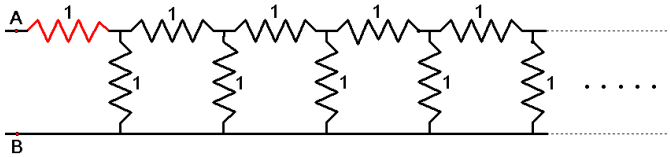
<解>如下圖，因為題目是一個無窮多個電阻的電路圖，因此我們可以說除了左邊的 2 個電阻之外，其他的部份所得到的電阻實際上和整體的總電阻是完全相同的，若假設總電阻為 $x\Omega$ ，利用電阻串、並聯的計算原則，可列出以下的方程式：



$$\frac{1}{\frac{1}{x+1}+\frac{1}{1}}=x \quad \Rightarrow \frac{1}{\frac{1+(x+1)}{x+1}}=x \quad \Rightarrow \frac{x+1}{x+2}=x \Rightarrow x^2+2x=x+1$$

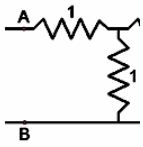
$$\Rightarrow x^2+x-1=0 \quad \Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\text{（取正）} \quad \text{所以總電阻為}\frac{\sqrt{5}-1}{2}\Omega$$

原題目解出來的答案，引起了我們的注意。因爲本研究知道 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}+1=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ **，所以如果我們將題目的圖的左邊串聯一個** 1Ω **的電阻，利用電阻串、並聯的計算原則，可知最後的總電阻爲** $\frac{\sqrt{5}-1}{2}+1=\frac{\sqrt{5}+1}{2}(\Omega)$ **＝黃金比**，以下圖表示：



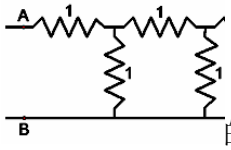
另外我們也知道電阻『不可能無窮無盡』地排下去，如果我們從左邊的部份一段一段排，實際上 A、B 之間的電阻還是可以算得出來，例如：

（1）



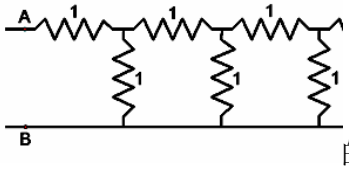
的電阻爲 1＋1＝2（相當於串聯），

（2）



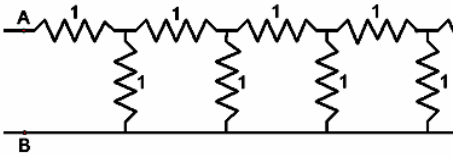
的電阻爲 $\frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{1}}+1=\frac{1}{\frac{3}{2}}+1=\frac{2}{3}+1=\frac{5}{3}$

（3）



的電阻爲 $\frac{1}{\frac{1}{\frac{5}{3}}+\frac{1}{1}}+1=\frac{1}{\frac{8}{5}}+1=1\frac{5}{8}=\frac{13}{8}$

（4）



的電阻爲 $\frac{1}{\frac{1}{\frac{13}{8}}+\frac{1}{1}}+1=\frac{1}{\frac{21}{13}}+1=1\frac{13}{21}=\frac{34}{21}$　　依此類推……

將出現的『每階段電阻』列出來，2（$=\frac{2}{1}$）、$\frac{5}{3}$、$\frac{13}{8}$、$\frac{34}{21}$、……，

發現正好是『費氏數列』中後項：前項的比值，推論如下：

我們知道前面都是對的，再因為

$$\frac{1}{\frac{1}{\frac{a_{n+1}}{a_n}}+\frac{1}{1}}+1=\frac{1}{\frac{a_n}{a_{n+1}}+1}+1=\frac{1}{\frac{a_n+a_{n+1}}{a_{n+1}}}+1=\frac{a_{n+1}}{a_n+a_{n+1}}+1\text{（因為}a_n+a_{n+1}=a_{n+2}\text{）}$$

$$=\frac{a_{n+1}}{a_{n+2}}+1=\frac{a_{n+1}+a_{n+2}}{a_{n+2}}=\frac{a_{n+3}}{a_{n+2}}\text{（因為}a_{n+1}+a_{n+2}=a_{n+3}\text{）}$$

最後答案也是『費氏數列』中後項：前項的比值。

我們討論後發現利用「排無窮電阻」的方法也可以得到『K 金矩形』邊長比的比值所對應的數列，就如同『黃金矩形』對應於『費氏數列』這樣地完美。

「排無窮電阻」法得到『K 金矩形』邊長比的比值所對應的數列，在「研究討論」中有詳細探討。

2、利用「排正方形」的方法得到『K 金矩形』邊長比值所對應的數列：

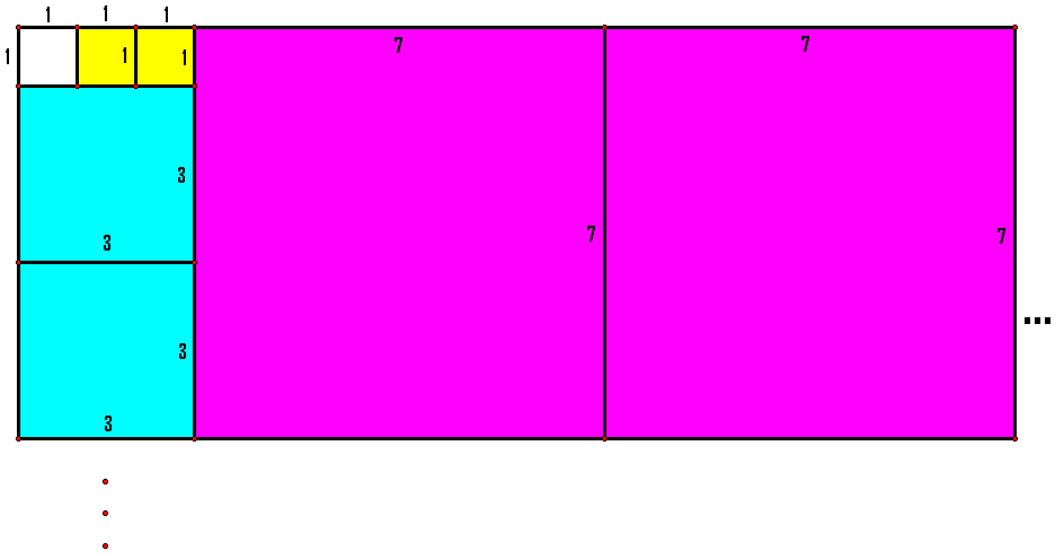
在參考文獻上的圖形後，我們發現可以把第 15 頁的圖形應用到『K 金矩形』上：

（1）先研究 K＝2 的情形：如下圖，先排一個邊長為 1 的正方形，

向右邊連續排 2 個邊長為 1 的正方形，形成一個 3x1 的矩形，

在此矩形下方再連續排 2 個邊長為 3 的正方形，形成一個 3x7 的矩形，

如此每次向右、向下連續排 2 個正方形而形成一個更大的矩形……



【說明】依次將出現的『正方形邊長』記錄如下：1，1，3，7，17，……

得數列如下：（n 為自然數）

$a_1=1$，$a_2=1$，$a_3=a_1+2a_2=3$，$a_4=a_2+2a_3=7$，……

對於任意自然數 n：$a_{n+2}=a_n+2a_{n+1}$

先用 Excel 試算表算看看，【表格請參閱附錄】設定 Excel 試算表讓它的儲存格符合：「$a_1=1$，$a_2=1$，對於任意自然數 n，

$a_{n+2}=a_n+2a_{n+1}$」，讓它計算此數列的前 30 項，然後再讓它計算 $\frac{a_n}{a_{n-1}}$

的值，經過 Excel 試算表的計算，發現當 n 變大時，此數列的$\frac{a_n}{a_{n-1}}$會漸漸穩定下來，接近$\sqrt{2}+1$的近似值。

可是此數列的一般項a_n又是如何呢？當 n→∞時，此數列的$\frac{a_{n+1}}{a_n}\to\sqrt{2}+1$嗎？

在查閱相關資料後，發現這個數列就是一種所謂『遞迴數列』，探討如下：

Ⅰ、因為$a_{n+2}=a_n+2a_{n+1}$（n 為自然數）

先找出兩個數α、β使得$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)$

展開得$a_{n+2}-(\alpha+\beta)a_{n+1}+\alpha\beta a_n=0$，與原式比較，得$\begin{cases}\alpha+\beta=2\\ \alpha\beta=-1\end{cases}$

$\Rightarrow\alpha$，β為$x^2-2x-1=0$之兩根（即$x=\frac{2\pm\sqrt{8}}{2}=1\pm\sqrt{2}$）

$\Rightarrow\begin{cases}\alpha=1+\sqrt{2}\\ \beta=1-\sqrt{2}\end{cases}$或$\begin{cases}\alpha=1-\sqrt{2}\\ \beta=1+\sqrt{2}\end{cases}$

Ⅱ、因為$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)$

n＝1 代入：$a_3-\alpha a_2=\beta(a_2-\alpha a_1)$……第（1）式

n＝2 代入：$a_4-\alpha a_3=\beta(a_3-\alpha a_2)$……第（2）式

……

n－2 代入：$a_n-\alpha a_{n-1}=\beta(a_{n-1}-\alpha a_{n-2})$……第（n－2）式

n－1 代入：$a_{n+1}-\alpha a_n=\beta(a_n-\alpha a_{n-1})$……第（n－1）式

第 1×2×…×（n－2）×（n－1）式

得到：$a_{n+1}-\alpha a_n=\beta^{n-1}(a_2-\alpha a_1)$……（＊）

將α、β互換：$a_{n+1}-\beta a_n=\alpha^{n-1}(a_2-\beta a_1)$……（＊＊）

（＊＊）－（＊）：$(\alpha-\beta)a_n=(a_2-\beta a_1)\times\alpha^{n-1}-(a_2-\alpha a_1)\beta^{n-1}$

$$\boxed{a_n=\frac{a_2-\beta a_1}{\alpha-\beta}\alpha^{n-1}-\frac{a_2-\alpha a_1}{\alpha-\beta}\times\beta^{n-1}}$$

Ⅲ、取$\begin{cases}\alpha=1+\sqrt{2}\\ \beta=1-\sqrt{2}\end{cases}$

計算 $\frac{a_2-\beta a_1}{\alpha-\beta}=\frac{1-(1-\sqrt{2})}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$

$\frac{a_2-\alpha a_1}{\alpha-\beta}=\frac{1-(1+\sqrt{2})}{2\sqrt{2}}=\frac{-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=-\frac{1}{2}$

所以$\boxed{a_n=\frac{1}{2}\cdot(1+\sqrt{2})^{n-1}+\frac{1}{2}\cdot(1-\sqrt{2})^{n-1}}\Rightarrow\boxed{a_{n+1}=\frac{1}{2}\cdot(1+\sqrt{2})^{n}+\frac{1}{2}\cdot(1-\sqrt{2})^{n}}$

Ⅳ、$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{\frac{1}{2}\cdot(1+\sqrt{2})^n+\frac{1}{2}\cdot(1-\sqrt{2})^n}{\frac{1}{2}\cdot(1+\sqrt{2})^{n-1}+\frac{1}{2}\cdot(1-\sqrt{2})^{n-1}}$　（分子、分母各約掉$\frac{1}{2}$）

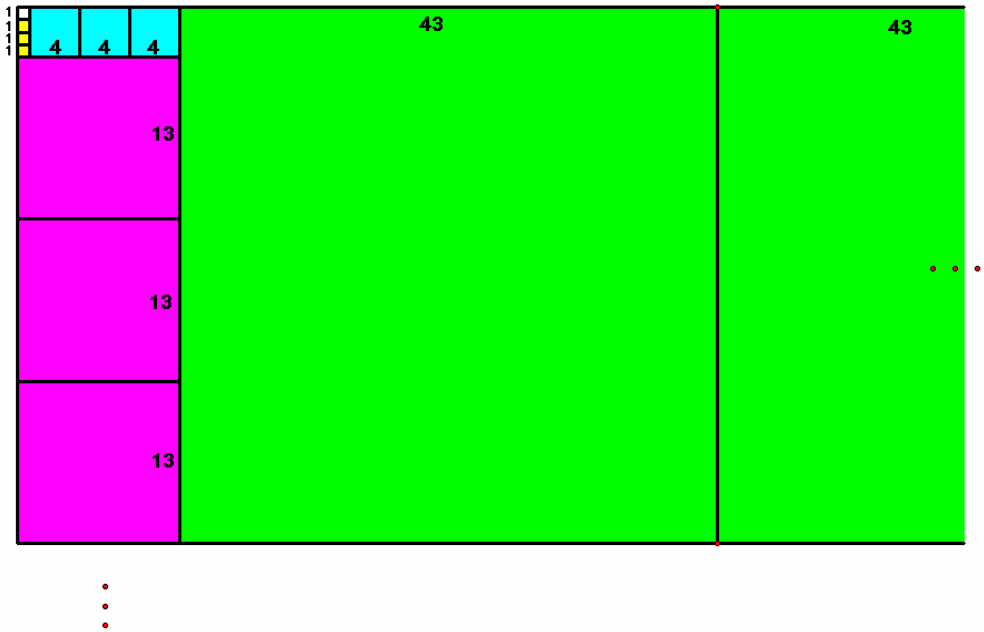
$=\dfrac{(1+\sqrt{2})^n+(1-\sqrt{2})^n}{(1+\sqrt{2})^{n-1}+(1-\sqrt{2})^{n-1}}$　（分子、分母同除以$(1+\sqrt{2})^{n-1}$）

$=\dfrac{(1+\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})\cdot(\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}})^{n-1}}{1+(\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}})^{n-1}}$

因爲$-1<\dfrac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}<0$，所以當 n→∞時，$(\dfrac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}})^{n-1}\to 0$

因此，當 n→∞時，此數列的$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\to 1+\sqrt{2}$

（2）再研究 K＝3 的情形：如下圖，先排一個邊長爲 1 的正方形，
向下方連續排 3 個邊長爲 1 的正方形，形成一個 1×4 的矩形，
在此矩形右邊再連續排 3 個邊長爲 4 的正方形，形成一個 13×4 的矩形，
在此矩形下方再連續排 3 個邊長爲 13 的正方形，形成一個 13×43 的矩形，
如此每次向右、向下連續排 3 個正方形而形成一個更大的矩形……



【說明】依次將出現的『正方形邊長』紀錄如下：1，1，4，13，43，……
得數列如下：（n 爲自然數）
$a_1=1$，$a_2=1$，$a_3=a_1+3a_2=4$，$a_4=a_2+3a_3=13$，……
對於任意自然數 n：$a_{n+2}=a_n+3a_{n+1}$
先用 Excel 試算表算看看【表格請參閱附錄】，設定 Excel 試算表讓它的儲存格符合：「$a_1=1$，$a_2=1$，對於任意自然數 n，$a_{n+2}=a_n+3a_{n+1}$」，讓它計算

此數列的前 30 項，然後再讓它計算 $\frac{a_n}{a_{n-1}}$ 的值，經過 Excel 試算表的計算，

發現當 n 變大時，此數列的 $\frac{a_n}{a_{n-1}}$ 會漸漸穩定下來，接近 $\frac{\sqrt{13}+3}{2}$ 的近似值。

再利用『遞迴數列』，探討如下：

Ⅰ、因為 $a_{n+2}=a_n+3a_{n+1}$（n 為自然數）

先找出兩個數 α 、 β 使得 $a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)$

展開得 $a_{n+2}-(\alpha+\beta)a_{n+1}+\alpha\beta a_n=0$

與原式比較，得 $\begin{cases}\alpha+\beta=3\\ \alpha\beta=-1\end{cases}\Rightarrow\alpha$ ，β 為 $x^2-3x-1=0$ 之兩根（即 $x=\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}$ ）

$$\Rightarrow\begin{cases}\alpha=\frac{3+\sqrt{13}}{2}\\ \beta=\frac{3-\sqrt{13}}{2}\end{cases}\text{或}\begin{cases}\alpha=\frac{3-\sqrt{13}}{2}\\ \beta=\frac{3+\sqrt{13}}{2}\end{cases}$$

Ⅱ、因為 $a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)$

n＝1 代入：$a_3-\alpha a_2=\beta(a_2-\alpha a_1)$……第（1）式

n＝2 代入：$a_4-\alpha a_3=\beta(a_3-\alpha a_2)$……第（2）式

……

n－2 代入：$a_n-\alpha a_{n-1}=\beta(a_{n-1}-\alpha a_{n-2})$……第（n－2）式

n－1 代入：$a_{n+1}-\alpha a_n=\beta(a_n-\alpha a_{n-1})$……第（n－1）式

第 1×2×…×（n－2）×（n－1）式

得到：　$a_{n+1}-\alpha a_n=\beta^{n-1}(a_2-\alpha a_1)$……（＊）

將 α 、 β 互換：$a_{n+1}-\beta a_n=\alpha^{n-1}(a_2-\beta a_1)$……（＊＊）

（＊＊）－（＊）：$(\alpha-\beta)a_n=(a_2-\beta a_1)\times\alpha^{n-1}-(a_2-\alpha a_1)\beta^{n-1}$

$$\boxed{a_n=\frac{a_2-\beta a_1}{\alpha-\beta}\alpha^{n-1}-\frac{a_2-\alpha a_1}{\alpha-\beta}\times\beta^{n-1}}$$

Ⅲ、令 $\begin{cases}\alpha=\frac{3+\sqrt{13}}{2}\\ \beta=\frac{3-\sqrt{13}}{2}\end{cases}$　化簡：$\frac{a_2-\beta a_1}{\alpha-\beta}=\frac{1-\beta}{\sqrt{13}}$ ；$\frac{a_2-\alpha a_1}{\alpha-\beta}=\frac{1-\alpha}{\sqrt{13}}$

所以 $\boxed{a_n=\frac{1-\beta}{\sqrt{13}}\cdot\alpha^{n-1}-\frac{1-\alpha}{\sqrt{13}}\cdot\beta^{n-1}=\frac{1}{\sqrt{13}}[(1-\beta)\cdot\alpha^{n-1}-(1-\alpha)\cdot\beta^{n-1}]}$

$\rightarrow\boxed{a_{n+1}=\frac{1-\beta}{\sqrt{13}}\cdot\alpha^{n}-\frac{1-\alpha}{\sqrt{13}}\cdot\beta^{n}=\frac{1}{\sqrt{13}}[(1-\beta)\cdot\alpha^{n}-(1-\alpha)\cdot\beta^{n}]}$

Ⅳ、$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{1}{\sqrt{13}}[(1-\beta)\cdot\alpha^{n}-(1-\alpha)\cdot\beta^{n}]}{\frac{1}{\sqrt{13}}[(1-\beta)\cdot\alpha^{n-1}-(1-\alpha)\cdot\beta^{n-1}]}$　（分子、分母各約掉 $\frac{1}{\sqrt{13}}$ ）

$$=\frac{(1-\beta)\cdot\alpha^{n}-(1-\alpha)\cdot\beta^{n}}{(1-\beta)\cdot\alpha^{n-1}-(1-\alpha)\cdot\beta^{n-1}}$$ （分子、分母同除以α^{n-1}）

$$=\frac{(1-\beta)\cdot\alpha-(1-\alpha)\cdot\beta\cdot(\frac{\beta}{\alpha})^{n-1}}{(1-\beta)-(1-\alpha)\cdot(\frac{\beta}{\alpha})^{n-1}}$$

其中$\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\frac{3-\sqrt{13}}{2}}{\frac{3+\sqrt{13}}{2}}$，因爲$-1<\frac{\beta}{\alpha}<0$，所以當 n→∞時，$(\frac{\beta}{\alpha})^{n-1}\to 0$

因此，當 n→∞時，此數列的$\frac{a_{n+1}}{a_n}\to\frac{(1-\beta)\cdot\alpha-0}{(1-\beta)-0}=\frac{(1-\beta)\cdot\alpha}{(1-\beta)}=\alpha=\frac{\sqrt{13}+3}{2}$

（3）再研究一般『K 金矩形』的情形：先排一個邊長爲 1 的正方形，
向下方連續排 k 個邊長爲 1 的正方形，形成長爲 1、寬爲(k+1)的矩形，
在此矩形右邊再連續排 k 個邊長爲(k+1)的正方形，形成一個長爲
（k^2+k+1）、寬爲(k+1)的矩形，如此繼續下去……（圖形請參考前二圖）
【說明】依次將出現的『正方形邊長』紀錄如下：1，1，$1+k$，k^2+k+1，
（k^3+k^2+2k+1），……得數列如下：

$a_1=1$，$a_2=1$，$a_3=a_1+ka_2=1+k$，$a_4=a_2+ka_3=k^2+k+1$，…

對於任意自然數 n：$a_{n+2}=a_n+ka_{n+1}$

利用『遞迴數列』，探討如下：

Ⅰ、因爲$a_{n+2}=a_n+ka_{n+1}$（n 爲自然數）

先找出兩個數α、β使得$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)$

展開得$a_{n+2}-(\alpha+\beta)a_{n+1}+\alpha\beta a_n=0$

與原式比較，得$\begin{cases}\alpha+\beta=k\\ \alpha\beta=-1\end{cases}\Rightarrow\alpha$，$\beta$爲二次方程式$x^2-kx-1=0$之兩根

$\because$判別式$=(-k)^2-4\cdot1\cdot(-1)=k^2+4>0$，$\therefore x^2-kx-1=0$有兩個相異實根

$$\Rightarrow\begin{cases}\alpha=\frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2}\\ \beta=\frac{k-\sqrt{k^2+4}}{2}\end{cases}\text{或}\begin{cases}\alpha=\frac{k-\sqrt{k^2+4}}{2}\\ \beta=\frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2}\end{cases}$$

Ⅱ、因爲$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)$

n＝1 代入：$a_3-\alpha a_2=\beta(a_2-\alpha a_1)$……第（1）式

n＝2 代入：$a_4-\alpha a_3=\beta(a_3-\alpha a_2)$……第（2）式

……

n－2 代入：$a_n-\alpha a_{n-1}=\beta(a_{n-1}-\alpha a_{n-2})$……第（n－2）式

n－1 代入：$a_{n+1}-\alpha a_n=\beta(a_n-\alpha a_{n-1})$……第（n－1）式

第 1×2×…×（n－2）×（n－1）式

得到：　$a_{n+1}-\alpha a_n=\beta^{n-1}(a_2-\alpha a_1)$ ……（＊）

將α、β互換：$a_{n+1}-\beta a_n=\alpha^{n-1}(a_2-\beta a_1)$ ……（＊＊）

（＊＊）－（＊）：$(\alpha-\beta)a_n=(a_2-\beta a_1)\times\alpha^{n-1}-(a_2-\alpha a_1)\beta^{n-1}$

$$\boxed{a_n=\frac{a_2-\beta a_1}{\alpha-\beta}\alpha^{n-1}-\frac{a_2-\alpha a_1}{\alpha-\beta}\times\beta^{n-1}}$$

Ⅲ、化簡得$\dfrac{a_2-\beta a_1}{\alpha-\beta}=\dfrac{1-\beta}{\alpha-\beta}$；$\dfrac{a_2-\alpha a_1}{\alpha-\beta}=\dfrac{1-\alpha}{\alpha-\beta}$

所以$\boxed{a_n=\dfrac{1-\beta}{\alpha-\beta}\cdot\alpha^{n-1}-\dfrac{1-\alpha}{\alpha-\beta}\cdot\beta^{n-1}=\dfrac{1}{\alpha-\beta}[(1-\beta)\cdot\alpha^{n-1}-(1-\alpha)\cdot\beta^{n-1}]}$

$$\Rightarrow\boxed{a_{n+1}=\frac{1-\beta}{\alpha-\beta}\cdot\alpha^{n}-\frac{1-\alpha}{\alpha-\beta}\cdot\beta^{n}=\frac{1}{\alpha-\beta}[(1-\beta)\cdot\alpha^{n}-(1-\alpha)\cdot\beta^{n}]}$$

Ⅳ、取$\begin{cases}\alpha=\dfrac{k+\sqrt{k^2+4}}{2}\\ \beta=\dfrac{k-\sqrt{k^2+4}}{2}\end{cases}$

所以$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{\dfrac{1}{\alpha-\beta}[(1-\beta)\cdot\alpha^{n}-(1-\alpha)\cdot\beta^{n}]}{\dfrac{1}{\alpha-\beta}[(1-\beta)\cdot\alpha^{n-1}-(1-\alpha)\cdot\beta^{n-1}]}$　（分子、分母各約掉$\dfrac{1}{\alpha-\beta}$）

$=\dfrac{(1-\beta)\cdot\alpha^{n}-(1-\alpha)\cdot\beta^{n}}{(1-\beta)\cdot\alpha^{n-1}-(1-\alpha)\cdot\beta^{n-1}}$　（分子、分母同除以α^{n-1}）

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(1-\beta)\cdot\alpha-(1-\alpha)\cdot\beta\cdot(\frac{\beta}{\alpha})^{n-1}}{(1-\beta)-(1-\alpha)\cdot(\frac{\beta}{\alpha})^{n-1}}$$

其中$\dfrac{\beta}{\alpha}=\dfrac{k-\sqrt{k^2+4}}{k+\sqrt{k^2+4}}$，當 k 爲自然數時，$\dfrac{-k-\sqrt{k^2+4}}{k+\sqrt{k^2+4}}<\dfrac{k-\sqrt{k^2+4}}{k+\sqrt{k^2+4}}<0$

也就是$-1<\dfrac{\beta}{\alpha}<0$，當 n→∞時，$(\dfrac{\beta}{\alpha})^{n-1}\to 0$

所以$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\to\dfrac{(1-\beta)\cdot\alpha-0}{(1-\beta)-0}=\alpha=\dfrac{k+\sqrt{k^2+4}}{2}$

小結：若 k 爲自然數，遞迴數列$\begin{cases}a_1=1\\ a_2=1\\ a_{n+2}=a_n+ka_{n+1}\end{cases}$　（n 爲所有自然數）

此『遞迴數列』之後項：前項的比值$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$的極限值爲$\dfrac{k+\sqrt{k^2+4}}{2}$。

陸、研究結果：

一、在連續兩個正整數 k 和 k＋1 之間，都存在唯一的一個無理數，其與其倒數的差爲整數（即小數點後的每一位對應的數字都相同），其公式爲 $\frac{\sqrt{k^2+4}+k}{2}$ 。

二、承一，若 $k<a<k+1$ 且 $a-\frac{1}{a}$ 爲整數，則取 a 的相反數亦有相同的現象。

即 $(-a)-(\frac{1}{-a})$ 亦爲整數。

三、『K 金矩形』的定義：若一個矩形，連續去除掉 K 個最大的正方形，而剩下的矩形相似於其本身的話，這樣的矩形，我們就稱爲『K 金矩形』。
（當 K=1 時，就是『黃金矩形』）

四、『K 金矩形』的尺規作圖原理：若 a、b 分別爲『K 金矩形』的長邊和短邊，由關係式

a＝$\frac{1}{2}(kb)+\sqrt{(\frac{1}{2}kb)^2+b^2}$ 、 $b=\sqrt{(\frac{1}{2}ka)^2+a^2}-\frac{1}{2}(ka)$ ，

皆可由已知其中一個，求作另一個，而畫出此『K 金矩形』。

五、『K 金矩形』的邊長比值與『繁分數』、『無窮根式』及對應數列的關係，整理如下表：
若 a、b 分別爲『K 金矩形』的長邊和短邊，則

k＝2				
	比值	化成繁分數	化成無窮根式	對應的數列
$\frac{a}{b}$	$\sqrt{2}+1$	$2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\cdots\cdots}}}$	$\sqrt{1+2\sqrt{1+2\sqrt{1+2\sqrt{\cdots\cdots}}}}$	$\begin{cases} a_1=1 \\ a_2=1 \\ a_{n+2}=a_n+2a_{n+1} \end{cases}$ 中 $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ 的極限值
$\frac{b}{a}$	$\sqrt{2}-1$	$\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\cdots\cdots}}}}$	$\sqrt{1-2\sqrt{1-2\sqrt{1-2\sqrt{\cdots\cdots}}}}$	$\begin{cases} a_1=1 \\ a_2=1 \\ a_{n+2}=a_n+2a_{n+1} \end{cases}$ 中 $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ 的極限值
k＝3				
	比值	化成繁分數	化成無窮根式	對應的數列
$\frac{a}{b}$	$\frac{\sqrt{13}+3}{2}$	$3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{\cdots\cdots}}}$	$\sqrt{1+3\sqrt{1+3\sqrt{1+3\sqrt{\cdots\cdots}}}}$	$\begin{cases} a_1=1 \\ a_2=1 \\ a_{n+2}=a_n+3a_{n+1} \end{cases}$ 中 $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ 的極限值

$\frac{b}{a}$	$\frac{\sqrt{13}-3}{2}$	$\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{\cdots\cdots}}}}$	$\sqrt{1-3\sqrt{1-3\sqrt{1-3\sqrt{\cdots\cdots}}}}$	$\begin{cases} a_1=1 \\ a_2=1 \\ a_{n+2}=a_n+3a_{n+1} \end{cases}$ 中 $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ 的極限值
k＝4				
	比值	化成繁分數	化成無窮根式	對應的數列
$\frac{a}{b}$	$\sqrt{5}+2$	$\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{\cdots\cdots}}}}$	$\sqrt{1+4\sqrt{1+4\sqrt{1+4\sqrt{\cdots\cdots}}}}$	$\begin{cases} a_1=1 \\ a_2=1 \\ a_{n+2}=a_n+4a_{n+1} \end{cases}$ 中 $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ 的極限值
$\frac{b}{a}$	$\sqrt{5}-2$	$\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{\cdots\cdots}}}}$	$\sqrt{1-4\sqrt{1-4\sqrt{1-4\sqrt{\cdots\cdots}}}}$	$\begin{cases} a_1=1 \\ a_2=1 \\ a_{n+2}=a_n+4a_{n+1} \end{cases}$ 中 $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ 的極限值
……				
一般的 k				
	比值	化成繁分數	化成無窮根式	對應的數列
$\frac{a}{b}$	$\frac{\sqrt{k^2+4}+k}{2}$	$\cfrac{1}{k+\cfrac{1}{k+\cfrac{1}{k+\cfrac{1}{\cdots\cdots}}}}$	$\sqrt{1+k\sqrt{1+k\sqrt{1+k\sqrt{\cdots\cdots}}}}$	$\begin{cases} a_1=1 \\ a_2=1 \\ a_{n+2}=a_n+ka_{n+1} \end{cases}$ 中 $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ 的極限值
$\frac{b}{a}$	$\frac{\sqrt{k^2+4}-k}{2}$	$\cfrac{1}{k+\cfrac{1}{k+\cfrac{1}{k+\cfrac{1}{\cdots\cdots}}}}$	$\sqrt{1-k\sqrt{1-k\sqrt{1-k\sqrt{\cdots\cdots}}}}$	$\begin{cases} a_1=1 \\ a_2=1 \\ a_{n+2}=a_n+ka_{n+1} \end{cases}$ 中 $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ 的極限值

柒、研究討論：

經過我們的討論，發現可以利用『排無窮電阻』的方法得到『K 金矩形』所對應的數列：

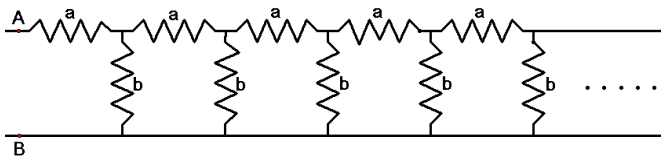
一、【研究過程說明】：利用電阻的串、並聯，我們將設計一條無窮多個電阻的電路，求出一個數列使得其後項：前項的比值 $\frac{a_{n+1}}{a_n}$，

當 $n\to\infty$ 時，$\frac{a_{n+1}}{a_n}\to$（『K 金矩形』長邊：短邊的比值）。

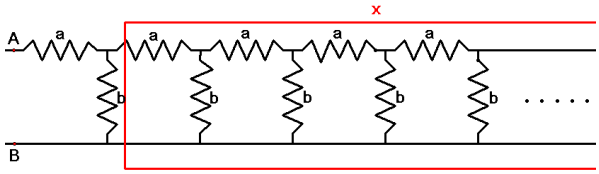
方法如下：

（一）以 k＝2 爲例：

先假設其電路爲下圖的型式：（a、b 爲常數）



如下圖，因爲右邊有無窮多個電阻，所以除了左邊的兩個電阻之外，右邊的電阻會等於總電阻，設總電阻爲 x，利用電阻的串、並聯的計算原則，可得方程式：



$$\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{b}}+a=x$$

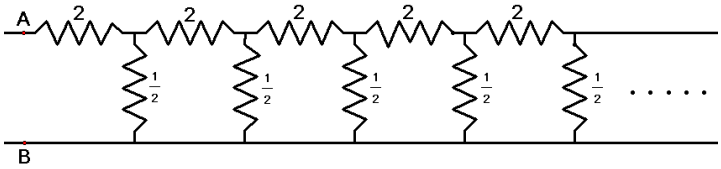
$$\Rightarrow \frac{1}{\frac{b+x}{bx}}+a=x \qquad \Rightarrow \frac{bx}{x+b}=x-a \qquad \Rightarrow (x+b)(x-a)=bx$$

$$\Rightarrow x^2-ax+bx-ab=bx \qquad \Rightarrow x^2-ax-ab=0$$

因爲 k＝2 時，『K 金矩形』長邊：短邊的比值爲 $\sqrt{2}+1$，

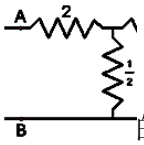
而 $\sqrt{2}+1$ 爲方程式 $x^2-2x-1=0$ 之正根，

比較方程式 $x^2-2x-1=0$ 和 $x^2-ax-ab=0$ 的係數後得到 a＝2、b＝$\frac{1}{2}$，所以應該設計其電路爲下圖的型式：



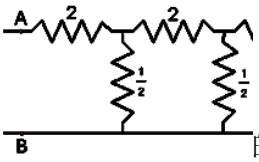
再分階段計算電阻可得：

1.



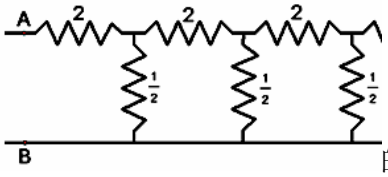
的電阻爲 $2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$

2.



的電阻爲 $\dfrac{1}{\dfrac{1}{(\frac{5}{2})}+\dfrac{1}{(\frac{1}{2})}}+2=\dfrac{29}{12}$

3.



的電阻爲 $\dfrac{1}{\dfrac{1}{(\frac{29}{12})}+\dfrac{1}{(\frac{1}{2})}}+2=\dfrac{169}{70}$ ，……

將出現的每階段電阻列出來：$\dfrac{5}{2}$ 、$\dfrac{29}{12}$ 、$\dfrac{169}{70}$ 、……，

可得數列 2，5，12，29，70，169，……，

令數列：$\begin{cases} a_1=2 \\ a_2=5 \\ a_{n+2}=a_n+2a_{n+1} \end{cases}$ （n 爲正整數）

我們將證明：依照上述規律排列電阻的電路圖中其 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ 的下一個數爲 $\dfrac{a_{n+3}}{a_{n+2}}$ 。

<pf>將 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ 再往後算一步

$$\frac{1}{\dfrac{1}{(\frac{a_{n+1}}{a_n})}+\dfrac{1}{(\frac{1}{2})}}+2=\frac{1}{\dfrac{a_n}{a_{n+1}}+2}+2=\frac{1}{\dfrac{a_n+2a_{n+1}}{a_{n+1}}}+2=\frac{a_{n+1}}{a_n+2a_{n+1}}+2$$

（因爲在數列 $\begin{cases} a_1=2 \\ a_2=5 \\ a_{n+2}=a_n+2a_{n+1} \end{cases}$ 中，$a_n+2a_{n+1}=a_{n+2}$ ）

所以原式 $=\dfrac{a_{n+1}}{a_{n+2}}+2=\dfrac{a_{n+1}+2a_{n+2}}{a_{n+2}}=\dfrac{a_{n+3}}{a_{n+2}}$ （因爲 $a_{n+1}+2a_{n+2}=a_{n+3}$ ）

因此，我們得到 k＝2 的『K 金矩形』，對應的數列爲 2，5，12，29，70，169，……

即數列：$\begin{cases} a_1=2 \\ a_2=5 \\ a_{n+2}=a_n+2a_{n+1} \end{cases}$ 。

結果我們得到一個不同於前面用『排正方形』法所得到的數列，即數列

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_2 = 5 \\ a_{n+2} = a_n + 2a_{n+1} \end{cases}$$ 。不過，利用「遞迴數列」的方法，仍然可以得到此數列中，

當 $n \to \infty$ 時，其 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \to \sqrt{2}+1$；而 $\dfrac{a_n}{a_{n+1}} \to \sqrt{2}-1$

也可以用 excel 算看看：【表格請參閱附錄】

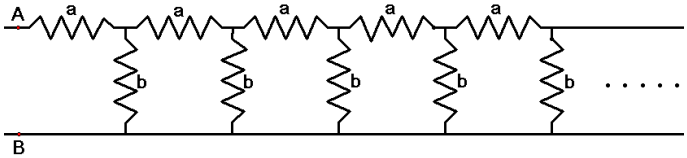
【心得】1.雖然數列的每一項均不同，可是 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ 的極限值卻可能相等。

2.將最左邊的電阻拿掉，其總電阻就等於 $\dfrac{a_n}{a_{n+1}}$ 的極限值。

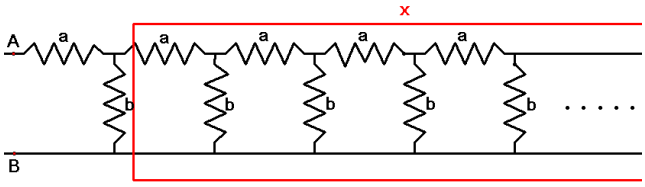
3.但是對於一個特定的 k 值而言，如果比較「排正方形法」和「排無窮電阻法」所得到的兩個數列，「排無窮電阻法」所得到的數列，其 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ 的會趨近得比較快。（比較表參閱附錄）

（二）再以 k＝3 爲例：

先假設其電路爲下圖的型式：（a、b 爲常數）



如下圖，因爲右邊有無窮多個電阻，所以除了左邊的兩個電阻之外，右邊的電阻會等於總電阻，設總電阻爲 x，利用電阻的串、並聯的計算原則，可得方程式：



$$\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{b}} + a = x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\frac{b+x}{bx}} + a = x \qquad \Rightarrow \frac{bx}{x+b} = x - a \qquad \Rightarrow (x+b)(x-a) = bx$$

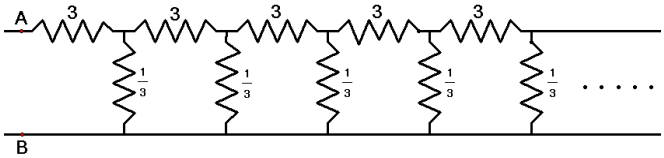
$$\Rightarrow x^2 - ax + bx - ab = bx \qquad \Rightarrow x^2 - ax - ab = 0$$

因爲 k＝3 的『K 金矩形』的長邊：短邊的比值爲 $\dfrac{\sqrt{13}+3}{2}$，

而 $\dfrac{\sqrt{13}+3}{2}$ 爲方程式 $x^2 - 3x - 1 = 0$ 之正根，

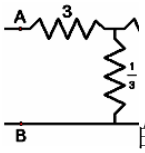
比較方程式 $x^2 - 3x - 1 = 0$ 和 $x^2 - ax - ab = 0$ 的係數後得到 a＝3、b＝$\dfrac{1}{3}$，所以應該

設計其電路爲下圖的型式：



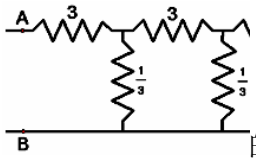
再分階段計算電阻可得：

1.



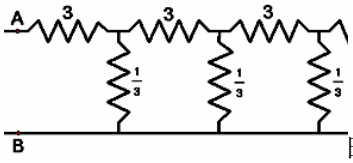
的電阻爲 $3+\frac{1}{3}=\frac{10}{3}$

2.



的電阻爲 $\dfrac{1}{\dfrac{1}{(\frac{10}{3})}+\dfrac{1}{(\frac{1}{3})}}+3=\dfrac{109}{33}$

3.



的電阻爲 $\dfrac{1}{\dfrac{1}{(\frac{109}{33})}+\dfrac{1}{(\frac{1}{3})}}+3=\dfrac{1189}{360}$ ，依此類推……

將出現的每階段電阻列出來：$\frac{10}{3}$ 、$\frac{109}{33}$ 、$\frac{1189}{360}$ 、……，

可得數列 3，10，33，109，360，1189，……，

令數列：$\begin{cases} a_1=3 \\ a_2=10 \\ a_{n+2}=a_n+3a_{n+1} \end{cases}$ （n 爲正整數）

我們將證明：依照上述規律排列電阻的電路圖中其 $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ 的下一個數爲 $\frac{a_{n+3}}{a_{n+2}}$ 。

<pf>將 $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ 再往後算一步

$$\frac{1}{\dfrac{1}{(\frac{a_{n+1}}{a_n})}+\dfrac{1}{(\frac{1}{3})}}+3=\frac{1}{\dfrac{a_n}{a_{n+1}}+3}+3=\frac{1}{\dfrac{a_n+3a_{n+1}}{a_{n+1}}}+3=\frac{a_{n+1}}{a_n+3a_{n+1}}+3$$

（因爲 $a_n+3a_{n+1}=a_{n+2}$ ）

所以原式 $=\dfrac{a_{n+1}}{a_{n+2}}+3=\dfrac{a_{n+1}+3a_{n+2}}{a_{n+2}}=\dfrac{a_{n+3}}{a_{n+2}}$ （因爲 $a_{n+1}+3a_{n+2}=a_{n+3}$ ）

因此，我們得到 k＝3 的『K 金矩形』，其對應的數列爲 3，10，33，109，

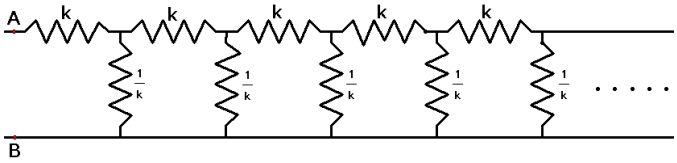
360，1189，……即數列：$\begin{cases} a_1=3 \\ a_2=10 \\ a_{n+2}=a_n+3a_{n+1} \end{cases}$ 。

利用「遞迴數列」的方法，仍然可以得到此數列中，

當 $n\to\infty$ 時，其 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\to\dfrac{\sqrt{13}+3}{2}$ ；而 $\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\to\dfrac{\sqrt{13}-3}{2}$

也可以用 excel 算看看：【表格請參閱附錄】

（三）一般『K 金矩形』的情況，可設計電路圖：



來求出此『K 金矩形』邊長比值所對應的數列爲 $\begin{cases} a_1=k \\ a_2=1+k^2 \\ a_{n+2}=a_n+ka_{n+1} \end{cases}$ 。

捌、參考資料：

編號	書名	篇名	頁數	作者	譯者	出版社
1	選修數學第五冊	1－2 黃金篇	P26－P34	國立編譯館主編		國立編譯館
2	神奇數學 117	黃金分割與代數	P151－P154	Alfred S.Posamentier	葉偉文	天下文化
3	神奇數學 117	黃金矩形	P195－P199	Alfred S.Posamentier	葉偉文	天下文化
4	數學馬戲團	費波那奇數與盧卡斯數	P33－P49	Martin Gardner	蔡承志	遠流
5	高中數學教室單元系列 4－數列與級數	遞迴數列	P171－P174	陸思明		建宏

玖、附錄：『K 金矩形』邊長比所對應的數列（限於篇幅，只能節錄）

k=2（排正方形法）			k=2(排無窮電阻法)		
n	a(n)	a(n)/a(n－1)	n	a(n)	a(n)/a(n－1)
1	1		1	2	

2	1		2	5	
3	3	3.00000000000000	3	12	2.40000000000000
4	7	2.33333333333333	4	29	2.41666666666667
5	17	2.42857142857143	5	70	2.41379310344828
6	41	2.41176470588235	6	169	2.41428571428571
…	……	……	…	……	……
30	63018038201	2.41421356237309	30	259717522849	2.41421356237309

k=3（排正方形法）			k=3(排無窮電阻法)		
n	a(n)	a(n)/a(n－1)	n	a(n)	a(n)/a(n－1)
1	1		1	3	
2	1		2	10	
3	4	4.00000000000000	3	33	3.30000000000000
4	13	3.25000000000000	4	109	3.30303030303030
5	43	3.30769230769231	5	360	3.30275229357798
6	142	3.30232558139535	6	1189	3.30277777777778
…	……	……	…	……	……
30	403079817634702	3.30277563773199	30	3375045015828950	3.30277563773199

k=4（排正方形法）			k=4(排無窮電阻法)		
n	a(n)	a(n)/a(n－1)	n	a(n)	a(n)/a(n－1)
1	1		1	4	
2	1		2	17	
3	5	5.00000000000000	3	72	4.23529411764706
4	21	4.20000000000000	4	305	4.23611111111111
5	89	4.23809523809524	5	1292	4.23606557377049
6	377	4.23595505617978	6	5473	4.23606811145511
…	……	……	…	……	……
30	420196140727490000	4.23606797749979	30	6100080207560940000	4.23606797749979

k=5（排正方形法）			k=5(排無窮電阻法)		
n	a(n)	a(n)/a(n－1)	n	a(n)	a(n)/a(n－1)
1	1		1	5	
2	1		2	26	
3	6	6.00000000000000	3	135	5.19230769230769
4	31	5.16666666666667	4	701	5.19259259259259
5	161	5.19354838709677	5	3640	5.19258202567760
6	836	5.19254658385093	6	18901	5.19258241758242
…	……	……	…	……	……
30	12342635949037300000	5.19258240356725	30	2790527565781830000000	5.19258240356725

【評語】030408

1. 證明嚴謹，計算詳細，邏輯清晰。
2. 研究目標明確。
3. 團隊合作良好。
4. 運用作圖軟體呈現研究過程與結果，有創意。