中華民國第51屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

030406

完美 k 分割

學校名稱：新竹市立光華國民中學

作者：	指導老師：
國二 林宇軒 國二 詹承軒	蕭慶利

關鍵詞：全分割、對稱性、完美 k 分割

摘要

本研究主要由一數學競賽問題來進行推廣。我們證明了完美全分割共有 5 種、完美二分割共有 24 種、完美三分割共有 9 種，而完美 k 分割在 $k>3$ 時將不存在。我們也進一步將各種圖形繪出，並與相關立體圖形進行比較探討。

壹、 研究動機

在數學書籍[1]中，競賽問題 393 題提到：

「在任意 n 邊形中，內部給定另外 m 個點，將此 $n+m$ 個點做任意連線，並滿足：

(1) 任意三角形內部沒有孤立點　(2)線段與線段間交點僅能在所有給定點上

求證：無論分割方式為何，所分割成的三角形總數相同(並以 n 和 m 來表示三角形的總個數)」

這問題引發了我們的好奇，於是我們對此問題開始深入研究並加以推廣。

貳、研究目的

一、探討 $(n,m,3)$ 、 (n,m,r) 全分割的幾何性質。

二、探討完美全分割、完美二分割、完美三分割的所有種類數與結構圖。

三、探討完美 k 分割($k\in N$)在 $k>3$ 時的存在性。

參、研究設備與器材

紙、鉛筆、 *GSP* 、 *Cabri3D*

肆、研究過程

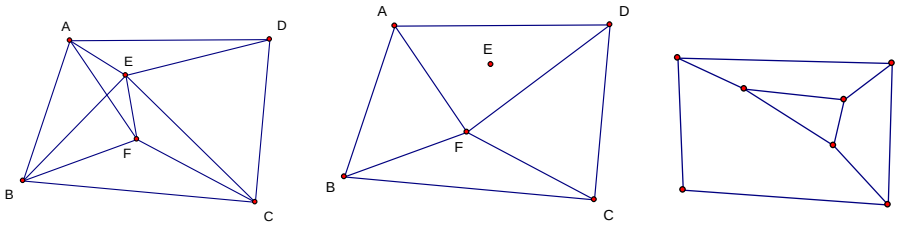
一、定義：

(一) 分割：

將一多邊形內部切割為數個任意多邊形[1]的集合(邊數可不同) ，並滿足下列兩條件：

(1)多邊形內部不能有任何孤立點　(2)線段與線段間交點僅能在所有給定點上

我們稱這是一種多邊形的「分割」。如下圖一中 (a) 、 (b) 、 (c) 三圖所示，由於在圖一 (a) 中 $\overline{\mathrm{AF}}$ 、 $\overline{BE}$ 互相跨越、在圖一 (b) 中 E 點為孤立點，故兩者皆不是一個分割，而圖一 (c) 中皆滿足分割的定義，故圖 (c) 為一種分割。



(a)　　(b)　　(c)

圖一 多邊形的分割與非分割例圖

(二) 全分割：

當多邊形作內部分割時，若所切割出的多邊形「邊數」皆相同時，我們稱此分割為「全分割」。如下圖二所示，在圖二 (b) 的分割中，切出之多邊形邊數不全相同，故不是一個全分割；而圖二 (a) 的則為一種三角形的全分割方式。而我們將 n 邊形，內部 m 個點，全部分割為 r 邊形的全分割以符號 (n,m,r) 表示。

[1]註：在本研究中的所有分割，其所涵蓋之多邊形均為**任意多邊形**(亦可為凹多邊形)，並不要求一定為正多邊形。

(a) $(4,2,3)$ 全分割　　(b) 非全分割

圖二 全分割與非全分割例圖

(三) 價數(D)：

該點所連出去的邊數我們稱為該點的價數；若圖形中每一點的價數皆相同，我們稱該圖形為「正則的」，反之則稱為「非正則的」。如下圖三(a)中，A點與F點的價數不同，故(a)則為非正則的；而圖三(b)中，其圖形中的每個點價數均為3，故圖三(b)為正則的。

(a)非正則的　　(b)正則的

圖三 非正則與正則例圖

(四) 對稱性：

一分割圖形中，每個點均可能為數個多邊形的共同頂點，將該點周邊的鄰居多邊形以有次序的符號序列表示，稱為該點的對稱性。如圖四(b)中的A點的對稱性為[3,3,3,4] (其中一個 3 為外部三角形)，B點則為[3,4,3,4]。[2]而若一圖中每個點對稱性皆相同時，我們稱該圖為對稱的。如圖四(a)中每個點之對稱性均為[3,4,4]，故圖(a)為對稱的，而圖(b)則為非對稱的。由對稱的特性可以了解：**若一分割圖形為對稱的，則該圖必定是正則的**。

(a)對稱的　　(b)非對稱的

圖四 對稱的與非對稱的例圖

(五)完美k分割：

若一分割圖形含有k種邊數不同的多邊形，且該分割圖形為對稱的，則我們稱此分割為「完美k分割」，而$k=1$時，又稱為「完美全分割」。

有了定義，我們知道原問題乃$(n,m,3)$全分割之問題。於是進一步探討其相關性質：

命題：給定一任意n邊形，內部m個點，試求：
(1) $(n,m,3)$全分割後，三角形的個數總數？ (2) $(n,m,3)$全分割後，總邊數是否為一定值？
(3) $(n,m,3)$全分割後，所有點的價數總和？

底下是我們針對各小題的證明：

(1) 假設$(n,m,3)$全分割後三角形總數為α個，透過兩種不同的內角和計算方式，可以得知：

$$(n-2)180^\circ + m\cdot 360^\circ = 180^\circ\alpha \quad \Rightarrow \alpha = n+2m-2$$

(2) 我們進一步透過尤拉公式來計算總邊數

尤拉公式：V (總點數) $+F$ (總面數) $-E$ (總邊數) $=2$

[2]註：對稱性[3,4,3,4]與[4,3,4,3]是相同的；但對稱性[3,4,3,4]與[3,3,4,4]則不相同。

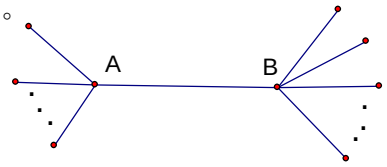
我們先歸納：$(n,m,3)$之全分割，其總點數$V=n+m$，總面數$F=\alpha+1$（α個三角形再加上n邊形的外部一面)，總邊數假定為E，將數據帶入可得：

$\because V+F-E=2$，$E=V+F-2$ $\therefore E=(n+m)+(\alpha+1)-2 \Rightarrow E=2n+3m-3$

(3) 假設A、B為$(n,m,3)$全分割圖形中的兩點，而$\overline{AB}$為全分割圖形中的一邊。(如圖四)

由於$\overline{AB}$在計算A點價數時計算了一次，在計算B點價數時又計算了一次，故我們可以得知：

在$(n,m,3)$之全分割圖形中，所有點的價數總和為總邊數的兩倍。



亦即 $\sum_{i=1}^{n+m} D_i = 2E = 4n+6m-6$ (其中D_i為i點的價數)

我們進一步將所得到的結論歸納如下：

定理一：$(n,m,3)$之全分割，無論分割方式為何：

(1) 分割後三角形總數恆為一定值α，其定值$\alpha=n+2m-2$

(2) 分割後總邊數為$E=2n+3m-3$

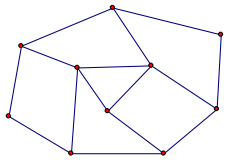
(3) 所有點的價數總和恆為一定值，其定值為$\sum_{i=1}^{n+m} D_i = 2E = 4n+6m-6$ (其中D_i為i點的價數)

我們進一步將題目推廣，若分割的多邊形為四邊形，情況為何？我們先試著畫畫看：

從右圖五中，我們不難發現兩個問題：

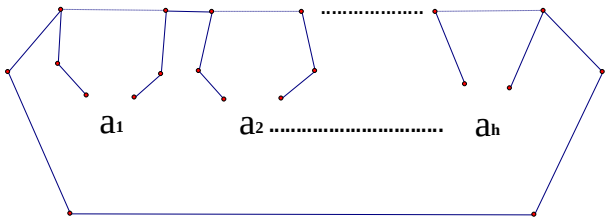
(1) **可能無法產生全分割**

(2) **所分割的多邊形可能為凹多邊形**



圖五

因此，我們再將條件放寬，允許分割出來的多邊形可以是凹邊形，底下我們將證明任意凹n邊形的內角和公式，我們證明方式是採取「填凹補凸」的方式，其證明如下：



凹n邊形示意圖(h個凹槽)

令凹n邊形，共有h個凹槽，分別有a_1、a_2、$a_3 \cdots\cdots a_h$個邊(其中$a_j \ge 2, a_j \in \mathrm{N}, j=1,2,...h$)。

我們將每個凹槽補平，此時外部的凸多邊形共有$[n-(a_1+a_2+.....+a_h)+h]$個邊，其內角和為$[n-(a_1+a_2+.....+a_h)+h-2]\cdot 180^\circ$，而內部共有$\{(a_1-1)+.....+(a_2-1)+.....+(a_h-1)\}$個點，而補平後內部所產生的$h$個多邊形邊數分別為$(a_1+1),(a_2+1),.....,(a_h+1)$。

故凹n邊形內角和

$$=[n-(a_1+a_2+.....+a_h)+h-2]\cdot 180^\circ+\{(a_1-1)+.....+(a_2-1)+.....+(a_h-1)\}\cdot 360^\circ$$
$$-[(a_1+1)-2]\cdot 360^\circ-[(a_2+1)-2]\cdot 360^\circ-[(a_h+1)-2]\cdot 360^\circ$$
$$=(n-2)\cdot 180^\circ$$

定理二：任意凹n邊形，其內角和必為$(n-2)\cdot 180^\circ$

有了凹多邊形內角和公式，我們進一步探討(n,m,r)全分割性質，我們先做出下列命題：

命題：給定一任意n邊形，內部m個點，進行(n,m,r)全分割後$(r\geq 4)$，試問：

(1) r邊形的個數總數？　(2) (n,m,r)全分割之總邊數為？

(3) (n,m,r)全分割之所有點價數總和為？

其證明分別如下：

(1) 設(n,m,r)全分割後r邊形的個數總數為α個，透過兩種不同的多邊形內角和計算方式，得：

$$\alpha\cdot(r-2)\cdot 180^\circ=n(n-2)\cdot 180^\circ+m\cdot 360^\circ \Rightarrow \alpha=\frac{n+2m-2}{r-2}\quad (\text{其中 } r-2\mid n+2m-2)$$

(2) 我們透過尤拉公式$V+F-E=2$來計算總邊數：

初始條件：$V=n+m$，$F=\alpha+1=\dfrac{n+2m-2}{r-2}+1$，$E$則為所求的總邊數。代入後得：

$$V+F-E=2\Rightarrow E=V+F-2\Rightarrow E=(n+m)+\left(\frac{n+2m-2}{r-2}+1\right)-2=n+m+\frac{n+2m-2}{r-2}-1$$

(3) 同定理一之(3)之證明：

我們可以知道**在(n,m,r)之全分割圖形中，所有點的價數總和為總邊數的兩倍**。

亦即 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+m}D_i=2E=2(n+m-1)+\frac{2(n+2m-2)}{r-2}$　　(其中D_i為i點的價數)

我們進一步將所得到的結論歸納如下：

定理三：(n,m,r)之全分割，無論分割方式為何：

(1) 分割後r邊形總數恆為一定值α，其定值$\alpha=\dfrac{n+2m-2}{r-2}$（其中$r-2\mid n+2m-2$）

(2) 分割後總邊數為 $E=(n+m-1)+\dfrac{n+2m-2}{r-2}$

(3) 所有點的價數總和恆為一定值，其定值為$\displaystyle\sum_{i=1}^{n+m}D_i=2E=2(n+m-1)+\frac{2(n+2m-2)}{r-2}$

（其中D_i為i點的價數）

有了上述結論，我們想知道的：完美k分割的種類數。我們先從$k=1$時開始探討：

完美全分割$(k=1)$

在一個(n,m,r)的全分割圖形中，若該圖形為對稱的，則稱該圖為一「完美全分割」。

由於須滿足所有點對稱性一致的關係，故必須滿足一條件：$n=r$

首先，我們知道(n,m,r)之全分割其價數總和為$\displaystyle\sum_{i=1}^{n+m}D_i=2(n+m-1)+\frac{2(n+2m-2)}{r-2}$。由於完美全分割為正則的，故每個點的價數為：

$$D=(\sum_{i=1}^{n+m}D_i)\div(n+m)=2-\frac{2}{n+m}+\frac{2(n+2m-2)}{(n+m)(r-2)}=2+\frac{2(n+2m-r)}{(n+m)(r-2)}$$

，我們再利用$r=n$此條件代入可得：$D=2+\dfrac{4m}{(n-2)(n+m)}$。底下我們分四種情況討論：

Case1：當 $n=r=3$ 時

$$D=2+\frac{4m}{1(3+m)}=6-\frac{12}{m+3}\in N\Rightarrow\frac{12}{m+3}\in \mathrm{N}\quad\therefore m+3\,|\,12\quad\therefore m=1,3,9$$

(i) 當 $m=1$ 時，$D=3\Rightarrow(3,1,3)$ 完美全分割，此時總邊數 $E=6$

(ii) 當 $m=3$ 時，$D=4\Rightarrow(3,3,3)$ 完美全分割，此時總邊數 $E=12$

(iii) 當 $m=9$ 時，$D=5\Rightarrow(3,9,3)$ 完美全分割，此時總邊數 $E=30$

Case 2：當 $n=r=4$ 時

$$D=2+\frac{4m}{2(4+m)}=4-\frac{8}{m+4}\in N\Rightarrow\frac{8}{m+4}\in \mathrm{N}\quad\therefore m+4\,|\,8\quad\therefore m=4$$

故當 $m=4$ 時，$D=3\Rightarrow(4,4,4)$ 完美全分割，此時總邊數 $E=12$

Case 3：當 $n=r=5$ 時

$$D=2+\frac{4m}{3(5+m)}=3+\frac{m-15}{3m+15}\in N\Rightarrow\frac{m-15}{3m+15}\in Z\text{，且 }D\geq 3$$

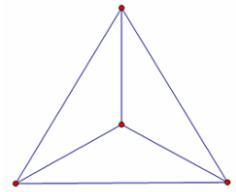
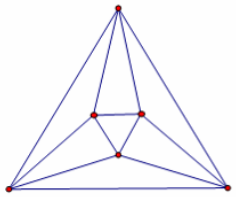
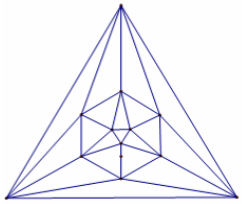
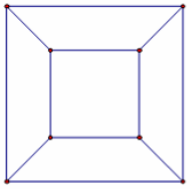
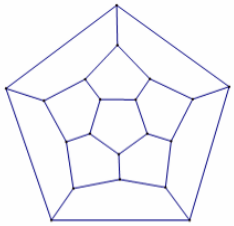
$$\because 3m+15>m-15\text{，}\frac{m-15}{3m+15}>0\ (\rightarrow\leftarrow)\ \therefore\frac{m-15}{3m+15}=0\text{，}m-15=0\text{，}\therefore m=15$$

故當 $m=15$ 時，$D=3\Rightarrow(5,15,5)$ 完美全分割，此時總邊數 $E=30$

Case 4：當當 $n=r\geq 6$ 時

$$D=2+\frac{4m}{(n-2)(n+m)}\leq 2+\frac{4m}{(6-2)(6+m)}=2+\frac{m}{m+6}<3$$ 。故當 $n=r\geq 6$ 時，m 將無解。

我們可以得知完美全分割一共有五種。我們將其繪出，如下表一所示：

		
$(3,1,3)$ 完美全分割	$(3,3,3)$ 完美全分割	$(3,9,3)$ 完美全分割
		
$(4,4,4)$ 完美全分割	$(5,15,5)$ 完美全分割	

表一 五種完美全分割之圖形

> 定理四：完美全分割共有 5 種，分別為 $(3,1,3)$ 完美全分割、$(3,3,3)$ 完美全分割、$(3,9,3)$ 完美全分割、$(4,4,4)$ 完美全分割及 $(5,15,5)$ 完美全分割。

我們進一步探討 $k=2$ 時的「完美二分割」。

> **完美二分割 $(k=2)$**
> 若一分割圖形含有 2 種邊數不同多邊形，且該分割圖形為對稱的，稱此分割為「完美二分割」。我們以符號 (n,m,n,r) 來表示：n 邊形，內部 m 個點，分割為 n，r 二種多邊形的完美二分割。

我們令完美二分割圖形中 n 邊形個數有 p 個，r 邊形個數有 q 個。

先由尤拉公式將 $V=n+m$ ，$F=p+q+1$ 代入：

$$V+F-E=2 \Rightarrow E=(n+m)+(p+q+1)-2=n+m+p+q-1 \cdots\cdots\cdots ①$$

再由定理三 (3) 可知 $\Rightarrow \sum_{i=1}^{n+m} D_i = D(n+m)=2E \cdots\cdots ②$。結合①、②，得：

$$\sum_{i=1}^{n+m} D_i = D(n+m)=2E=2(n+m+p+q-1) \Rightarrow p+q=\frac{(n+m)(D-2)+2}{2}$$

上述的推演中告訴了我們：**當 m,n,D 值給定時，多邊形的總數 $p+q$ 將恆為定值！**

我們繼續來看完美二分割其每點價數 (D) 是否有任何限制？

1. 先以內角和公式探討 (n,m,n,r)

$$\Rightarrow (n-2)180^\circ+360^\circ\cdot m=(n-2)180^\circ\cdot p+(r-2)180^\circ\cdot q \Rightarrow n-2+2m=(n-2)p+(r-2)q$$

結合上述 $\Rightarrow n-2+2m=(n-2)p+(r-2)q$ 、 $p+q=\frac{(n+m)(D-2)+2}{2}$ 這兩式，

可得一聯立方程式：$\begin{cases}(n-2)p+(r-2)q=n+2m-2\\ 2p+2q=(n+m)(D-2)+2\end{cases}$

我們先利用行列式解出 p 和 q 的通式解：

$$p=\frac{\begin{vmatrix}(n-2+2m) & (r-2)\\ (m+n)(D-2)+2 & 2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}(n-2) & (r-2)\\ 2 & 2\end{vmatrix}} 、 q=\frac{\begin{vmatrix}(n-2) & (n-2+2m)\\ 2 & (m+n)(D-2)+2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}(n-2) & (r-2)\\ 2 & 2\end{vmatrix}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p=\dfrac{D(r-2)(m+n)-2\left[r(n+m-1)-n\right]}{2r-2n}\\ q=\dfrac{D(n-2)(m+n)-2n(m+n-2)}{2n-2r}\end{cases}$$

2. 討論 p 、 q 的性質和 D 的確切範圍：

①若 $r>n$ ，$p>0$

$$\Rightarrow D(r-2)(m+n)-\left[2r(m+n-1)-n\right]>0 \Rightarrow D>2+\frac{2\left[2m+(n-r)\right]}{(m+n)(r-2)} \cdots\cdots\cdots Ⓒ$$

$q>0$ ：

$$\Rightarrow D(n-2)(m+n)-2n(m+n-2)<0 \Rightarrow D<2+\frac{4m}{(n-2)(m+n)} \cdots\cdots\cdots\cdots Ⓓ$$

綜合Ⓒ和Ⓓ $\Rightarrow 2+\frac{4m}{(m+n)(n-2)}>D>2+\frac{2\left[2m+(n-r)\right]}{(m+n)(r-2)}$

②反之若 $r<n$ $\Rightarrow$ $2+\frac{2\left[2m+(n-r)\right]}{(m+n)(r-2)}>D>2+\frac{4m}{(m+n)(n-2)}$

③ $r>n$ 時，證明 $D<6$

$\Rightarrow \left[2+\frac{4m}{(m+n)(n-2)}\right]-6=\frac{-4\left[(m+n)(n-3)+n\right]}{(m+n)(n-2)}$ ；又 $m\ge 3$ ，$n\ge 3 \therefore (m+n)(n-3)+n>0$

$\Rightarrow \left[2+\frac{4m}{(m+n)(n-2)}\right]-6=\frac{-4\left[(m+n)(n-3)+n\right]}{(m+n)(n-2)}<0$

$\Rightarrow 6>2+\frac{4m}{(m+n)(n-2)}>D>2+\frac{2\left[2m+(n-r)\right]}{(m+n)(r-2)} \Rightarrow r>n$ 時 $D<6$ (亦即 D 的最大值為 5)

④ $r<n$時，證明$D<6$

$$\left\{2+\frac{2\left[2m+(n-r)\right]}{(m+n)(r-2)}\right\}-6=\frac{-2\left[(2m+2n)(r-1)+r-(2m+n)\right]}{(m+n)(r-2)}$$

$\because m\geq 3$，$n\geq 3$，$r\geq 3$ $\therefore (2m+2n)(r-1)+r-(2m+n)>0$

$$\Rightarrow\left\{2+\frac{2\left[2m+(n-r)\right]}{(m+n)(r-2)}\right\}-6=\frac{-\left[2(m+n)(r-1)+r-(2m+n)\right]}{(m+n)(r-2)}<0$$

$$\Rightarrow 6>2+\frac{2\left[2m+(n-r)\right]}{(m+n)(r-2)}>D>2+\frac{4m}{(m+n)(n-2)}\Rightarrow r<n\text{時 }D<6\text{(亦即 }D\text{ 的最大值為 5)}$$

上述的推演證明了完美二分割，不論$r<n$或$r>n$，$D<6$(即D的最大值為 5)。

定理五：完美二分割，不論$r<n$或$r>n$，$D<6$(亦即D的最大值為 5)。

有了D值之確切範圍後，我們進一步探討完美二分割之所有種類數。透過排列組合的計算，我們可以歸納出 12 種不同的對稱性，分別如下：

(1) $D=3$時對稱性有$[n,r,r]$、$[n,n,r]$

(2) $D=4$時對稱性有$[n,r,r,r]$、$[n,n,r,r]$、$[n,r,n,r]$、$[n,n,n,r]$

(3) $D=5$時對稱性有$[n,r,r,r,r]$、$[n,n,r,r,r]$、$[n,r,n,r,r]$、$[n,n,n,r,r]$、$[n,n,r,n,r]$、$[n,n,n,n,r]$

令(n,m,n,r)完美二分割，其分割出n邊形p個，r邊形q個

在$D=3$時，我們以算總點數V的角度思考。我們先考慮對稱性為$[n,r,r]$的這種情形：

由於每一點的對稱性質為$[n,r,r]$時，每點連接 2 個r邊形和一個n邊形。

故總點數$V=n(p+1)=\frac{1}{2}qr\Rightarrow 2n(p+1)=qr$　(n邊形總數含外部的n邊形共$p+1$個)

同理可推得：

$$D=3\Rightarrow\begin{cases}[n,r,r]\Rightarrow 2n(p+1)=qr\\ [n,n,r]\Rightarrow n(p+1)=2qr\end{cases}\qquad D=4\Rightarrow\begin{cases}[n,r,r,r]\Rightarrow 3n(p+1)=qr\\ [n,n,r,r].[n,r,n,r]\Rightarrow 2n(p+1)=qr\\ [n,n,n,r]\Rightarrow n(p+1)=3qr\end{cases}$$

$$D=5\Rightarrow\begin{cases}[n,r,r,r,r]\Rightarrow 4n(p+1)=qr\\ [n,n,r,r,r].[n,r,n,r,r]\Rightarrow 3n(p+1)=2qr\\ [n,n,n,r,r].[n,n,r,n,r]\Rightarrow 2n(p+1)=3qr\\ [n,n,n,n,r]\Rightarrow n(p+1)=4qr\end{cases}$$

配合上述公式，底下我們將探討(n,m,n,r)完美二分割的所有情況。

Case1：當$D=3$時($n\geq 3,r\geq 3$，且$n\neq r$)：

將$D=3$代入p、q之值，得

$$p=\frac{3(r-2)(m+n)-2\left[r(n+m-1)-n\right]}{2r-2n}=\frac{rm+rn-6m-4n+2r}{2r-2n}$$

$$q=\frac{3(n-2)(m+n)-2n(m+n-2)}{2n-2r}=\frac{nm+n^2-6m-2n}{2n-2r}$$

1.當對稱性為$[n,r,r]$

(1) 將$D=3$時之p、q值代入對稱性公式$2n(p+1)=qr$：

$$2n\cdot\left(\frac{rm+rn-6m-4n+2r+2r-2n}{2r-2n}\right)=r\cdot\frac{nm+n^2-6m-2n}{2n-2r}$$

整理得 $m(nr-4n-2r)+n^2r+2nr-4n^2=0$

$$\Rightarrow m=\frac{4n^2-n^2r-2nr}{nr-4n-2r}=\frac{(-n)(nr-4n-2r)-4nr}{nr-4n-2r}=-n-\frac{4nr}{nr-4n-2r}$$

(2) 探討 m 之值的特性：

$\because m\in\mathrm{N}\qquad\therefore -n>\dfrac{4nr}{nr-4n-2r}\Rightarrow n<\dfrac{4nr}{4n+2r-nr}$ ……Ⓐ

又 $n>0$，$4nr>0$，$\therefore 4n+2r-nr>0\ \Rightarrow nr-4n-2r<0\Rightarrow(n-2)(r-4)<8$ ……Ⓑ

(3) 求出所有符合Ⓐ、Ⓑ式子之 r 、 n 的解：

①當 $r=3$ 時，由Ⓐ式可知：$n<\dfrac{12n}{n+6}\Rightarrow n^2<6n\Rightarrow n<6\Rightarrow n=4,5$ (因為 $n\neq r$)

(i) $n=4$ 時 $\Rightarrow m=\dfrac{64-48-24}{12-16-6}=\dfrac{-8}{-10}(\rightarrow\leftarrow)$　(ii) $n=5$ 時 $\Rightarrow m=\dfrac{100-75-30}{15-20-6}=\dfrac{-5}{-11}(\rightarrow\leftarrow)$

②當 $r=4$ 時，$(n-2)\cdot 0<8\Rightarrow n=3$ 或大於 4 的任意整數

③當 $r>4$ 時Ⓑ式就不會出現無限多解的情況。以 $(n-2)(r-4)$ 值分點討論此方程式，得出 n 、 r 解，並代回原式求出符合條件的 m 值，將不符合之 m 值淘汰(無解部分詳見附錄（一））。整理後如下表二所示：

$(n-2)(r-4)$	n	r	m	分割符號	繪圖情形
$(n-2)(r-4)=0$	$n\in N,(n\geq 3)$	4	$m=n\in N,(n\geq 3)$	$(n,n,n,4)$	存在
$(n-2)(r-4)=1$	3	5	無正整數解		
$(n-2)(r-4)=2$	3	6	$m=9$	(3,9,3,6)	存在
$(n-2)(r-4)=2$	4	5	無正整數解		
$(n-2)(r-4)=3$	3	7	無正整數解		
$(n-2)(r-4)=3$	5	5	$\rightarrow\leftarrow(\because n\neq r)$		
$(n-2)(r-4)=4$	3	8	$m=21$	(3,21,3,8)	存在
$(n-2)(r-4)=4$	6	5	$m=24$	(6,24,6,5)	不存在
$(n-2)(r-4)=4$	4	6	$m=20$	(4,20,4,6)	存在
$(n-2)(r-4)=5$	3	9	$m=33$	(3,33,3,9)	不存在
$(n-2)(r-4)=5$	7	5	無正整數解		
$(n-2)(r-4)=6$	3	10	$m=57$	(3,57,3,10)	存在
$(n-2)(r-4)=6$	8	5	$m=72$	(8,72,8,5)	不存在
$(n-2)(r-4)=6$	4	7	$m=52$	(4,52,4,7)	不存在
$(n-2)(r-4)=6$	5	6	$m=55$	(5,55,5,6)	存在
$(n-2)(r-4)=7$	3	11	$m=129$	(3,129,3,11)	不存在
$(n-2)(r-4)=7$	9	5	$m=171$	(9,171,9,5)	不存在

表二 $D=3$，對稱性為 $[n,r,r]$ 的所有情形

2.當對稱性為 $[n,n,r]$

(1) 將 $D=3$ 時之 p 、 q 值帶入對稱性公式 $n(p+1)=2qr$ ：

$$n\cdot\left(\frac{rm+rn-6m-4n+2r+2r-2n}{2r-2n}\right)=2r\cdot\frac{nm+n^2-6m-2n}{2n-2r}$$

整理得 $m(nr-2n-4r)+n^2r-2n^2=0$

$$\Rightarrow m=\frac{2n^2-n^2r}{nr-2n-4r}=\frac{(-n)(nr-2n-4r)-4nr}{nr-2n-4r}=-n-\frac{4nr}{nr-2n-4r}$$

(2) 探討 m 之值的特性：

$\because m\in \mathrm{N}$ $\quad\therefore -n>\dfrac{4nr}{nr-2n-4r}\Rightarrow n<\dfrac{4nr}{2n+4r-nr}$ ……Ⓐ

又 $n>0$，$4nr>0$，$\therefore 2n+4r-nr>0\ \Rightarrow nr-4r-2n<0\ \Rightarrow (n-4)(r-2)<8$ ……Ⓑ

(3) 求出所有符合Ⓐ、Ⓑ式子之 r 、 n 的解：

①當 $n=3$ 時，由Ⓐ式可知 $3<\dfrac{12r}{6+r}=12-\dfrac{72}{r+6}\Rightarrow r+6\,|\,72\Rightarrow r=6,12,18,30,66$

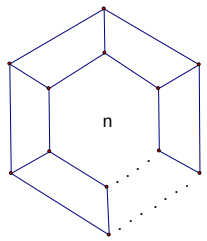
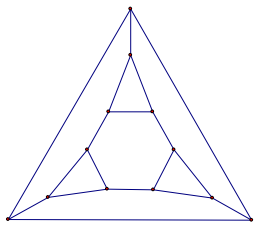
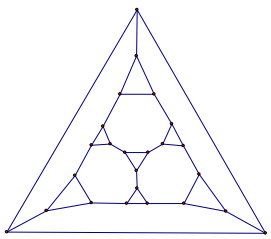
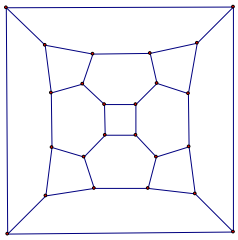
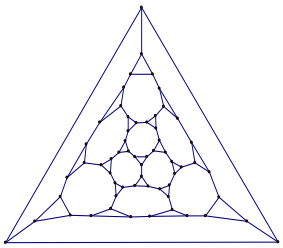
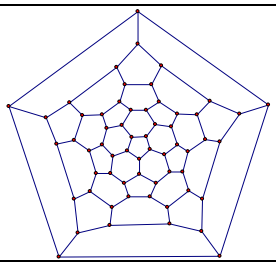
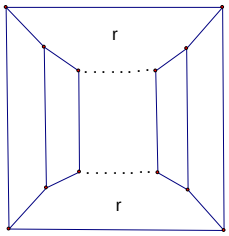
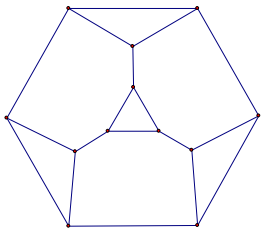
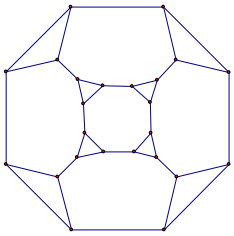
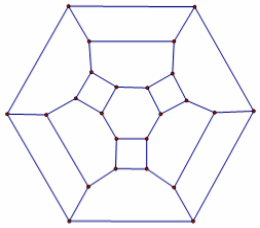
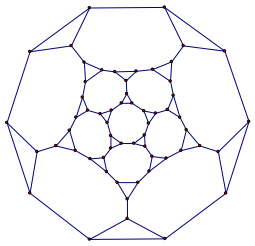
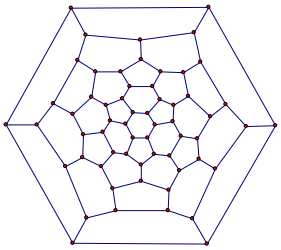
②當 $n=4$ 時，$(r-2)\cdot 0<8\Rightarrow r=3$ 或大於 4 的任意整數

③當 $n>4$ 時Ⓑ式就不會出現無限多解的情況。以 $(n-4)(r-2)$ 值分點討論此方程式，得出 n 、 r 解，並代回原式求出符合條件的 m 值(無解部分詳見附錄（一）)，整理後如下表三所示：

$(n-4)(r-2)$	n	r	m	分割符號	繪圖情形
$n<4$	3	6	$m=3$	(3,3,3,6)	不存在
$n<4$	3	12	$m=5$	(3,5,3,12)	不存在
$n<4$	3	18	$m=6$	(3,6,3,18)	不存在
$n<4$	3	30	無正整數解		
$n<4$	3	66	$m=8$	(3,8,3,66)	不存在
$(n-4)(r-2)=0$	4	$r\geq 3\,(r\in N)$	$m=-4+2r$	$(4,-4+2r,4,r)$	存在
$(n-4)(r-2)=1$	5	3	無正整數解		
$(n-4)(r-2)=2$	6	3	$m=6$	(6,6,6,3)	存在
$(n-4)(r-2)=2$	5	4	無正整數解		
$(n-4)(r-2)=3$	7	3	無正整數解		
$(n-4)(r-2)=3$	5	5	$\rightarrow\leftarrow(\because n\neq r)$		
$(n-4)(r-2)=4$	8	3	$m=16$	(8,16,8,3)	存在
$(n-4)(r-2)=4$	5	6	$m=25$	(5,25,5,6)	不存在
$(n-4)(r-2)=4$	6	4	$m=18$	(6,18,6,4)	存在
$(n-4)(r-2)=5$	9	3	$m=37$	(9,37,9,3)	不存在
$(n-4)(r-2)=5$	5	7	無正整數解		
$(n-4)(r-2)=6$	10	3	$m=50$	(10,50,10,3)	存在
$(n-4)(r-2)=6$	5	8	$m=75$	(5,75,5,8)	不存在
$(n-4)(r-2)=6$	7	4	$m=49$	(7,49,7,4)	不存在
$(n-4)(r-2)=6$	6	5	$m=54$	(6,54,6,5)	存在
$(n-4)(r-2)=7$	11	3	$m=121$	(11,121,11,3)	不存在
$(n-4)(r-2)=7$	5	9	$m=175$	(5,175,5,9)	不存在

表三 $D=3$，對稱性為 $[n,n,r]$ 的所有情形

將 $D=3$ 對稱性為 $[n,r,r]$ 、 $[n,n,r]$ 的圖形繪出，把繪圖過程中對稱性不符合的圖淘汰(詳細探討請見附錄（一）)，並將符合條件的分割圖形繪出，如下表四所示：

			
$(n,n,n,4)$ 對稱性$[n,4,4]$	$(3,9,3,6)$ 對稱性$[3,6,6]$	$(3,21,3,8)$ 對稱性$[3,8,8]$	$(4,20,4,6)$ 對稱性$[4,6,6]$
			
$(3,57,3,10)$ 對稱性$[3,10,10]$	$(5,55,5,6)$ 對稱性$[5,6,6]$	$(4,-4+2r,4,r)$ 對稱性$[4,4,r]$	$(6,6,6,3)$ 對稱性$[6,6,3]$
			
$(8,16,8,3)$ 對稱性$[8,8,3]$	$(6,18,6,4)$ 對稱性$[6,6,4]$	$(10,50,10,3)$ 對稱性$[10,10,3]$	$(6,54,6,5)$ 對稱性$[6,6,5]$

表四 $D=3$所有圖形情況(依照表二、表三解的順序排列)

Case2：當$D=4$時($n\geq 3, r\geq 3$，且$n\neq r$)：

將$D=4$帶入p、q之值，得

$$p=\frac{4(r-2)(m+n)-2\left[r(n+m-1)-n\right]}{2r-2n}=\frac{2rm+2rn-8m-6n+2r}{2r-2n}$$

$$q=\frac{4(n-2)(m+n)-2n(m+n-2)}{2n-2r}=\frac{2nm+2n^2-8m-4n}{2n-2r}$$

1.當對稱性為$[n,r,r,r]$

(1)將$D=4$時之p、q值帶入對稱性公式$3n(p+1)=qr$：

$$3n\cdot\frac{2rm+2rn-8m-6n+2r+2r-2n}{2r-2n}=r\cdot\frac{2nm+2n^2-8m-4n}{2n-2r}$$

整理得$m(nr-3n-r)+n^2r-3n^2+rn=0$

$$\Rightarrow m=\frac{3n^2-n^2r-rn}{nr-3n-r}=\frac{(-n)(nr-3n-r)-2rn}{nr-3n-r}=-n-\frac{2nr}{nr-3n-r}$$

(2)探討m之值的特性：

$$\because m\in\mathrm{N}\quad \therefore -n>\frac{2nr}{nr-3n-r}\Rightarrow n<\frac{2nr}{3n+r-nr}\cdots\cdots\cdots\cdots Ⓐ$$

又 $n>0$，$2nr>0$，$\therefore 3n+r-nr>0 \Rightarrow nr-3n-r<0 \Rightarrow (n-1)(r-3)<3$ ……Ⓑ

(3) 求出所有符合Ⓐ、Ⓑ式子之 r 、 n 的解：

①當 $r=3$ 時，由Ⓑ式可知 $(n-1)\cdot 0<3 \Rightarrow n=$ 大於 3 的任意整數

②當 $r>3$ 時Ⓑ式就不會出現無限多解的情況。分點討論此方程式，得出 n 、 r 解，並代回原式求出符合條件的 m 值，如下表五所示：

$(n-1)(r-3)$	n	r	m	分割符號	繪圖情形
$(n-1)(r-3)=0$	$n\in N,(n\geq 3)$	3	$m=n$	$(n,n,n,3)$	存在
$(n-1)(r-3)=1$	2	4	$\rightarrow\leftarrow(\because n\geq 3)$		
$(n-1)(r-3)=2$	3	4	$m=21$	(3,21,3,4)	存在
$(n-1)(r-3)=2$	2	5	$\rightarrow\leftarrow(\because n\geq 3)$		

表五 $D=4$，對稱性為 $[n,r,r,r]$ 的所有情形

2.當對稱性為 $[n,r,n,r]$、$[n,n,r,r]$

(1) 將 $D=4$ 時之 p 、 q 值帶入對稱性公式 $n(p+1)=qr$ ：

$$n\cdot\frac{2rm+2rn-8m-6n+2r+2r-2n}{2r-2n}=r\cdot\frac{2nm+2n^2-8m-4n}{2n-2r}$$

整理得 $m(nr-2n-2r)+n^2r-2n^2=0$

$$\Rightarrow m=\frac{2n^2-n^2r}{nr-2n-2r}=\frac{(-n)(nr-2n-2r)-2rn}{nr-2n-2r}=-n-\frac{2nr}{nr-2n-2r}$$

(2) 探討 m 之值的特性：

$\because m\in \mathrm{N}\quad \therefore -n>\dfrac{2nr}{nr-2n-2r}\Rightarrow n<\dfrac{2nr}{2n+2r-nr}$ ……Ⓐ

又 $n>0$，$2nr>0$，$\therefore 2n+2r-nr>0 \Rightarrow nr-2n-2r<0 \Rightarrow (n-2)(r-2)<4$ ……Ⓑ

分點討論此方程式，得出 n 、 r 解，並代回原式求出符合條件的 m 值，如下表六所示：

$(n-2)(r-2)$	n	r	m	分割符號	繪圖情形
$(n-2)(r-2)=1$	3	3	$\rightarrow\leftarrow(\because n\neq r)$		
$(n-2)(r-2)=2$	4	3	$m=8$	(4,8,4,3)	存在
$(n-2)(r-2)=2$	3	4	$m=9$	(3,9,3,4)	存在
$(n-2)(r-2)=3$	3	5	$m=27$	(3,27,3,5)	存在
$(n-2)(r-2)=3$	5	3	$m=25$	(5,25,5,3)	存在

表六 $D=4$，對稱性為 $[n,r,n,r]$、$[n,n,r,r]$ 的所有情形

(3) 考慮對稱性為 $[n,n,r,r]$ 的狀況：

在上表六中，可知對稱性為 $[n,n,r,r]$ 的情況共只有四種，分別為 (4,8,4,3) 、 (3,9,3,4) 、 (3,27,3,5) 與 (5,25,5,3) 之分割。而其對稱性僅有兩種不同情況((4,8,4,3) 、 (3,9,3,4) 分割之對稱性同為 $[3,3,4,4]$，而 (3,27,3,5) 、 (5,25,5,3) 分割之對稱性則同為 $[3,3,5,5]$)。

我們先看對稱性 $[3,3,4,4]$ 的情況，如下圖七(a)所示，圖中 A 點對稱性為 $[3,3,4,4]$，由於 B 點也需滿足對稱性 $[3,3,4,4]$，故需往外拓展兩四邊形，如圖七(b)所示，這時我們將發現 C 點的對稱性將不再是 $[3,3,4,4]$，故產生矛盾。

(a) (b)

圖七 對稱性為$[3,3,4,4]$的情況將導致矛盾

接著我們來看對稱性為$[3,3,5,5]$的情況，如下圖八(a)所示，圖中 A 點對稱性為$[3,3,5,5]$，由於 B 點也需滿足對稱性$[3,3,5,5]$，故需往外再拓展一三角形，如圖八(b)所示，這時我們將發現 C 點的對稱性將不再是$[3,3,5,5]$，故產生矛盾。

(a) (b)

圖八 對稱性為$[3,3,5,5]$的情況將導致矛盾

從以上的推論，我們得知：**完美二分割在對稱性為$[n,n,r,r]$時，圖形結構並不存在！**

3.當對稱性為$[n,n,n,r]$

(1) 將$D=4$時之 p 、 q 值帶入對稱性公式$n(p+1)=3qr$ ：

$$n\cdot\frac{2rm+2rn-8m-6n+2r+2r-2n}{2r-2n}=3r\cdot\frac{2nm+2n^2-8m-4n}{2n-2r}$$

$$\Rightarrow nrm+n^2r-nm-n^2-3rm-nr=0 \quad \Rightarrow m(nr-n-3r)+n^2r-n^2-nr=0$$

$$\Rightarrow m=\frac{n^2-n^2r+nr}{nr-n-3r}=\frac{(-n)(nr-n-3r)-2nr}{nr-n-3r}=-n-\frac{2nr}{nr-n-3r}$$

(2) 探討m之值的特性：

$\because m\in \mathrm{N}$

$\therefore -n>\dfrac{2nr}{nr-n-3r}\Rightarrow n<\dfrac{2nr}{n+3r-nr}$ ……Ⓐ　　又$n>0$，$2nr>0$，$\therefore n+3r-nr>0$

$\Rightarrow nr-n-3r<0\Rightarrow (n-3)(r-1)<3$ ……Ⓑ

(3) 求出所有符合Ⓐ、Ⓑ式子之r 、 n的解：

①當$n=3$時，由Ⓑ式可知$0\cdot(r-1)<3\Rightarrow r\geq 3$，$r\in N$

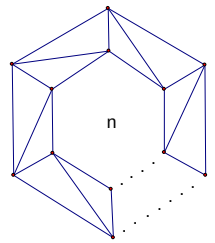
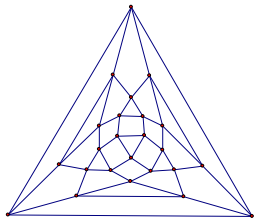
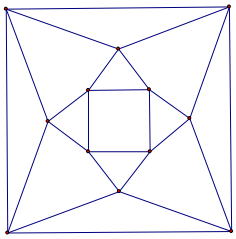
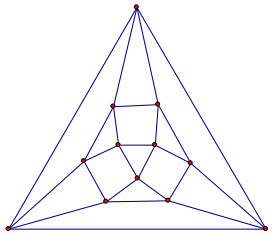
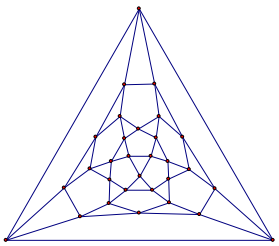
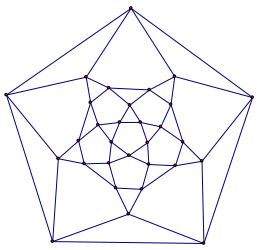
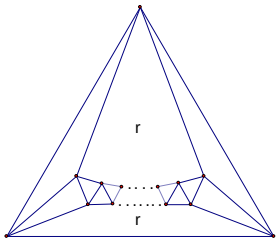
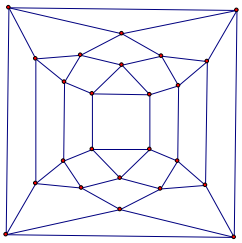
$$m=-n-\frac{2nr}{nr-n-3r}=-3-\frac{6r}{3r-3-3r}=-3+2r\ (r\geq 3,r\in N)$$

②當$n>3$時Ⓑ式就不會出現無限多解的情況。$\Rightarrow (n-3)(r-1)>0$，又$(n-3)(r-1)<3$，分點討論此方程式，得出n 、 r解，並代回原式求出符合條件的m值，如下表七所示：

$(n-3)(r-1)$	n	r	m	分割符號	繪圖情形
$(n-3)(r-1)=0$	3	$r\geq 3,r\in N$	$m=-3+2r$	$(3,-3+2r,3,r)$	存在
$(n-3)(r-1)=1$	4	2	$\rightarrow\leftarrow(\because r\geq 3)$		
$(n-3)(r-1)=2$	4	3	$m=20$	(4,20,4,3)	存在
$(n-3)(r-1)=2$	5	2	$\rightarrow\leftarrow(\because r\geq 3)$		

表七 $D=4$，對稱性為$[n,n,n,r]$的所有情形

將 $D=4$ 對稱性為 $[n,r,r,r]$、$[n,r,n,r]$、$[n,n,n,r]$ 推出之解繪成平面圖形，把繪圖過程中對稱性不符合的圖淘汰（見附錄），如下表八所示：

			
$(n,n,n,3)$ 對稱性 $[n,3,3,3]$	$(3,21,3,4)$ 對稱性 $[3,4,4,4]$	$(4,8,4,3)$ 對稱性 $[4,3,4,3]$	$(3,9,3,4)$ 對稱性 $[3,4,3,4]$
			
$(3,27,3,5)$ 對稱性 $[3,5,3,5]$	$(5,25,5,3)$ 對稱性 $[5,3,5,3]$	$(3,-3+2r,3,r)$ 對稱性 $[3,3,3,r]$	$(4,20,4,3)$ 對稱性 $[4,4,4,3]$

表八 $D=4$ 所有圖形情況(依照表五、表六、表七解的順序排列)

Case3：當 $D=5$ 時($n\geq 3, r\geq 3$，且 $n\neq r$)：

將 $D=5$ 帶入 p、q 之值，得

$$p=\frac{5(r-2)(m+n)-2\left[r(n+m-1)-n\right]}{2r-2n}=\frac{3rm+3rn-10m-8n+2r}{2r-2n}$$

$$q=\frac{5(n-2)(m+n)-2n(m+n-2)}{2n-2r}=\frac{3nm+3n^2-10m-6n}{2n-2r}$$

1.當對稱性為 $[n,r,r,r,r]$

(1) 將 $D=5$ 時之 p、q 值帶入對稱性公式 $4n(p+1)=qr$：

$$4n\cdot\frac{3rm+3rn-10m-8n+2r+2r-2n}{2r-2n}=r\cdot\frac{3nm+3n^2-10m-6n}{2n-2r}$$

$$\Rightarrow 3nrm+3n^2r-8nm-8n^2-2rm+2nr=0 \quad \Rightarrow m(3nr-8n-2r)+3n^2r-8n^2+2nr=0$$

$$\Rightarrow m=\frac{8n^2-3n^2r-2nr}{3nr-8n-2r}=\frac{(-n)(3nr-8n-2r)-4nr}{3nr-8n-2r}=-n-\frac{4nr}{3nr-8n-2r}$$

(2) 探討 m 之值的特性：

$$\because m\in \mathrm{N} \quad \therefore -n>\frac{4nr}{3nr-8n-2r}\Rightarrow n<\frac{4nr}{8n+2r-3nr}\cdots\cdots\cdots\cdots Ⓐ$$

又 $n>0$，$4nr>0$，$\therefore 8n+2r-3nr>0 \quad \Rightarrow 3nr-8n-2r<0\Rightarrow(3n-2)(3r-8)<8)\cdots\cdots\cdots\cdots Ⓑ$

(3) 求出所有符合Ⓐ、Ⓑ式子之 r、n 的解，並代入原是求出符合條件的 m 值如下表九所示：

$(3n-2)(3r-8)$	n	r	m	分割符號	繪圖情形
$(3n-2)(3r-8)=10$	4	3	$m=20$	(4,20,4,3)	存在
$(3n-2)(3r-8)=13$	5	3	$m=55$	(5,55,5,3)	存在

表九 $D=5$，對稱性為 $[n,r,r,r,r]$ 的所有情形

2.當對稱性為$[n,n,r,r,r]$、$[n,r,n,r,r]$

(1) 將$D=5$時之 p 、 q 值帶入對稱性公式$3n(p+1)=2qr$ ：

$$3n\cdot\frac{3rm+3rn-10m-8n+2r+2r-2n}{2r-2n}=2r\cdot\frac{3nm+3n^2-10m-6n}{2n-2r}$$

$$\Rightarrow 3nrm+3n^2r-6nm-6n^2-4rm=0\quad\Rightarrow m(3nr-6n-4r)+3n^2r-6n^2=0$$

$$\Rightarrow m=\frac{6n^2-3n^2r}{3nr-6n-4r}=\frac{(-n)(3nr-6n-4r)-4nr}{3nr-6n-4r}=-n-\frac{4nr}{3nr-6n-4r}$$

(2) 探討m之值的特性：

$$\because m\in\mathrm{N}\quad\therefore -n>\frac{4nr}{3nr-6n-4r}\Rightarrow n<\frac{4nr}{6n+4r-3nr}\cdots\cdots\cdots\cdots Ⓐ$$

又$n>0$， $4nr>0$ ，$\therefore 6n+4r-3nr>0$

$\Rightarrow 3nr-6n-4r<0\Rightarrow 9nr-18n-12r<0\Rightarrow(3n-4)(3r-6)<4\cdots\cdots\cdots\cdots Ⓑ$

(3) 求出所有符合Ⓐ、Ⓑ式子之r 、 n的解，代入原式求出符合條件的解，得出r沒有大於或等於 3 之正整數解。**對稱性為$[n,n,r,r,r]$與$[n,r,n,r,r]$時，完美二分割無解。**

3.當對稱性為$[n,n,n,r,r]$、$[n,n,r,n,r]$

(1) 將$D=5$時之 p 、 q 值帶入對稱性公式$2n(p+1)=3qr$ ：

$$2n\cdot\frac{3rm+3rn-10m-8n+2r+2r-2n}{2r-2n}=3r\cdot\frac{3nm+3n^2-10m-6n}{2n-2r}$$

$$\Rightarrow 3nrm+3n^2r-4nm-4n^2-6rm-2nr=0\quad\Rightarrow m(3nr-4n-6r)+3n^2r-4n^2-2nr=0$$

$$\Rightarrow m=\frac{4n^2-3n^2r+2nr}{3nr-4n-6r}=\frac{(-n)(3nr-4n-6r)-4nr}{3nr-4n-6r}=-n-\frac{4nr}{3nr-4n-6r}$$

(2) 探討m之值的特性：

$$\because m\in\mathrm{N}\quad\therefore -n>\frac{4nr}{3nr-4n-6r}\Rightarrow n<\frac{4nr}{4n+6r-3nr}\cdots\cdots\cdots\cdots Ⓐ$$

又$n>0$， $4nr>0$ ，$\therefore 4n+6r-3nr>0$

$\Rightarrow 3nr-4n-6r<0\Rightarrow 9nr-12n-18r<0\Rightarrow(3n-6)(3r-4)<6\cdots\cdots\cdots\cdots Ⓑ$

(3) 求出所有符合Ⓐ、Ⓑ式子之r 、 n的解，代入原式求出符合條件的解，得出r沒有大於或等於 3 之正整數解。**對稱性為$[n,n,n,r,r]$與$[n,n,r,n,r]$時，完美二分割無解。**

4.當對稱性為$[n,n,n,n,r]$

(1) 將$D=5$時之 p 、 q 值帶入對稱性公式$n(p+1)=4qr$ ：

$$n\cdot\frac{3rm+3rn-10m-8n+2r+2r-2n}{2r-2n}=4r\cdot\frac{3nm+3n^2-10m-6n}{2n-2r}$$

$$\Rightarrow 3nrm+3n^2r-2nm-2n^2-8rm-4nr=0\quad\Rightarrow m(3nr-2n-8r)+3n^2r-2n^2-4nr=0$$

$$\Rightarrow m=\frac{2n^2-3n^2r+4nr}{3nr-2n-8r}=\frac{(-n)(3nr-2n-8r)-4nr}{3nr-2n-8r}=-n-\frac{4nr}{3nr-2n-8r}$$

(2) 探討m之值的特性：

$$\because m\in\mathrm{N}\quad\therefore -n>\frac{4nr}{3nr-2n-8r}\Rightarrow n<\frac{4nr}{2n+8r-3nr}\cdots\cdots\cdots\cdots Ⓐ$$

又$n>0$， $4nr>0$ ，$\therefore 2n+8r-3nr>0$

$\Rightarrow 3nr-2n-8r<0\Rightarrow 9nr-6n-24r<0\Rightarrow(3n-8)(3r-2)<2\cdots\cdots\cdots\cdots Ⓑ$

(3) 求出所有符合Ⓐ、Ⓑ式子之r 、 n的解：

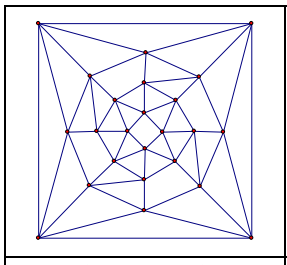
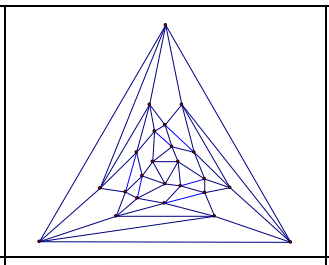
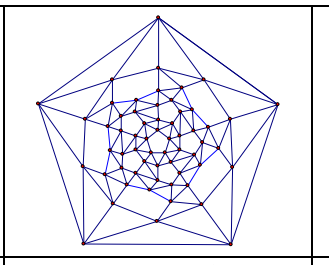
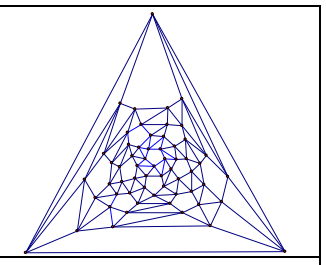
①當 $n=3$ 時 $\Rightarrow 3r-2<16 \Rightarrow r=4,5$

而當 $r\geq 4$ 時Ⓑ式無解。分點討論此方程式，得出 n 、 r 解，並代回原式求出符合條件的 m 值，如下表十所示：

$(3n-8)(3r-2)$	n	r	m	分割符號	繪圖情形
$(3n-8)(3r-2)=10$	3	4	$m=21$	(3,21,3,4)	存在
$(3n-8)(3r-2)=13$	3	5	$m=57$	(3,57,3,5)	存在

表十 $D=5$ ，對稱性為 $[n,n,n,n,r]$ 的所有情形

將 $D=5$ 對稱性為 $[n,r,r,r,r]$ 、 $[n,n,n,n,r]$ 的圖形繪出，如下表十一所示：

			
$(4,20,4,3)$ 對稱性 $[4,3,3,3,3]$	$(3,21,3,4)$ 對稱性 $[3,3,3,3,4]$	$(5,55,5,3)$ 對稱性 $[5,3,3,3,3]$	$(3,57,3,5)$ 對稱性 $[3,3,3,3,5]$

表十一 $D=5$ 的所有圖形情況(依照表九、表十解的順序排列)

我們進一步將上述所有完美三分割之證明推導，歸納成定理六。

定理六：完美二分割共有 24 種。

我們進一步探討完美三分割：

完美三分割

若一分割圖形含有 3 種邊數不同多邊形，且該分割圖形為對稱的，則稱此分割為「完美三分割」。我們以符號 (n,m,n,r,z) 來表示： n 邊形，內部 m 個點，分割為 n , r , z 三種多邊形的完美三分割。

令完美三分割圖形內含有 n 邊形個數 p 個， r 邊形個數 q 個， z 邊形個數 s 個。

(不失一般性，令 $n<r<z$ ，以利於求解)

先由尤拉公式將 $V=n+m$ ， $F=p+q+s+1$ 代入：

$$V+F-E=2 \Rightarrow E=(n+m)+(p+q+s+1)-2=n+m+p+q \cdots\cdots ①$$

再由定理三 (3) 可知 $\sum_{i=1}^{n+m} D_i = D(n+m)=2E \cdots\cdots$ ②

結合①、②

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n+m} D_i = D(n+m)=2E=2(n+m+p+q+s-1) \Rightarrow p+q+s=\frac{(n+m)(D-2)+2}{2}$$

上述的推演告訴了我們，**當 n 、 m 、 D 之值給定時，多邊形總數 $p+q+s$ 將恆為一定值！**

有了此發現，我們更進一步的來探討 D 的範圍。

1.我們先以內角和之計算，得 $(n-2)180^\circ+360^\circ\cdot m=(n-2)180^\circ\cdot p+(r-2)180^\circ\cdot q+(z-2)180^\circ\cdot s$

$$\Rightarrow (n-2)p+(r-2)q+(z-2)s=n-2 \cdots\cdots ③$$

綜合上述①、③兩式，可得一聯立方程： $\begin{cases}(n-2)p+(r-2)q=n-2+2m-(z-2)s \\ 2p+2q=(n+m)(D-2)-2s+2\end{cases}$

進一步利用行列式解出 p 、 q 的通式解，結果如下：

$$\Rightarrow \begin{cases} p = \dfrac{D(n+m)(r-2) - n(r-2m-2) + (n+2z-2s)}{2r-2n} \\ q = \dfrac{D(n+m)(n-2) - 2n(n+m-2) + 2sz - 2ns}{2n-2r} \end{cases}$$

2.討論 p 、 q 的性質和 D 的範圍：

(1)以 p 、 q 之值找出 D 的不等式：

$\because n < r < z$ 、 $p > 0$

$$\therefore D(n+m)(r-2) - (2n+2m-2)r + 2n + 2sz - 2rs > 0 \quad \Rightarrow D > 2 + \frac{2\left[2m + (n-r)\right] + 2rs - 2sz}{(n+m)(r-2)}$$

又 $n < r < z$ 、 $q > 0$

$$\therefore D(n+m)(n-2) - 2n(n+m-2) + 2sz - 2ns < 0 \Rightarrow D < 2 + \frac{4m + 2ns - 2sz}{(n+m)(r-2)}$$

$$\Rightarrow 2 + \frac{4m + 2ns - 2sz}{(n+m)(r-2)} > D > 2 + \frac{2\left[2m + n(n-r)\right] + 2rs - 2sz}{(n+m)(r-2)}$$

(2)進一步利用上述結果，證明 D 的確切範圍：

$$A = 2 + \frac{4m + 2ns - 2sz}{(n+m)(r-2)} - 5 = \frac{4m + 2ns - 2sz}{(n+m)(r-2)} - 3 = \frac{-\left[3n^2 + 3mn - 6m - 10m + 2sz - 2ns\right]}{(n+m)(n-2)}$$

$$= \frac{-\left[3n(n-2) + 2s(z-n) + 3m(n-2) - 4m\right]}{(n+m)(n-2)} = \frac{-\left[3n(n-2) + 2s(z-n) + m(3n-10)\right]}{(n+m)(n-2)}$$

①當 $n = 3$ 時： $A = \dfrac{-(9 + 2sz - 6s - m)}{m+3}$

設 $A \geq 0$ 時，完美三分割 $(3, m, 3, r, z)$ 存在，因為 $A \geq 0 \Rightarrow 9 + 2s(z-3) - m \leq 0$ ，而此時必定存在一對稱性相同之完美三分割 $(r, m+3-r, r, 3, z)$ 。因為對稱性相同，故完美三分割 $(3, m, 3, r, z)$ 、 $(r, m+3-r, r, 3, z)$ 每一點的價數皆相同。而 $(r, m+3-r, r, 3, z)$ 其 A 之值必大於等於 0。將 r 、 $m+3-r$ 、 3 、 z 之值分別代入 A 式中的 n 、 m 、 r 、 z ，

可得 $A = \dfrac{-\left[3r(r-2) + 2s(z-r) + (m-r+3)(3r-10)\right]}{(n+m)(r-2)}$ 。

$\because n < r < z$ 、 $r_{(\min)} = 4$ 、 $z_{(\min)} = 5 \Rightarrow (m-r+3)(3r-10) > 0$ 、 $3r(r-2) > 0$ 、 $2s(z-r) > 0$

$\Rightarrow A < 0 \quad (\rightarrow\leftarrow)$

故完美三分割 $(3, m, 3, r, z)$ 在 $A \geq 0$ 將不存在，故可得 $A < 0$ 。

②當 $n > 3$ 時： $A = \dfrac{-\left[3n(n-2) + 2s(z-n) + m(3n-10)\right]}{(n+m)(n-2)}$

$\because n < r < z$ 、 $n_{(\min)} = 4 \quad \therefore m(3n-10) > 0$ 、 $3n(n-2) + 2s(z-n) > 0 \quad \Rightarrow A < 0$

綜合上述①、②之分點探討，可知 A 之值無論如何恆小於 0，並得到了如下的關係：

$$5 > 2 + \frac{4m + 2ns - 2sz}{(n+m)(r-2)} > D > 2 + \frac{2\left[2m + (n-r)\right] + 2rs - 2sz}{(n+m)(r-2)} \Rightarrow D < 5 \quad \Rightarrow D = 3 \text{或} 4$$

同理可證 $n < z < r$ 、 $z < n < r$ 、 $r < n < z$ 、 $r < z < n$ 、 $z < r < n$ 時 $D = 3$ 或 4

定理七：完美三分割，$3 \leq D < 5 \Rightarrow D = 3$ 或 4 。

有了 D 的範圍，透過排列組合，可以得到 7 種不同的對稱性；其關係式分別如下：

(1) $D=3\Rightarrow[n,r,z]\Rightarrow n(p+1)=qr=sz=n+m$

(2) $D=4\Rightarrow\begin{cases}[n,n,r,z],[n,r,n,z]\Rightarrow \frac{1}{2}n(p+1)=qr=sz=n+m\\ [r,r,n,z],[r,n,r,z]\Rightarrow n(p+1)=\frac{1}{2}qr=sz=n+m\\ [z,z,n,r],[z,n,z,r]\Rightarrow n(p+1)=qr=\frac{1}{2}sz=n+m\end{cases}$

Case 1：當 $D=3$ 時($n\geq 3,r\geq 3,z\geq 3$)：

1.當對稱性為 $[n,r,z]$ 時：$\begin{cases}(n-2)p+(r-2)q+(z-2)s=n+2m-2.....(A)\\ 2p+2q+2s=n+m+2.....(B)\end{cases}$

(1)利用對稱性之關係求出 m 之值：

令 $V=n+m=n(p+1)=rq=zs=t$

$\Rightarrow p=\frac{m}{n}=\frac{t}{n}-1$、$q=\frac{n+m}{r}=\frac{t}{r}$、$s=\frac{n+m}{z}=\frac{t}{z}$。

先以 $p=\frac{t}{n}-1$、$q=\frac{t}{r}$、$s=\frac{t}{z}$ 代入 (A) 並化簡得 $t=\frac{\left[2n^2+(2m-4)n\right]rz}{[(3n-2)r-2n]z-2nr}.....(C)$，

再將 $p=\frac{t}{n}-1$、$q=\frac{t}{r}$、$s=\frac{t}{z}$ 代入 (B) 並化簡得 $t=\frac{\left[n^2+(m+4)n\right]rz}{(2r+2n)z+2nr}.....(D)$。

又 $(C)-(D)=0\quad\Rightarrow m=-\frac{\left[(n^2+2n)r-2n^2\right]z-2n^2r}{[(n-2)r-2n]z-2nr}=-\left\{n+\frac{4nrz}{[(n-2)r-2n]z-2nr}\right\}>0$

(2)探討 m 之值所衍伸之特性：

$m=-\left\{n+\frac{4nrz}{[(n-2)r-2n]z-2nr}\right\}>0$

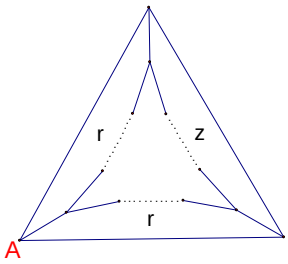
$\Rightarrow[(n-2)r-2n]z-2nr=nrz-2rz-2nz-2nr<0\Rightarrow\frac{1}{n}+\frac{1}{r}+\frac{1}{z}>\frac{1}{2}$

① $n<r<z$：

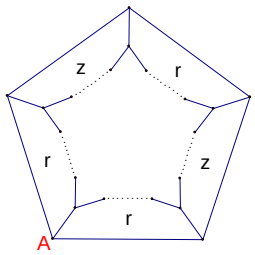
$\Rightarrow\frac{3}{n}>\frac{1}{2}>\frac{3}{z}\Rightarrow n=3$ 或 4 或 5

(i) 當 $n=3$ 或 $n=5$ 時：

我們由下圖九 (a)、(b) 中可以發現，在繪圖的過程中，無論 $n=3$ 或 $n=5$，點 A 之對稱性皆會出現矛盾。**故當 n 為奇數時，其分割圖形不存在。**



(a) 當 $n=3$ 時



(b) 當 $n=5$ 時

圖九

(ii) 當 $n=4$ 時：

$$m=-\left\{n+\frac{4nrz}{\left[(n-2)r-2n\right]z-2nr}\right\}=-\left[4+\frac{8rz}{rz-4z-4r}\right]=-\left[4+\frac{8rz}{(r-4)(z-4)-16}\right]>0$$

由 $r\mid n+m\Rightarrow\dfrac{8z}{rz-4z-4r}\in\mathrm{Z}$，由 $z\mid n+m\Rightarrow\dfrac{8r}{rz-4z-4r}\in\mathrm{Z}$。

又 $m>0\therefore rz-4r-4z<0\Rightarrow(r-4)(z-4)<16$；而 $(r-4)(z-4)_{\min}=1\cdot2=2$。

我們接著因式分解，以 $(r-4)(z-4)$ 之值分點討論此方程式；利用上述限制對 $(n,m,n,r,$ 之解進行篩選，並將符合方程式之 r、z 解呈現出來，如下表十二：

$(r-4)(z-4)$	r 限制	z 限制	r 解	z 解	m 解	分割符號	繪圖情形
$(r-4)(z-4)=2$	$7\mid r$	$7\mid z$	不符合方程式之限制(無解)				
$(r-4)(z-4)=3$	$13\mid r$	$13\mid z$	不符合方程式之限制(無解)				
$(r-4)(z-4)=4$	$3\mid r$	$3\mid z$	不符合方程式之限制(無解)				
$(r-4)(z-4)=5$	$11\mid r$	$11\mid z$	不符合方程式之限制(無解)				
$(r-4)(z-4)=6$	$5\mid r$	$5\mid z$	5	10	36	$(4,36,4,5,10)$	不存在
$(r-4)(z-4)=7$	$9\mid r$	$9\mid z$	不符合方程式之限制(無解)				
$(r-4)(z-4)=8$	無	無	5	12	56	$(4,56,4,5,12)$	不存在
$(r-4)(z-4)=8$	無	無	6	8	44	$(4,44,4,6,8)$	存在
$(r-4)(z-4)=9$	$7\mid r$	$7\mid z$	不符合方程式之限制(無解)				
$(r-4)(z-4)=10$	$3\mid r$	$3\mid z$	6	9	116	$(4,116,4,6,9)$	不存在
$(r-4)(z-4)=11$	$5\mid r$	$5\mid z$	5	15	116	$(4,116,4,5,15)$	不存在
$(r-4)(z-4)=12$	無	無	5	16	156	$(4,156,4,5,16)$	不存在
$(r-4)(z-4)=12$	無	無	6	10	116	$(4,116,4,6,10)$	存在
$(r-4)(z-4)=12$	無	無	7	8	108	$(4,108,4,7,8)$	不存在
$(r-4)(z-4)=13$	$3\mid r$	$3\mid z$	不符合方程式之限制(無解)				
$(r-4)(z-4)=14$	無	無	5	18	356	$(4,356,4,5,18)$	不存在
$(r-4)(z-4)=14$	無	無	6	11	260	$(4,260,4,6,11)$	不存在
$(r-4)(z-4)=15$	無	無	5	19	756	$(4,756,4,5,19)$	不存在
$(r-4)(z-4)=15$	無	無	7	9	500	$(4,500,4,7,9)$	不存在

表十二 $D=3$ 對稱性為 $[n,r,z]$，$n<r<z$ 時的情形

我們將繪圖過程中對稱性不符合之分割淘汰(詳細探討請見附錄二)。 故 $D=3$，$n<r<z$，對稱性為 $[n,r,z]$ 的完美三分割有 $(4,44,4,6,8)$、$(4,116,4,6,10)$ 兩種。

同理在 $n<z<r$ 時，稱性為 $[n,r,z]$ 的完美三分割有 $(4,44,4,8,6)$、$(4,116,4,10,6)$ 兩種。

（分別與 $(4,44,4,6,8)$、$(4,116,4,6,10)$ 等兩種完美三分割同構）

② $r<n<z$：

$\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{r}+\dfrac{1}{z}>\dfrac{1}{2}\Rightarrow n=4$ 或 5 或 6

$n=4$ 時 $\Rightarrow r=3$（在附錄二中已說明 r、z 有一為奇數時無解）

$n=5$ 時 $\Rightarrow$ 在 P.18 已說明無解

$$\Rightarrow n=6\Rightarrow m=-\left\{n+\frac{4nrz}{\left[(n-2)r-2n\right]z-2nr}\right\}=-\left\{6+\frac{6rz}{(r-3)(z-3)-9}\right\}>0$$

$\Rightarrow (r-3)(z-3)$；由 $r \mid n+m$ 、 $z \mid n+m$

$\Rightarrow \dfrac{6z}{rz-3z-3r} \in Z$ 、 $\dfrac{6r}{rz-3z-3r} \in Z$ ；由 r 、 z 皆為偶數（附錄二得知）

$\Rightarrow (r-3)(z-3)_{(\min)} =$

接著以 $(r-3)(z-3)$ 之值分點討論此方程式；利用上述限制對 (n,m,n,r,z) 之解進行篩選，並將符合方程式之 r 、 z 解呈現出來，如下表十三：

$(r-3)(z-3)$	r 限制	z 限制	r 解	z 解	m 解	分割符號	繪圖情形
$(r-3)(z-3)=5$	$2\mid r$	$2\mid z$	4	8	42	$(6,42,6,4,8)$	存在
$(r-3)(z-3)=6$	$2\mid r$	$2\mid z$	不符合方程式之限制(無解)				不存在
$(r-3)(z-3)=7$	$2\mid r$	$2\mid z$	4	10	114	$(6,114,6,4,10)$	存在
$(r-3)(z-3)=8$	$2\mid r$	$2\mid z$	不符合方程式之限制(無解)				不存在

表十三 $D=3$ 對稱性為 $[n,r,z]$ ，$r<n<z$ 時的情形

故共有 $(6,42,6,4,8)$ 、 $(6,114,6,4,10)$ 等兩種完美三分割

同理可得 $z<n<r$ 時有 $(6,42,6,8,4)$ 、 $(6,114,6,10,4)$ 等兩種完美三分割。

（分別與 $(6,42,6,4,8)$ 、 $(6,114,6,4,10)$ 等兩種完美三分割同構）

③ $r<z<n$ ：

由 $2\mid r$ 、 $2\mid z$

$\Rightarrow r_{(\min)}=4$ 、 $z_{(\min)}=6$ 又 $\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{r}+\dfrac{1}{z}>\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow 7\le n\le 1$ 由 P.18 可知 n 為奇數時無解

$\Rightarrow n=8$ 或 10

(i) $n=8$ ：

由 $2\mid r$ 、 $2\mid z$ 、 $r<z<8 \Rightarrow r=4$ 、 $z=6$

$\Rightarrow m=-\left\{n+\dfrac{4nrz}{[(n-2)r-2n]z-2nr}\right\}=40 \Rightarrow$ 存在之分割為 $(8,40,8,4,6)$

(ii) $n=10$ ：

$m=-\left\{n+\dfrac{4nrz}{[(n-2)r-2n]z-2nr}\right\}=-\left\{10+\dfrac{20rz}{r(2z-5)-(2z-5)}\right\}>0$

$\Rightarrow (2r-5)(2z-5)$ ；由 $2\mid r$ 、 $2\mid z$ 、 $r<z<10$

$\Rightarrow r_{(\min)}=4$ 、 $z_{(\min)}=6 \Rightarrow (2r-5)(2z-5)_{(\min)}=21$

接著以 $(2r-5)(2z-5)$ 之值分點討論此方程式；利用上述限制對 (n,m,n,r,z) 之解進行篩選，並將符合方程式之 r 、 z 解呈現出來，如下表十四：

$(2r-5)(2z-5)$	r 限制	z 限制	r 解	z 解	m 解	分割符號	繪圖情形
$(2r-5)(2z-5)=21$	$2\mid r$	$2\mid z$	4	6	110	$(10,110,10,4,6)$	存在
$(2r-5)(2z-5)=22$	$6\mid r$	$6\mid z$	不符合方程式之限制(無解)				不存在
$(2r-5)(2z-5)=23$	$2\mid r$	$2\mid z$	不符合方程式之限制(無解)				不存在
$(2r-5)(2z-5)=24$	$2\mid r$	$2\mid z$	不符合方程式之限制(無解)				不存在

表十四 $D=3$ 對稱性為 $[n,r,z]$ ，$r<z<n$ 時的情形

故共有 $(8,40,8,4,6)$ 、 $(10,110,10,4,6)$ 等兩種完美三分割。

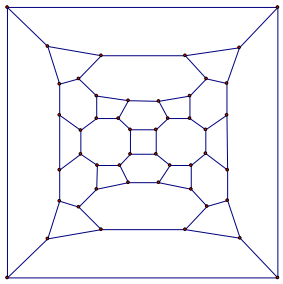
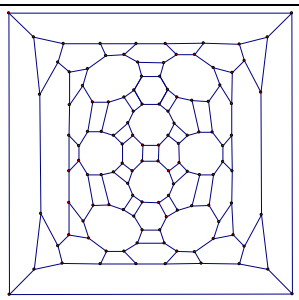
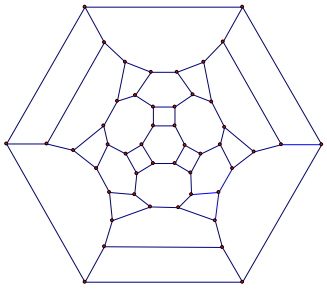
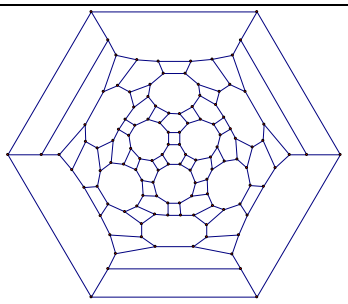
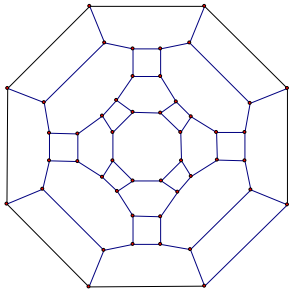
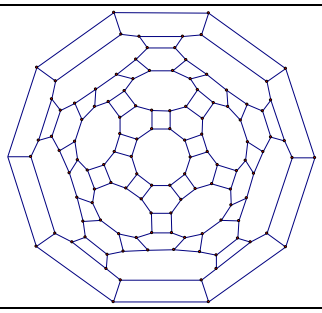
同理在 $z<r<n$ 時，共有 $(8,40,8,6,4)$ 、 $(10,110,10,6,4)$ 等兩種完美三分割。

（分別與$(8,40,8,4,6)$、$(10,110,10,4,6)$等兩種完美三分割同構）

(3) 將$D=3$時存在之完美三分割整理成表十五，並將圖形彙整成表十六：

n、r、z的關係	分割符號	對稱性	
$n<r<z$	$(4,44,4,6,8)$	$[4,6,8]$	與$(4,44,4,8,6)$同構
	$(4,116,4,6,10)$	$[4,6,10]$	與$(4,116,4,10,6)$同構
$n<z<r$	$(4,44,4,8,6)$	$[4,6,8]$	與$(4,44,4,6,8)$同構
	$(4,116,4,10,6)$	$[4,6,10]$	與$(4,116,4,6,10)$同構
$r<n<z$	$(6,42,6,4,8)$	$[6,4,8]$	與$(6,42,6,8,4)$同構
	$(6,114,6,4,10)$	$[6,4,10]$	與$(6,114,6,10,4)$同構
$z<n<r$	$(6,42,6,8,4)$	$[6,4,8]$	與$(6,42,6,4,8)$同構
	$(6,114,6,10,4)$	$[6,4,10]$	與$(6,114,6,4,10)$同構
$r<z<n$	$(8,40,8,4,6)$	$[8,4,6]$	與$(8,40,8,6,4)$同構
	$(10,110,10,4,6)$	$[10,4,6]$	與$(10,110,10,6,4)$同構
$z<r<n$	$(8,40,8,6,4)$	$[8,4,6]$	與$(8,40,8,4,6)$同構
	$(10,110,10,6,4)$	$[10,4,6]$	與$(10,110,10,4,6)$同構

表十五（依解出的順序排列）

		
$(4,44,4,6,8)$ 對稱性$[4,6,8]$	$(4,116,4,6,10)$ 對稱性$[4,6,10]$	$(6,42,6,4,8)$ 對稱性$[6,4,8]$
		
$(6,114,6,4,10)$ 對稱性$[6,4,10]$	$(8,40,8,4,6)$ 對稱性$[8,4,6]$	$(10,110,10,4,6)$ 對稱性$[10,4,6]$

表十六　$D=3$　對稱性為$[n,r,z]$的所有圖形

Case 2：當$D=4$時$(n\geq 3,r\geq 3,z\geq 3)$：

1.當對稱性為$[n,r,n,z]$、$[n,n,r,z]$時：$\begin{cases}(n-2)p+(r-2)q+(z-2)s=n+2m-2\text{.....}(A)\\ 2p+2q+2s=n+m+2\text{.....}(B)\end{cases}$

(1)利用對稱性之關係求出m之值：

令$V=n+m=\frac{1}{2}n(p+1)=rq=zs=t'$，

$\Rightarrow p=\frac{n+2m}{n}=\frac{2t'}{n}-1$、$q=\frac{n+m}{r}=\frac{t'}{r}$、$s=\frac{n+m}{z}=\frac{t'}{z}$。

先以$p=\frac{2t'}{n}-1$、$q=\frac{t'}{r}$、$s=\frac{t'}{z}$代入(A)並化簡得$t'=\frac{\left[n^2+(m-2)n\right]rz}{\left[(2n-2)r-n\right]z-nr}$.....$(C)$，

再將$p=\frac{2t'}{n}-1$、$q=\frac{t'}{r}$、$s=\frac{t'}{z}$代入(B)並化簡得$t'=\frac{\left[n^2+(m+2)n\right]rz}{(2r+n)z+nr}$.....$(D)$。

又$(C)-(D)=0\ \Rightarrow m=-\frac{(n^2r-n^2)z-n^2r}{\left[(n-2)r-n\right]z-nr}=-\left\{n+\frac{2nrz}{\left[(n-2)r-n\right]z-nr}\right\}>0$

(2)探討m之值所衍伸之特性：

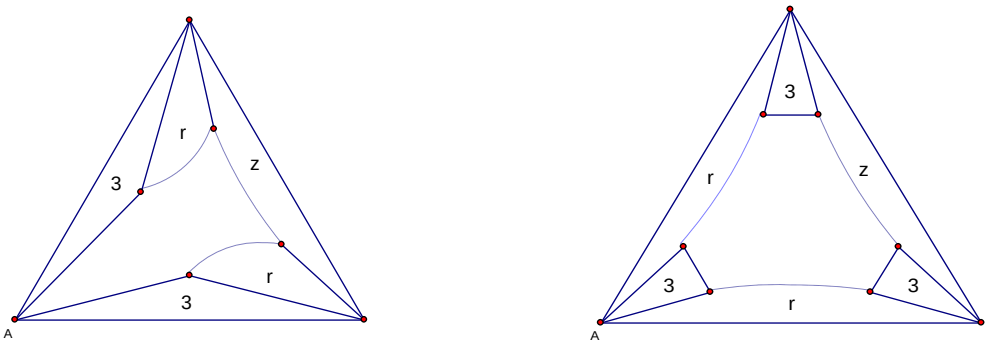
$m=-\left\{n+\frac{2nrz}{\left[(n-2)r-n\right]z-nr}\right\}>0\Rightarrow\left[(n-2)r-n\right]z-nr<0\Rightarrow\frac{2}{n}+\frac{1}{r}+\frac{1}{z}>1$

①$n<r<z$：

$\frac{2}{n}+\frac{1}{r}+\frac{1}{z}>1\Rightarrow n=3$

而由下圖十(a)、(b)可知，無論對稱性為$[n,r,n,z]$

或$[n,n,r,z]$時，點A之對稱性皆會出現矛盾，故無解。



(a)當對稱性為$[n,n,r,z]$時　　(b)當對稱性為$[n,r,n,z]$時

圖十

同理可推得當$n<z<r$時亦無解。

②$r<n<z$：

$\frac{2}{n}+\frac{1}{r}+\frac{1}{z}>1\Rightarrow n=4$

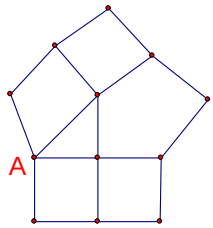
$\Rightarrow m=-\left\{n+\frac{2nrz}{\left[(n-2)r-n\right]z-nr}\right\}=-\left[4+\frac{4rz}{(r-2)(z-2)-4}\right]>0$

$\Rightarrow(r-2)(z-2)$；由$r=3$、$z_{(\min)}=5\Rightarrow(r-2)(z-2)_{(\min)}=3$

此時$z=5$、$r=3$、$n=4$代回原式$\Rightarrow m=56$

故$r<n<z$存在之完美三分割為$(4,56,4,3,5)$，對稱性$[4,3,4,5]$(圖形整理於表十九)。

（當對稱性為$[4,4,3,5]$時如圖十一，點A的對稱性不符，故無解）



圖十一

③ $z<n<r$ ：

$\frac{2}{n}+\frac{1}{r}+\frac{1}{z}>1 \Rightarrow n=4$ 由②之探討可知此時存在之完美三分割為 $(4,56,4,5,3)$ ，對稱性為 $[4,5,4,3]$（此分割與完美三分割 $(4,56,4,3,5)$ 、對稱性 $[4,3,4,5]$ 同構）。

④ $r<z<n$ ：

$\frac{2}{n}+\frac{1}{r}+\frac{1}{z}>1 \Rightarrow n$ 無解，同理可證 $z<r<n$ 時無解。

2.當對稱性為 $[r,n,r,z]$ 、 $[r,r,n,z]$ 時： $\begin{cases}(n-2)p+(r-2)q+(z-2)s=n+2m-2.....(A)\\ 2p+2q+2s=n+m+2.....(B)\end{cases}$

(1)利用對稱性之關係求出 m 之值：

令 $V=n+m=n(p+1)=\frac{1}{2}rq=zs=t''$ ，

$\Rightarrow p=\frac{m}{n}=\frac{t''}{n}-1$ 、 $q=\frac{2n+2m}{r}=\frac{2t''}{r}$ 、 $s=\frac{n+m}{z}=\frac{t''}{z}$ 。

先以 $p=\frac{t''}{n}-1$ 、 $q=\frac{2t''}{r}$ 、 $s=\frac{t''}{z}$ 代入 (A) 並化簡得 $t''=\frac{\left[n^2+(m-2)n\right]rz}{\left[(2n-1)r-2n\right]z-nr}.....(C)$ ，

再將 $p=\frac{t''}{n}-1$ 、 $q=\frac{2t''}{r}$ 、 $s=\frac{t''}{z}$ 代入 (B) 並化簡得 $t''=\frac{\left[n^2+(m+2)n\right]rz}{(r+2n)z+nr}.....(D)$ 。

又 $(C)-(D)=0 \quad \Rightarrow m=-\frac{\left[(n^2+n)r-2n^2\right]z-n^2r}{\left[(n-1)r-2n\right]z-nr}=-\left\{n+\frac{2nrz}{\left[(n-1)r-2n\right]z-nr}\right\}>0$

(2)探討 m 之值所衍伸之特性：

$m=-\left\{n+\frac{2nrz}{\left[(n-1)r-2n\right]z-nr}\right\}>0 \Rightarrow \left[(n-1)r-2n\right]z-nr<0 \Rightarrow \frac{1}{n}+\frac{2}{r}+\frac{1}{z}>1$

① $n<r<z$ ：

$\frac{1}{n}+\frac{2}{r}+\frac{1}{z}>1 \Rightarrow n=3 \Rightarrow \quad m=-\left[3+\frac{6rz}{(2r-6)z-3r}\right]=-\left[3+\frac{6rz}{(r-3)(2z-3)-9}\right]$

又 $m>0 \Rightarrow (r-3)(2z-3)-9<0 \Rightarrow (r-3)(2z-3)<9$ ； $(r-3)(2z-3)_{\min}=7$ 。

我們接著因式分解，以 $(r-3)(2z-3)$ 之值分點討論此方程式；利用上述條件對 (n,m,n,r,z) 之解進行求解，並將符合方程式之 r 、 z 解呈現出來，如下表十七：

$(r-3)(2z-3)$	求值情形	r 之解	z 之解	m 之解	分割符號	繪圖情形
$(r-3)(2z-3)=7$	有解	4	5	57	$(3,57,3,4,5)$	存在
$(r-3)(2z-3)=8$	無解(因 $z\in\mathrm{N}$)	4	5.5	無解		
$(r-3)(2z-3)=8$	無解(因 $z\in\mathrm{N}$)	5	3.5	無解		

表十七 $D=4$ 對稱性為 $[r,n,r,z]$ 、 $[r,r,n,z]$ 時的所有情形

故存在的完美三分割$(3,57,3,4,5)$，對稱性$[4,3,4,5]$。而當對稱性為$[r,r,n,z]$時(如圖十二所示)，此時點A之對稱性將產生矛盾，故不存在。

同理可證$n<z<r$時$n=3\Rightarrow z_{(\min)}=4$、$r_{(\min)}=5\Rightarrow (r-3)(2z-3)_{\min}=10>9(\rightarrow\leftarrow)$故無解。

②$r<n<z$：

$$\frac{1}{n}+\frac{2}{r}+\frac{1}{z}>1\Rightarrow n=4，r=3$$

當對稱性為$[3,3,4,z]$時，由①可知無解。

當對稱性為$[3,4,3,z]$時（如圖十三）點B的對稱性不符，故無解

$\Rightarrow r=3$時完美三分割$[r,n,r,z]$無解

③$z<n<r$：

$$\frac{1}{n}+\frac{2}{r}+\frac{1}{z_{(\min)}}=\frac{1}{4}+\frac{2}{5}+\frac{1}{3}=\frac{59}{60}<1\rightarrow\leftarrow$$故無解

④$r<z<n$：

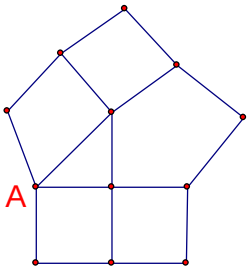
$\frac{1}{n}+\frac{2}{r}+\frac{1}{z}>1\Rightarrow r=3$，由②可知$r=3$時完美三分割$[r,n,r,z]$、$[r,r,n,z]$皆無解。

⑤$z<r<n$：

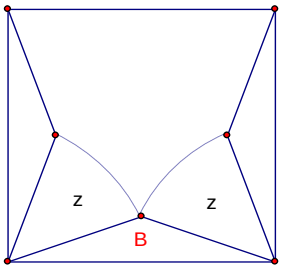
$$\frac{1}{n}+\frac{2}{r}+\frac{1}{z}>1\Rightarrow n=5、r=4、z=3\Rightarrow m=-\left\{n+\frac{2nrz}{[(n-1)r-2n]z-nr}\right\}=55$$

故存在之完美三分割為$(5,55,5,4,3)$，對稱性$[4,5,4,3]$(圖形整理於表十九)。

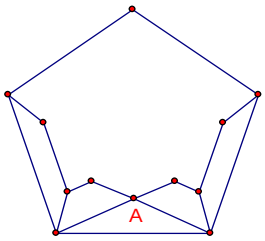
（對稱性為$[4,4,5,3]$時如圖十四，此時點A的對稱性不符，故無解）



圖十二



圖十三



圖十四

3.當對稱性為$[z,n,z,r]$、$[z,z,n,r]$時：$\begin{cases}(n-2)p+(r-2)q+(z-2)s=n+2m-2.....(A)\\2p+2q+2s=n+m+2.....(B)\end{cases}$

(1)利用對稱性之關係求出m之值：

令$V=n+m=n(p+1)=rq=\frac{1}{2}zs=t'''$，

$\Rightarrow p=\frac{m}{n}=\frac{t'''}{n}-1$、$q=\frac{n+m}{r}=\frac{t'''}{r}$、$s=\frac{2n+2m}{z}=\frac{2t'''}{z}$。

先以$p=\frac{t'''}{n}-1$、$q=\frac{t'''}{r}$、$s=\frac{2t'''}{z}$代入(A)並化簡得$t'''=\frac{[n^2+(m-2)n]rz}{[(2n-1)r-n]z-2nr}.....(C)$，

再將$p=\frac{t'''}{n}-1$、$q=\frac{t'''}{r}$、$s=\frac{2t'''}{z}$代入(B)並化簡得$t'''=\frac{[n^2+(m+2)n]rz}{(r+n)z+2nr}.....(D)$。

又 $(C)-(D)=0 \Rightarrow m=-\dfrac{\left[(n^2+n)r-n^2\right]z-2n^2r}{\left[(n-1)r-n\right]z-2nr}=-\left\{n+\dfrac{2nrz}{\left[(n-1)r-n\right]z-2nr}\right\}>0$

(2)探討 m 之值所衍伸之特性：

$m=-\left\{n+\dfrac{2nrz}{\left[(n-1)r-n\right]z-2nr}\right\}>0 \Rightarrow \left[(n-1)r-n\right]z-2nr<$

$\Rightarrow \dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{r}+\dfrac{2}{z}>1$ 且 $n<r<z \Rightarrow n=3$

① $n<r<z$ ：

$\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{r}+\dfrac{2}{z}>1 \Rightarrow n=3 \Rightarrow m=-\left[3+\dfrac{6rz}{(2r-3)z-6r}\right]=-\left[3+\dfrac{6rz}{(2r-3)(z-3)-9}\right]>0$

又 $m>0 \therefore (2r-3)(z-3)-9<0 \Rightarrow (2r-3)(z-3)<9$ 。

然而 $r_{\min}=4, z_{\min}=5 \Rightarrow (2r-3)(z-3)\geq 5\cdot 2=10(\rightarrow\leftarrow)$ ，故無解。

同理可證 $n<z<r$ 時 $n=3$ 無解

② $n<z<r$ ：

$\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{r}+\dfrac{2}{z_{(\max)}}=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{5}=\dfrac{59}{60}<1(\rightarrow\leftarrow)$ 故無解。

③ $z<n<r$ ：

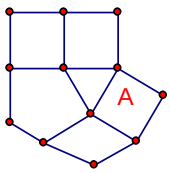
$\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{r}+\dfrac{2}{z}>1 \Rightarrow (n,r,z)=(3,5$

$\Rightarrow m=-\dfrac{\left[(n^2+n)r-n^2\right]z-2n^2r}{\left[(n-1)r-n\right]z-2nr}=57$

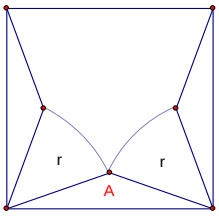
$\Rightarrow$ 存在之完美三分割為 $(3,57,3,5,4)$ ，對稱性 $[4,3,4,5]$

（與 $(3,57,3,4,5)$ ，對稱性 $[4,3,4,5]$ 同構）。

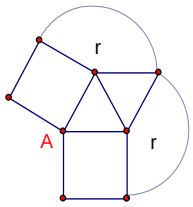
而當對稱性為 $[4,4,5,3]$ 時如圖十五所示，點 A 的對稱性不符故無解。



圖十五



圖十六



圖十七

(i) $n=4$ 時：

$n=4 \Rightarrow z=3$，當對稱性為 $[3,4,3,r]$ 時(如上圖十六所示)，點 A 對稱性不符，故無解。

當對稱性為 $[3,3,4,r]$ 時(如上圖十七所示)，點 A 對稱性不符，故無解。

可推得 $z=3$ 時對稱性 $[z,n,z,r]$ 、 $[z,z,n,r]$ 皆無解

(ii) $n=5$ 時：

$n=5 \Rightarrow z=3$ 或 4 （3不合，$\because$ 由 (i) 可知 $z=3$ 時 $[z,n,z,r]$ 、 $[z,z,n,r]$ 皆無解）

$m=-\left\{n+\dfrac{2nrz}{\left[(n-1)r-n\right]z-2nr}\right\}=-\left\{5+\dfrac{20z}{(4r-5)(2z-5)-25}\right\}>0$

$\Rightarrow (4r-5)(2z-5)<$ ；由 $n=5$ 、 $z=4$ 、 $r_{(\min)}=6$

$\Rightarrow (4r-5)(2\ \ 5)=\ \ >57\rightarrow 25$故無解

④ $z<r<n$：

$\frac{1}{n}+\frac{1}{r}+\frac{2}{z}>1\Rightarrow z=3$（不合∵由$(i)$可知$z=3$時$[z,n,z,r]$、$[z,z,n,r]$皆無解）

⑤ $r<z<n$：

$\frac{1}{n}+\frac{1}{r}+\frac{2}{z}>1\Rightarrow (n,r,z)=(5,\ \Rightarrow m=-\left\{n+\frac{2nrz}{[(n-1)r-n]z-2nr}\right\}=55$

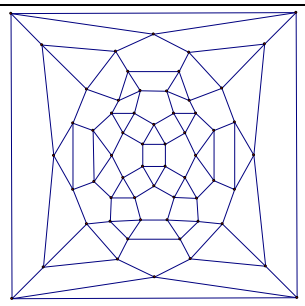
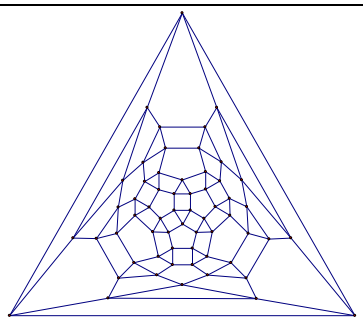
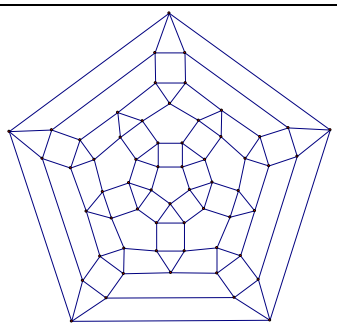
故存在之完美三分割為$(5,55,5,3,4)$對稱性$[4,5,4,3]$(圖形整理於表十九)。

（對稱性為$[4,4,5,3]$時，同上圖十五，點A的對稱性將不符，故無解）

4.將$D=4$時存在之完美三分割整理成表十八，並將圖形彙整成表十九。

n、r、z的關係	分割符號	對稱性	
$r<n<z$	$(4,56,4,3,5)$	$[4,3,4,5]$	與$(4,56,4,5,3)$同構
$z<n<r$	$(4,56,4,5,3)$	$[4,5,4,3]$	與$(4,56,4,3,5)$同構
$n<r<z$	$(3,57,3,4,5)$	$[4,3,4,5]$	與$(3,57,3,5,4)$同構
$z<r<n$	$(5,55,5,4,3)$	$[4,5,4,3]$	與$(5,55,5,3,4)$同構
$n<z<r$	$(3,57,3,5,4)$	$[4,3,4,5]$	與$(3,57,3,4,5)$同構
$r<z<n$	$(5,55,5,3,4)$	$[4,5,4,3]$	與$(5,55,5,4,3)$同構

表十八（依解出的順序排列）

		
$(4,56,4,3,5)$ 對稱性$[4,3,4,5]$	$(3,57,3,4,5)$ 對稱性$[4,3,4,5]$	$(5,55,5,3,4)$ 對稱性$[4,5,4,3]$

表十九　$D=4$完美三分割的所有圖形情況

我們進一步將上述所有完美三分割之證明推導，歸納成定理八。

定理八：完美三分割共有 9 種。

從完美二分割，一直到完美三分割，我們詮釋並發現了其中的數學幾何特性，並對其中之美感到敬畏。我們想進一步了解：完美k分割$(k>3)$，即內部含有四種以上不同的多邊形的存在性。底下為我們的探討：

令n邊形內m點，切出p個n邊形、q個r邊形、l_1個f_1邊形、l_2個f_2邊形、l_3個f_3邊形.....l_{k-2}個f_{k-2}邊形。其中，$n<r<f_1<f_2<f_3<.....<f_{k-2}$且$n,r\ \ f_1,f_2,f_3\cdots\cdots\cdots f_{k-2}\geq 3$；$p,q,l_1,l_2,l_3,.....l_{k-2}\geq 1$。$(k>3)$

1.先由尤拉公式將$V=n+m$，$F=p+q+\sum_{j=1}^{k-2}l_j+1$代入：

$$V+F-E=2\Rightarrow E=(n+m)+\left(p+q+\sum_{j=1}^{k-2}l_j+1\right)-2=n+m+p+q+\sum_{j=1}^{k-2}l_j-1\cdots\cdots\text{①}。$$

再由定理三(3)可知$\sum_{i=1}^{n+m}D_i=D(n+m)=2E$.……② 。

結合①、②兩式 $\Rightarrow\sum_{i=1}^{n+m}D_i=D(n+m)=2E=2\left(n+m+p+q+\sum_{j=1}^{k-2}l_j-1\right)$

$$\Rightarrow 2p+2q=(n+m)(D-2)-\sum_{j=1}^{k-2}2l_j$$

2.以內角和公式探討

$$(n-2)180^\circ+360^\circ m=(n-2)180^\circ p+(r-2)180^\circ q+(f_1-2)180^\circ l_1+(f_2-2)180^\circ l_2+\ldots\ldots+(f_{k-2}-2)180^\circ l_{k-2}$$

$$\Rightarrow n-2+2m=(n-2)p+(r-2)q+(f_1-2)l_1+(f_2-2)l_2+\ldots\ldots+(f_{k-2}-2)l_{k-2}$$

$$\Rightarrow(n-2)p+(r-2)q=n-2+2m-\sum_{j=1}^{k-2}f_jl_j+2\sum_{j=1}^{k-2}l_j$$

而為了方便後面的討論，我們令$x=\sum_{j=1}^{k-2}f_jl_j$，$y=\sum_{j=1}^{k-2}l_j$：

$$\Rightarrow(n-2)p+(r-2)q=n-2+2m-x+2y\cdots\cdots③$$

又$\sum_{i=1}^{n+m}D_i=D(n+m)=2E=2(n+m+p+q+y-1)-2$

$$\Rightarrow 2p+2q=(n+m)(D-2)-2y+2\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots④$$

結合③、④兩式，可得一聯立方程式：$\begin{cases}(n-2)p+(r-2)q=n-2+2m-x+2y\\2p+2q=(n+m)(D-2)-2y+2\end{cases}$

進一步利用行列式解出p、q的通式解，結果如下：

$$\begin{cases}p=\dfrac{\left[(n+m)(r-2)\right]D-(2n+2m-2)r+2n+2x-2ry}{2r-2n}\\q=\dfrac{\left[(n+m)(n-2)\right]D-2n^2+(r-2m)n+2x-2ny}{2n-2r}\end{cases}$$

3. 討論p、q的性質和D的範圍：

(1)以p、q之值找出D的不等式：

$\because n<r$、$p>0$ $\therefore\left[(n+m)(r-2)\right]D-(2n+2m-2)r+2n+2x-2ry>0$

$$\Rightarrow D>\frac{(2n+2m-2)r+2n+2x-2ry}{(n+m)(r-2)}=2+\frac{6n+4m-2r+2x-2ry}{(n+m)(r-2)}$$

又$\because n<r$、$q>0$ $\therefore\left[(n+m)(n-2)\right]D-2n^2+(4-2m)n+2x-2ny<0$

$$\Rightarrow D<\frac{2n^2+(2m-4)n+2ny-2x}{(n+m)(n-2)}=2+\frac{2ny-2x+4m}{(n+m)(n-2)}$$

$$\Rightarrow\ 2+\frac{2ny-2x+4m}{(n+m)(n-2)}>D>2+\frac{6n+4m-2r+2x-2ry}{(n+m)(r-2)}$$

(2)進一步利用上述結果，證明D的確切範圍：

令$A=2+\dfrac{2ny-2x+4m}{(n+m)(n-2)}-4=\dfrac{2ny-2x+4m}{(n+m)(n-2)}-2=\dfrac{-2n^2+(2m-4)n+2ny-2x+8m}{(n+m)(n-2)}$

$$=\frac{-2\left[n^2+(m-2)n-ny+x-4m\right]}{(n+m)(n-2)}=\frac{-2\left[n(n-2)+m(n-2)+x-ny-2m\right]}{(n+m)(n-2)}$$

又 $n<r<f_1<f_2<f_3<.....<f_{k-2}\Rightarrow x-ny>0$

①當 $n=3$ 時：

設 $A\geq 0$ 時，完美 k 分割 $(3,m,3,r,f_1,f_2,....,f_{k-2})$ 存在，因為 $A\geq 0$，

故 $n(n-2)+m(n-2)+x-ny-2m=3+x-ny-m<0$，而此時必存在一對稱性相同之完美分割 $(r,3+m-r,r,3,f_1,f_2,....,f_{k-2})$。由於對稱性相同，故每點價數皆相同。故完美分割 $(r,3+m-r,r,3,f_1,f_2,....,f_{k-2})$ 其 A 之值必大於等於 0。將 r、$m+3-r$、3 之值分別代入 A 式中的 n、m、r (其餘變數數值皆不變)後，

可得到 $A=\dfrac{-2\left[r(r-2)+(3+m-r)(r-2)+x-ry-2(3+m-r)\right]}{(n+m)(r-2)}$。

$\because x-ny>0$，$(3+m-r)(r-2)-2(3+m-r)=(3+m-r)(r-4)\geq 0$，$r(r-2)>0$

$\Rightarrow\left[r(r-2)+(3+m-r)(r-2)+x-ry-2(3+m-r)\right]>0\Rightarrow A<0\ (\rightarrow\leftarrow)$

故完美 k 分割 $(3,m,3,r,f_1,f_2,....,f_{k-2})$ 在 $A\geq 0$ 將不存在，故可得 $A<0$。

又 $\because A<0\Rightarrow D<4$。

②當 $n>3$ 時：$\because n(n-2)+m(n-4)+x-ny>0\Rightarrow A<0\Rightarrow D<4$。

綜合上述①、②之分點探討，可知 A 之值恆小於 0 $\Rightarrow D$ 之值恆小於 4。然而完美 k 分割在 $k>3$ 時，其每個頂點價數 $D\geq 4\ (\rightarrow\leftarrow)$。故完美 k 分割在 $k>3$ 時將不存在。

同理可證 $n<z<r$、$z<n<r$、$r<n<z$、$r<z<n$、$z<r<n$ 時完美 k 分割在 $k>3$ 時將不存在。

定理九：完美 k 分割在 $k>3$ 時將不存在

伍、討論

本研究主要討論平面任意多邊形內部分割的性質，將所有完美 k 分割圖形繪出來，並進行美化處理後，我們發現這些圖形結構是相當漂亮且有意義的；在與相關立體圖形進行比較後我們發現：5 種完美全分割圖形恰好與柏拉圖立體圖形同構；而完美二分割的 24 種圖形可對應至 12 類同構立體圖(其中 10 種為阿基米德立體圖形)，完美三分割的 9 種圖形，其恰可分 3 類，對應至其餘的 3 種阿基米德立體圖形 (詳細的圖形比對探討請見附錄三)。

陸、結論

一、$(n,m,3)$ 之全分割，無論分割方式為何，其分割後：

(1) 三角形總數恆為一定值 α，其中 $\alpha=n+2m-2$ (2) 總邊數為 $E=2n+3m-3$

(3) $\sum_{i=1}^{n+m}D_i=2E=4n+6m-6$ (其中 D_i 為 i 點的價數)

二、任意凹 n 邊形內角和 $=(n-2)\cdot 180^\circ$

三、(n,m,r) 之全分割，無論分割方式為何，其分割後：

(1) r 邊形總數為一定值 α，其中 $\alpha=\dfrac{n+2m-2}{r-2}$ (2) 總邊數為 $E=(n+m-1)+\dfrac{n+2m-2}{r-2}$

(3) $\sum_{i=1}^{n+m}D_i=2E=2(n+m-1)+\dfrac{2(n+2m-2)}{r-2}$ (其中 D_i 為 i 點的價數，$r-2\,|\,n+2m-2$)

四、完美全分割共有 5 種，完美二分割共有 24 種，完美三分割共有 9 種，而完美 k 分割在 $k>3$ 時將不存在。

五、完美全分割的 5 種圖形恰好與五種正多面體同構，完美二分割中的 24 種圖形恰好可對應至 12 類同構立體圖(其中 10 種為阿基米德立體圖形)，而完美三分割的 9 種圖形恰可對應至另 3 種阿基米德立體圖形。

柒、參考資料

[1] 給數學迷的500個挑戰性問題。愛德華·J.巴爾博、默里·S.克拉姆金、威廉·O.J.莫澤（2007/7）。王繼延、林磊、韓士安譯。上海科技教育出版社。

[2] 五種正多面體立體圖。取自：http://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E6%AD%A3%E5%A4%9A%E9%9D%A2%E9%AB%94

[3] 尤拉公式介紹：http://www3.cnsh.mlc.edu.tw/~math/geo/geo-down/%20geo-down2-1-all.pdf

[4] 陳冒海主編(民 99)。國民中學數學課本第 4 冊。臺南市：南一。

[5] 阿基米德立體圖。取自：http://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E5%8D%8A%E6%AD%A3%E5%A4%9A%E9%9D%A2%E9%AB%94

【評語】030406

1. 探討多邊形的分割樣式，但研究內容中的許多圖形，實可由柏拉圖或阿基米德多面體推得,因此創意稍顯不足。
2. 團隊合作良好。
3. 研究目標明確。