中華民國第51屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

030405

嘖『摺』稱奇，振『正』有詞

學校名稱：花蓮縣立花崗國民中學

作者：	指導老師：
國二 李芳儒	陳貞泰
國一 陳彥宏	陳輝雄
國一 陳又任	

關鍵詞：勾股定理、對稱圖形、相似形

作品名稱：“嘖『摺』稱奇,振『正』有詞”

摘要

本文主要是研究如何利用“邊長為 1 的正方形紙張,折出各種面積小於 1 的正方形圖形”,與如何利用紙張摺出各種的正 N 邊形(含尺規作圖無法作出的正七邊形、正九邊形、……),以達加深加廣學習者的幾何概念並與小學的美勞課程銜接。試圖以摺紙方法解決“古典幾何三大問題”,並已解決其中的**三等分角與立方倍積**問題。

壹、 研究動機：

在年上學期加入學校社團--「折紙社」的第一堂課時,指導老師發給每位同學一張正方形紙張(1平方單位),要我們每位同學折出$\frac{1}{4}$平方單位的正方形;在同學們談笑之間對折再對折就完成了老師的要求。緊接著,老師要我們繼續折出$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{3}$、$\frac{1}{5}$、$\frac{1}{6}$、$\frac{1}{7}$、$\frac{1}{8}$、$\frac{1}{9}$、$\frac{1}{10}$等平方單位的正方形,這可就苦煞了我們這一群！在一陣七嘴八舌的討論之下,仍然不思其解;因而我就在課後找了幾位同學展開研究,遇有問題就隨時請教老師。

貳、 研究目的：

(一)、探究在面積 1 平方單位的正方形中,如何摺出 $\frac{1}{N}$ 平方單位的正方形

(二)、探究摺出 $\frac{1}{N}$ 平方單位正方形的一般化

(三)、探究在面積 1 平方單位的正方形中,如何摺出 $\frac{k}{N}$ 平方單位的正方形

(四)、探究摺出 $\frac{k}{N}$ 平方單位正方形的一般化

(五)、探究在面積 1 平方單位的正方形中,如何摺出 $\frac{1}{\sqrt[2^n]{N}}$ 平方單位的正方形

(六)、探究摺出 $\frac{1}{\sqrt[2^n]{N}}$ 平方單位正方形的一般化

(七)、探究如何利用 1 張紙張摺出各種正 N 邊形的可能性及其原理

(八)、探究如何利用摺紙方法解決“幾何三大問題”

(九)、探究摺出 $\frac{1}{\sqrt[3^p]{N}},\frac{k}{\sqrt[3^p]{N}},\frac{1}{\sqrt[3^p\times 2^q]{N}},\frac{k}{\sqrt[3^p\times 2^q]{N}}$ $(p,k$為正整數$,k<\sqrt[3^p]{N},k<\sqrt[6^p]{N})$ 平方單位正方形摺法的一般化

參、 研究器材：紙張、GSP

肆、 預備知識：

(一). 摺紙數學公理：日裔義大利人藤田文章（***Humiaki Huzita***）於**1991** 年在***First International Conference on Origami in Education and Therapy*** 中，提出下列著名的六個摺紙數學公理：

公理 **1.** 給定任意兩點$\boldsymbol{p_1}$ 和$\boldsymbol{p_2}$，唯一存在一條通過這兩點的摺線。

公理 **2.** 給定任意兩點$\boldsymbol{p_1}$和$\boldsymbol{p_2}$，唯一存在一條摺線使得$\boldsymbol{p_1}$ 和$\boldsymbol{p_2}$重合。

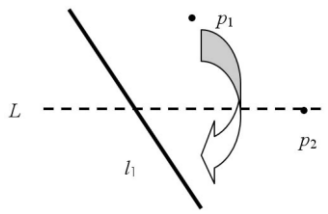
公理 **3.** 給定任意兩條直線$\boldsymbol{l_1}$和$\boldsymbol{l_2}$，存在一條摺線使得$\boldsymbol{l_1}$ 和$\boldsymbol{l_2}$重合。

公理 **4.** 給定任意一點$\boldsymbol{p_1}$ 和直線$\boldsymbol{l_1}$，唯一存在一條摺線與$\boldsymbol{l_1}$垂直且通過$\boldsymbol{p_1}$。

公理 **5.** 給定任意兩點$\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{p_2}$ 和直線$\boldsymbol{l_1}$，存在一條摺線使得$\boldsymbol{p_1}$在直線$\boldsymbol{l_1}$上且摺線通過$\boldsymbol{p_2}$。

公理 **6.** 給定任意兩點$\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{p_2}$ 和兩直線$\boldsymbol{l_1}$ 和$\boldsymbol{l_2}$，存在一條摺線使得$\boldsymbol{p_1}$在直線$\boldsymbol{l_1}$ 上，且$\boldsymbol{p_2}$

在直線l_2上。



後來，另一位日本人羽鳥公士郎（***Koshiro Hatori***）於**2001** 年進一步提出第七個公理（賈斯汀和羅伯特・朗(***Robert J. Lang***)也同樣發現了第七個公理。：

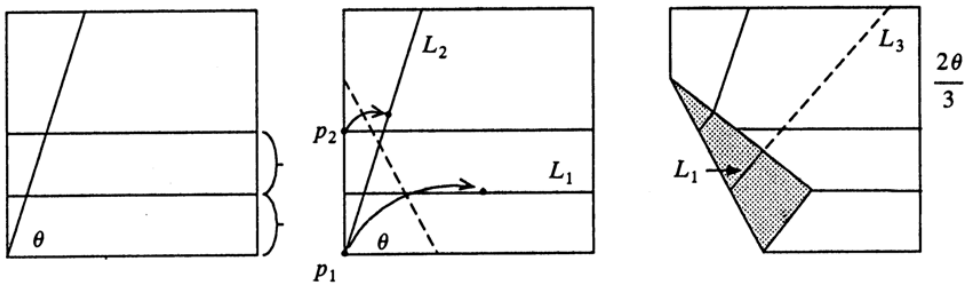
公理 **7.** 給定任意一點 p 和兩直線 l_1 和 l_2，存在一條摺線使得 p 和直線 l_1 重合且與直線 l_2 垂直。(見維基百科•自由的百科全書)(証明見[附件一])

(二). 摺紙作圖基本假設：

- 摺紙動作所產生的摺痕均視為直線，多邊形紙張的邊亦視為直線。
- 任意兩條不平行直線相交處視為一個點。
- 經紙張摺疊後可重合的兩線段或兩角均視為相等。
- 當一個作圖問題中所有交點的相對位置均確定後，此作圖問題即視為完成。

伍、 預備定理：

(一). 三等分銳角的摺紙方法：



圖一(a)　　圖一(b)　　圖一(c)

(如圖一**(a)**)，假設所要三等分的銳角θ位於正方形左下角。首先做出兩條平行且等距的摺線後，(如圖一**(b)**)，根據公理**6**，我們可以做出一摺線使得p_1 在L_1 上且p_2 在L_2 上。我們延伸紙背上的L_1(如圖一**(c)**) 做出直線L_3，紙張攤平後將L_3 往左下角延伸，一定會與點p_1 相交，則L_3 與紙張底線所成的角度為$\frac{2\theta}{3}$。最後再依據公理**3** 摺出角平分線。

[証明]：

1. $\because \overline{BC} // \overline{MN} // \overline{PQ}, \overline{BM} = \overline{PM}$;

且$\overline{OR}$為一摺線,並使B點落於L_1之B'上,

P點落於L_2之P'上,而M點落於延伸紙背上的L_1之M'上。

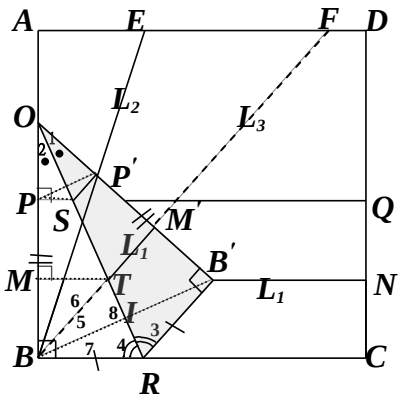
$\therefore \Delta OBR \cong \Delta OB'R, \Delta OMT \cong \Delta OM'T,$

$\Delta OSP \cong \Delta OSP'$,四邊形$OBRB'$為鳶形

故$\angle OMT = \angle OM'T = 90°, \angle 1 = \angle 2,$

$\overline{OR} \perp \overline{BB'}, \overline{B'M'} \perp \overline{P'M'}$;

即$\Delta BB'P'$為一等腰三角形,故$\angle 5 = \angle 6$

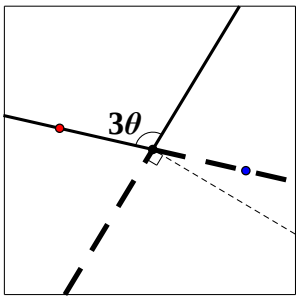


2.在$\Delta BB'M$與$\Delta OB'I$中

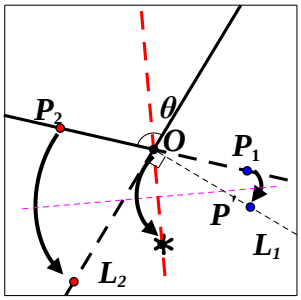
$\because \angle BM'B = \angle OIB' = 90°, \angle OB'B = \angle OB'B; \therefore \angle 5 = \angle 1 = \angle 2 = \angle 6$

3.依母子相似性質:知$\angle 2 = \angle 7$;故$\angle 5 = \angle 6 = \angle 7$;　即$\overrightarrow{BB'}$與$\overrightarrow{BM'}$將$\angle EBC$三等分

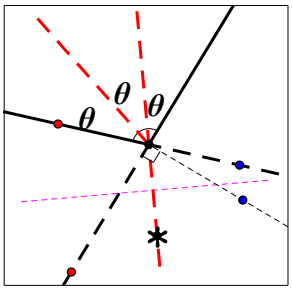
(二). 三等分鈍角的摺紙方法：



圖二(a)

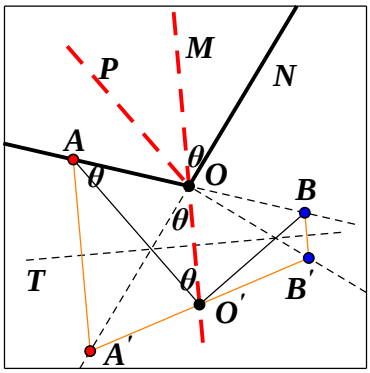


圖二(b)



圖二(c)

(如圖二**(a)**)，假設所要三等分的鈍角3θ置於正方形居中處。首先延長3θ的其中一邊，並做出與此延長邊垂直的摺線，及3θ角另一邊的延長線，並以3θ角之頂點為中心，在其延長邊上摺出與3θ角之頂點等距離的兩個摺點後，(如圖二**(b)**)，根據公理**6**，我們可以做出一摺線使得p_1在L_1上且p_2在L_2上，並記出此時O點的對應點∗，折出O點與對應點∗的摺線。最後再依據公理**3**摺出$\angle P'OP_2$的角平分線(如圖二**(c)**)。



[証明]：

1. $\because \overline{AO}=\overline{A'O'}=\overline{BO}=\overline{B'O'}, \therefore \overline{BB'} // \overline{OO'} // \overline{AA'}$,

   故$ABB'A'$為一等腰梯形

2. 在直角三角形$A'OB'$中

   $\because \overline{A'O'}=\overline{B'O'}, \therefore O$為$\overline{A'B'}$中點，故$\overline{OO'}=\overline{A'O'}=\overline{B'O'}$,

   $\Rightarrow \overline{OO'}=\overline{AO}=\overline{BO} \Rightarrow \angle AO'O=\angle OAO'=\theta=\angle MON$

3. $\because \angle MOA=\angle AO'O+\angle OAO'=2\theta$，且$\overline{OP}$平分$\angle AOM$

   $\therefore \angle AOP=\angle POM=\angle MON=\theta$

(三). 托勒密(***Ptolemy***)定理：圓內接凸四邊形兩對對邊乘積和等於兩對角線乘積

(証明見[附件二])

陸、 研究過程：

【第一部分】：摺出$\frac{1}{N}$(N為正整數)平方單位的正方形

首先，我們從從簡單入手，先探求如何折出面積為$\frac{1}{2}$的正方形。

(1) 折出面積為『$\frac{1}{2}$』的正方形。

[方法]：(如圖 1)

①將正方形對折兩次，得到各邊中點 E、F、G、H；$\overline{EG}$與$\overline{FH}$相交於O

②沿對角線折疊正方形$AEOH$，使A點與O點重合，得到折痕$\overline{EH}$

③重複步驟②，分別得到折痕$\overline{EF}$、$\overline{FG}$、$\overline{GH}$，則正方形$EFGH$即為所求

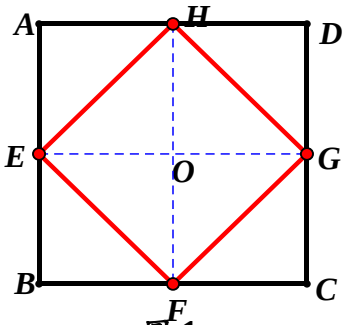


圖 1

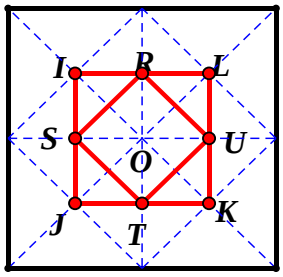


圖 2

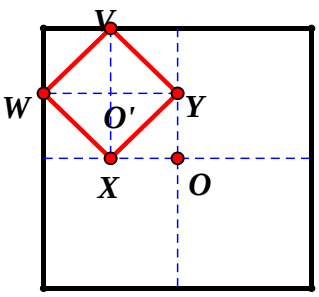


圖 3

註 1.：圖 2 中的四邊形 $IJKL$ 為『$\frac{1}{4}$』的正方形，而四邊形 $RSTU$ 為『$\frac{1}{8}$』的正方形，又圖 3 中的四邊形 $VWXY$ 為『$\frac{1}{8}$』的正方形的另一種摺法。

註 2.：(2).圖 4.1 圖 4.2 中的四邊形 $PQRC$ 為『$\frac{1}{3}$』的正方形，及(3).圖 4.3 中的四邊形 $STUV$ 為『$\frac{1}{6}$』正方形。（見[附件三]）。

(2)折出面積為『$\frac{1}{3}$』的正方形。

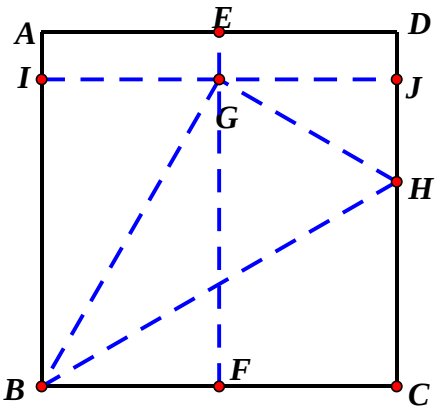


圖 4.1

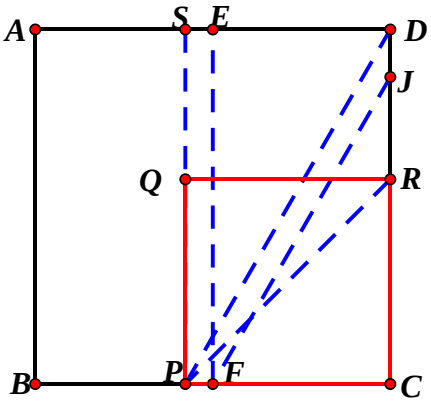


圖 4.2

[方法]：步驟一（如圖 4.1）

①將正方形對折，得折痕 $\overline{EF}$　　② 將$\overline{BC}$哲至$\overline{BG}$，G在$\overline{EF}$上，得折痕$\overline{BH}$

③ 過G折與$\overline{CD}$垂直的折痕$\overline{IJ}$，交$\overline{CD}$於J

步驟二（如圖 4.2）

①折 $\overline{JF}$，並過D折與$\overline{JF}$平行的折痕$\overline{DP}$

② 過P折與$\overline{BC}$垂直的折痕$\overline{PS}$，並將$\overline{PC}$折向$\overline{PS}$得Q

③ 過Q折與$\overline{CD}$垂直的折痕$\overline{QR}$交$\overline{CD}$於R，則正方形$PQRC$即為所求

[証明]：（如圖 4.1&圖 4.2）

① $\because \overline{EF} \perp \overline{BC}, \overline{BF} = \frac{1}{2}, \overline{BG} = 1; \therefore \overline{GF} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \overline{JC}$

② $\because \overline{DP} // \overline{JF}, \therefore \Delta JFC \sim \Delta DPC, \frac{\overline{JC}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{FC}}{\overline{PC}}, \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\frac{1}{2}}{\overline{PC}}$，則$\overline{PC} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

③ 即正方形$PQRC = \overline{PC}^2 = \frac{1}{3}$

(3)折出面積為『$\frac{1}{6}$』的正方形。

[方法]：（如圖 4.3）

①折出 正方形$PQRC = \frac{1}{3}$正方形$ABCD$

② 在正方形$PQRC$中重複(1)的折疊方法，即得

正方形$STUV = \frac{1}{6}$正方形$ABCD$

[証明]：

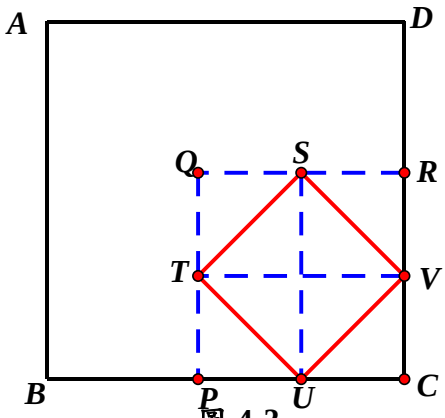


圖 4-3

(4)折出面積為『$\frac{1}{5}$』的正方形。

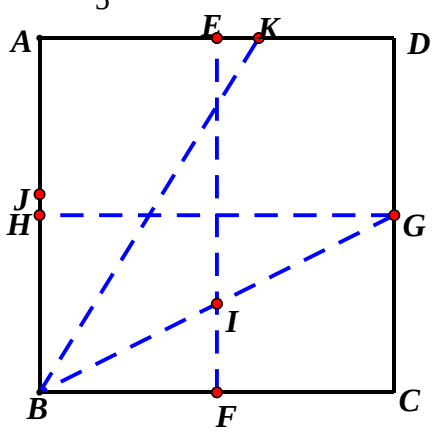


圖 5.1

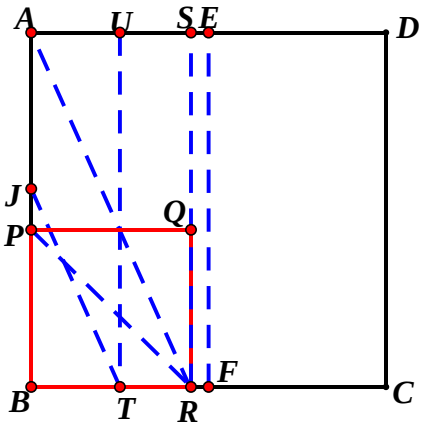


圖 5.2

［方法］： 步驟一（如圖 5.1）

① 將正方形$ABCD$對折,得折痕$\overline{EF}$及折痕$\overline{GH}$　　② 將B折至G得中點I

③ 將$\overline{AB}$折向$\overline{BG}$得$\overline{JB}=\overline{IB}$

步驟二（如圖 5.2）

① 將長方形$ABFE$對折得折痕$\overline{TU}$,折$\overline{JT}$,並過A折與$\overline{JT}$平行的折痕$\overline{AR}$

② 過R折與$\overline{BC}$垂直的折痕$\overline{RS}$,並將$\overline{BR}$折向$\overline{RS}$得Q

③ 過Q折與$\overline{AB}$垂直的折痕$\overline{PQ}$交$\overline{AB}$於P,則正方形$PQRB$即為所求

［証明］:（如圖 5.1&圖 5.2）

① $\because \overline{UC}=\frac{1}{2},\overline{BC}=1,\therefore \overline{UB}=\frac{\sqrt{5}}{2}$,且$\overline{JB}=\overline{IB}=\frac{1}{2}\overline{UB}=\frac{\sqrt{5}}{4}$

② $\because \overline{AR}\,//\,\overline{JH}\ \therefore \Delta BJT\sim\Delta BAR,\frac{\overline{BJ}}{\overline{BA}}=\frac{\overline{BT}}{\overline{BR}}$,故$\frac{\frac{\sqrt{5}}{4}}{1}=\frac{\frac{1}{4}}{\overline{BR}}$;即$\overline{BR}=\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\therefore$ 正方形$PQRB=\overline{BR}^2=\frac{1}{5}$

(5)折出面積為『$\frac{1}{7}$』的正方形。

［方法］： 步驟一（如圖 6.1）

① 先參照折法(2)中的①與②, 折出$\overline{JC}=\frac{\sqrt{3}}{2}$　　② 折$\overline{JB}$並對折$\overline{JB}$得中點G

③ 將$\overline{AB}$邊折向$\overline{JB}$邊,則得$\overline{MB}=\overline{GB}$

步驟二（如圖 6.2）

① 將長方形$ABFE$對折得折痕$\overline{ON}$,折$\overline{MN}$並過A折與$\overline{MN}$平行的折痕$\overline{AP}$

② 過P折與$\overline{BC}$垂直的折痕$\overline{PS}$,並將$\overline{BP}$折向$\overline{PS}$得Q

③ 過Q折與$\overline{AB}$垂直的折痕$\overline{QR}$交$\overline{AB}$於R,則正方形$PQRB$即為所求

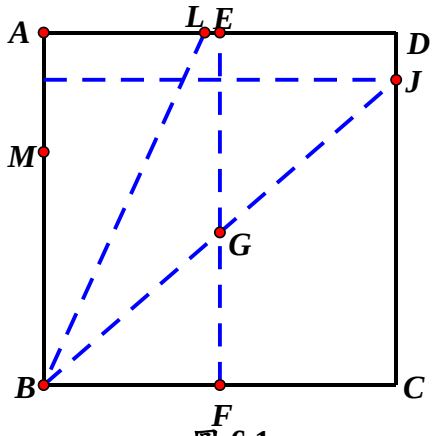


圖 6.1

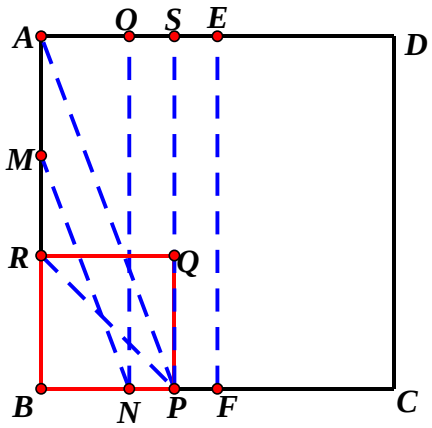


圖 6.2

［証明］：（如圖 6.1&圖 6.2）

①$\because \overline{JC}=\frac{\sqrt{3}}{2},\overline{BC}=1,\therefore \overline{JB}=\frac{\sqrt{7}}{2}$,且$\overline{MB}=\overline{GB}=\frac{1}{2}\overline{JB}=\frac{\sqrt{7}}{4}$

②$\because \overline{AP}\,//\,\overline{MN}\ \therefore \Delta BMN\sim\Delta BAP,\frac{\overline{BM}}{\overline{BA}}=\frac{\overline{BN}}{\overline{BP}}$,故$\frac{\frac{\sqrt{7}}{4}}{1}=\frac{\frac{1}{4}}{\overline{BP}}$;即$\overline{BP}=\frac{1}{\sqrt{7}}$

$\therefore$ 正方形$PQRB=\overline{BP}^2=\frac{1}{7}$

至此, 我們雖然可以逐步摺得$\frac{1}{N}$平方單位的正方形($2\leqq N\leqq 9$), 但它畢竟不是涵蓋了所有的正方形, 而且每一種正方形也往往有各種不同的摺法呀！因此, 我們重新審視前述$\frac{1}{N}$平方單位正方形($2\leqq N\leqq 9$)的摺法, 以期找出「一般化」的有系統摺法。結果我們發現: 不論N為何值(但$N\neq 1$), 只要能找得邊長為$\frac{1}{\sqrt{N}}$時, 即能摺得$\frac{1}{N}$平方單位正方形; 然因$\frac{1}{N}$平方單位正方形的面積小於1,因此$\frac{1}{\sqrt{N}}<1$;又因為$\sqrt{N}=\sqrt{a^2+b^2}$,所以我們可以直接摺出我們所需的$\sqrt{N}$,例如:$\sqrt{7}=\sqrt{2^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{2^2+\left(\sqrt{(\sqrt{2})^2+1^2}\right)^2}$,但因$\sqrt{7}>1$(邊長), 因而無法在邊長為1單位的正方形紙張上摺出！

所以我們可以利用$2^1\leq\sqrt{7}\leq 2^2$的觀念,先摺出$\frac{\sqrt{7}}{2^2}=\frac{\sqrt{7}}{4}<1$的線段,再利用『三角形相似,對應邊成比例』的摺法(例如:前述$\frac{1}{7}$平方單位正方形摺法)摺出$\frac{1}{\sqrt{7}}$的線段。

如此一來,我們就可得到$\frac{1}{N}$正方形面積一般化的摺法。

【小結】：經過了實際操作及和同學們討論之後，我們發覺到折紙是有規律可循，且找到$\frac{1}{N}$的摺法（$N\geq 7$，N為奇數）如下：

一. 先判斷N屬於何種類型？

1. 若N除以 4 餘 3，屬於類型一（簡稱$\frac{\sqrt{3}}{2}$型）

2. 若N除以 4 餘 1，屬於類型二（簡稱$\frac{\sqrt{5}}{2}$型）

二. 再判斷 N 的範圍並帶入右式中 $\sqrt{\left(\frac{1}{2^m}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{N-4}}{2^{m+1}}\right)^2}$ ，其中 $8m+1\le N<8m+8$ ；$m=0,1,2,3\cdots$

1. $m=0$ 時 $\frac{1}{5}\Rightarrow\sqrt{1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$ ， $\frac{1}{7}\Rightarrow\sqrt{1^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{7}}{2}$

2. $m=1$ 時

$$\frac{1}{9}\Rightarrow\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{5}}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{9}}{4}\ ,\ \frac{1}{11}\Rightarrow\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{11}}{4}$$

$$\frac{1}{13}\Rightarrow\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{9}}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{13}}{4}\ ,\ \frac{1}{15}\Rightarrow\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{11}}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{4}$$

3. $m=2$ 時

$$\frac{1}{17}\Rightarrow\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{13}}{8}\right)^2}=\frac{\sqrt{17}}{8}\ ,\ \frac{1}{19}\Rightarrow\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{15}}{8}\right)^2}=\frac{\sqrt{19}}{8}$$

$$\frac{1}{21}\Rightarrow\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{17}}{8}\right)^2}=\frac{\sqrt{21}}{8}\ ,\ \frac{1}{23}\Rightarrow\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{19}}{8}\right)^2}=\frac{\sqrt{23}}{8}$$

4. $m=3$ 時（以此類推）

⋮

⋮

三. 摺出 $\sqrt{\left(\frac{1}{2^m}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{N-4}}{2^{m+1}}\right)^2}$ 的線段, 利用三角形的相似性質摺出正方形邊長 $\frac{1}{\sqrt{N}}$,

再利用摺紙公理 5 摺出面積 $\frac{1}{N}$ 的正方形

例如（1）：折出面積為『$\frac{1}{11}$』的正方形（其中 $n=11$，而且 11 除以 4 餘 3）

折紙步驟：

①先折出 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 的長度，找出另一股 1，利用勾股定理得斜邊 $\frac{\sqrt{7}}{2}$

②再由 $\frac{\sqrt{7}}{4}$ 配合另一股 $\frac{1}{2}$ ，利用勾股定理得斜邊 $\frac{\sqrt{11}}{4}$ ，將之折至邊上

③最後利用三角形的相似性質得正方形邊長 $\frac{1}{\sqrt{11}}$

【註】：$\because\frac{\sqrt{7}}{2}>1$,而且正方形邊長為1,因此取 $\frac{\sqrt{7}}{4}$ 為一股之長

例如（2）：折出面積為『$\frac{1}{13}$』的正方形（其中 $n=13$，而且 13 除以 4 餘 1）

折紙步驟：

①先找出 $\frac{1}{2}$ 的長度，找出另一股 1，利用勾股定理得斜邊 $\frac{\sqrt{5}}{2}$

②由 $\frac{\sqrt{5}}{4}$ 配合另一股 $\frac{1}{2}$，利用勾股定理得斜邊 $\frac{\sqrt{9}}{4}$，並將之折至邊上，再由 $\frac{\sqrt{9}}{4}$ 配合另一股 $\frac{1}{2}$，利用勾股定理得斜邊 $\frac{\sqrt{13}}{4}$，並將之折至邊上

③最後利用三角形的相似性質得正方形邊長 $\frac{1}{\sqrt{13}}$

【註】：$\because \frac{\sqrt{5}}{2} > 1$,而且正方形邊長為1,因此取 $\frac{\sqrt{5}}{4}$ 為一股之長

【第二部分】:摺出 $\frac{K}{N}$ 平方單位的正方形（其中 $K < N$）

有了折出 $\frac{1}{N}$ 的經驗，我們不難發現要折出 $\frac{K}{N}$ 並不是一件困難的事，只要利用三角形的相似性質就可以迎刃而解了！

（1） 折出面積為『$\frac{2}{3}$』的正方形。(如圖7)

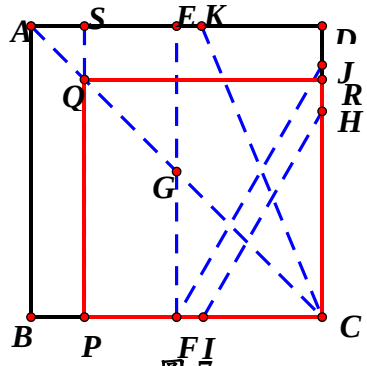


圖 7

［方法］：

① 先參照 [第一部分] 折法(2)中的①與②, 折出 $\overline{JC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

②將正方形對折, 得折痕 $\overline{EF}$,再將B折向D ,得折痕 $\overline{AC}$, 相交於G ③ 將$\overline{GC}$折向$\overline{CD}$,得G點之對稱點H

④折 $\overline{JF}$,並過H折與$\overline{JF}$平行的折痕$\overline{HI}$,以I為折點, 將C折至$\overline{BC}$上得P

⑤ 過P折與$\overline{BC}$垂直的折痕$\overline{PS}$交$\overline{AD}$於S

⑥ 將$\overline{PC}$折向$\overline{PS}$得C點之對應點Q,過Q折與$\overline{CD}$垂直的折痕交$\overline{CD}$於R, 則正方形$PQRC$即為所求

［証明］:(如圖 7)

①已知$\overline{JC} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \overline{HC} = \frac{1}{2}\overline{AC} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

②$\because \overline{HI} // \overline{JF}, \therefore \Delta HIC \sim \Delta JFC, \frac{\overline{JC}}{\overline{HC}} = \frac{\overline{FC}}{\overline{IC}}, \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\overline{IC}}$,則$\overline{IC} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}$

③ $\overline{PC} = 2\overline{IC} = \sqrt{\frac{2}{3}}$,則正方形$PQRC = \overline{PC}^2 = \frac{2}{3}$

（2）折出面積為『$\frac{3}{5}$』的正方形。(如圖8)

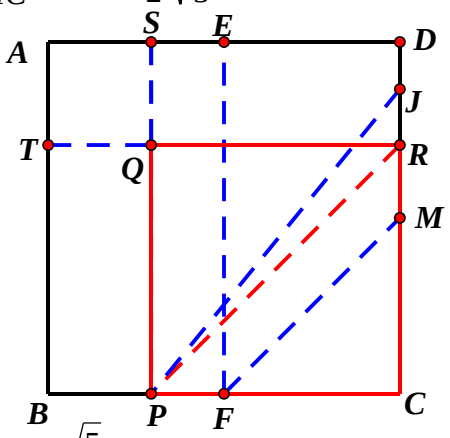


圖 8

［方法］：

① 先參照 [第一部分] 折法(2)中的①與②, 折出 $\overline{JC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

② 參照 [第一部分] 折法(5)中的①②與③, 折出$\overline{MC} = \frac{\sqrt{5}}{4}$

③ 折$\overline{MF}$,並過J折與$\overline{MF}$平行的折痕$\overline{JP}$ ④ 過P折與$\overline{BC}$垂直的折痕$\overline{PS}$交$\overline{AD}$於S

⑤ 將$\overline{PC}$折向$\overline{PS}$得C點之對應點Q,過Q折與$\overline{CD}$垂直的折痕交$\overline{CD}$於R,

則正方形$PQRC$即為所求

［証明］：（如圖 8）

①已知$\overline{JC}=\dfrac{\sqrt{3}}{2},\overline{MC}=\dfrac{\sqrt{5}}{4}$

②$\because \overline{JP}\,//\,\overline{MF},\therefore \Delta MFC\sim\Delta JPC,\dfrac{\overline{MC}}{\overline{JC}}=\dfrac{\overline{FC}}{\overline{PC}},\dfrac{\frac{\sqrt{5}}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{\frac{1}{2}}{\overline{PC}}$,則$\overline{PC}=\sqrt{\dfrac{3}{5}}$

則正方形$PQRC=\overline{PC}^2=\dfrac{3}{5}$

【小結】：$\dfrac{k}{N}(k<N)$正方形面積摺法的一般化:

（1）先利用$\dfrac{1}{N}$的折法,摺出$\sqrt{\left(\dfrac{1}{2^m}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{N-4}}{2^{m+1}}\right)^2}$的線段

（2）利用三角形的相似性質折出$\sqrt{\dfrac{k}{N}}$的邊長,即可摺出$\dfrac{k}{N}$的正方形面積

【第三部分】：摺出$\dfrac{1}{\sqrt[2^p]{N}}$與$\dfrac{k}{\sqrt[2^p]{N}}$ (k,p為正整數,$k<\sqrt[2^p]{N}$)平方單位的正方形

（1） 摺出面積為『$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$』的正方形

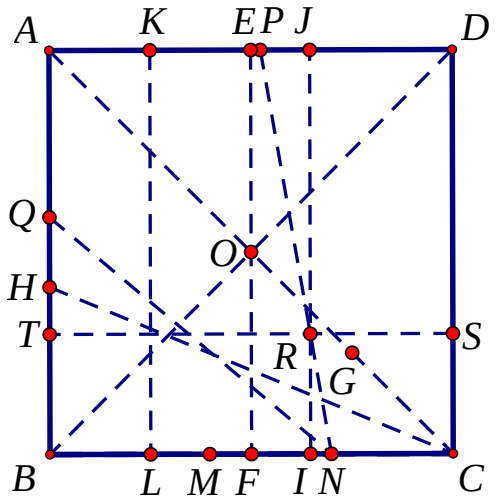


圖 9.1

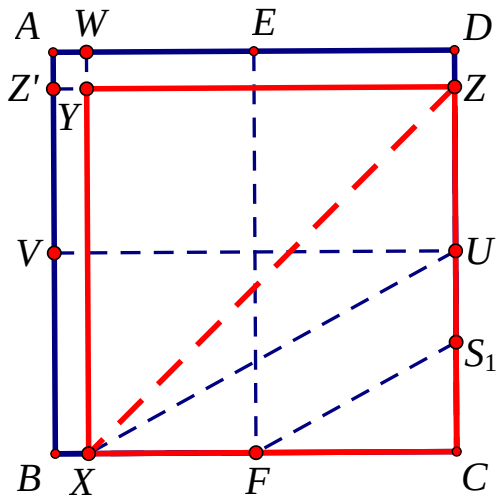


圖 9.2

［方法］：步驟一（ ）

① 將C摺至A得摺痕$\overline{BD}$,再將B摺至D得摺痕$\overline{AC}$,兩摺痕相交於O

② 將C摺至O得中點G，將$\overline{BC}$摺向$\overline{AC}$得I之對應點G與$\overline{IC}=\overline{IG}$

③ 將正方形對摺再對摺得摺痕$\overline{EF}$及$\overline{KL}$,並過I摺與$\overline{BC}$垂直的摺痕$\overline{JI}$

④ 將$\overline{AB}$摺向$\overline{JI}$得$\overline{IM}=\overline{BL}$,再將$C$摺向$M$得$\overline{MC}$之中點$N$

⑤ 將M摺至$\overline{JI}$上之R,並使$\overline{NM}=\overline{NR}$ ⑥ 過R摺與$\overline{JI}$垂直的摺痕$\overline{TS}$

步驟二（如圖 9.2）

① 將$\overline{BC}$摺向$\overline{AD}$得$\overline{CD}$之中點U,摺$\overline{SF}$並過U摺與$\overline{SF}$平行的摺痕$\overline{UX}$

② 過X摺與$\overline{BC}$垂直的摺痕$\overline{XW}$,並將$\overline{CX}$摺向$\overline{XW}$得Y

③ 過Y摺與$\overline{XW}$垂直的摺痕$\overline{ZZ'}$交$\overline{CD}$於Z,則正方形$CXYZ$即為所求

［証明］：（如圖9.1&圖9.2）

①$\because \overline{MN}=\overline{RN}=\overline{CN},\therefore \overline{MR}\perp\overline{CR}$

②$\because \Delta MIR\sim\Delta RIC,\therefore \dfrac{\overline{MI}}{\overline{IR}}=\dfrac{\overline{RI}}{\overline{IC}}$,故$\overline{RI}^2=\overline{MI}\times\overline{IC}=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{\sqrt{2}}{4}$,則$\overline{RI}=\dfrac{\sqrt[4]{2}}{4}$

③$\because \overline{UX}\,//\,\overline{SF}\ \therefore \Delta CSF\sim\Delta CUX,\dfrac{\overline{CS}}{\overline{CF}}=\dfrac{\overline{CU}}{\overline{CX}}$,故$\dfrac{\frac{\sqrt[4]{2}}{4}}{\frac{1}{2}}=\dfrac{\frac{1}{2}}{\overline{CX}}$;即$\overline{CX}=\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$

$\therefore$ 正方形$CXYZ=\overline{CX}^2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

（2） 摺出面積為『$\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$』的正方形

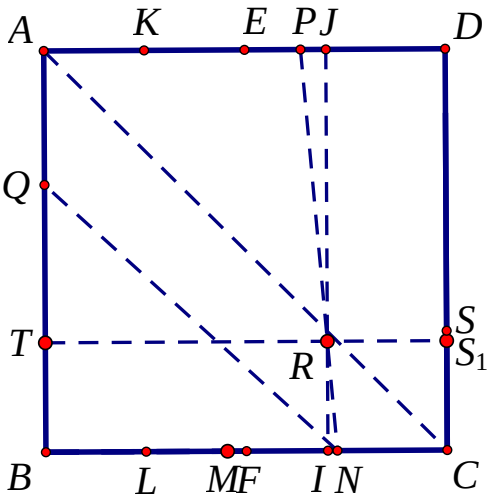


圖 10.1

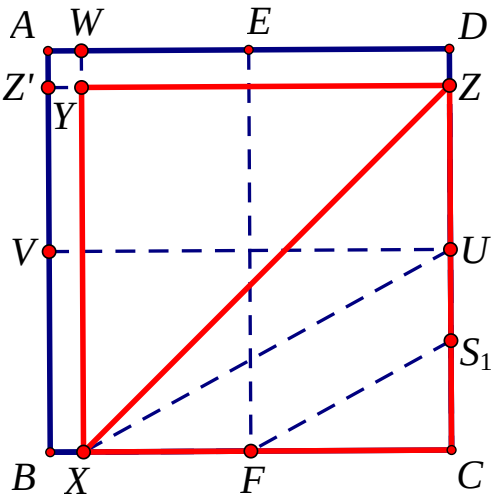


圖 10.2

［方法］：步驟一（如

① 先參照 [第三部分] 摺法(1)中的步驟一及步驟二, 摺出$\overline{SC}=\dfrac{\sqrt[4]{2}}{4}$

② 將C摺至O得中點G，將$\overline{BC}$摺向$\overline{AC}$得I之對應點G與$\overline{IC}=\overline{IG}$

③ 將正方形對摺再對摺得摺痕$\overline{EF}$及$\overline{KL}$, 並過I摺與$\overline{BC}$垂直的摺痕$\overline{JI}$

④ 將$\overline{AB}$摺向$\overline{JI}$得$\overline{IM}$等於$\overline{BL}$, 再將C摺向M得$\overline{MC}$之中點N

⑤ 將M摺至$\overline{JI}$上之R, 並使$\overline{NM}=\overline{NR}$ ⑥ 過R摺與$\overline{JI}$垂直的摺痕$\overline{TS_1}$

步驟二（如圖 10.2）

① 將$\overline{BC}$摺向$\overline{AD}$得$\overline{CD}$之中點U, 摺$\overline{S_1F}$並過U摺與$\overline{S_1F}$平行的摺痕$\overline{UX}$

② 過X摺與$\overline{BC}$垂直的摺痕$\overline{XW}$, 並將$\overline{CX}$摺向$\overline{XW}$得Y

③ 過Y摺與$\overline{XW}$垂直的摺痕$\overline{ZZ'}$交$\overline{CD}$於Z, 則正方形$CXYZ$即為所求

［証明］：（如圖10.1&圖10.2）

①$\because \overline{MN}=\overline{RN}=\overline{CN},\therefore \overline{MR}\perp\overline{CR}$

②$\because \Delta MIR\sim\Delta RIC,\therefore \dfrac{\overline{MI}}{\overline{IR}}=\dfrac{\overline{RI}}{\overline{IC}}$,故$\overline{RI}^2=\overline{MI}\times\overline{IC}=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{\sqrt[4]{2}}{4}$,則$\overline{RI}=\dfrac{\sqrt[8]{2}}{4}$

③$\because \overline{UX}\,//\,\overline{S_1F}\ \therefore \Delta CS_1F\sim\Delta CUX,\dfrac{\overline{CS_1}}{\overline{CF}}=\dfrac{\overline{CU}}{\overline{CX}}$,故$\dfrac{\frac{\sqrt[8]{2}}{4}}{\frac{1}{2}}=\dfrac{\frac{1}{2}}{\overline{CX}}$;即$\overline{CX}=\dfrac{1}{\sqrt[8]{2}}$

$\therefore$ 正方形$CXYZ=\overline{CX}^2=\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$

【小結】：仿照上述的方法，我們可得$\dfrac{1}{\sqrt[2^p]{N}}$(p為正整數)正方形面積的一般化摺法

【推廣】：①仿照上述的方法，先得$\dfrac{1}{\sqrt[2^p]{N}}$(p為正整數)

②利用三角形的相似性質折出$\sqrt{\dfrac{k}{\sqrt[2^p]{N}}}$($p$為正整數)的邊長，即可摺出$\dfrac{k}{\sqrt[2^p]{N}}$的正方形面積

【第四部分】：折出各種正 N 邊形

（1） 折出正三角形（如圖11）(見[附件三])

（2） 折出正五邊形（如圖12）(見[附件三])

（3） 折出正六邊形（如圖13）(見[附件三])

（4） 折出正七邊形（如圖14.1）

［方法］：①折出$\overline{MN}\,//\,\overline{BC}$，在$\overline{MN}$上任取兩點連成$\overline{EF}$

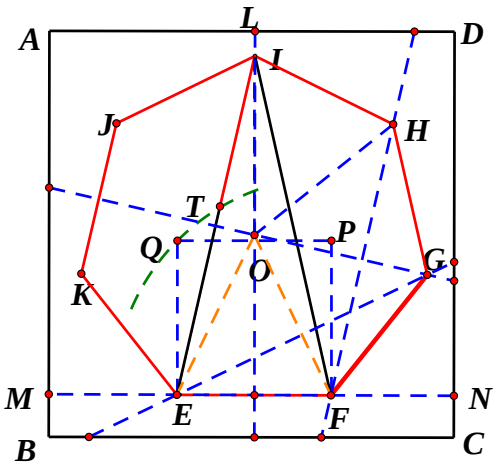
②另取與正方形$ABCD$同大小紙張，仍折出$\overline{M'N'}=\overline{MN}$，取$\overline{E'F'}=\overline{EF}$

③以$\overline{EF}$為一邊，折出正方形$EFPQ$；以F為圓心，$\overline{FQ}$為半徑，畫一圓

④折出$\overline{EF}$的中垂線L，並將$\overleftrightarrow{M'N'}$靠上$E$點，移動$\overleftrightarrow{M'N'}$，使得$E'$點交圓$F$於$T$，且$F'$點交$L$於$I$，折出$\overline{IE}$中垂線交$L$於$O$；及折出$\overline{OE}$，$\overline{OF}$

⑤以$\overline{OF}$為對稱軸，折出$\overline{FG}=\overline{EF}$

⑥仿⑤折出$\overline{IF}$，及折出$\overline{GH}=\overline{IJ}=\overline{KE}=\overline{EF}$，則正七邊形$EFGHIJK$即為所求



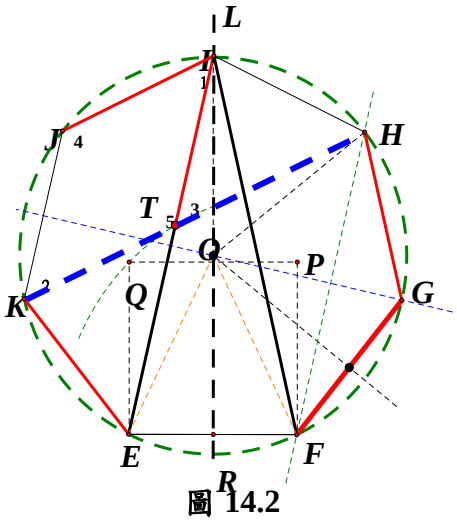


圖 14.2

[証明]：(如圖14.2) **圖 14.1**

1.$\because O$為ΔIEF之外心，又$\because \overline{OE}=\overline{OF}=\overline{OG}=\overline{OH}=\overline{OI}=\overline{OJ}=\overline{OK}$

$\therefore$以O為圓心，$\overline{OE}$為半徑，作一外接圓，必過E、F、G、H、I、J、K

故弧$IJ=$弧$KE\Rightarrow\overline{KJ}\,//\,\overline{IE}$ (平行弦截等弧的判別性質)，即$\angle 3=\angle 2$

2.連$\overline{KH}$，$\because \overline{IR}$為直徑，且弧$ER=$弧FR $\therefore$ 弧$IH=$弧$KJ\Rightarrow\overline{IJ}\,//\,\overline{KH}$，故$\angle 3=\angle 1$，$\angle 2+\angle 4=180°$；$\therefore \angle 1=\angle 2$

3.$\because \angle 3+\angle 5=180°$，且$\angle 2+\angle 4=180°$，$\angle 3=\angle 2$，$\therefore \angle 4=\angle 5$；故$IJKT$為一平行四邊形，且$K$、$T$、$H$三點共線

又$\because \overline{IJ}=\overline{IT}=\overline{EF}$ $\therefore IJKT$為一菱形,故$\overline{IK}=\overline{IJ}=\overline{IH}$;即$\overline{EF}=\overline{FG}=\overline{GH}=\overline{HI}=\overline{IJ}$
$=\overline{JK}=\overline{EK}$; 且$\angle KEF=\angle EFG=\angle FGH=\angle GHI=\angle HIJ=\angle IJK=\angle JKE$
即$EFGHIJK$為一正七邊形

[註]:將正七邊形摺法與正七邊形尺規作圖不可能的作圖(見附件四)做比較:

（5） 折出正八邊形（如圖15）(見[附件三])

（6） 折出正九邊形（如圖16.1＆16.2）[証明]:省略

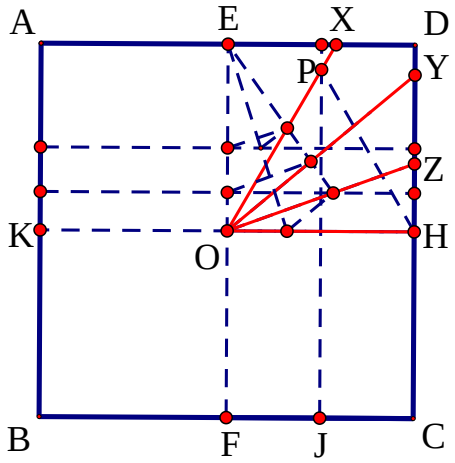


圖 16.1

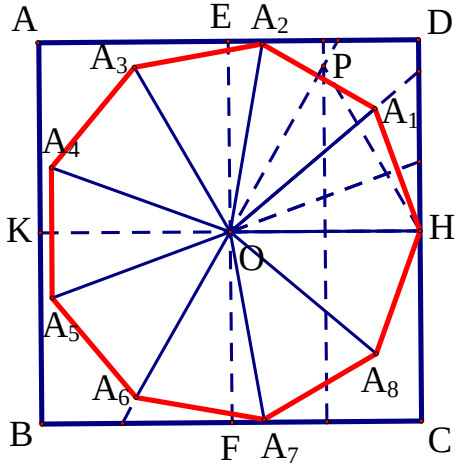


圖 16.2

[方法]:①將正方形對折再對折得交點O

②在正方形$EOHD$中參照(1)折正三角形POH

③參照預備定理(一)將$\angle POH$折成三等分,則$\angle XOY=\angle YOZ=\angle ZOH=20°$

④以$\overline{OZ}$為對稱軸,將$\overline{OH}$折向$\overline{OY}$得對稱點A_1,再以$\overline{OZ}$為對稱軸,折得對稱點A_2,
則$\angle HOA_1=40°$,運用相同的折法可得對稱點A_3,A_4,A_5,A_6,A_7及A_8

⑤折$\overline{HA_1},\overline{A_1A_2},\overline{A_2A_3},\overline{A_3A_4},\overline{A_4A_5},\overline{A_5A_6},\overline{A_6A_7},\overline{A_7A_8}$及$\overline{A_8H}$,
則正九邊形即為所求

（7） 折出正十七邊形:**(以我們國中所學,嘗試的証明)**

[想法]:

1.要作正十七邊形,無異於只要把一個圓周十七等分,再將相鄰兩點兩兩連線段,利用「等弧對等弦」的觀念,即可求得正十七邊形

2.為使計算簡單起見,我們不妨就以單位圓(即半徑為1)來研究。

首先我們假設$A_k\,(k=0,1,2,\cdots,16)$依次是單位圓圓周上的17個等分點(如圖17.1),作直徑$\overline{AA_0}$,並把點A與其它16個等分點分別連以線段;令$\overline{AA_k}=a_k$,則顯然地

$$a_0=2;\quad a_k=a_{17-k}\quad (0<k\le 16)\quad \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

由此得知:除了a_0之外,其餘的a_k,只要能夠求得其中的任何一個,那麼問題就可迎刃而解。這也就暗示我們欲解決此一問題,非得研究所有a_k之間的關係。為此我們首先証明了此一定理:

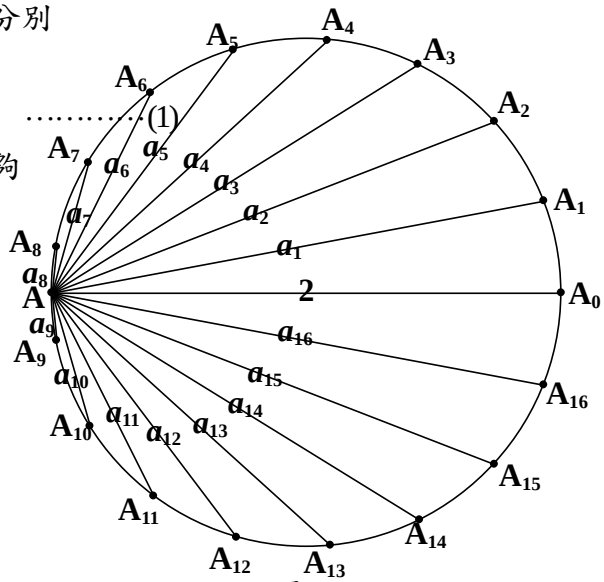


圖 17.1

「設$\overline{AA_0}$是單位圓的直徑,L是圓上的任意一點,若在圓上取三個等弧:

弧$LM=$弧$LN=$弧A_0L',並令弦$\overline{AL}=l,\overline{AL'}=l',\overline{AM}=m,\overline{AN}=n$,則當

(i) M,N分別在$\overline{AL}$的兩側時(如圖17.1),有$l\times l'=m+n$

(ii) M,N分別在$\overline{AL}$的同一側時(如圖17.2),有$l\times l'=|m-n|$

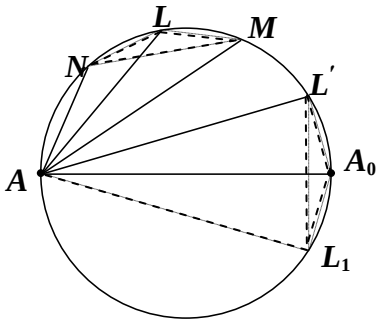


圖 17.2

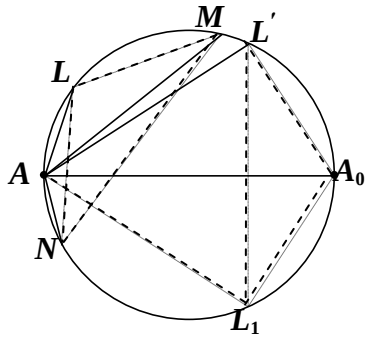


圖 17.3

[証明]:

(i).1.取以$\overline{AA_0}$為對稱軸的L'的對稱點L_1,連$\overline{AL_1},\overline{A_0L_1},\overline{L'L_1},\overline{A_0L'},\overline{LM},\overline{LN},\overline{MN}$,

設$\overline{AL_1}=\overline{AL'}=l',\overline{A_0L_1}=\overline{A_0L'}=\overline{LM}=\overline{LN}=u,\overline{MN}=\overline{L_1L'}=v$,

2.依據托勒密定理:「圓內接凸四邊形兩雙對邊乘積的和等於兩對角線的乘積」

可得:$\begin{cases}\overline{AL}\cdot\overline{MN}=\overline{NL}\cdot\overline{AM}+\overline{AN}\cdot\overline{LM}\Rightarrow l\times v=mu+nu=(m+n)u\\ \overline{AA_0}\cdot\overline{L'L_1}=\overline{AL'}\cdot\overline{A_0L_1}+\overline{AL_1}\cdot\overline{A_0L'}\Rightarrow 2\cdot v=l'u+l'u=2l'u\end{cases}$

將上兩式相乘,可得:$l\times v\times 2l'u=(m+n)u\times 2v\Rightarrow l\times l'=m+n$

(ii).1.取以$\overline{AA_0}$為對稱軸的L'的對稱點L_1,連$\overline{AL_1},\overline{A_0L_1},\overline{L'L_1},\overline{A_0L'},\overline{LM},\overline{LN},\overline{MN}$,

設$\overline{AL_1}=\overline{AL'}=l',\overline{A_0L_1}=\overline{A_0L'}=\overline{LM}=\overline{LN}=u,\overline{MN}=\overline{L_1L'}=v$,

2.依據托勒密定理:「圓內接凸四邊形兩雙對邊乘積的和等於兩對角線的乘積」

可得:$\begin{cases}\overline{AM}\cdot\overline{LN}=\overline{AL}\cdot\overline{MN}+\overline{AN}\cdot\overline{LM}\Rightarrow m\times u=lv+nu\Rightarrow lv=|m-n|u\\ \overline{AA_0}\cdot\overline{L'L_1}=\overline{AL'}\cdot\overline{A_0L_1}+\overline{AL_1}\cdot\overline{A_0L'}\Rightarrow 2\cdot v=l'u+l'u=2l'u\end{cases}$

將上兩式相乘,可得:$l\times v\times 2l'u=|m-n|u\times 2v\Rightarrow l\times l'=|m-n|$

我們將上述証得的定理用於(圖 A),並配合(1)式, 也因為弧$A_iA_{i-j}=$弧$A_iA_{i+j}=$弧A_0A_j的緣故,我們可以導出下列的關係式:

[1] $a_i\times a_j=a_{i-j}+a_{i+j}\quad(i\ge j,0\le i+j\le 8)$ ……(2)

[2] $a_i\times a_j=a_{i-j}-a_{i+j}=a_{i-j}-a_{17-(i+j)}\quad(8\ge i\ge j,9\le i+j\le 16)$ ……(3)

而當$i=j$時, 我們可將(2)式、(3)式分別寫成

[3] $a_i^2=a_0+a_{2i}=2+a_{2i}\quad(0\le i\le 4)$ ……(4)

[4] $a_i^2=a_0-a_{2i}=2-a_{2i}=2-a_{17-2i}\quad(0\le i\le 8)$ ……(5)

而可証得

[5] $a_1-a_2+a_3-a_4+a_5-a_6+a_7-a_8=1$ ……(6)

［証明］:

設$s=a_1-a_2+a_3-a_4+a_5-a_6+a_7-a_8$

則$sa_1=a_1^2-a_2a_1+a_3a_1-a_4a_1+a_5a_1-a_6a_1+a_7a_1-a_8a_1$

$=(2+a_2)-(a_1+a_3)+(a_2+a_4)-(a_3+a_5)+(a_4+a_6)-(a_5+a_7)+(a_6+a_8)-(a_7-a_8)$

$=2+a_1-2(a_1-a_2+a_3-a_4+a_5-a_6+a_7-a_8)=2+a_1-2s$

故 $s(2+a_1)=2+a_1$ 即 $s_1=1$

[6] $(a_3+a_5)(a_6-a_7)=1$ ……(7)

［証明］：

$\because (a_3+a_5)(a_6-a_7)=a_6a_3+a_6a_5-a_7a_3-a_7a_5$

$=a_3-a_8+a_1-a_6-a_4+a_7-a_2+a_5$

$=a_1-a_2+a_3-a_4+a_5-a_6+a_7-a_8=1$

[7] $(a_2+a_8)(a_1-a_4)=1$ ……(8)

［証明］：

$\because (a_2+a_8)(a_1-a_4)=a_2a_1+a_8a_1-a_4a_2-a_8a_4$

$=a_1+a_3+a_7-a_8-a_2-a_6-a_4+a_5=a_1-a_2+a_3-a_4+a_5-a_6+a_7-a_8=1$

利用以上(1)~(8)的關係式, 我們可以解得a_2和a_8的值；設令

$$\left.\begin{array}{l} a_2+a_8=\alpha \\ a_8\times a_2=a_6-a_7=\beta \end{array}\right\} \quad \cdots\cdots(9)$$

則a_2和a_8是方程式$x^2-(a_2+a_8)x+a_2a_8=0$的兩根,即為$x^2-\alpha x+\beta=0$的兩根;再令

$$\left.\begin{array}{l} a_4-a_1=\alpha' \\ -a_3-a_5=\beta' \end{array}\right\} \quad \cdots\cdots(10)$$

再代入(8) (7)兩個關係式, 我們可得: $\alpha\times(-\alpha')=1$, $(-\beta')\times\beta=1$

故 $\alpha\times\alpha'=\beta\times\beta'=-1$ ……(11) 再設

$$\left.\begin{array}{l} \alpha+\alpha'=a_2+a_8+a_4-a_1=\gamma \\ \beta+\beta'=a_6-a_7-a_3-a_5=\delta \end{array}\right\} \quad \cdots\cdots(12)$$

於是

α、α'和β、β'便分別視為是 $x^2-\gamma x-1=0$ 和 $x^2-\delta x-1=0$ 的根,由(9)式可知α和β都是正數,所以

$$\left.\begin{array}{ll} \alpha=\dfrac{\gamma\pm\sqrt{\gamma^2+4}}{2}=\dfrac{\gamma}{2}+\sqrt{(\dfrac{\gamma}{2})^2+1} & \text{(取正值)} \\ \beta=\dfrac{\delta\pm\sqrt{\delta^2+4}}{2}=\dfrac{\delta}{2}+\sqrt{(\dfrac{\delta}{2})^2+1} & \text{(取正值)} \end{array}\right\} \quad \cdots\cdots(13)$$

接著我們再求出γ與δ的值, 由(12)式得

$\delta^2=(\beta+\beta')^2=\beta^2+\beta'^2+2\beta\beta'=(a_6-a_7)^2+(-a_3-a_5)^2-2$

$=a_6^2-2a_7a_6+a_7^2+a_3^2-2a_5a_3+a_5^2-2$ (由(2)(3)(4)(5)式 得)

$=(2-a_5)-2(a_1-a_4)+(2-a_3)-2(a_1+a_6)+2(a_2+a_8)+(2-a_7)-2$

$=6-2(a_1-a_2+a_3-a_4+a_5-a_6+a_7-a_8)-(a_6-a_7-a_3-a_5)$ (由((6)(12)式 得)

$=6-2-\delta$

故$\delta^2+\delta-4=0$ 由(12)式知δ是負值,所以

$\delta=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{17}}{2}$ 由(6)(12)式可得$\gamma+\delta=-1$,所以

$\gamma=-1-\delta=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{17}}{2}$ 再將γ、δ值代入(13)式,求α與β

$$\begin{cases} \alpha=\dfrac{-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{4} \\ \beta=\dfrac{-1+\sqrt{17}+\sqrt{34+2\sqrt{17}}}{4} \end{cases}$$

再將γ、δ值代入(9)式,求a_2與a_8

$$\begin{cases} a_8 = \dfrac{-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{8} - \dfrac{\sqrt{\left(\dfrac{-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{4}\right)^2 + (1-\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}})}}{2} \\ a_2 = \dfrac{-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{8} + \dfrac{\sqrt{\left(\dfrac{-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{4}\right)^2 + (1-\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}})}}{2} \end{cases}$$

在推導証明完成了正十七邊形的可行性後, 我們有了以下的作圖（尺規作圖，如圖 17.4）（見[附件五]）

[方法]：正十七邊形折紙的方法如下（如圖 17.5）

① 將$\overline{B'C'}$摺向$\overline{A'D'}$得摺痕$\overline{T_1T_2}$

② 將$\overline{A'B'}$摺向$\overline{C'D'}$得摺痕$\overline{S_1S_2}$，將$\overline{A'B'}$摺向$\overline{S_1S_2}$得摺痕$\overline{S_3S_4}$, 將$\overline{S_3S_4}$摺向$\overline{S_1S_2}$得摺痕$\overline{S_5S_6}$交$\overline{T_1T_2}$於A

③ 將$\overline{C'D'}$摺向$\overline{S_1S_2}$得摺痕$\overline{S_7S_8}$, 將$\overline{C'D'}$摺向$\overline{S_7S_8}$得摺痕$\overline{S_9S_{10}}$交$\overline{T_1T_2}$於A_0

④ 將A摺向A_0得摺痕$\overline{R_1R_2}$交$\overline{T_1T_2}$於O, 並以O為圓心, $\overline{OA}$為半徑畫一個單位圓

⑤ 將$\overline{S_3S_4}$摺向$\overline{S_5S_6}$得摺痕$\overline{S_{11}S_{12}}$交$\overline{T_1T_2}$於B

⑥ 將$\overline{A'D'}$摺向$\overline{T_1T_2}$得摺痕$\overline{T_3T_4}$交$\overline{S_5S_6}$於C

⑦ 摺$\overline{BC}$得摺痕$\overline{K_1K_2}$，將$\overline{BC}$摺向$\overline{BT_2}$得對稱點D, 再將$\overline{BC}$摺向$\overline{BT_1}$得對稱點E

⑧ 將$\overline{DC}$摺向$\overline{DT_2}$得對稱點F, 再將$\overline{EC}$摺向$\overline{ET_2}$得對稱點G

⑨ 過F摺與$\overline{T_1T_2}$垂直的摺痕$\overline{K_3K_4}$

⑩ 將$\overline{AG}$摺向$\overline{AS_5}$得對稱點H', 過H'摺與$\overline{S_5S_6}$垂直的摺痕$\overline{T_5T_6}$交$\overline{K_3K_4}$於H

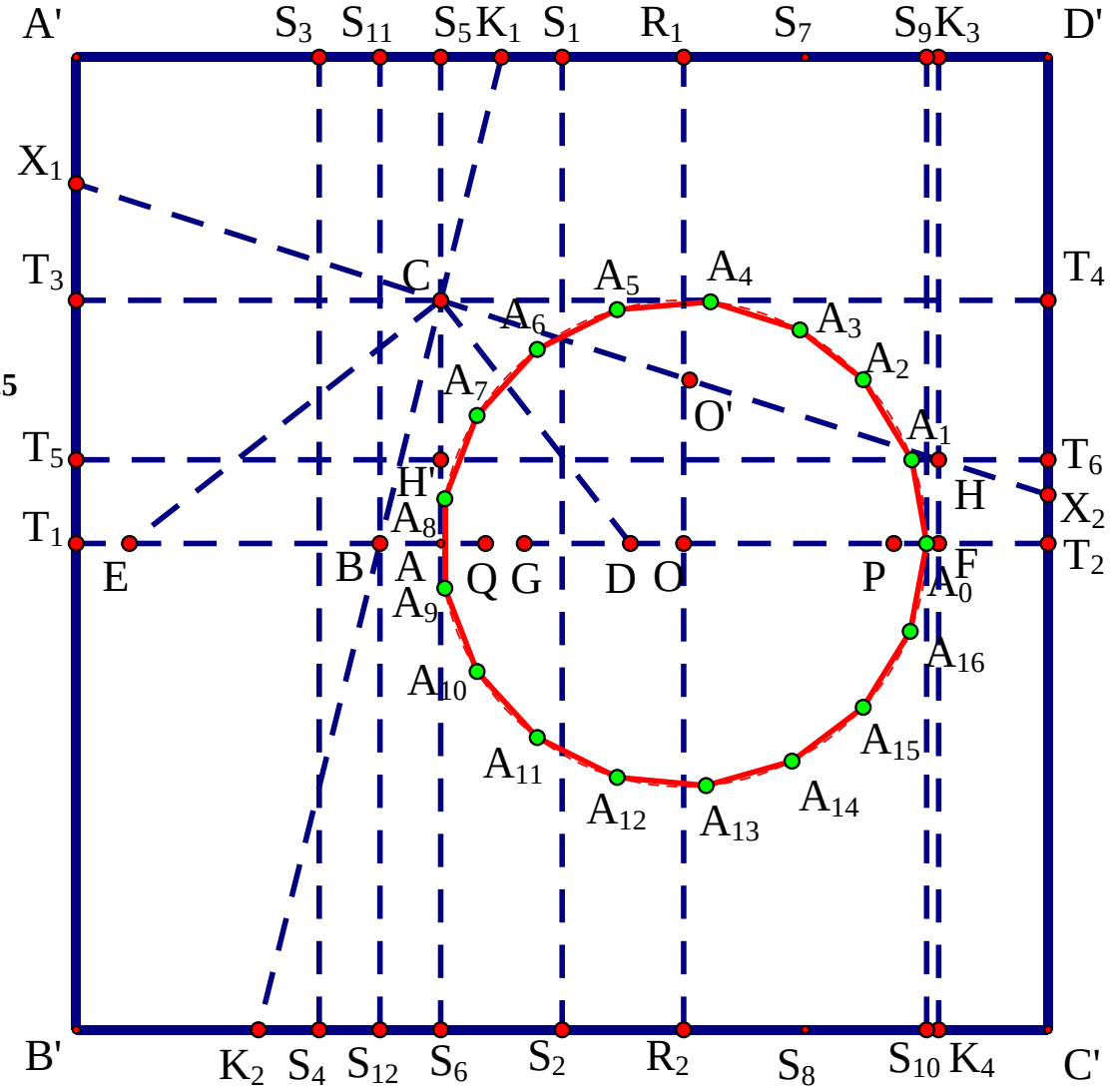
⑪ 摺$\overline{CH}$得摺痕$\overline{X_1X_2}$, H摺向C得$\overline{CH}$中點O', 以O'為旋轉點將$\overline{HO'}$摺向$\overline{T_1T_2}$得P, Q

⑫ 以A為基準點, 將$\overline{AP}$摺向單位圓上得A_2及A_{15}; 將$\overline{AQ}$摺向單位圓上得A_8及A_9

⑬ 以A_8為摺點, 將A_9依順時針方向摺向單位圓上得摺點A_7, 依照同樣摺法可得摺點$A_6, A_5, A_4, A_3, A_2, A_1, A_0, A_{16}, A_{15}, A_{14}, A_{13}, A_{12}, A_{11}, A_{10}$

⑭ 摺$\overline{A_8A_9}, \overline{A_9A_{10}}, \overline{A_{10}A_{11}}, \overline{A_{11}A_{12}}, \overline{A_{12}A_{13}}, \overline{A_{13}A_{14}}, \overline{A_{14}A_{15}}, \overline{A_{15}A_{16}}, \overline{A_{16}A_0}, \overline{A_0A_1}, \overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \overline{A_3A_4}, \overline{A_4A_5}, \overline{A_5A_6}, \overline{A_6A_7}$及$\overline{A_7A_8}$, 如此正十七邊形就摺完成了

圖 17.5



根據文獻，邊數小於 100，可以尺規作圖的正多邊形如下：

n 的形狀	使用尺規能畫出的正多邊形的邊數
2^m	4,8,16,32,64
$2^{2^t}+1$	3,5,17
$2^m p_1 p_2 \cdots\cdots p_k$	6,12,24,48,96 10,20,40,80 34,68 15,30,60 51 85

經過了我們的研究，尺規作圖能完成的正多邊形，當然折紙也能完成，例如：利用折紙折出正十七邊形。

然而我們又多了幾項重大的發現，經由預備定理（一）、(二)與摺紙公理 6，可折出正七邊形與正九邊形。當然, 正 18,27,36,45,54,72,81,90, ……, 正 $9t$ 邊形(t 為正整數)與正 7,14,21,28,

42,56,63,84 等正 N 邊形，亦能利用相同的折法折出。因而在邊數小於 100，可以用摺紙方法多折出的正多邊形如下：正 **7,9,14, 18,21,27,36,42,45,54,56,63,72, 81,84,90** 等正 N 邊形。

【第五部分】：利用摺紙方法可解決“幾何三大問題”的探究:

約 2400 多年前在希臘盛傳著下列三個作圖題:

三等分角問題　　求作三等分一已知角

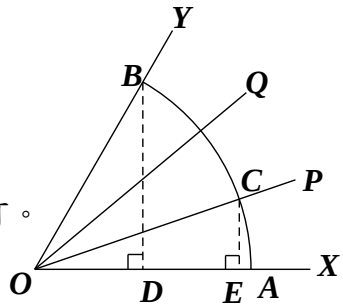
立方倍積問題　　求作一立方體,使其體積 2 倍於一已知立方體的體積

化圓為方問題　　求作一正方形,使其面積等於一已圓的面積

這三個尺規作圖題是著名的古典難題,向被稱為幾何三大問題。當時許多著名的學者,都曾致力於這三個問題的研究,也都無法將此三個問題以尺規作圖的方法解決。

下面我們分別說明此三個問題中的兩個問題為什麼不能用尺規來作圖以及用摺紙來解決此二個問題的方法:

第一、 關於三等分角問題:



設$\angle XOY$為已知角(如圖),$\overline{OP}$、$\overline{OQ}$是其三等分線:

$\angle XOP=\angle POQ=\angle QOY$。

在這兩條三等分線中,只要能求得任何一條,另一條便不成問題。所以研究其中一條例如$\overline{OP}$即可。

令$\angle XOY=\theta$,則$\angle XOP=\dfrac{\theta}{3}$;根據三角恒等式,有

$$Cos\theta=4Cos^3\frac{\theta}{3}-3Cos\frac{\theta}{3}\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots①$$

以O為圓心,單位長為半徑畫弧交射線OX,OY,OP於A,B,C;作$\overline{BD}\perp\overline{OX}$於$D$,$\overline{CE}\perp\overline{OX}$於$E$。

命$\overline{OD}=a,\overline{OE}=x$,則$a=Cos\theta,x=Cos\dfrac{\theta}{3}$,代入上面三角恒等式,移項後得

$$4x^3-3x-a=0\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots②$$

如果能証方程式②的根一般不能用僅用尺規作圖完成,則點 E 不可得,於是射線 OP 亦不能作出。

欲証明此一問題,但擇一個特例來驗証即足;試取$\theta=60°$,則$a=\dfrac{1}{2}$,

此時得到②的一個特例:

$$8x^3-6x-1=0$$

以$x=\dfrac{1}{2}y$代入此方程,可得較簡的形式

$$y^3-3y-1=0\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots③$$

而依據“設最高次項係數為 1 的整係數一元 ***n*** 次方程含有有理根,則此根必是整數且為常數項的因數”的推論,知:

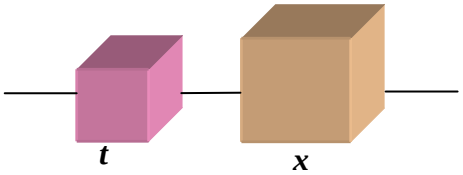
方程式③顯然沒有有理根,因為±1不能滿足它; 又依據“有理係數的三次方程如果沒有有理根,那麼長度等於其根的任何實根線段不能僅憑尺規來作圖”的定理,可知③的任何實根不能作圖完成。即 60° 的角不可能三等分,又三等分 60° 角尚且不可能, 那就遑論三等分任意角了！

比較:

而若使用摺紙的方法, 不論其為銳角、直角或鈍角, 我們皆可將其三等分。而其摺法與証明見預備定理(一)、(二)。

第二、 關於立方倍積問題:

假設已知立方體的棱長為t(如下圖),而所求立方體棱長為x,則依其設定條件應有: $x^3=2t^3$ 的關係;即如求作滿足 $x^3-2t^3=0$ 之方程式中的x線段



令$t=1$,則此方程將變為更簡單的形式

$$x^3-2=0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots①$$

如果方程式①含有有理根的話,則不外乎是±1和±2,但代入方程試驗均不合,可見方程式①必無有理根;又依據“有理係數的三次方程如果沒有有理根,那麼長度等於其根的任何實根線段不能僅憑尺規來作圖”的定理,得知立方倍積問題屬於尺規作圖不能的問題。

比較:

而若使用摺紙的方法,可完成立方倍積問題。其方法如下:

[想法]:(如右圖)

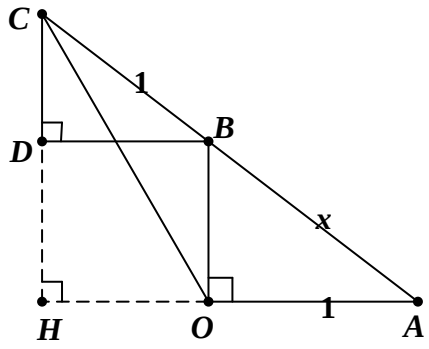
[已知]: $\overline{OA}=\overline{BC}=1, \angle BOC=30°, \angle BOA=90°$, 且$A-B-C$三點共線

[試求]: $\overline{AB}=$?

[解]:1.過C,作$\overrightarrow{CH}\perp\overrightarrow{AO}$;過$B$,作$\overline{BD}\perp\overline{CH}$於$D$,故$\angle OCD=30°$;

$BDHO$為矩形,$\therefore \overline{BD}=\overline{HO}, \overline{BO}=\overline{DH}$

2.設$\overline{AB}=x \Rightarrow \overline{OB}=\sqrt{x^2-1}$



$\because \Delta AOB \sim \Delta BDC, \therefore \dfrac{\overline{BD}}{\overline{AO}}=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$

$\Rightarrow \dfrac{\overline{BD}}{1}=\dfrac{1}{x} \Rightarrow \overline{BD}=\dfrac{1}{x}$

且$\dfrac{\overline{CD}}{\overline{BO}}=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \Rightarrow \dfrac{\overline{CD}}{\overline{BO}}=\dfrac{1}{x}$

$\Rightarrow \overline{CD}=\dfrac{1}{x}\cdot\overline{BO}=\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}$

又$\because \Delta CHO$為$30°-60°-90°$, $\therefore \dfrac{\overline{OH}}{\overline{CH}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \overline{OH}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\overline{CH}=\overline{BD}$

$\because \overline{BD}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\overline{CH}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(\overline{CD}+\overline{DH})=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(\overline{CD}+\overline{BO})$

$\therefore \dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{x^2-1}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(\dfrac{1}{x}+1)\sqrt{x^2-1}$

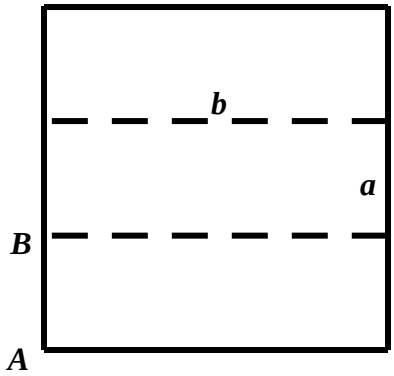
$\Rightarrow 1=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(x+1)\sqrt{x^2-1} \Rightarrow \dfrac{1}{3}(x+1)^2(x^2-1)=1$

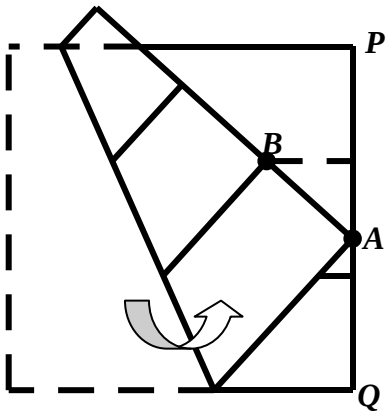
$\Rightarrow x^4+2x^3-2x-4=0 \Rightarrow (x^3-2)(x+2)=0$;故$x=\sqrt[3]{2}$

[方法]:1.將一個正方形三等分其面積(如左下圖)

2.利用摺紙公理6,將A、B分別折至線段a、b上(如右下圖);

則$\overline{AP}:\overline{AQ}=\sqrt[3]{2}:1$





[証明]:(如右圖)設$\overline{AQ}=1$

1.$\because \overline{BF}\,//\,\overline{DE}\ \therefore \angle FBD=\angle EDB$, 又$\because \overline{BD}\,//\,\overline{CE}\ \therefore \angle EDB=\angle DEC$

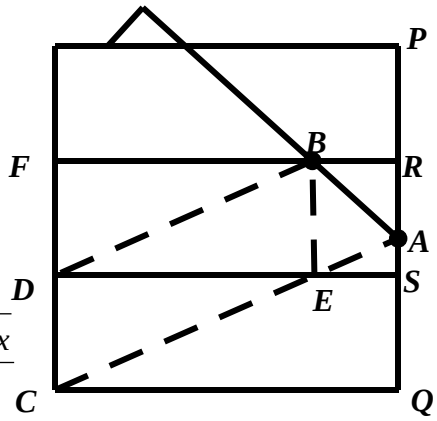
$\Rightarrow \angle FBD=\angle DEC$

2.在ΔBFD與ΔEDC中,$\because \angle FBD=\angle DEC, \angle BFD=\angle EDC=90°, \overline{FD}=\overline{DC}$

$\therefore \Delta BFD\cong\Delta EDC(AAS)$,故$\overline{FB}=\overline{DE}$;

即$FBDE$為矩形,

$\therefore \overline{BE}\perp\overline{DS}, \overline{BE}=\overline{RS}, \overline{BR}=\overline{ES}$



3.設$\overline{AP}=x$, 則 $\overline{AS}=\overline{AQ}-\overline{SQ}=1-\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{2-x}{3}$,

$\overline{AR}=x-\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{2x-1}{3}$,又$\overline{ES}=\overline{BR}=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{AR}^2}$

$=\sqrt{\overline{CD}^2-\overline{AR}^2}=\sqrt{\left(\dfrac{x+1}{3}\right)^2-\left(\dfrac{2x-1}{3}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{-3x^2+6x}}{3}$

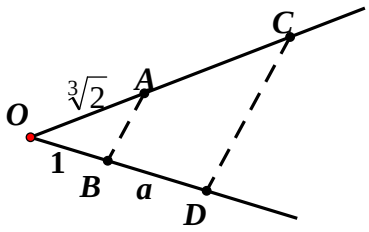
4.$\because \Delta ASE\sim\Delta AQC, \therefore \dfrac{\overline{AS}}{\overline{SE}}=\dfrac{\overline{AQ}}{\overline{QC}}\Rightarrow\dfrac{\dfrac{2-x}{3}}{\dfrac{\sqrt{-3x^2+6x}}{3}}=\dfrac{1}{x+1}\Rightarrow\dfrac{2-x}{\sqrt{-3x^2+6x}}=\dfrac{1}{x+1}$

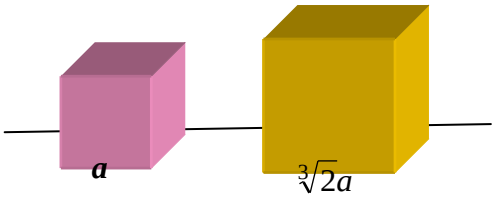
$\Rightarrow (2-x)(x+1)=\sqrt{-3x^2+6x}\Rightarrow(2-x)^2(x+1)^2=-3x^2+6x$

$\Rightarrow (x+2)(x^3-2)=0$; 故$x=\sqrt[3]{2}$;即$\overline{AP}:\overline{AQ}=x:1=\sqrt[3]{2}:1$

[應用]:1.設$\overline{OB}:\overline{OA}=1:\sqrt[3]{2}, \overline{BD}=a$;利用縮放法,得$\overline{AC}=\sqrt[3]{2}a$(如左下圖)

2.分別以$\overline{BD}$與$\overline{AC}$為棱邊,各作一個正方體,則大正方體體積＝2倍小正方體體積





【第六部分】:摺出$\dfrac{1}{\sqrt[3p]{N}},\dfrac{k}{\sqrt[3p]{N}},\dfrac{1}{\sqrt[6p]{N}},\dfrac{k}{\sqrt[6p]{N}}$ (p,k為正整數,$k<\sqrt[3p]{N}, k<\sqrt[6p]{N}$)**平方單位的正方形**

（1） 摺出面積為『$\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$』的正方形

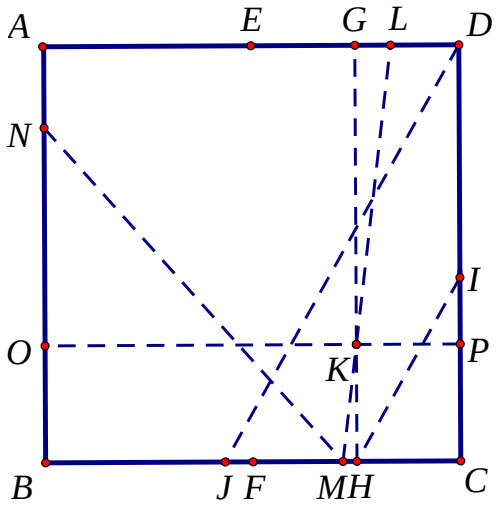


圖 18.1

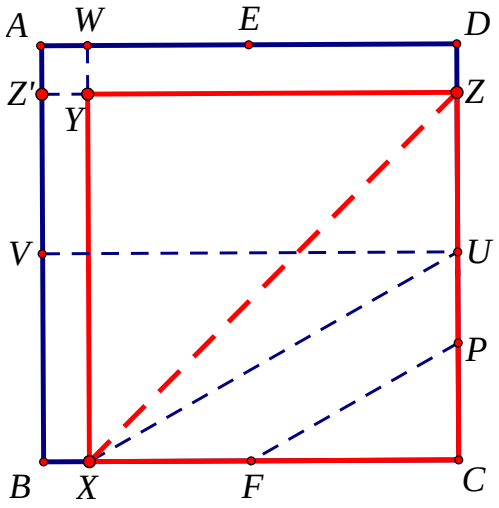


圖 18.2

［方法］：步驟一（如圖18.1）

① 先參照上述摺法摺出$\overline{DI}:\overline{IC}=\sqrt[3]{2}:1$

② 將正方形對摺再對摺得摺痕$\overline{EF}$及$\overline{GH}$,摺$\overline{IH}$並過D摺與$\overline{IH}$平行的摺痕$\overline{DJ}$

③ 將C摺向J得$\overline{JC}$之中點M,以M為中心將$\overline{JM}$摺向$\overline{GH}$得交點K

④ 過K摺與$\overline{DC}$垂直的摺痕$\overline{OP}$

步驟二（如圖 18.2）

① 將$\overline{BC}$摺向$\overline{AD}$得$\overline{CD}$之中點U,摺$\overline{PF}$並過U摺與$\overline{PF}$平行的摺痕$\overline{UX}$

② 過X摺與$\overline{BC}$垂直的摺痕$\overline{XW}$,並將$\overline{CX}$摺向$\overline{XW}$得Y

③ 過Y摺與$\overline{XW}$垂直的摺痕$\overline{ZZ'}$交$\overline{CD}$於Z,則正方形$CXYZ$即為所求

［証明］：（如圖18.1&圖18.2）

① $\because \overline{DJ}\,//\,\overline{IH},\therefore \Delta ICH\sim\Delta DCJ,\therefore \dfrac{\overline{DI}}{\overline{IC}}=\dfrac{\overline{JH}}{\overline{HC}}$,故$\dfrac{\sqrt[3]{2}}{1}=\dfrac{\overline{JH}}{\frac{1}{4}}$,故$\overline{JH}=\dfrac{\sqrt[3]{2}}{4}$

② $\because \overline{MJ}=\overline{MK}=\overline{MC},\therefore \overline{JK}\perp\overline{KC}$

③ $\because \Delta JHK\sim\Delta KHC,\therefore \dfrac{\overline{JH}}{\overline{HK}}=\dfrac{\overline{KH}}{\overline{HC}}$,故$\overline{KH}^2=\overline{JH}\times\overline{HC}=\dfrac{\sqrt[3]{2}}{4}\times\dfrac{1}{4}$,則$\overline{RI}=\dfrac{\sqrt[6]{2}}{4}$

④ $\because \overline{UX}\,//\,\overline{PF}\ \therefore \Delta CPF\sim\Delta CUX,\dfrac{\overline{CP}}{\overline{CF}}=\dfrac{\overline{CU}}{\overline{CX}}$,故$\dfrac{\frac{\sqrt[6]{2}}{4}}{\frac{1}{2}}=\dfrac{\frac{1}{2}}{\overline{CX}}$;即$\overline{CX}=\dfrac{1}{\sqrt[6]{2}}$

$\therefore$正方形$CXYZ=\overline{CX}^2=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$

（2）　摺出面積為『$\dfrac{1}{\sqrt[9]{2}}$』的正方形

比照$\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$的摺法,摺出$\dfrac{1}{\sqrt[18]{2}}$,即可摺出面積為『$\dfrac{1}{\sqrt[9]{2}}$』的正方形

【小結】：①比照$\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$的摺法數次,可先摺出$\dfrac{1}{\sqrt{\sqrt[3^p]{N}}}$與$\sqrt{\dfrac{k}{\sqrt[3^p]{N}}}$,再摺出$\dfrac{1}{\sqrt[3^p]{N}},\dfrac{k}{\sqrt[3^p]{N}}$的正方形面積

②亦可先摺出 $\frac{1}{\sqrt{3^p\times 2^q\sqrt{N}}},\sqrt{\frac{k}{3^p\times 2^q\sqrt{N}}}$ ，再摺出 $\frac{1}{3^p\times 2^q\sqrt{N}},\frac{k}{3^p\times 2^q\sqrt{N}}$ 的正方形面積

柒、 最後心得與結論：

【第一部分】：摺出 $\frac{1}{N}$ 平方單位的正方形

（一）N 之類型:

1. 若 N 除以 4 餘 3，屬於類型一（簡稱 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 型）
2. 若 N 除以 4 餘 1，屬於類型二（簡稱 $\frac{\sqrt{5}}{2}$ 型）

（二）N 的範圍:

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2^m}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{N-4}}{2^{m+1}}\right)^2}$$ ，其中 $8m+1\le N<8m+8$ ； $m=0,1,2,3\cdots$

（三）利用勾股定理及三角形相似性質，即可得正方形的邊長，再將之折成正方形即可

【第二部分】：摺出 $\frac{K}{N}$ 平方單位的正方形（其中 $K<N$ ）

（一）先利用 $\frac{1}{N}$ 的折法將愈運用的兩線段折至正方形的同一邊上

（二）利用三角形的相似性質即可折出正方形的邊長，再將之折成正方形即可

【第三部分】：利用摺紙法可摺出 $\frac{1}{\sqrt[2^n]{N}}$ 平方單位的正方形

【第四部分】：摺出各種正 N 邊形

（一）要折出正 N 邊形可以利用兩種方式，

1.邊長相等（如正三角形、正五邊形、正十七邊形），

2.邊長所對應之圓心角的度數相等（如正九邊形之每一圓心角為 $40°$ ）

（二）邊數小於100，利用折紙可以折出的正多邊形如下：

N 的形狀	使用尺規能畫出的正多邊形的邊數
2^m	4,8,16,32,64
$2^{2^t}+1$	3,5,17
$2^m p_1p_2\cdots\cdots p_k$	6,12,24,48,96 10,20,40,80 34,68 15,30,60 51 85
7 的倍數邊形	7,14,21,28,42,56,63,84
9 的倍數邊形	18,27,36,45,54,72,81,90

[註]:邊數小於 100，無法利用折紙折出的正多邊形如下(至目前)：
11,13,19,22,23,25,26,29,31,33,35,37,38,39,41,43,44,46,47,49,50,52,53,55,57,58,59,61,62,65,66,67,69,70,71,73,74,75,76,77,78,79,82,83,85,86,87,88,89,91,92,93,94,95,97,99等56種

【第五部分】：利用摺紙法已可解決:古典幾何三大問題中的「三等分角問題」與「立方倍積」問題。

【第六部分】：利用摺紙法可摺出 $\frac{1}{\sqrt[3^p]{N}},\frac{k}{\sqrt[3^p]{N}},\frac{1}{\sqrt[3^p\times 2^q]{N}},\frac{k}{\sqrt[3^p\times 2^q]{N}}$ (p,k為正整數, $k<\sqrt[3^p]{N}$, $k<\sqrt[3^p\times 2^q]{N}$) **平方單位的正方形**

捌、 參考資料：

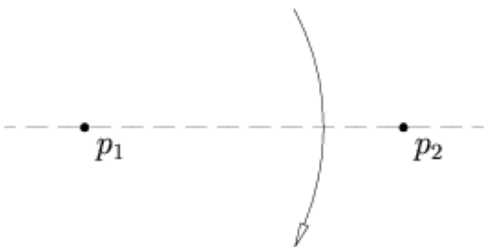
（一）南一出版社（2010）。**國中數學教科書及教學指引（第三冊）**。台南：南一出版社。

（二）銀林浩（2002）。**用摺紙來學數學**。台北市：國際村文庫書店。

[附件一]:

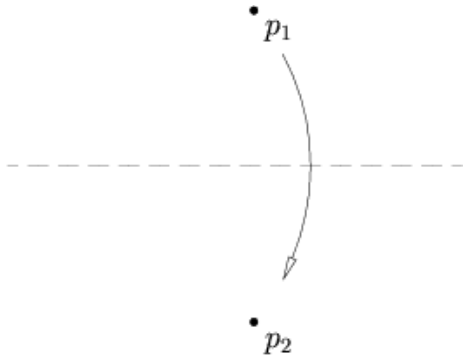
羅伯特·朗證明了這七個公理已經是摺紙幾何的全部公理了。

公理 1



給定兩點 p_1 和 p_2，有且僅有一條摺痕同時過這兩點。
以參數方程表示的話，過 2 點的直線可以表示為：
$F(s) = p_1 + s(p_2 - p_1)$.

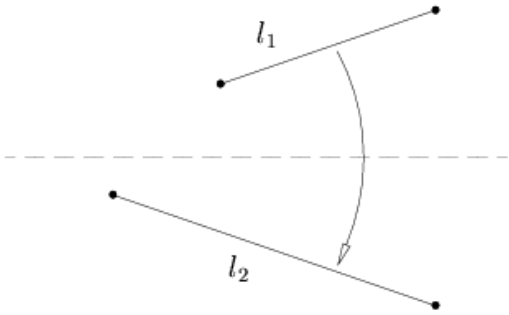
公理 2



給定兩點 p_1 和 p_2，有且僅有一種方法把 p_1 折到 p_2 上。
這條公理相當於是作線段 $\overline{p_1p_2}$的垂直平分線。這可以通過以下四個步驟完成：

- 使用**公理 1** 作出連結 p_1 和 p_2 的直線
  $P(s) = p_1 + s(p_2 - p_1)$
- 找到直線 $P(s)$ 的中點 p_{mid}
- 找到垂直於 $P(s)$ 的向量 $\mathbf{v}_{\mathbf{perp}}$
- 摺痕的參數方程表示為： $F(s) = p_{\text{mid}} + s \cdot \mathbf{v}_{\text{perp}}$.

公理 3



給定兩直線 l_1 和 l_2，可以把 l_1 折到 l_2 上。

這條公理相當於是找出 l_1 和 l_2 組成的角的平分線。假設 p_1 和 p_2 是 l_1 上任意兩點，q_1 和 q_2 是 l_2 上任意兩點，$\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$分別是 l_1 和 l_2 方向的單位向量：

$$\mathbf{u} = (p_2 - p_1)/|(p_2 - p_1)|$$
$$\mathbf{v} = (q_2 - q_1)/|(q_2 - q_1)|.$$

如果兩直線不平行，它們的交點為：$p_{\text{int}} = p_1 + s_{\text{int}} \cdot \mathbf{u}$

其中
$$s_{int} = -\frac{\mathbf{v}_\perp \cdot (p_1 - q_1)}{\mathbf{v}_\perp \cdot \mathbf{u}}.$$

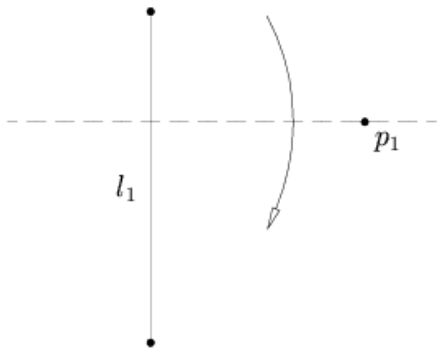
兩條直線所夾的一個角的平分線方向是：
$$\mathbf{w} = \frac{|\mathbf{u}|\,\mathbf{v} + |\mathbf{v}|\,\mathbf{u}}{|\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|}.$$

摺痕的參數方程是： $F(s) = p_{\text{int}} + s \cdot \mathbf{w}$.

這兩直線還有另一個角平分線，兩條角平分線互相垂直，且都過點 p_{int}。而沿著任意一條角平分線折都能將 l_1 折到 l_2 上。但在實踐中可能因為交點的位置（比如交點在紙外）使沿著其中一條角平分線的摺疊無法實施。

如果兩條直線平行，那麼只要沿著兩直線中間的一條線（與兩直線平行，到兩直線距離相等）摺疊就可以將 l_1 折到 l_2 上

公理 4



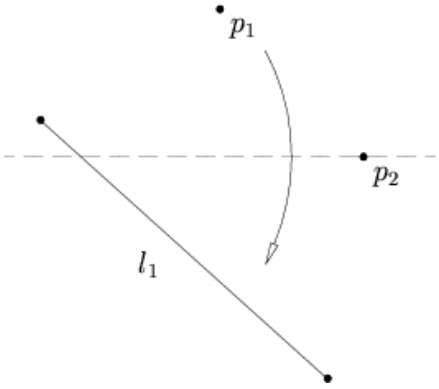
給定一點 p_1 和一條直線 l_1，有且僅有一種方法過 l_1 折出 l_1 的垂線。

向量 $\mathbf{v}$是垂直於 l_1 的單位向量，那麼摺痕的參數方程是：
$F(s) = p_1 + s \cdot \mathbf{v}$.

公理 5

給定兩點 p_1 和 p_2 和一條直線 l_1，可以沿過 p_2 的直線將 p_1 折到 l_1 上。

這個公理相當於找出圓和直線的交點，所以有最多 2 個解，最少也可能無解。這取決於直線 l_1 和以p_2 為圓心，p_2 到 p_1 的距離為半徑的圓的位置關係。如果直線和圓不相交則無解，想切則有 1 解，相交則有 2 解.



如果我們知道直線上兩點 (x_1,y_1) 和 (x_2,y_2)，那麼直線可以表示為：

$$x = x_1 + s(x_2 - x_1)$$
$$y = y_1 + s(y_2 - y_1).$$

如果圓心 $p_2 = (x_c,y_c)$，半徑 $r = |p_1 - p_2|$。那麼這個圓可以表示為：

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2.$$

為了確定圓和直線的交點，將直線方程代入圓方程，得：

$$(x_1 + s(x_2 - x_1) - x_c)^2 + (y_1 + s(y_2 - y_1) - y_c)^2 = r^2.$$

或者可以簡化為： $as^2 + bs + c = 0$ 其中：

$$a = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$
$$b = 2(x_2 - x_1)(x_1 - x_c) + 2(y_2 - y_1)(y_1 - y_c)$$
$$c = x_c^2 + y_c^2 + x_1^2 + y_1^2 - 2(x_c x_1 + y_c y_1) - r^2.$$

然後，只要解以下方程就能確定直線和圓的交點： $\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

如果判別式 $b^2 - 4ac < 0$，那麼方程無實數解，圓和直線沒有交點；如果辨別式等於 0，那麼方程有一解，圓和直線相切；如果辨別式大於 0，方程有兩解，圓和直線有兩個交點。令d_1 和 d_2 是兩個交點（如果存在），那麼，我們可以得到線段如下：

$$m_1 = \overline{p_1 d_1} \qquad m_2 = \overline{p_1 d_2}.$$

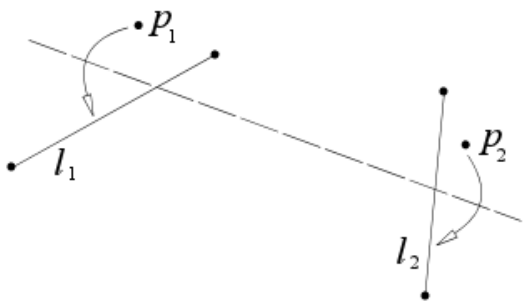
摺痕 $F_1(s)$ 垂直平分 m_1，可以將 p_1 折到 d_1。同樣，摺痕 $F_2(s)$ 垂直平分 m_2，可以將 p_1 折到 d_2。只要應用公理 2 就可以找到垂直平分線。摺痕的參數方程是：

$$F_1(s) = p_1 + \frac{1}{2}(d_1 - p_1) + s(d_1 - p_1)_\perp$$

$$F_2(s) = p_1 + \frac{1}{2}(d_2 - p_1) + s(d_2 - p_1)_\perp.$$

公理 6

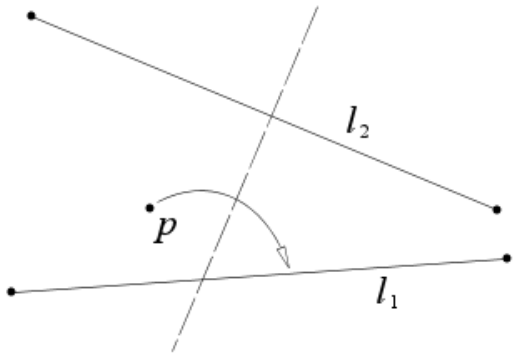
給定兩點 p_1 和 p_2 和兩直線 l_1 和 l_2，可以一次將 p_1 、p_2 分別折到 l_1 、l_2 上。



這個公理相當於找到同時與兩條拋物線相切的直線，等價於解一個三次方程。兩條拋物線的焦點分別是 p_1 和 p_2，準線分別是 l_1 和 l_2。

公理 7

給定一點 p 和兩直線 l_1 和 l_2，可以沿著 l_2 的垂線將 p_1 折到 l_1 上。

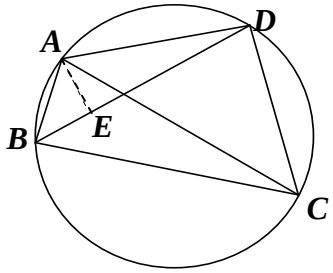


過 p 點作 l_1 的平行線，交 l_2 於 q，這個公理就是要找出線段 $\overline{pq}$的垂直平分線。沿著這條垂直平分線折，就可以將 p 折到 q 上。

[附件二]:

[已知]: $ABCD$為圓內接凸四邊形

[求証]: $\overline{AB}\cdot\overline{CD}+\overline{AD}\cdot\overline{BC}=\overline{AC}\cdot\overline{BD}$



[証明]:

1.在$\angle BAD$裡面作$\angle BAE=\angle CAD$,且$\overrightarrow{AE}$交$\overline{BD}$於E,則$\angle DAE=\angle CAB$

2.$\because$ $ABCD$為圓內接凸四邊形且$\overrightarrow{AE}$交$\overline{BD}$於E

$\therefore \angle ABE=\angle ACD, \angle ADE=\angle ACB$,故$\Delta ABE\sim\Delta ACD, \Delta ADE\sim\Delta ACB$

即$\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\dfrac{\overline{BE}}{\overline{CD}};\dfrac{\overline{AD}}{\overline{AC}}=\dfrac{\overline{ED}}{\overline{BC}}$ $\Rightarrow \overline{AB}\cdot\overline{CD}=\overline{AC}\cdot\overline{BE}\cdots\cdots(1)$ $\overline{AD}\cdot\overline{BC}=\overline{AC}\cdot\overline{ED}\cdots\cdots(2)$

$(1)+(2)$ $\overline{AB}\cdot\overline{CD}+\overline{AD}\cdot\overline{BC}=\overline{AC}(\overline{BE}+\overline{ED})=\overline{AC}\cdot\overline{BD}$

[附件三]:

（1） 折出正三角形（如圖11）

［方法］：①參照【第一部分】（圖 4.1），將正方形對折，得折痕 $\overline{EF}$

② 將$\overline{BC}$折至$\overline{BG}$,使G在$\overline{EF}$上,得折痕$\overline{BH}$

③ 折$\overline{BG}$及$\overline{GC}$則正三角形BGC即為所求

［証明］:省略

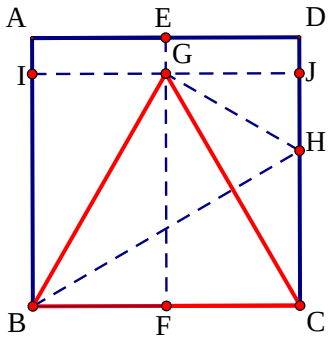


圖 11

（2） 折出正五邊形（如圖12）

［方法］：①將正方形紙張 $ABCD$ 對折，得折痕 $\overline{EF}$

②折出 $\overline{EC}$ ，將 $\overline{EB}$ 對折至 $\overline{EC}$ 上，使得 $\overline{EB}=\overline{EG}$, 標記 G 點

③$\overline{CG}$ 對折至 $\overline{BC}$ 上，使得 $\overline{CG}=\overline{CH}$ ，標記 H 點

④過 H 點折出 $\overline{BC}$ 的垂直線 $\overline{HI}$ ，交 $\overline{EF}$ 於 K 點，

得 $\overline{FK}=\overline{CH}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

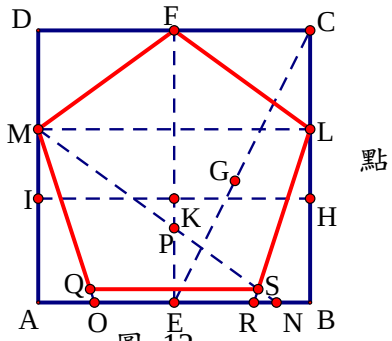


圖 12

⑤以 F 點為中心，將 $\overline{FK}$ 折至 $\overline{BC}$ 、 $\overline{AD}$ 上，使得 $\overline{FK}=\overline{FL}=\overline{FM}$ ，得 L , M

⑥折出 $\overline{LM}$ 之折痕，並以 $\overline{LM}$ 為基準折出 $\angle FML=\angle LMN=\angle NMO$，得折痕 $\overline{MN}$ 、 $\overline{MO}$ ，並將 $\overline{MF}$ 折至 $\overline{MN}$ 、 $\overline{MO}$ 上，使得 $\overline{MF}=\overline{MP}=\overline{MQ}$ ，得 P , Q

⑦同理可折出 $\overline{LR}$ ，得 S 點 ⑧最後折出 $\overline{QS}$ 折痕，則正五邊形 $FMQSL$ 即為所求

［証明］:省略

（3） 折出正六邊形（如圖13）

［方法］：①將正方形對折在對折得交點O

②在正方形$EOHD$中參照(1)折正三角形A_1OH

③

再次沿著折痕$\overline{EF}$及$\overline{KH}$對折再對折,既可得到對稱點A_2,A_3及A_4

④

折$\overline{HA_1}$,$\overline{A_1A_2}$,$\overline{A_2K}$,$\overline{KA_3}$,$\overline{A_3A_4}$及$\overline{A_4H}$,則正六邊形$HA_1A_2KA_3A_4$即為所求

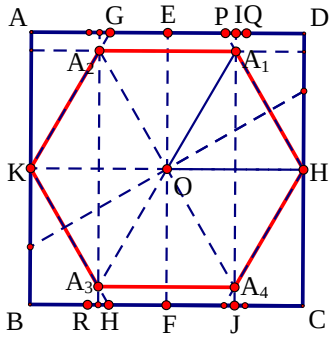


圖 13

［証明］:省略

（5） 折出正八邊形（如圖15）

［方法］：①將正方形對折再對折得交點O

②沿著對角線對折交點亦為O

③對折$\angle EOD$得$\angle EOI=\angle IOD=22.5°$

利用相同作法可得每一個角均為22.5°

④

折$\overline{KI}$,$\overline{MP}$,$\overline{LJ}$及$\overline{NQ}$,則正八邊形$KIMPLJNQ$即為所求

［証明］:省略

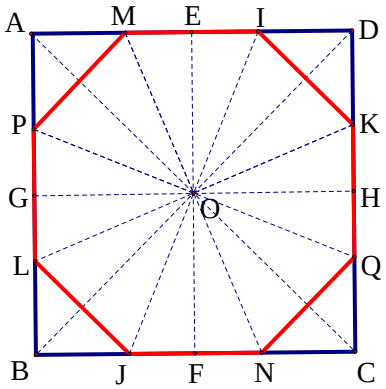


圖 15

[附件四]:正七邊形尺規作圖的不可能

首先,我們都知道正七邊形的作圖可以歸結於$\theta=\dfrac{2\pi}{7}$的角作圖。(見下圖)

因$3\theta=2\pi-4\theta$,故$Cos3\theta=Cos(2\pi-4\theta)=Cos4\theta$

依據三角恒等式,有

$$Cos3\theta=4Cos^3\theta-3Cos\theta$$

$$Cos4\theta=8Cos^4\theta-8Cos^2\theta+1$$

由此

$$8Cos^4\theta-4Cos^3\theta-8Cos^2\theta+3Cos\theta+1=0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots①$$

①×2　得$16Cos^4\theta-8Cos^3\theta-16Cos^2\theta+6Cos\theta+2=0$　……②

令　$Cos\theta=\dfrac{x}{2}$　代入②　則變為 $x^4-x^3-4x^2+3x+2=0$

因式分解得　$(x-2)(x^3+x^2-2x-1)=0$ ；　若$x-2=0$,則$Cos\theta=1$,此時$\theta\neq\dfrac{2\pi}{7}$(不合)

故必 $x^3+x^2-2x-1=0$　由試驗,知$x=\pm1$ 不能滿足此方程,故$x^3+x^2-2x-1=0$無有理根存在。即可斷言正七邊形不可能以尺規作圖而得之。

[附件五]:正十七邊形的尺規作圖:

［作法］:

1. 作一單位圓,直徑$\overline{AA_0}=2$,延長$\overrightarrow{A_0A}$,取$\overline{AB}=\dfrac{1}{4}$

2. 作$\overline{AC}\perp\overline{AB}$,並取$\overline{AC}=1$,連$\overline{BC}$;則$\overline{BC}=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{AC}^2}=\sqrt{(\dfrac{1}{4})^2+1^2}=\dfrac{\sqrt{17}}{4}$

3. 以B為圓心,$\overline{BC}$為半徑畫弧,交直徑$\overline{AA_0}$於D,並$\overrightarrow{AB}$於E,

   則$\overline{AD}=\overline{BC}-\overline{AB}=\dfrac{\sqrt{17}}{4}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{\gamma}{2}$; $\overline{AE}=\overline{BC}+\overline{AB}=\dfrac{\sqrt{17}}{4}+\dfrac{1}{4}=-\dfrac{\delta}{2}$ (見(14)(15)式)

4. 連$\overline{CD}$、$\overline{CE}$,以D為圓心,$\overline{CD}$為半徑畫弧,交$\overrightarrow{DA_0}$於F;以E為圓心,$\overline{EC}$為半徑畫弧,交$\overrightarrow{EA}$於G;

   則$\overline{DF}=\overline{DC}=\sqrt{\overline{AD}^2+\overline{AC}^2}=\sqrt{(\dfrac{\gamma}{2})^2+1}$; $\overline{EG}=\overline{EC}=\sqrt{\overline{AE}^2+\overline{AC}^2}=\sqrt{(\dfrac{\delta}{2})^2+1}$

   故$\overline{AF}=\overline{AD}+\overline{DF}=\dfrac{\gamma}{2}+\sqrt{(\dfrac{\gamma}{2})^2+1}=\alpha$; $\overline{AG}=\overline{EG}-\overline{AE}=\sqrt{(\dfrac{\delta}{2})^2+1}+\dfrac{\delta}{2}=\beta$ (見(13))式)

5. 作$\overline{FH}\perp\overline{AF}$,取$\overline{FH}=\overline{AG}$;並使$H$與$C$在$\overline{AF}$的同一側,連$\overline{CH}$

   以$\overline{CH}$為直徑作一半圓交$\overline{AF}$於P、Q,交$\overline{AC}$於H',並使Q介於A、P之間

   連$\overline{HH'}$,則$\overline{HH'}\perp\overline{AC}$,$\overline{HH'}\,//\,\overline{AF}$; $\therefore$ 弧$H'Q=$弧HP (平行弦截等弧)

   故$\overline{H'Q}=\overline{HP}$ (等弧對等弦), 即$\Delta AHQ\cong\Delta FHP(RHS)$, $\therefore\overline{AQ}=\overline{PF}$

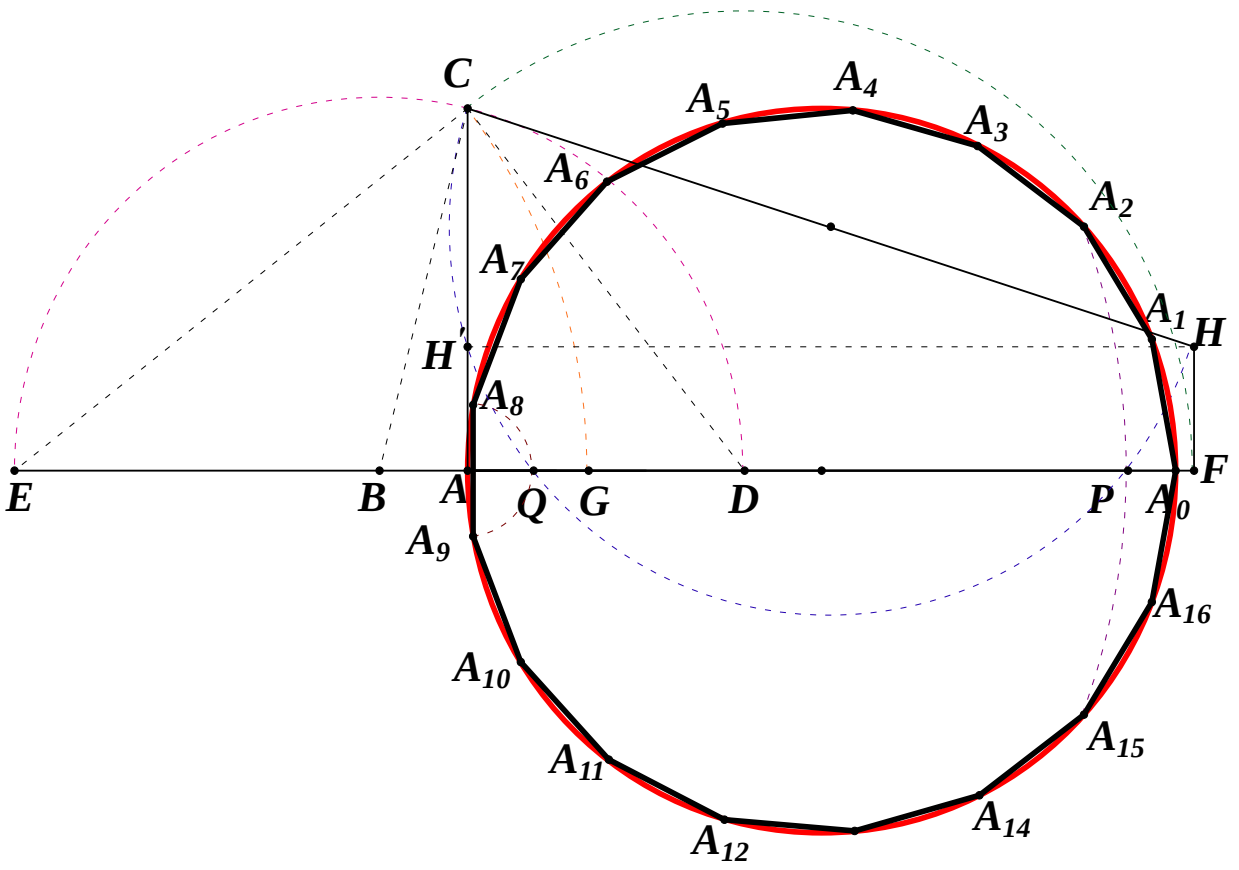
   故 $\begin{cases}\overline{AP}+\overline{AQ}=\overline{AP}+\overline{PF}=\overline{AF}=\alpha\\ \overline{AP}\cdot\overline{AQ}=\overline{AC}\cdot\overline{AH'}=1\cdot\overline{FH}=\beta\end{cases}$ (外冪性質)

   由(9)式可知: $\overline{AP}=a_2$,$\overline{AQ}=a_8$

6. 以A為圓心,$\overline{AP}$為半徑,畫弧,交單位圓於A_2、A_{15};

   再以A為圓心,$\overline{AQ}$為半徑,畫弧,交單位圓於A_8、A_9

7. 連$\overline{A_8A_9}$,以A_8為圓心,$\overline{A_8A_9}$為半徑,順時針依次以各交點為圓心畫弧,交單位圓於A_7、A_6、A_5、A_4、A_3、A_2、A_1、A_0、A_{16}、A_{15}、A_{14}、A_{13}、A_{12}、A_{11}、A_{10};再連相鄰的線段;則正十七邊形即為所求


C
A5
A4
A3
A6
A2
A7
A1
H
H
A8
E
B
A
Q
G
D
P
A0
F
A9
A16
A10
A15
A11
A14
A12

【評語】030405

1. 摺紙是一個有趣的題材，但引用別人作品宜註明出處，而且文獻中已有部分成果，創新度稍顯不足
2. 團隊合作良好。
3. 研究目標明確。
4. 表達能力佳。