中華民國第51屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

030407

Compsition Ⅷ

學校名稱：桃園縣立瑞原國民中學

作者：	指導老師：
國三 陳聖鎧	古永智
國三 鄭慧敏	張鳳蘭
國三 古書育	

關鍵詞：阿波羅尼奧斯、外冪性質、中垂線

摘要

阿波羅尼奧斯問題（Apollonius' Problem）是古希臘數學家阿波羅尼奧斯（Apollonius of Perga）提出討論的幾何作圖問題：設有 3 個圓，要如何做出一個圓，使其與已知三圓相切？另外，如果將題目中的圓以線或點帶入，則總共十種的題目，要如何做？

阿波羅尼斯按已知條件將問題分成 10 種：點點點、線線線、點點線、點線線、點點圓、點圓圓、線線圓、線圓圓、點線圓、圓圓圓。

對於阿波羅尼奧斯所提出的問題，我們嘗試利用了國民中學第五冊尺規作圖的概念與邏輯思考來證明。

Abstract

Apollonius' Problem was posed by the great ancient Greek mathematician, Apollonius of Perga, concerning circle construction between three given graphs that could be a point, a line, or a circle. The circle should pass the given point, and be tangent to the given line or circle.

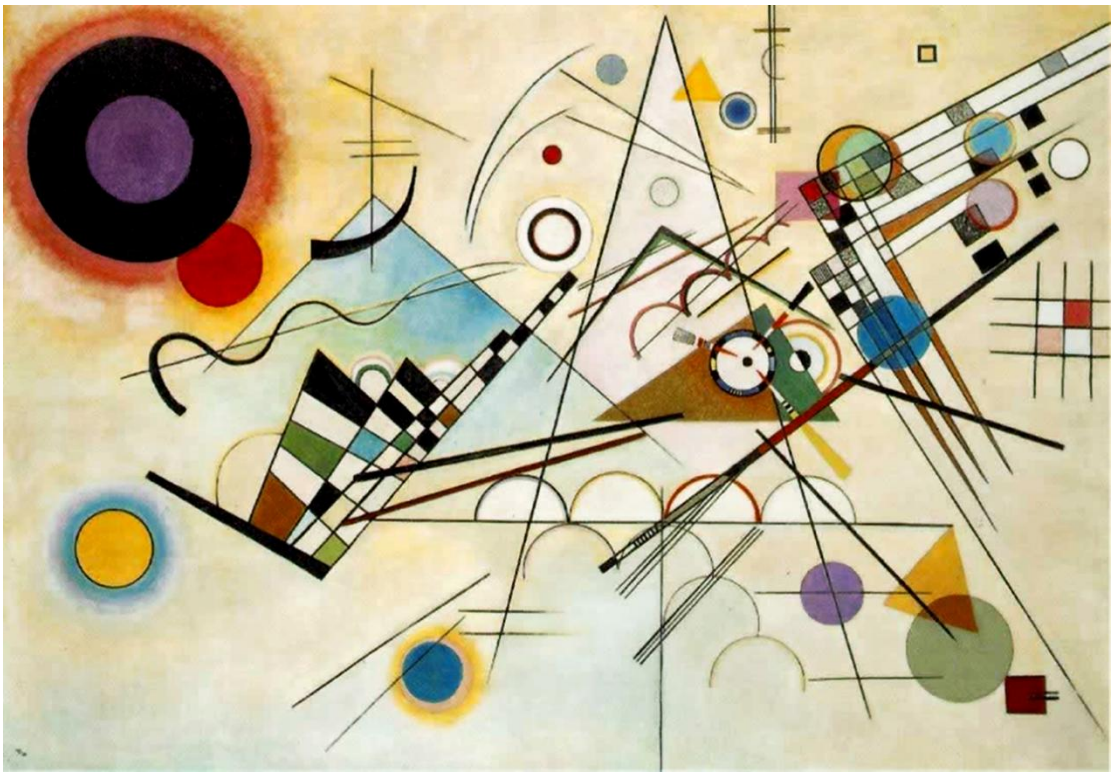
The ten cases considered are described below:

1. three points
2. three lines
3. one line and two points
4. one point and two lines
5. one circle and two points
6. one point and two circles
7. one circle and two lines
8. one line and two circles
9. one circle, one line, and a point
10. three circles

We solve the above ten problems by ruler, compasses and knowledge learnt from mathematics textbook (volume 5) of junior high school.

壹、 研究動機

在幾個月前的一堂美術課，我們認識到「抽象畫」。偶然間，我們看到抽象藝術之父—康丁斯基的作品《構成第八號》。這幅圖，只是由大量的線條與圓構成，卻充滿了美感，引起本小組對圓的研究興趣。當時正在學習九年級上學期的數學(翰林版)第二章「圓形」、第三章「三角形的心」的幾何內容，引起了我們的研究興趣。



在蒐集圓的資料的過程中，我們無意間看到了『阿波羅尼奧斯』這個偉大的數學家所提出的「阿波羅尼奧斯問題」，所以開始了探討圓、點、線之間的作圖之旅！

貳、研究目的

根據阿波羅尼奧斯所提出的問題，我們所要研究的是：利用尺規作圖，作出一個圓，使其與已知的三圓相切，再將此題目進行合理的推廣，演變出共計十種圓、點、線的組合題目，並一一探討所有可能的情況，並利用幾何證明，說明我們的作圖是正確的。

參、研究設備及器材

尺規作圖的工具，包括有：圓規、直尺、紙筆，以及電腦繪圖軟體

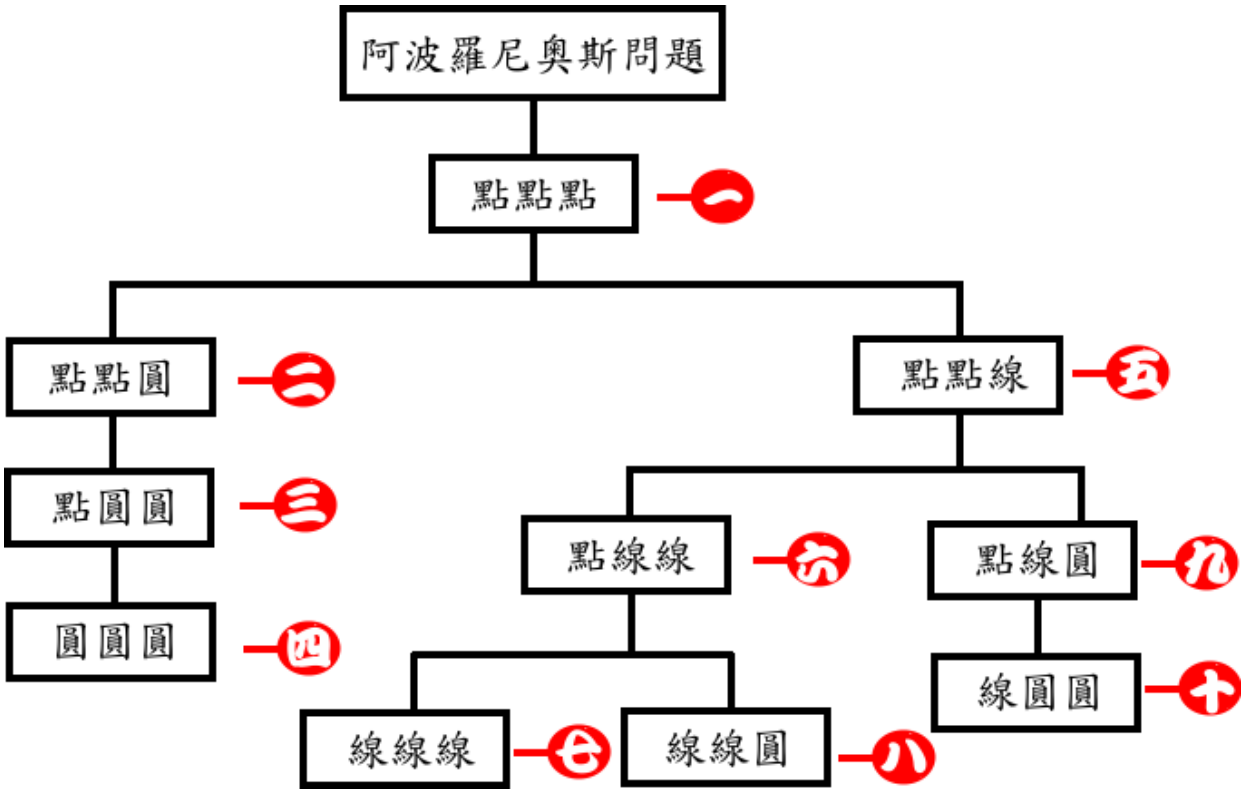
肆、研究方法與過程

一、研究方法

我們翻閱了大量的書籍與參考資料。其中有幾本書提到了反演、雙曲線等方法。雖然理論上來講可行，但是不容易使用尺規作圖來解答。可是，在阿波羅尼奧斯所做的書中有提到，一圓可以極限縮小到一點，或者極限放大成一直線。所以，我們將圓問題退化，總共提出十個問題，並且利用尺規作圖來解答。

二、研究過程

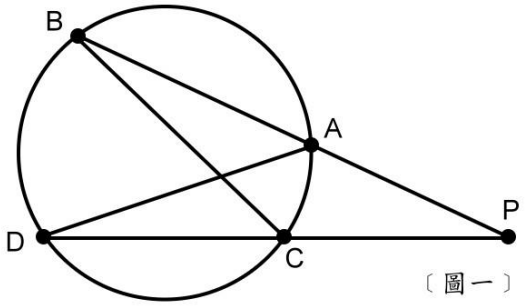
經過反覆的研究，我們排定了以下的十個研究過程：



三、參考定理

定理一(圓外冪定理)：(如圖一)圓上兩弦 AB、CD, 其延長線相交於圓外 P 點，

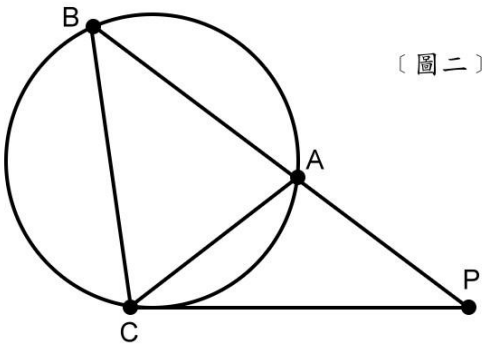
則 PA・PB = PC・PD。



〔圖一〕

定理二(圓切割線冪定理)：(如圖二）P 為圓外一點，割線 PB 割圓於 A 點，而 PC 為圓的切線，

則 PA・PB = PC^2。



〔圖二〕

這兩個定理的證明都不難。

在(圖一)中，由圓周角的性質可知△PCB~△PAD，因此PB/PD=PC/PA，則可證得定理一 PA・PB=PC・PD。相同地，(圖二)中，由弦切角的性質可知△PCB~△PAC，則可證得定理二 PA・PB=PC^2。

事實上，定理一和定理二的**逆定理**是成立的。

逆定理一：若 P、A、B 三點共線, P、C、D三點共線，且PA・PB=PC・PD，則A、B、C、D在同圓上。

逆定理二：若 P、A、B 三點共線, 且PA・PB=PC^2，則PC為通過ABC之圓的切線。

這兩項逆定理的證明也不難，只要將上述的證明由尾到頭做一次即可。

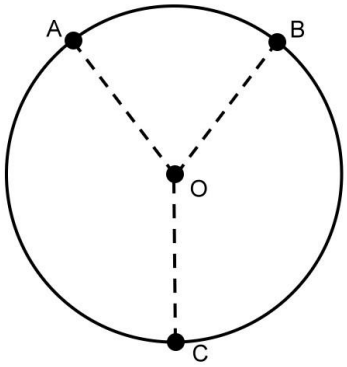
伍、研究討論與結果

一、研究討論

(一) 點、點、點

1、 想法：

設已知 A、B、C 三點，且有一圓通過這三點(如下圖)。若 O 是該圓的圓心，那麼 AO=BO=CO。因為 OA=OB，故△OAB 為一等腰三角形，所以 O 點必在 AB 之中垂線上。同理，O 也在 AC 的中垂線上，所以只要做出 AB 和 AC 中垂線，兩線的交點就會是 O。同時，知道了圓心 O，便知道 OA 長即為半徑。

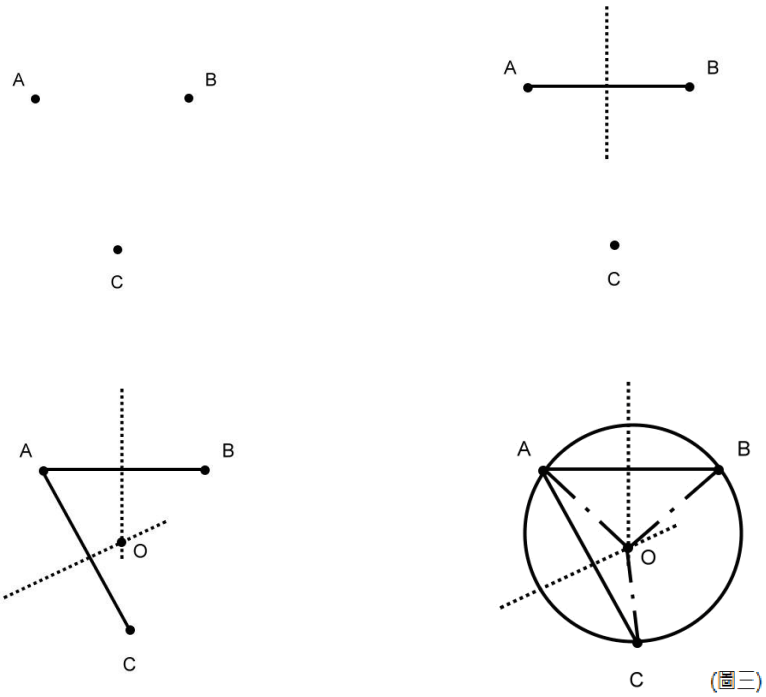


2、作圖步驟 ：

(1). 作 AB 的中垂線。

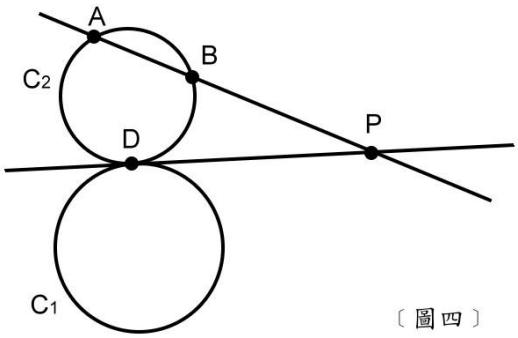
(2). 作 AC 的中垂線。稱兩線的交點為 O。

(3). 以 O 為圓心，OA 為半徑畫圓。這就是所求的圓(如圖三)。



(圖三)

(二) 點、點、圓



〔圖四〕

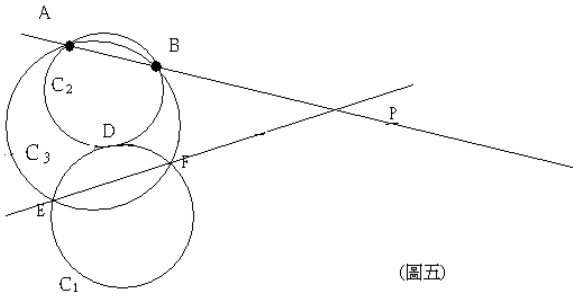
1、 想法：

在(圖四)中，有 A、B 兩已知點，還有 C_1 一已知圓。現在要做圓 C_2，使它通過 A、B 兩點且與 C_1 相切，則圓 C_2 即為所求。

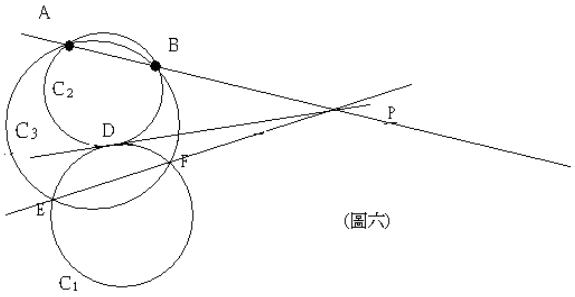
我們假設 C_1 、C_2 兩圓的切點為 D。為了分析出 A、B 兩點與圓 C_2 的關係，將 A 點 B 點連結並延長。因為 D 是假設的兩圓的切點，故將做一過 D 點的切線，且交 AB 的延長線於 P。

如果想要畫出公切圓C_2，就必須找到三個點，再利用「**(一)**點、點、點」的作圖法做圓。我們已經知道A和B點的位置，所以只要再找到D點就行了。又因為DP為C_1的切線，所以要找D點，就必須**先找到P點**。最後，還有一個問題需要解決，那就是：**如何連結**PD？

尋找P點：我們做一圓C_3，過A、B且與C_1相交於E、F兩點(如圖五)。D點為C_1、C_2的切點，則PD線同時與C_1、C_2相切，可得$PB \cdot PA=PD^2$，且$PF \cdot PE= PD^2$，故A、B、E、F四點同圓。延長AB、EF，會交於P點。由此可知，我們只要先固定C_1上的一點E，再做圓ABE，再將E點和第四個交點F點連結、延長，便可找出P點(如圖六)。

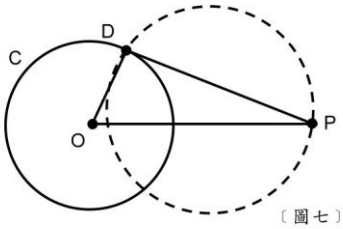


(圖五)



(圖六)

連結PD：圖七中，C為一已知圓、O為其圓心、P為圓外一點。若D為切點，那PD必垂直DO。由圓周角的性質可知，對應弧為半圓時，圓周角即為90° 。所以連PO，做一PO為直徑的圓(下圖虛線部份)，那麼這個虛線圓與圓C相交的那個點即為所求切點D。



〔圖七〕

經過以上討論，就可以做出「點、點、圓」的圖形了。

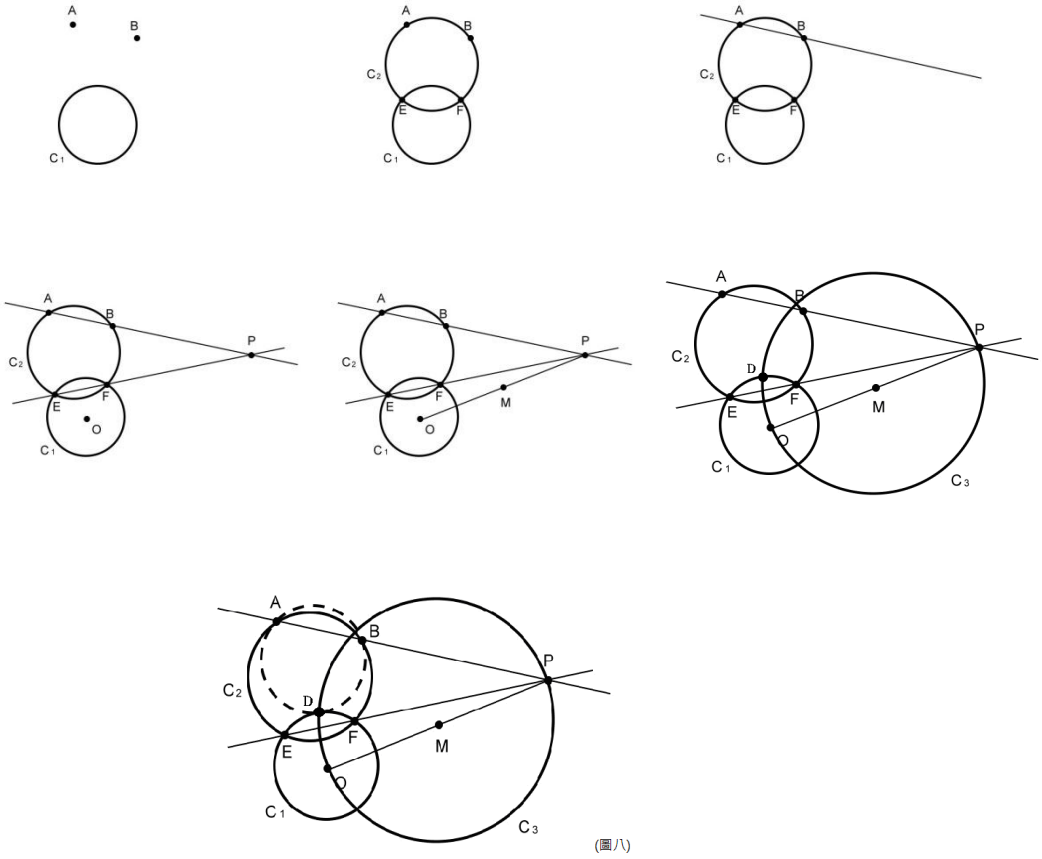
2、作圖步驟(圖八)：

(1). 在C_1上任取一點E。依照前面「(一)點、點、點」的步驟作圓ABE。稱圓C_2過ABE三點與圓C_1的另一交點為F。

(2). 連接並延長AB、EF。設其交點為P。連接OP(O為圓C_1的圓心)，並做出其中點M。

(3). 以M為圓心，MO為半徑畫圓C_3並令其與C_1的交點為D(有兩種可能)。

(4) 依「(一)點、點、點」的步驟作圓ABD，即圓C_3為所求。

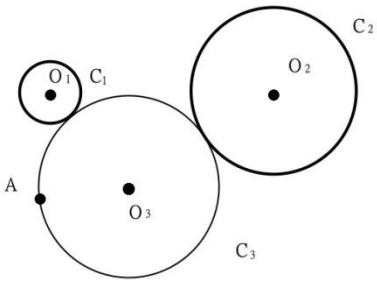


(圖八)

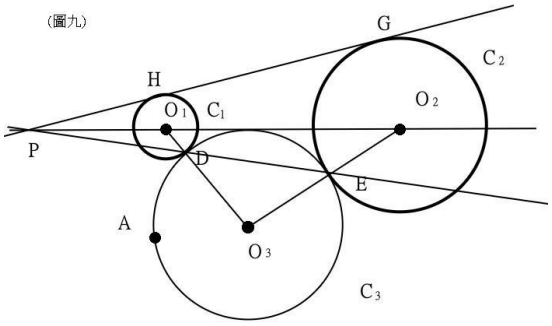
3、作圖補充：

因步驟3.的部分有兩個可能，故此題目有兩個解。又如果E重疊F，可直接使用「(一)點、點、點」的作圖法去做。此外如果AB平行EF，那就得找出AB和EF的中點連線，且交C_1於D，再用「(一)點、點、點」做一圓同時通過A、B、D三點，該圓即為所求。

(三) 點、圓、圓



(圖九)



1、想法：

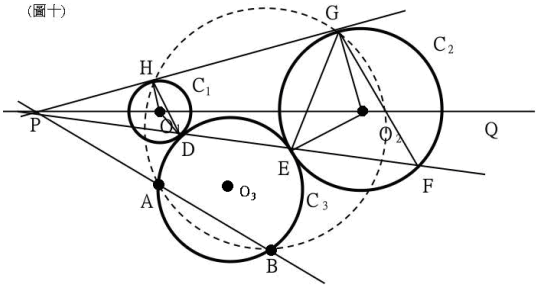
在(圖九)中，點A為已知點，C_1、C_2為已知圓。現在要做圓C_3，使其通過A點，而且與C_1、C_2相切。我們假設O_1、O_2、O_3為C_1、C_2、C_3的圓心，D點是C_1與C_3的相切點，E點為C_2與C_3相切點。

我們連接DE、O_1O_2，設兩線的交點為P。接著如果我們做C_1的切線，通過焦點P且交於H點，將會發現延長PH後，也會切C_2於一點G。也就是說，**C_1和C_2的外公切線GH也會通過P點(將說明於後)**。然後，**我們如果找出了P點，進一步將之運用在作圖上。**

DE、O_1O_2、GH交於同一點：(請看圖十)我們延長DE，並交C_2於另一點，設其為F。首先，因為HO_1與GO_2垂直於同一外公切線HG，故$HO_1 \parallel GO_2$。因為假設E點為C_2、C_3兩圓的切點，故點E與O_2、O_3共線。同理，D點與O_1、O_3共線。由「等腰三角形的底角相等」、「 對頂角相等」兩性質，可知$\angle O_2FE = \angle O_2EF = \angle O_3ED = \angle O_3DE = \angle O_1DP$，即$FO_2 \parallel DO_1$(同位角相等) ，$\triangle PDO_1 \sim \triangle PFO_2$。

現在要證明公切線GH和O_1O_2交於P點(也就是DE和O_1O_2的交點)。我們假設P'為GH和O_1O_2的交點。從前面的證明可知，$HO_1 \parallel GO_2$，所以$\triangle P'HO_1 \sim \triangle P'GO_2$，得$HO_1 / GO_2 = P'O_1 / P'O_2$。但$HO_1 = DO_1$，$GO_2 = FO_2$，所以P'=P。

(圖十)



利用P點找出第二已知點—B：連接AP，並假設AP的延長線交所求公切圓C_3於另一點B。則由A、B、E、D四點同圓得知$PD \cdot PE = PA \cdot PB$。另外由前兩段得$PD / PF = PH / PG$，可知$\angle PDH = \angle PFG = \angle PGE$，得$\triangle PDH \sim \triangle PGE$並推得$PH / PE = PD / PG$。可知$PH \cdot PG = PD \cdot PE$，故$PH \cdot PG = PA \cdot PB$，由外冪定理的逆定理推知，A、B、G、H四點同圓(虛線圓)。換言之，B點的位置即為AP和虛線圓AGH的交點。

找到B點之後，我們便已有了兩個已知點A、B，兩個已知圓C_1、C_2。我們取兩已知點和任一個已知圓，便可利用「(二)點、點、圓」來畫出一通過A、B兩點以及相切於

所取已知圓C_1的圓C_3，這個圓C_3必會相切於另一已知圓C_2。

2、作圖步驟(圖十一)：

(1).以O_2為圓心，圓C_2和圓C_1之半徑差為半徑，另做一個圓C_4。(第1、2小圖)

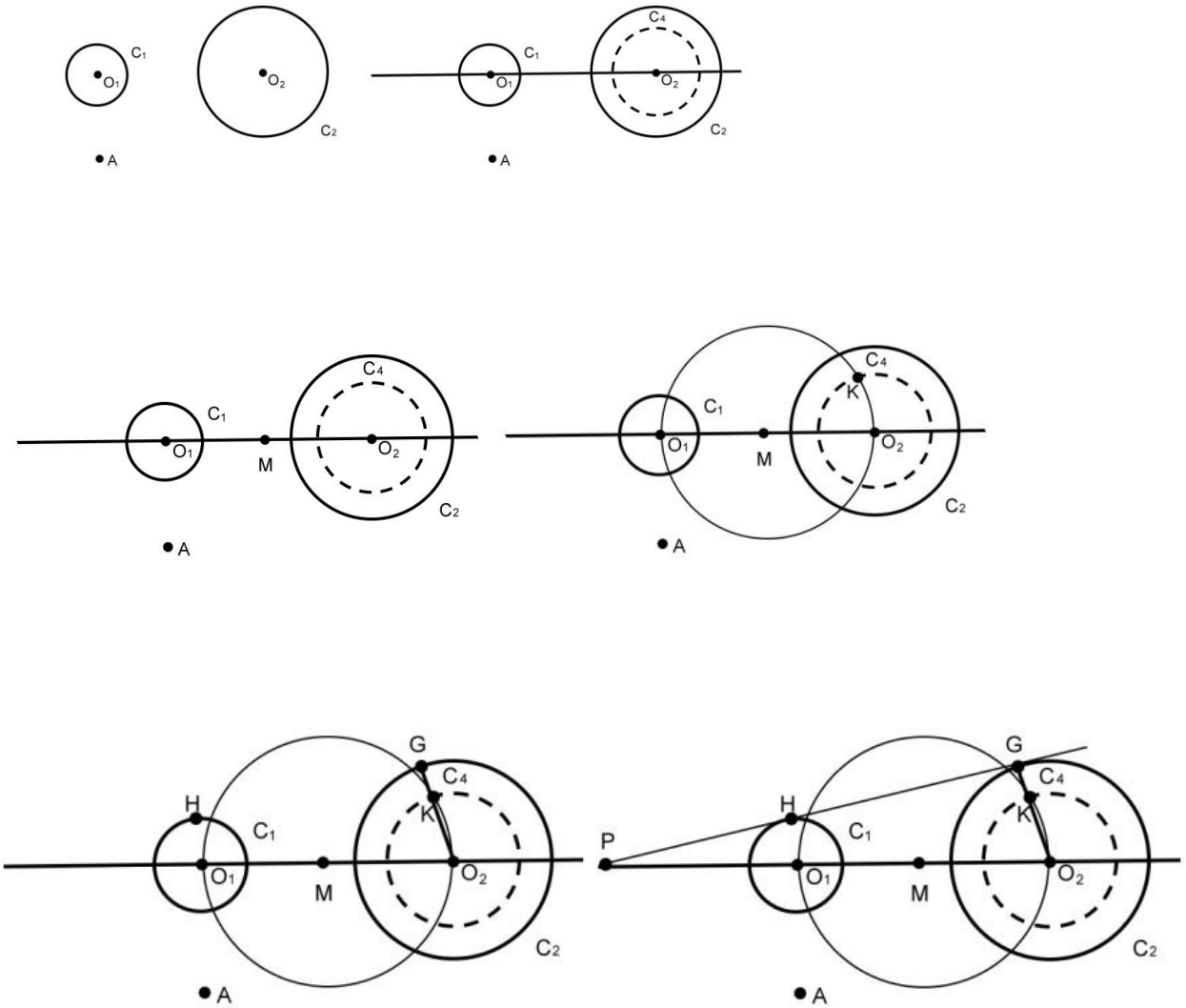
(2).連接O_1O_2，做出其中點M。(第3小圖)

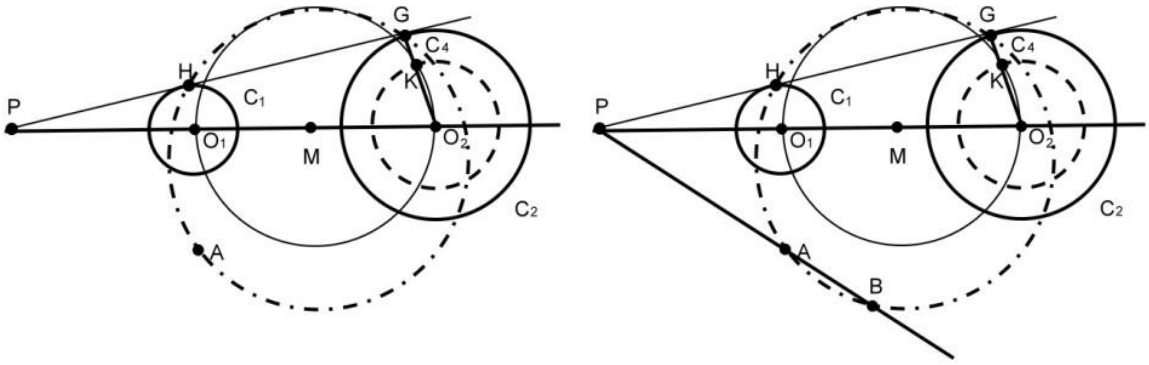
(3).以M為圓心，MO_2為半徑畫一圓(中間灰線圓)，使其與C_4(虛線圓)相交於K點。因O_1KO_2為90度(半徑所對之圓周角)，故O_1K為C_4的切線。(第4小圖)

(4).延長O_2K交圓C_2於G點。再做一直線垂直O_2K的延長線於垂足G點，並使此垂線切圓C_1於H點，且交O_1O_2延長線於P點，則GH即為兩圓C_1、C_2之外公切線。(第5、6小圖)

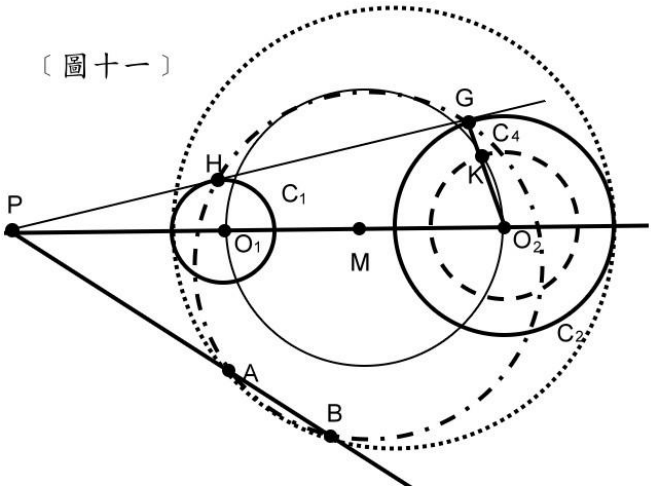
(5).依「(一)點、點、點」的步驟做一圓，使其通過A、G、H三點(大虛線圓)。連結AP，使其交圓AGH(大虛線圓)於B點。(第7、8小圖)

(6).依「(二)點、點、圓」的步驟做圓(最大虛線圓)，使其通過A、B兩點，並與圓C_1內切。此(最大虛線)圓即為所求。(第9小圖**圖十一**)





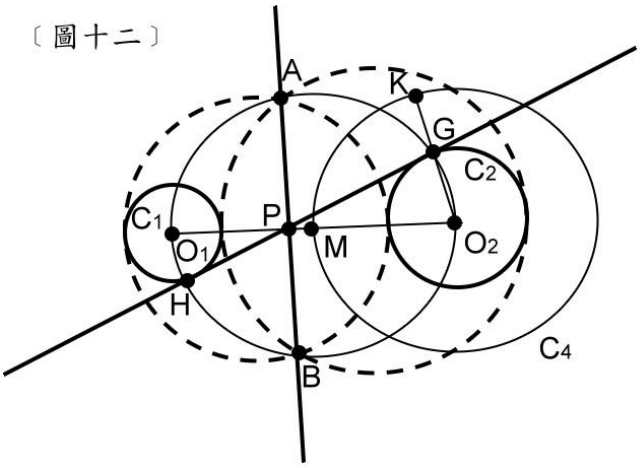
〔圖十一〕



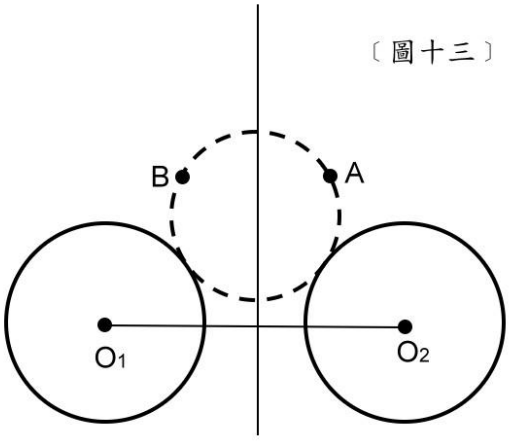
3、作圖補充

補充一：由於以「(二)點、點、圓」的作圖法所做出來的圖形會有兩個解。如果我們改將C_4的半徑定為C_1、C_2的半徑之和，那麼會出現另外兩個解(圖十二)。所以點、圓、圓的解一共有四個。

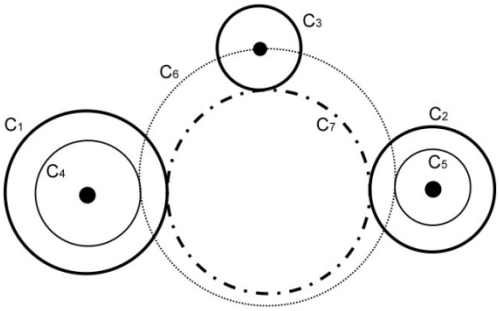
〔圖十二〕



補充二：若是 C_1、C_2 的半徑相同，那麼(圖十一)之中的外公切線 GH 和 O_1O_2 延長線便不會交於 P 點。那該怎麼辦呢？我們可以將 O_1O_2 的中垂線當成對稱軸，便可找出 A 點之對稱點，以 B 表示。這時候，只要再做一次「(二)點、點、圓」的繪圖方法，便可得到解答。(如圖十三)



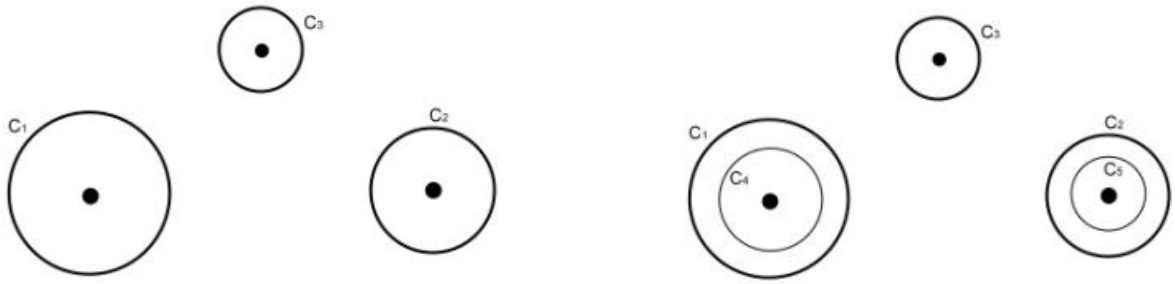
(四) 圓、圓、圓

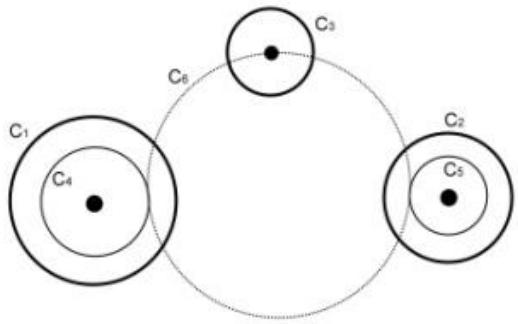


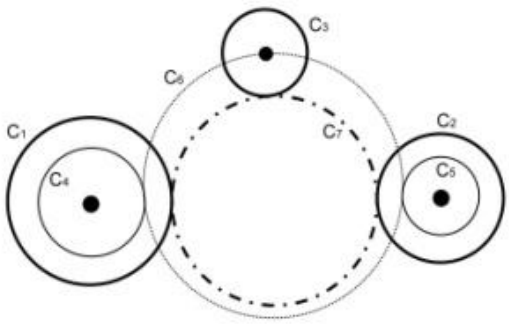
(圖十四)

1.想法：

在(圖十四)中，有C_1、C_2、C_3三個已知圓。現在要做一個圓，使其與C_1(左)、C_2(右)、C_3(中)三圓相切。我們假設三個圓之中，C_3的半徑最小。那麼，我們將C_3退化成一個點，並將另外兩已知圓C_1、C_2的半徑按照C_3的半徑長縮小，成為C_4(左灰圓)、C_5(右灰圓)。這時，我們只要按照前面「(三)點、圓、圓」的作圖方法，做出圓C_6(中間大灰圓)，使其與C_4、C_5相切，再將它的半徑依C_3的半徑長進行縮減，作成C_7，便可得一與C_1、C_2、C_3相切的圓。可是，我們發現，雖然它的作圖方法是按照「(三)點、圓、圓」的方法，不過如果按照上述方法的話，並不會有四組解，而只有兩組。因為若是以(圖十二)的方法做圓，可做出與C_4、C_5相切的圓，但並沒有辦法做出與C_1、C_2、C_3三個圓同時相切的圓。

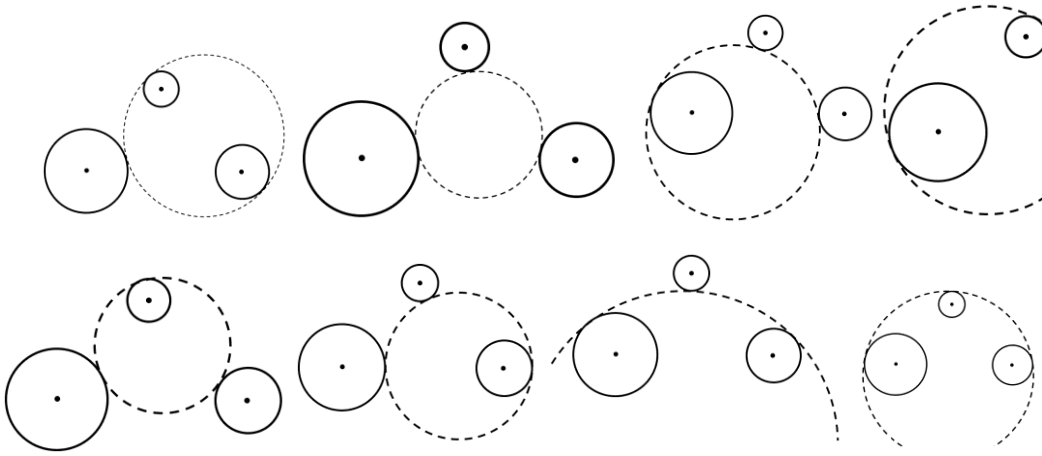






1、**補充：**

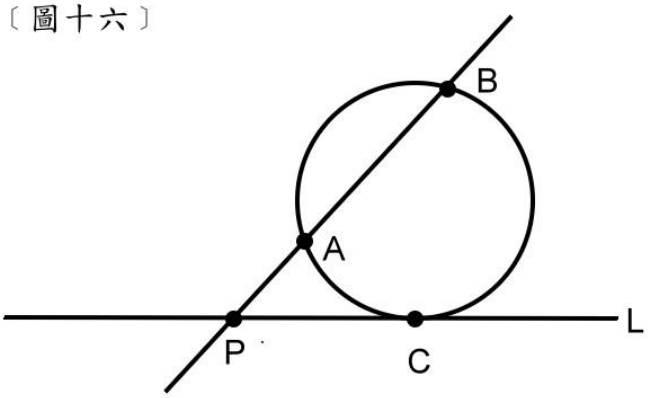
但是事實上，圓、圓、圓的問題並不只有兩種解答。當C_3縮成一點時，另外兩個圓不一定要縮小，也可選擇放大，或者一個放大一個縮小……等等。並且利用「(三)點、圓、圓」方式來作圖的話，一共會有八種解答(圖十五)。



(圖十五)

(五) 點、點、線

〔圖十六〕



1、 **想法：**

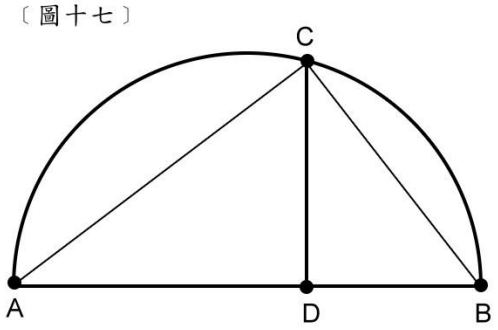
(圖十六)中，已知 AB 兩點，直線 L 亦為已知。現欲做圓，讓它通過 A 和 B 並與 L 相切。

之前已提，做圓一開始的條件即是要知道圓心位置和半徑大小；又可確定圓上三點的位置，利用之前介紹「(一)點、點、點」的作圖方法。現已知 A、B 兩點的位置，而下一步即是**找出第三點的位置**。

設圓與直線的切點為 C，L 與 AB 相交於 P。若要作出所需的圓，就要**確定 C 的位置**。

找出 C 點：A、B 和 L 皆為已知，由此可知 P 的位置。因 L 是所求圓的切線，且切圓於 C，所以依據切線冪定理 PC^2＝PA×PB，便可確定 C 的位置。

〔圖十七〕



在(圖十七)中，ACB 為半圓，D 為直徑 AB 上的一點，讓 CD⊥ AB，且∠ACB＝90°

因此　△CAB～△DAC～△DCB

CA^2＝AB×AD

CB^2＝AB×BD

CD^2＝AD×DB

結合以上概念，即可完成「點、點、線」的作圖。

2、作圖步驟(圖十八)

已知 A、B 兩點及直線 L

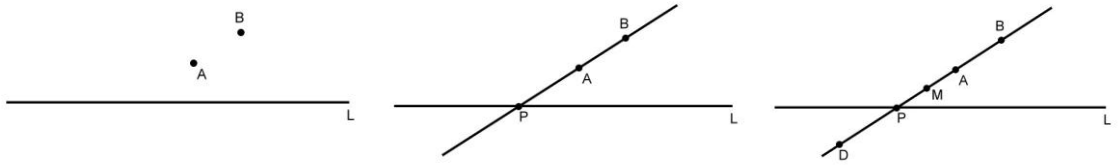
(1)．延長 AB 使 AB 與 L 相交於 P 點，再延長它到點 D，並使(1/2)AD=PD。

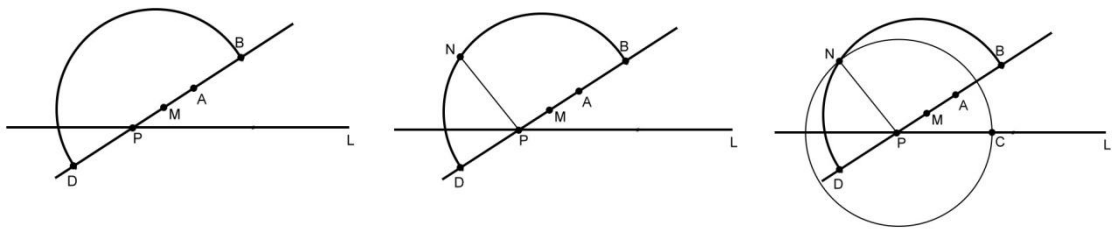
(2)．作 BD 線的中點 M，再以 M 為圓心，MB 為半徑畫一個圓。

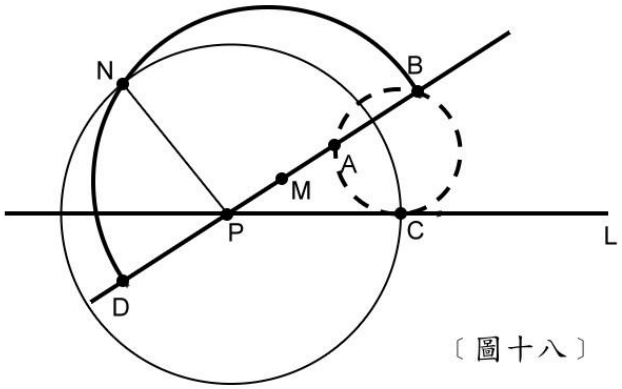
(3)．過 P 點作一直線垂直於 BD，並令垂直線與半圓的交點為 N。

(4)．以 P 為圓心，PN 為半徑畫弧，使交 L 於 C。

(5)．依照「(一)點、點、點」的步驟做圓 ABC，即為所求。





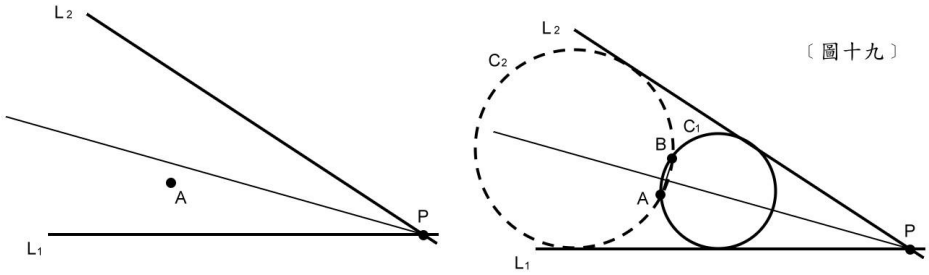


〔圖十八〕

3、補充：

(圖十八)中，弧 CN 與 L 共有兩個交點。假如另一交點為 C '，則由「(一)點、點、點」步驟所繪製出的圓 ABC '亦是此情況的其中一解，總言而之，「點、點、線」共有兩個解。

(六) 點、線、線



〔圖十九〕

1、 **想法：**

(圖十九)中，A 為已知點，直線 L_1 和 L_2 亦為已知。現作 C_1 使其通過 A 並與 L_1 和 L_2 相切。令 C_1 的圓心為 O，L_1 與 L_2 相交於 P。連接 PO，不難證明 PO 為 L_1、L_2 的角平分線，因此假如 A 為 C_1 上的一點，則 C_1 上會有另一點 B，使 A.B 兩點對稱於 PO。因確定了圓上 A 點與 B 點的位置，再加上直線 L_1 或 L_2，則可利用「(五)點、點、線」的方法來做 C_1。

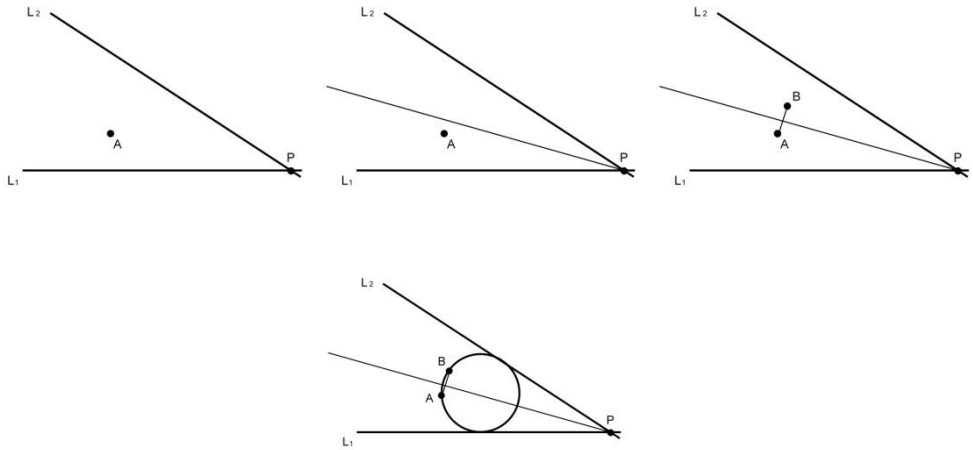
2、作圖步驟：

已知 A 點及直線 L_1 和 L_2。設 P 為 L_1 和 L_2 的交點。

(1). 作∠P 的角平分線。

(2). 以角平分線為對稱軸，找出 A 點的對稱點 B。

(3). 依「(五)點、點、線」的步驟作通過 A、B 兩點，並與 L_1 相切的圓。此圓即為所求。



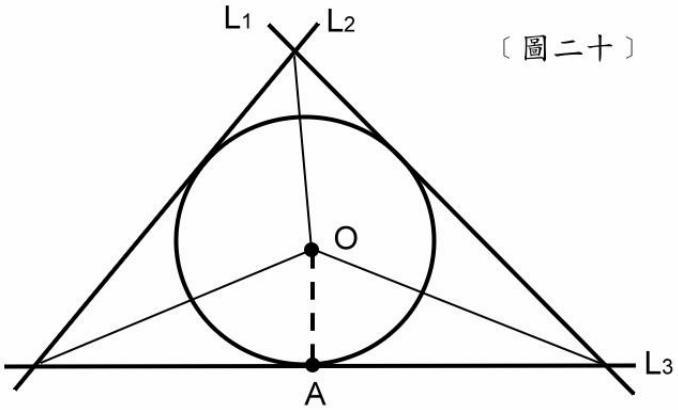
3、補充：

(1).因「(五)點、點、線」有 2 個解，所以這道題目亦應有 2 個解。而另一解為(圖十九)中的 C_2。

(2).若 L_1 和 L_2 不相交，即 $L_1//L_2$，則作一直線等距於 L_1 和 L_2，以此代替上述步驟中的角平分線。

(3).若 A 點剛好位於角平分線上，則通過 A 作一直線 L_3 垂直於角平分線，然後按下面將要介紹的「(七)線、線、線」作圖步驟，做與 L_1、L_2、L_3 相切的圓。

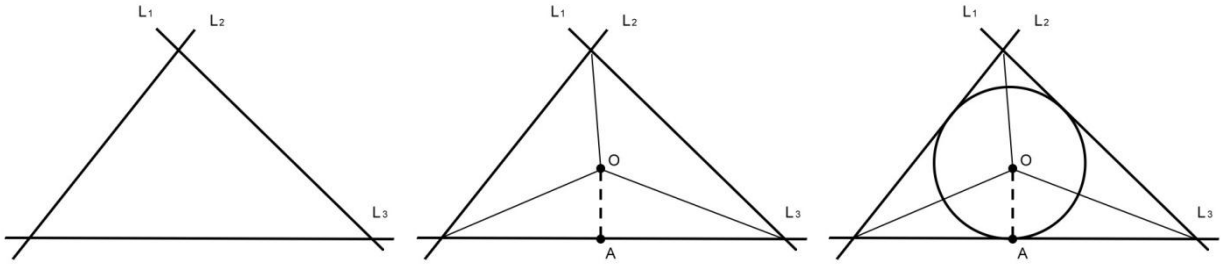
(七) 線、線、線



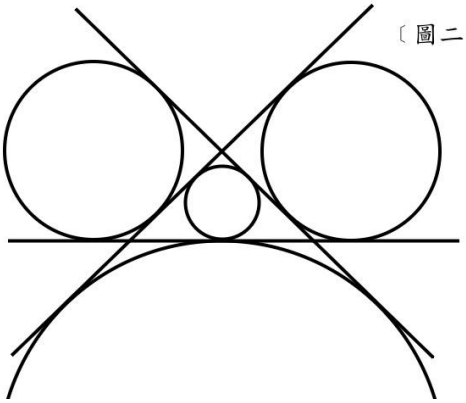
〔圖二十〕

1、想法：

(圖二十)中，有已知直線 L_1、L_2 與 L_3。現在要做一圓，與 L_1、L_2、L_3 相切。由「(六)點、線、線」可得知，每兩條直線間的夾角平分線必通過圓心 *O*，所以我們可以由兩條角平分線來確定圓心位置。另外，由圓心 *O* 向其中任一條直線〈L_1、L_2 或 L_3〉做垂直線，交該直線於 *A*。以 OA 為半徑、O 為圓心做圓，即為所求。

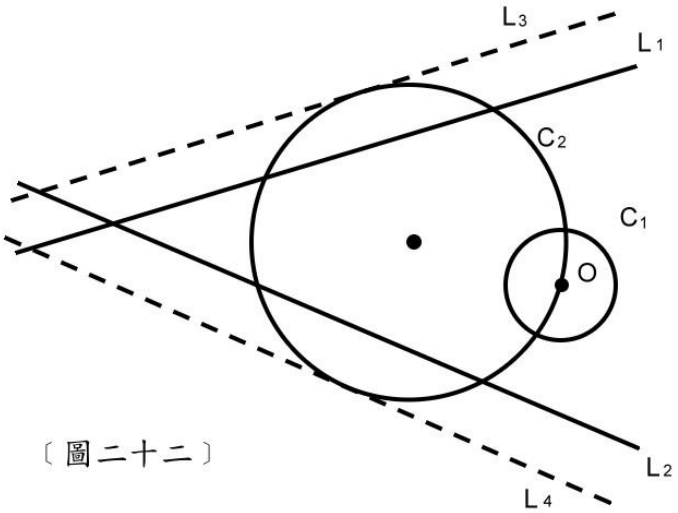


2、補充：線、線、線的作圖問題會有四個解(如圖二十一)。



〔圖二十一〕

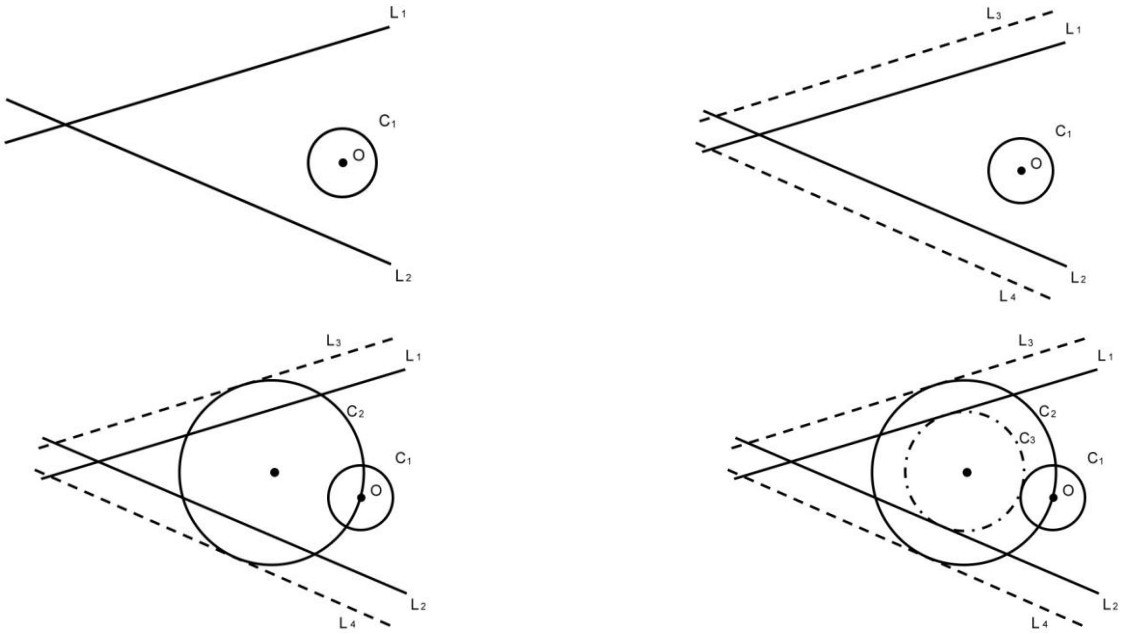
(八) 線、線、圓



〔圖二十二〕

1、想法：

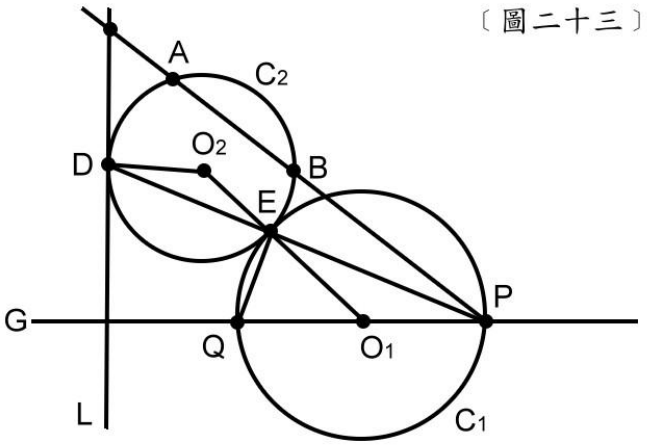
(圖二十二)中，有已知直線 L_1 與 L_2 及已知圓 C_1。現在要做圓 C_2，使它與 L_1、L_2 和 C_1 相切。設 C_1 圓心為 O，將 L_1 與 L_2 分別平行移動至 L_3 與 L_4，但移動距離需為 C_1 之半徑。接著，按照「(六)點、線、線」的步驟做圓 C_2，使它與 L_3 與 L_4 相切，且通過圓心 O 點。將 C_2 的半徑按 C_1 的半徑縮小得 C_3，則 C_3 即為所求圓。



2、補充：

依據「(六)點、線、線」所做出來的圖會有兩組解，而且可以把線向內平行移動求解 (此為第二種作法)，故線、線、圓有四組解。

(九) 點、線、圓



〔圖二十三〕

1、想法：

在(圖二十三)之中，A 點是已知點，L 是已知線，C_1 是已知圓。現在要做一圓 C_2，使其通過 A 點並與 C_1、L 相切。我們假設 O_1、O_2 是 C_1、C_2 的圓心。D 點為 L 與 C_2 的切點，E 點為 C_1、C_2 的切點。然後我們做一條直線通過 O_1 且垂直於 L，假設這條直線與 L 的交點為 G，與 C_1 交於 P、Q 兩點。連接 AP、DO_2、EO_1、EO_2、DE 和 PE。由此可知，O_1、O_2、E 三點共線，**且 D、E、P 也會共線(將說明於後)。**同時可推想 Q、E、P 三點共圓，且因∠PEQ=90°(半圓所對的圓周角)，∠PGD=90°，可得 PE・PD=PQ・PG，故由外冪定理可知 D、E、Q、G 四點同圓。

證實了 D、E、Q、G 四點同圓，**便可藉此找出第二已知點—B。**

D、E、P 三點共線：

由等腰三角形之底角相等和對頂角相等的性質可知，$\triangle EO_2D \sim EO_1P$(AA 相似)，而且 O_1、O_2、E 三點共線，所以 D、E、P 必定也會在同一條直線上。

找出 B 點：

我們設 AP 與 C_2 的另一個交點為 B 點。外冪定理：PB・PA=PE・PD，又 PE・PD=PQ・PG，可得知 PB・PA= PQ・PG，即 A、B、G、Q 同圓。既然 A、G、Q 三點皆為已知，利用點、點、點繪圖，便可得知 B 點的位置。

在確定 A、B 兩點和 L 直線後，利用「(五)點、點、線」的繪圖方法，便可畫出 C_2。

2、作圖步驟(下圖二十四)：

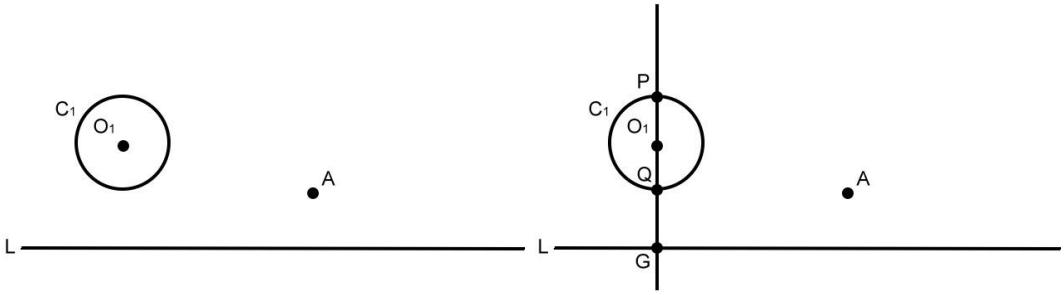
已知點 A、直線 L、圓 C_1。設 O_1 為 C_1 的圓心。

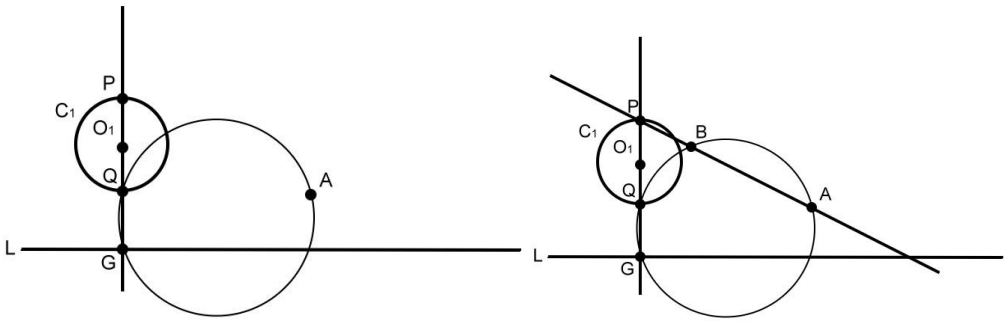
(1). 過 O_1 作直線垂直於 L。設此垂直線與 L 線的交點為 G，與 C_1 的交點為 P、Q。

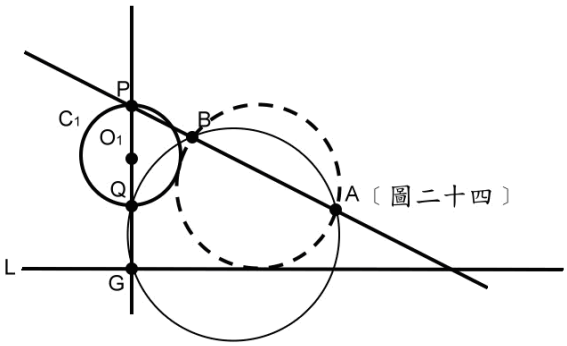
(2). 依照「(一)點、點、點」的步驟作圓 AQG。

(3). 連接 PA，使 PA 與圓 AQG 交於另一點 B。

(4). 依照前面「(五)點、點、線」的步驟作通過 A、B 兩點、與 C_1 和 L 線相切的圓(虛線)。這就是所求作的圓。





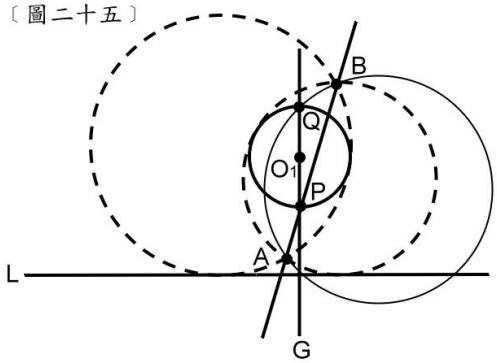


〔圖二十四〕

3、補充：

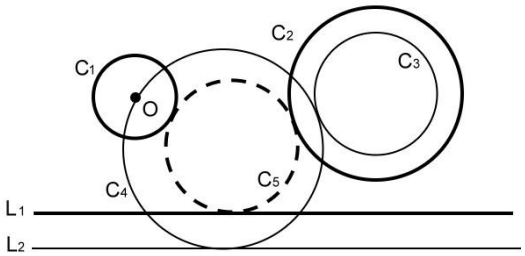
因為「(五)點、點、線」有兩個解，再加上上述的 P 點和 Q 點可以互換(圖二十五)，所以點、線、圓一共有四個解。

〔圖二十五〕



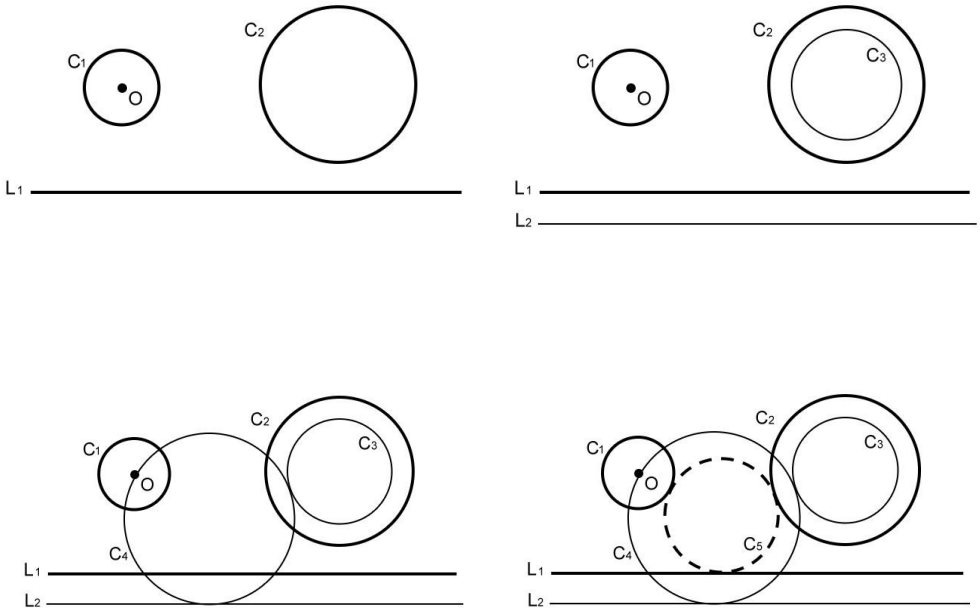
(十)線、圓、圓

〔圖二十六〕



1、想法：

在(圖二十六)中，有兩已知圓 C_1、C_2 和一已知線 L_1。現在要做一圓與 C_1、C_2、L_1 相切。把 O 點設為 C_1 的圓心，然後將 L_1 往外側平移到 L_2，並將 C_2 的半徑照 C_1 的半徑長縮小得 C_3。然後利用「(九)點、線、圓」的方法，先畫出圓 C_4 過 O 點相切於 L_2 及圓 C_3，再將圓 C_4 按照圓 C_1 的半徑長縮小成 C_5。圓 C_5 即為所求。



2、補充：

(圖二十六)中只有畫出一種解，以點、線、圓畫出來的圖應有四種解。除了上述方法外，還可將 L_1 往內平移，並將 C_2 的半徑照 C_1 的半徑長放大。所以「線、圓、圓」共有八種解。

二.結果

如果遇到較為困難的問題，我們會將其先行跳過，從較為簡單且有相關性的題目做起。舉例來說：我們在研究過程中，將「(二)點、點、圓」、「(三)點、圓、圓」、(四)圓、圓、圓」依序排在同一系列，因為其中「點、圓、圓」的繪圖會用到「點、點、圓」的技巧，而「圓、圓、圓」的繪圖則需要「點、圓、圓」的繪圖技巧。因此，我們有系統的排列探討項目，使我們可以有條理的進行討論。

不過最大的困難就在於：哪些題目的關聯性較高？這個題目是根據哪一個題目的繪圖方式來做？一般來說，是這樣想的：我們先假設題目所求的圓是存在的，再利用尺規作圖的原理將其畫出。例如：當我們做「(二)點、點、圓」的圖形時，首先畫一個圓，再從圓上任取兩個點，再另外畫一個與它相切的圓。接著，我們可以從完成圖中，來找出它與其他項目的關聯性。

除了「(一)點、點、點」(畫中垂線)、「(七)線、線、線」(畫角平分線)這兩個問題，很容易就看出其繪圖方法外，其他的問題都要繞個圈子才能找到答案。其中我們認為較為最有挑戰性的，是「點、線、圓」這個題目。這裡指的不是作圖難，而是指較不易看出如何作圖，因為它同時具有三種幾何元素(點、線、圓)。但我們也是利用相似的方法，先假設出最後的樣子，再來探索它與其他項目的關聯性。果然到最後，順利的被我們找到它和「(五)點、點、線」的關聯，並利用此關聯性，作出題目所要求的圓。

陸、結論與應用

一、結論

阿波羅尼奧斯問題是尺規作圖上的一大難題，不過如果善加利用圓的各種性質(例：外冪)，並且將問題「退化」，那麼即使是一個對於數學沒有自信的人也能夠做的出來。

我們從這次的研究中發現，阿波羅尼奧斯的退化問題中，是以點為基礎，再把點與線或圓結合。幾乎所有的退化問題最後都是利用「(一)點、點、點」來畫出圖形。每個問題其中的關聯性也是很值得我們去探討的。

除了如何作圖之外，每種問題有幾個解也是很有趣的。很多問題看起來只有一兩個答案，實際上卻不然。我們必須要清楚的了解它的性質，才不會誤算答案的數量。

而我們最終的結論，就是不必利用高深的幾何理論，僅僅使用國中生就會的基本尺規作圖原理，就能做出阿波羅尼奧斯問題。

二、應用

本小組一直以來都對圓有著極大的興趣。剛好最近三年級上學期的課程在教圓，並且遇上了「構成第八號」這張富有藝術氣息的圖，讓我們毅然決然的選擇與圓相關的主題。

我們在此學會了這些東西，可以應用在很多地方。現在科學家利用了阿波羅尼奧斯問題中的部分理論，製作出了聽音辨位的機械。或許我們長大之後會用到。

另外，我們也聯想到「落點」問題：我們學會了這些知識，如果來日有機會參與飛彈研究，計算飛彈的落點位置，使其同時抵達數個目標區(即到各點的距離相同)，減少非目標區的傷亡。

這次我們研究的阿波羅尼奧斯問題，利用了我們學到的圓性質和作圖證明。因為有了這次的探討，使我們對於圓的相關問題以及圓的證明、作圖問題又多了幾分認識。我們希望在未來，能夠將在這次的研究中所學到的東西，包括：知識、分工合作的精神、尋找資料的能力以及研究經驗，帶到未來的生活中，使得我們的數學求知之道更加充實。

柒、參考資料

1.國中數學課本第五冊(民 99 年 8 月修訂)。翰林出版社。

2.張奠宙、戴再平(1997)。**生活中的中學數學**。九章出版社。

3.維基百科。http://zh.wikipedia.org/zh-tw/Wikipedia:%E9%A6%96%E9%A1%B5
線上檢索日期：2010 年 10 月 30 日

4.奇摩知識+ http://tw.knowledge.yahoo.com/
線上檢索日期：2010 年 11 月 6 日

5.昌爸工作坊。http://www.mathland.idv.tw/
線上檢索日期：2010 年 11 月 2 日

【評語】030407

1. 考慮十種情況下圓的作圖，邏輯架構清晰，但題材稍嫌老舊，且內容過於單薄
2. 研究目標明確。
3. 團隊合作良好。