

中華民國第 51 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組 數學科

030402

摺摺稱值

學校名稱：新竹縣立湖口高級中學

作者：	指導老師：
國二 彭成維	盧廷藏
國二 林彥仔	鄒新全
國二 陳孔祥	

關鍵詞：連分數

摺摺稱值

摘要

本研究是探討如何利用摺紙方式，研究 $\sqrt{2}$ 等無理數值，並應用於矩形的長寬比值，推出任意多邊形的邊長比，長方體的長寬高的比及任意扇形的圓心角。

壹、研究動機

生活中的有許多東西和數學息息相關，從我們用的紙張，A4 紙到 B4 紙，其紙張大小尺寸、長寬的比值令我們好奇，進而推究如何從摺紙的過程中了解 $\sqrt{2}$ 數值，以有理數逼近無理數，並以相同的手法推廣出多邊形的邊長比、長方體的長寬高的比及扇形的圓心角(任意角度)。

貳、研究目的

一、利用摺紙的方式，摺出 $\sqrt{2}$ 、 $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ 、 $\sqrt{2} \times \sqrt{3}$ 等近似值並

探究 $\sqrt{K}$ 連分數之規律性。

二、利用摺紙的方式，摺出未知矩形的長寬比值。

三、利用摺紙的方式，摺出長方體的長寬高的比。

四、以尺規作圖的方式，逼近多邊形的邊長比。

五、以尺規作圖的方式，逼近扇形的圓心角。

參、研究設備及器材

圓規、直尺、剪刀、量角器、計算機及 GSP 幾何繪圖軟體

肆、研究過程與方法

一、利用摺紙的方式, 摺出 $\sqrt{2}$ 、 $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ 、 $\sqrt{2} \times \sqrt{3}$ 的近似值。

十六世紀的義大利數學家 Bombelli 利用連分數逼近 $\sqrt{2}$ 的近似值, 方法如下:

令 $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{y}$, 則 $y = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1$; 然後再令 $x = \sqrt{2}-1$ 代入, 則

$$x = \frac{1}{y} = \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \frac{1}{2+x} = \frac{1}{2+\frac{1}{2+x}} = \frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\dots}}}$$

以遞迴疊代方式, 無窮展開; $x = \sqrt{2}-1$ 的前幾個漸近分數為

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{5}{12}, \frac{12}{29}, \frac{29}{70}, \frac{70}{169}, \dots$$

我們取 $x = \sqrt{2}-1$ 的近似值為 $\frac{70}{169}$, 並用計算機計算誤差值為

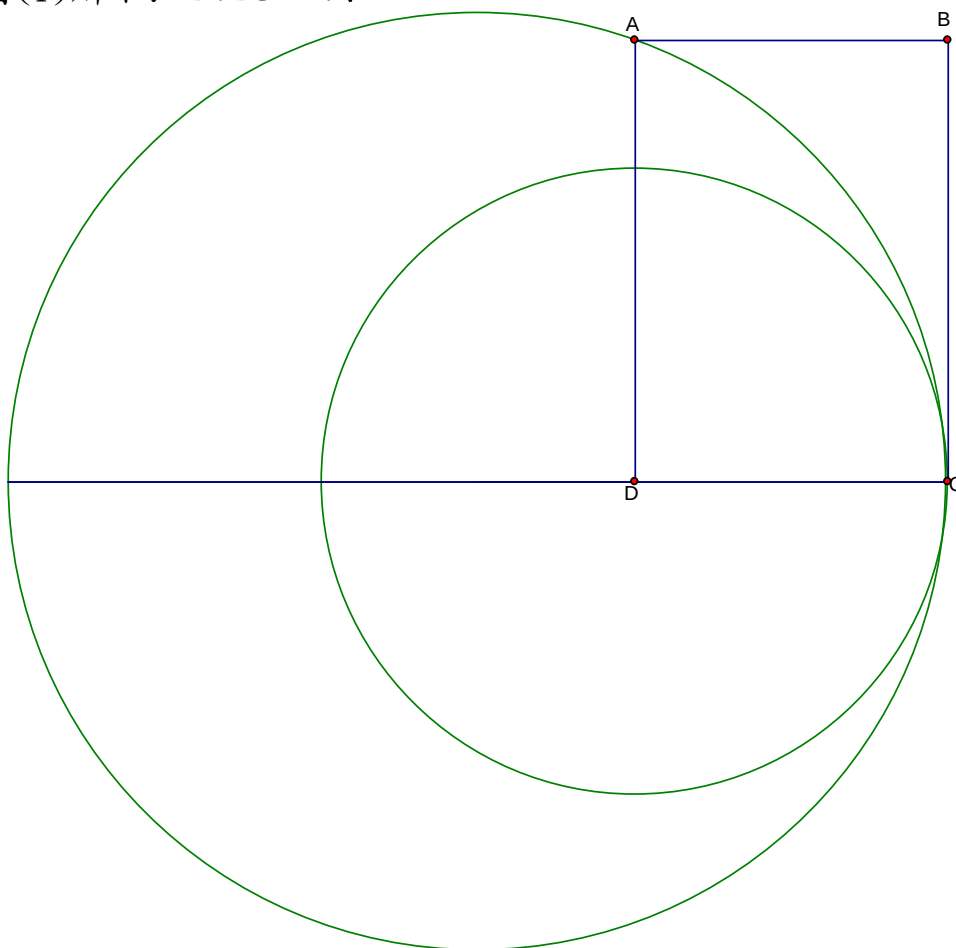
$$\left| (\sqrt{2}-1) - \frac{70}{169} \right| \leq 0.00002$$

這表示 $\sqrt{2} = [1, 2, 2, 2, 2, \dots] = [1, \bar{2}]$ 連分數可以無窮逼近無理數的值。

(一)摺出 $\sqrt{2}$ 的近似值：

首先，利用尺規作圖做出 $\sqrt{2}$ 線段，並做出長：寬 $=\sqrt{2}:1$ 的矩形，如

圖(1)所示： $\overline{AB}:\overline{BC}=1:\sqrt{2}$



圖(1)

1、首先在圖(1)上，以A為圓心， $\overline{AB}=1$ 為半徑畫弧交 $\overline{AD}$ 於F點

並作 $\overline{FE} \parallel \overline{CD}$ ，則 $\overline{FD}=\sqrt{2}-1$

由圖(2)可摺出一個正方形ABEF及矩形ECDF ($\sqrt{2}-1:1$)

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \sqrt{2} = \frac{1}{1} + \frac{\sqrt{2}-1}{1} = \frac{1}{1} + \frac{1}{\sqrt{2}-1}$$

2、接著再從圖(2)中的矩形 $ECDF$ ，以 C 為圓心， $\overline{CE} = \sqrt{2} - 1$ 為半徑畫弧

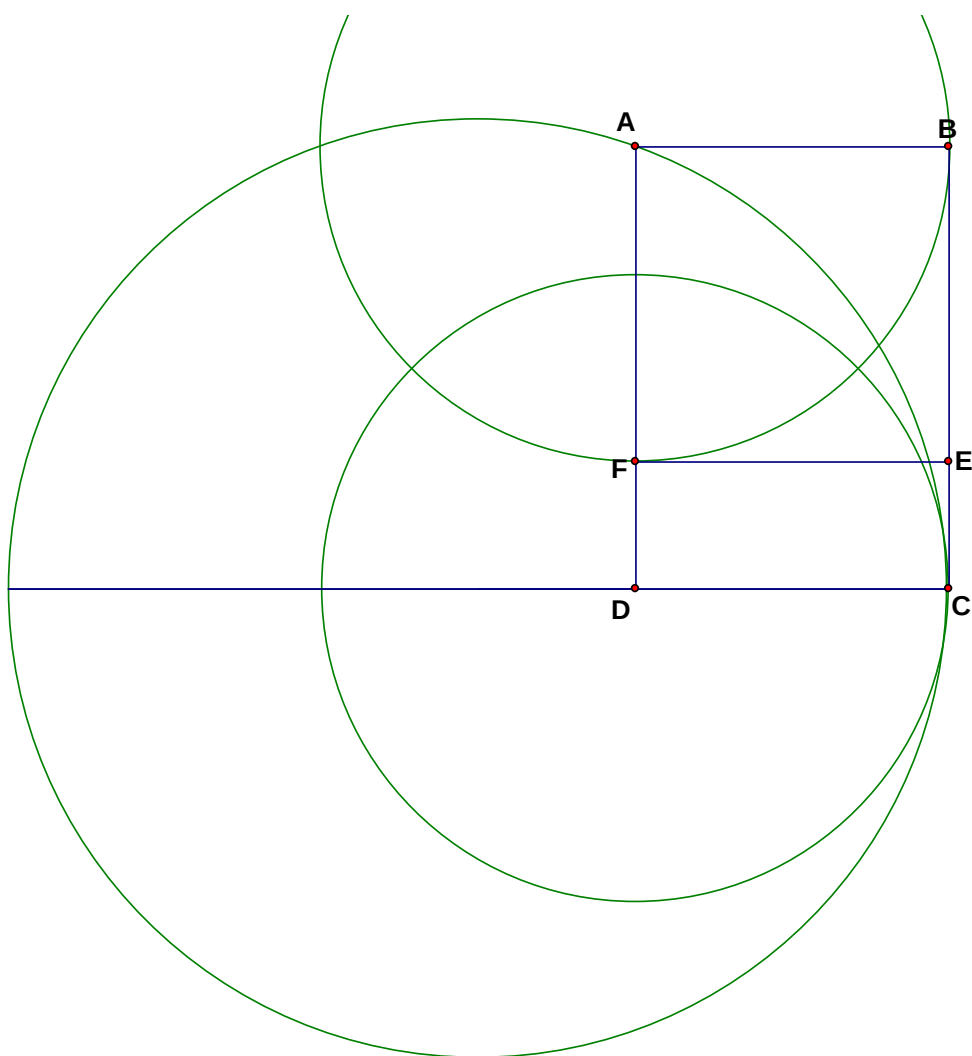
兩次交 $\overline{CD}$ 於 G 、 I 點

並作 $\overline{GH} \parallel \overline{IJ} \parallel \overline{CE}$ ，則 $\overline{ID} = 1 - 2 \times (\sqrt{2} - 1) = 3 - 2\sqrt{2}$

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{CE}} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{2}{1} + \frac{\sqrt{2}-1}{1} = \frac{2}{1} + \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \frac{2}{1} + \frac{1}{\frac{\sqrt{2}-1}{3-2\sqrt{2}}}$$

由圖(3)可摺出二個正方形 $CEHG$ 、 $GHJI$ 及

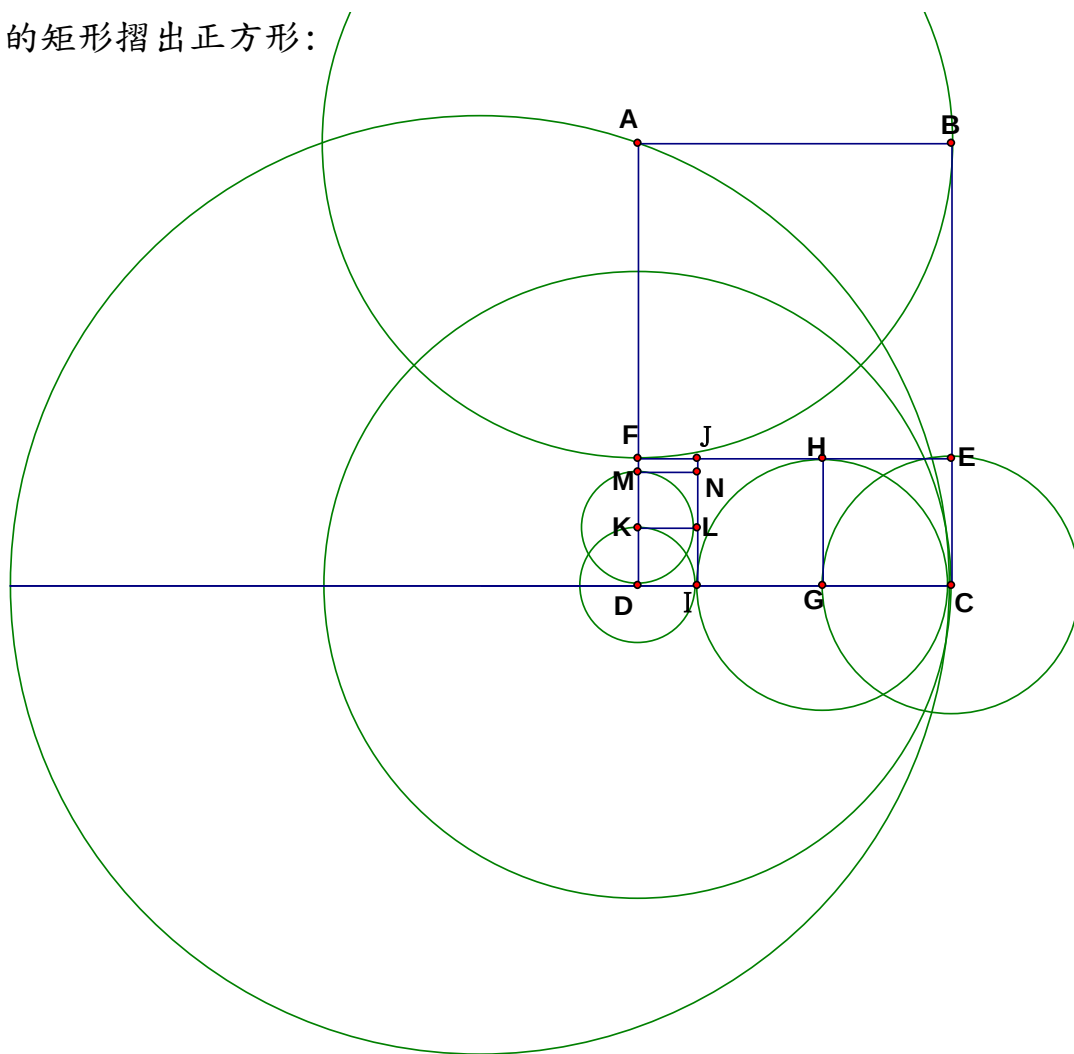
矩形 $IDFJ$ ($3 - 2\sqrt{2} : \sqrt{2} - 1$)



圖(2)

3、接著再從圖(3)中, 依此類推重複的步驟；以輾轉相除的模式

對剩下的矩形摺出正方形：



圖(3)

因此, 我們由上圖(1)(2)(3)可以觀察出正方形個數分別為

$1 \rightarrow 2 \rightarrow 2 \rightarrow 2 \rightarrow \dots$ 並將 $\sqrt{2}$ 簡記為 $[1, 2, 2, 2, \dots]$

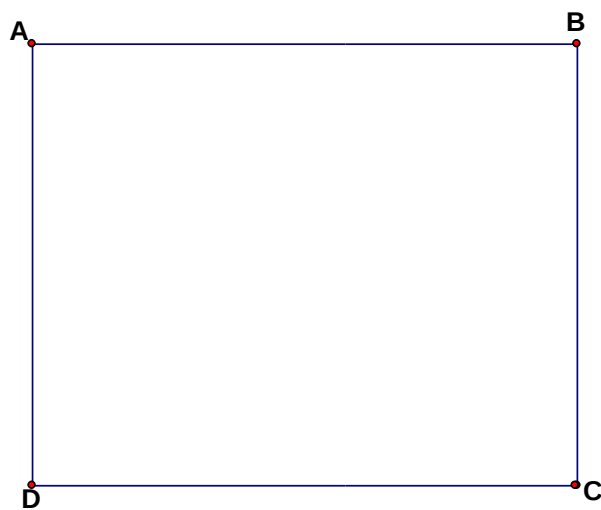
$$\therefore \frac{\sqrt{2}}{1} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}} \text{ 若從圖(3)觀察可得出 } [1, 2, 2, 2] = \frac{17}{12}$$

我們利用計算機計算出 $\left| \sqrt{2} - \frac{17}{12} \right| \leq 0.0025$ 誤差小於 0.25%

由此可知, 利用尺規作圖可以摺出 $\sqrt{2}$ 的近似值。

(二)摺出 $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ 的近似值：我們利用圖(1)所示長 = $\sqrt{1^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{3}$

作出新的矩形($\overline{AB}:\overline{BC} = \sqrt{3}:\sqrt{2}$)如圖(4)所示



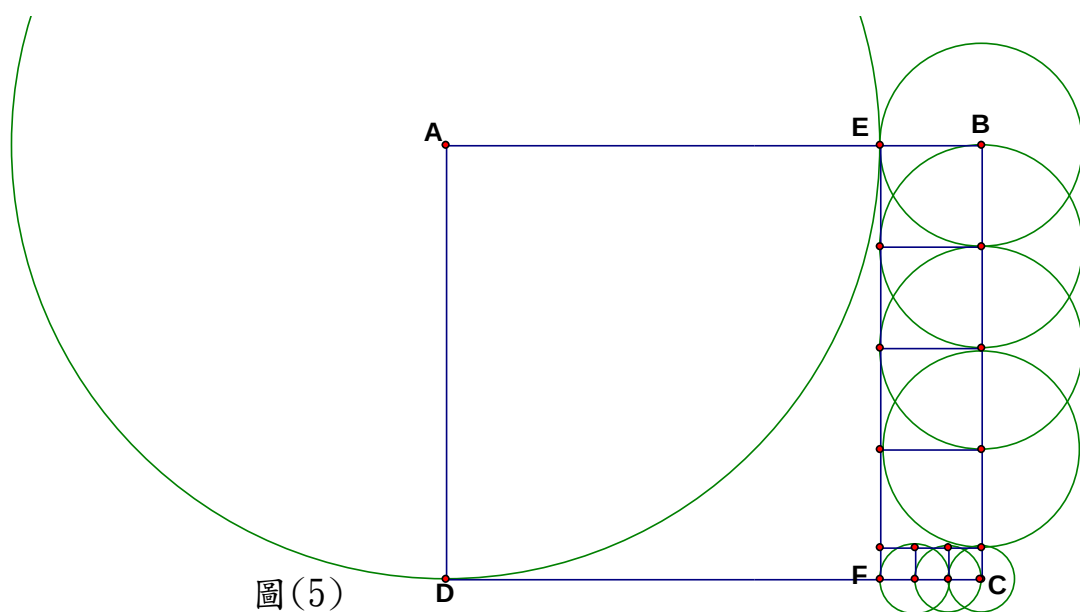
圖(4)

同理，在圖(4)上，以 A 為圓心， $\overline{AD} = \sqrt{2}$ 為半徑畫弧交 $\overline{AB}$ 於 E 點

並作 $\overline{FE} \parallel \overline{BC}$ ，則 $\overline{BE} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$ 並由圖(5)可知；

第一次摺出 1 個正方形 $ABEF$ 、 $BCEF$ ($\sqrt{3} - \sqrt{2}:\sqrt{2}$)；第二次摺出

4 個正方形；第三次摺出 2 個正方形...



圖(5)

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \text{ 近似值為 } [1,4,2] = 1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{2}} = \frac{11}{9}$$

我們利用計算機計算出 $\left| \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - \frac{11}{9} \right| \leq 0.003$ 誤差小於 0.3%

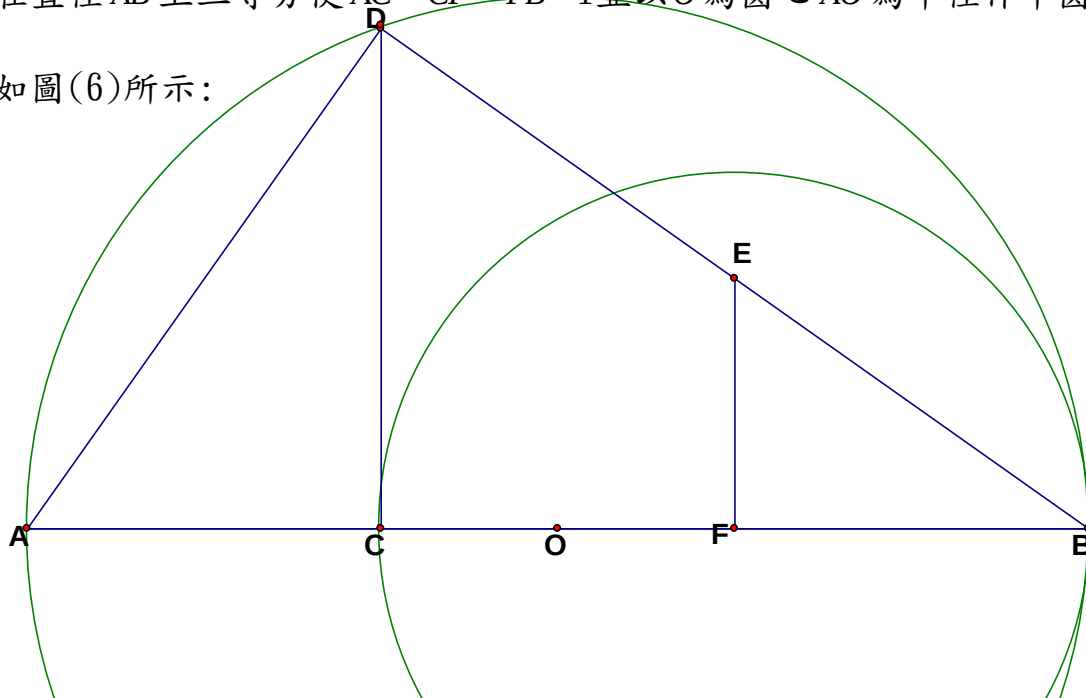
由此可知, 利用尺規作圖可以摺出 $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ 的近似值。

(三) 摺出 $\sqrt{2} \times \sqrt{3}$ 的近似值:

我們將 $\sqrt{2} \times \sqrt{3}$ 改寫成 $\frac{\sqrt{3}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}$ 並做出長:寬 = $\sqrt{3} : \frac{1}{\sqrt{2}}$ 的矩形。

在直徑 $\overline{AB}$ 上三等分使 $\overline{AC} = \overline{CF} = \overline{FB} = 1$ 並以 O 為圓心 $\overline{AO}$ 為半徑作半圓

如圖(6)所示:

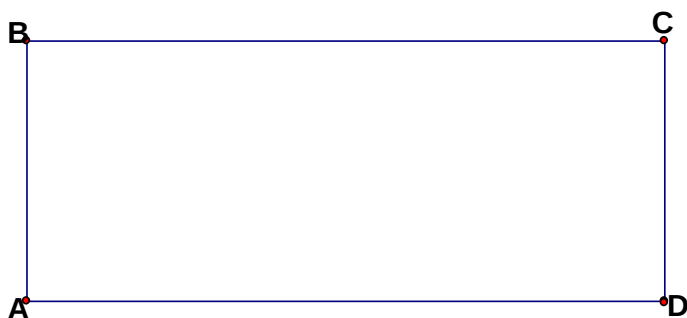


$$\text{利用 } \triangle DCA \sim \triangle BCD \Rightarrow \overline{CD}^2 = \overline{CA} \times \overline{CB} \therefore \overline{CD}^2 = 1 \times 2 \Rightarrow \overline{CD} = \sqrt{2}$$

$$\text{又 } \triangle BEF \sim \triangle BDC \Rightarrow \overline{EF} : \overline{CD} = \overline{BF} : \overline{BC} \Rightarrow \overline{EF} : \sqrt{2} = 1 : 2 \Rightarrow \overline{EF} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

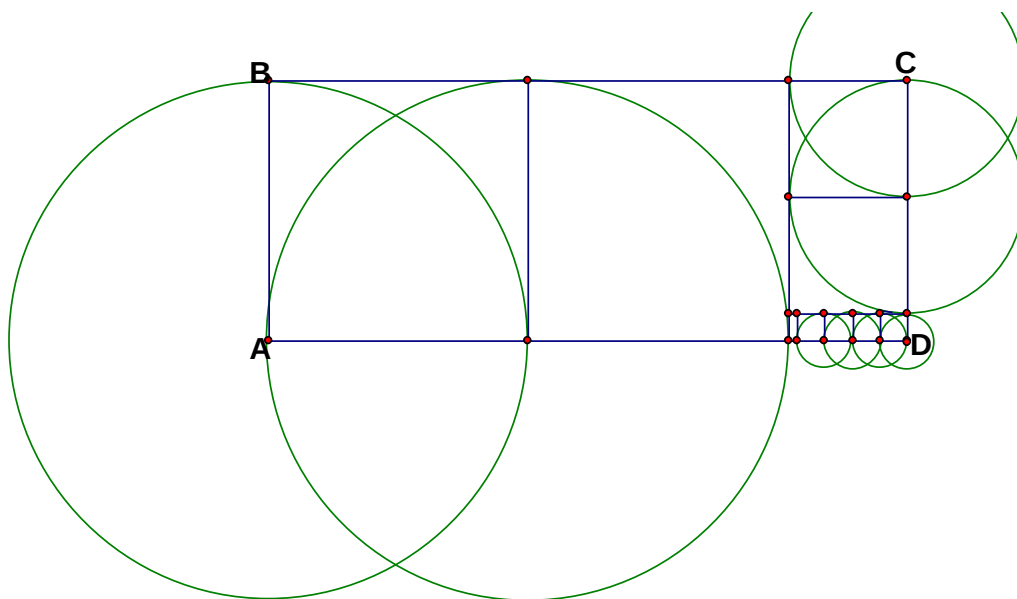
$$\text{且 } \overline{AD} = \sqrt{1^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{3} ;$$

並做出 $\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\sqrt{3}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}$ 之矩形 $ABCD$ ，如圖(7)所示：



圖(7)

我們仿照上述模式，以相同摺法；第一次摺出 2 個正方形；第二次可再摺出 2 個正方形；第三次可再摺出 4 個正方形；依此類推如圖(8)所示：



圖(8)

$$\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = [2, 2, 4] = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{4}} = \frac{22}{9}$$

我們利用計算機計算出 $\left| \sqrt{2} \times \sqrt{3} - \frac{22}{9} \right| \leq 0.005$ 誤差小於 0.5%

由此可知，利用尺規作圖可以摺出 $\sqrt{2} \times \sqrt{3}$ 的近似值。

(四) $\sqrt{K}$ 連分數之規律性

我們以遞迴疊代方式, 歸納出 $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots, \sqrt{K}$ 連分數的規律性:

1、 $\sqrt{n^2+1}$ 的連分數

n	$\sqrt{n^2+1}$	連分數(一位循環)
1	$\sqrt{2}$	$[1; 2, 2, 2, 2, \dots] = [1; \overline{2}]$
2	$\sqrt{5}$	$[2; 4, 4, 4, 4, \dots] = [2; \overline{4}]$
3	$\sqrt{10}$	$[3; 6, 6, 6, 6, \dots] = [3; \overline{6}]$
4	$\sqrt{17}$	$[4; 8, 8, 8, 8, \dots] = [4; \overline{8}]$
5	$\sqrt{26}$	$[5; 10, 10, 10, 10, \dots] = [5; \overline{10}]$
n	$\sqrt{n^2+1}$	$[n; 2n, 2n, 2n, 2n, \dots] = [n; \overline{2n}]$

說明: $\sqrt{n^2+1} = [n; \overline{2n}] \quad (n \leq \sqrt{n^2+1} < n+1)$

$$\begin{aligned}
 \because \sqrt{n^2+1} &= n + (\sqrt{n^2+1} - n) = n + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{n^2+1} - n}} \\
 &= n + \frac{1}{\sqrt{n^2+1} + n} = n + \frac{1}{2n + (\sqrt{n^2+1} - n)} \quad (\because 2n \leq \sqrt{n^2+1} + n < 2n+1)
 \end{aligned}$$

由上式分母可知, $\sqrt{n^2+1} - n$ 就會再循環, 所以 $\sqrt{n^2+1}$

的連分數可以表示為 $[n; \overline{2n}]$ 。

2、 $\sqrt{n^2+2}$ 的連分數

n	$\sqrt{n^2+2}$	連分數(二位循環)
1	$\sqrt{3}$	$[1; 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, \dots] = [1; \overline{12}]$
2	$\sqrt{6}$	$[2; 2, 4, 2, 4, 2, 4, 2, 4, \dots] = [2; \overline{24}]$
3	$\sqrt{11}$	$[3; 3, 6, 3, 6, 3, 6, 3, 6, \dots] = [3; \overline{36}]$
4	$\sqrt{18}$	$[4; 4, 8, 4, 8, 4, 8, 4, 8, \dots] = [4; \overline{48}]$
5	$\sqrt{27}$	$[5; 5, 10, 5, 10, 5, 10, 5, 10, \dots] = [5; \overline{5, 10}]$
n	$\sqrt{n^2+2}$	$[n; n, 2n, n, 2n, n, 2n, \dots] = [n; \overline{n, 2n}]$

說明： $\sqrt{n^2+2} = [n; \overline{n, 2n}]$ ($n \leq \sqrt{n^2+2} < n+1$)

$$\begin{aligned} \because \sqrt{n^2+2} &= n + (\sqrt{n^2+2} - n) = n + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{n^2+2} - n}} \\ &= n + \frac{1}{\frac{\sqrt{n^2+2} + n}{2}} = n + \frac{1}{n + \frac{\sqrt{n^2+2} - n}{2}} = n + \frac{1}{n + \frac{1}{\sqrt{n^2+2} - n}} \end{aligned}$$

$$(\because n \leq \frac{\sqrt{n^2+2} + n}{2} < n + \frac{1}{2})$$

$$= n + \frac{1}{n + \frac{1}{\sqrt{n^2+2} + n}} = n + \frac{1}{n + \frac{1}{2n + (\sqrt{n^2+2} - n)}}$$

由上式分母可知， $\sqrt{n^2+2} - n$ 就會再循環，所以 $\sqrt{n^2+2}$

的連分數可以表示為 $[n; \overline{n, 2n}]$ 。

3、說明 $\sqrt{n^2+n}$ 的連分數為 $[n; \overline{2, 2n}]$ ($n \leq \sqrt{n^2+n} < n+1$)

$$\begin{aligned} \because \sqrt{n^2+n} &= n + (\sqrt{n^2+n} - n) = n + \frac{1}{\frac{\sqrt{n^2+n} + n}{n}} \\ &= n + \frac{1}{2 + \frac{\sqrt{n^2+n} - n}{n}} = n + \frac{1}{2 + \frac{1}{\sqrt{n^2+n} + n}} \quad \left(\because 2 \leq \frac{\sqrt{n^2+n} + n}{n} < 2 + \frac{1}{n} \right) \\ &= n + \frac{1}{2 + \frac{1}{2n + (\sqrt{n^2+n} - n)}} \end{aligned}$$

由上式分母可知, $\sqrt{n^2+n} - n$ 就會再循環, 所以 $\sqrt{n^2+n}$

的連分數可以表示為 $[n; \overline{2, 2n}]$

4、說明 $\sqrt{n^2+2n}$ 的連分數為 $[n; \overline{1, 2n}]$ ($n \leq \sqrt{n^2+2n} < n+1$)

$$\begin{aligned} \because \sqrt{n^2+2n} &= n + (\sqrt{n^2+2n} - n) = n + \frac{1}{\frac{\sqrt{n^2+2n} + n}{2n}} \\ &= n + \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{n^2+2n} - n}{2n}} = n + \frac{1}{1 + \frac{1}{\sqrt{n^2+2n} + n}} \quad \left(\because 1 \leq \frac{\sqrt{n^2+2n} + n}{2n} < 1 + \frac{1}{2n} \right) \\ &= n + \frac{1}{1 + \frac{1}{2n + (\sqrt{n^2+2n} - n)}} \end{aligned}$$

由上式分母可知, $\sqrt{n^2+2n} - n$ 就會再循環, 所以 $\sqrt{n^2+2n}$

的連分數可以表示為 $[n; \overline{1, 2n}]$

二、利用摺紙的方式，摺出未知矩形的長寬比值。

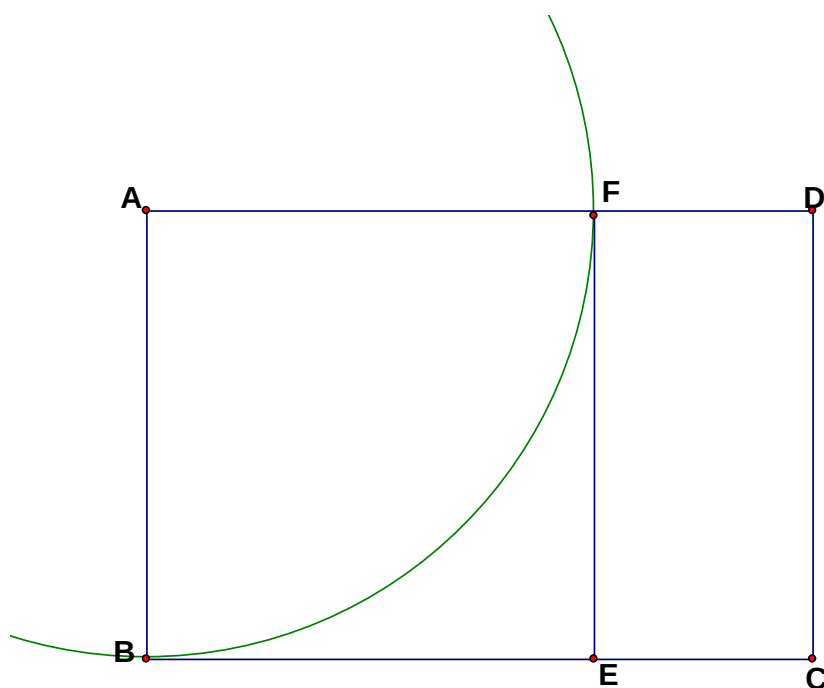
準備工具：長方形紙片若干張及剪刀

長方形規格：長：寬 $=a:b$ ($b \leq a$) 如圖(9)所示：

摺法：

1、 $\overline{AD} = a; \overline{AB} = \overline{AF} = b \Rightarrow \overline{DF} = b - a$ 由下圖(9)可知

以最短邊長 $\overline{AB}$ 可摺出 1 個正方形 $ABEF$ 及矩形 $DCEF$ 。

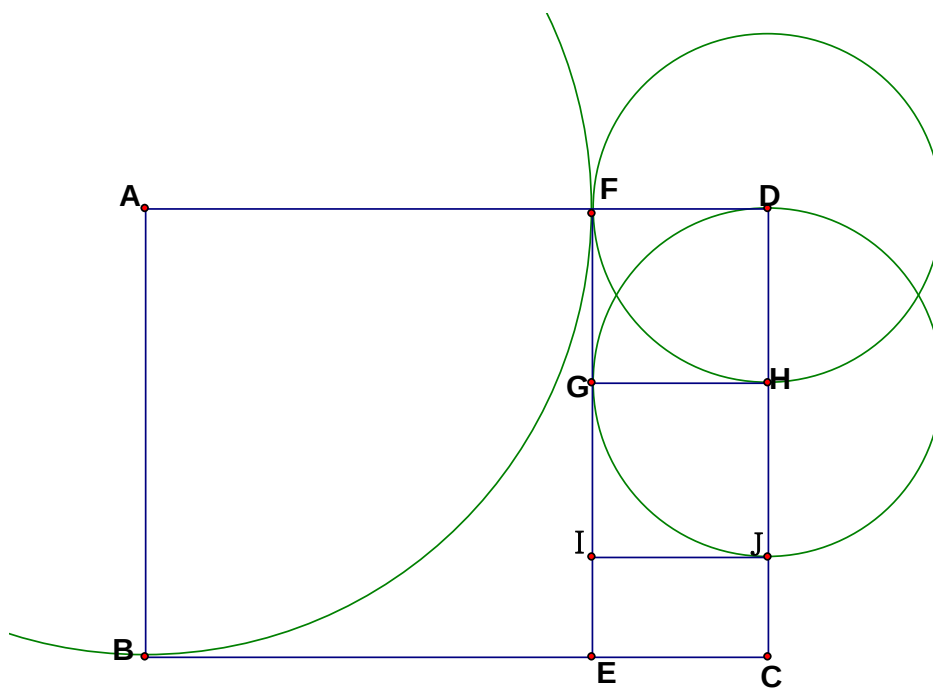


圖(9)

2、接著再以 $\overline{DF} = b - a$ 為邊長，由下圖(10)可知可摺出

2 個正方形 $DHGF$ 、 $GHIJ$ 及矩形 $IJCE$

$$\therefore \overline{DH} = \overline{HJ} = b - a \therefore \overline{CJ} = a - 2(b - a) = 3a - 2b$$

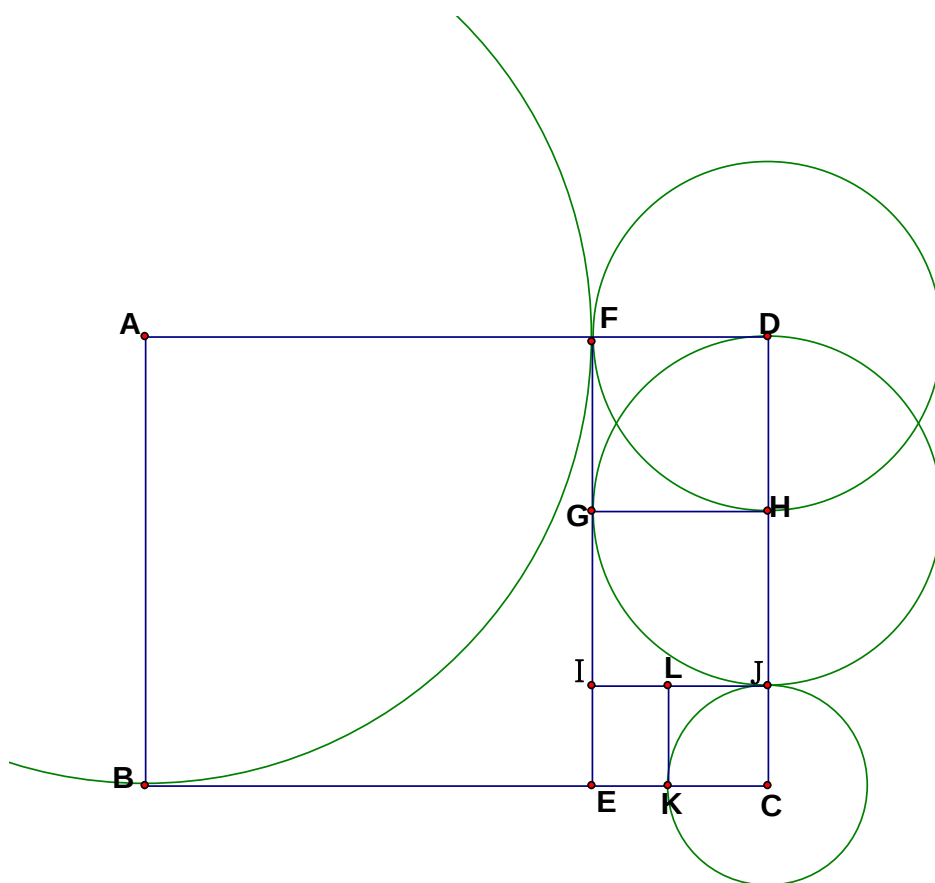


圖(10)

3、接著再以 $\overline{CJ} = 3a - 2b$ 為邊長，由下圖(11)可知可摺出

1 個正方形 $JCKL$ 及矩形 $EKLI$

$$\therefore \overline{CJ} = \overline{JL} = 3a - 2b \therefore \overline{EK} = (b - a) - (3a - 2b) = 3b - 4a$$



圖(11)

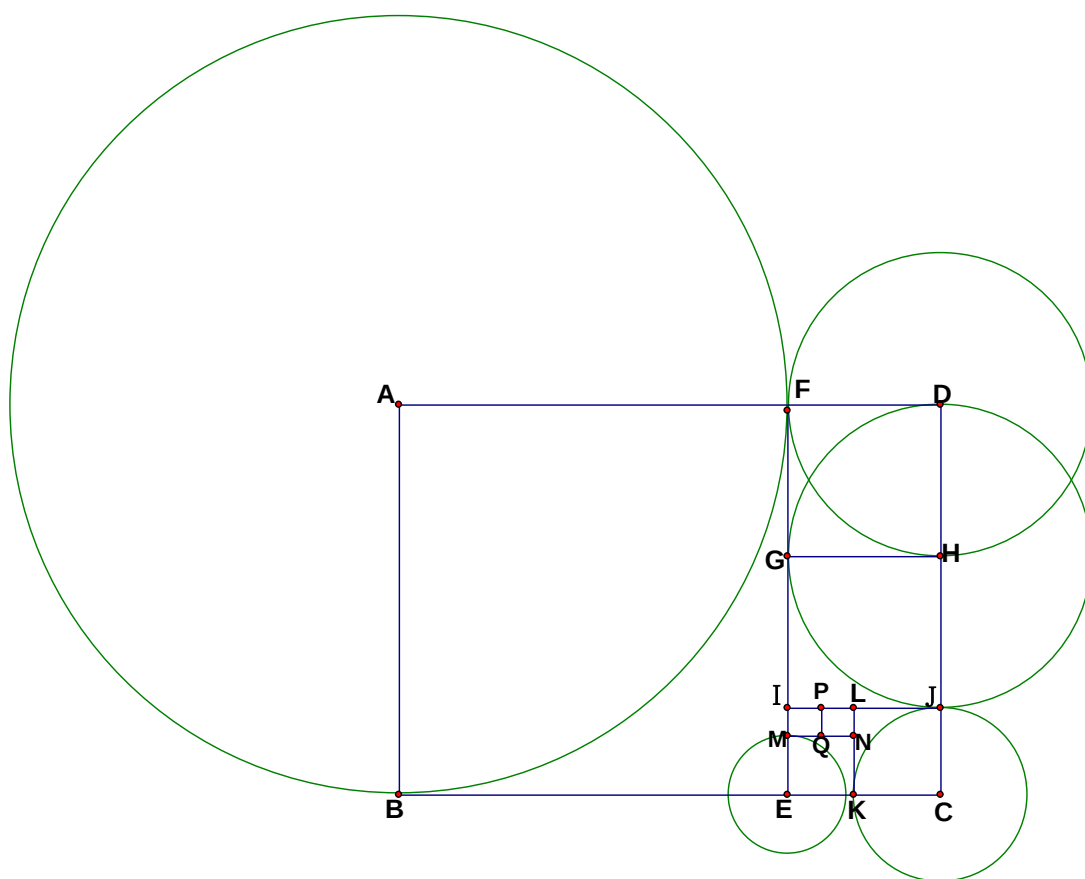
4、最後，再以 $\overline{EK} = 3b - 4a$ 為邊長，由下圖(12)可知可摺出

1 個正方形 $MNEK$ 及 2 個小正方形 $PQIM$ 、 $PQLN$

$$\therefore \overline{IM} = (3a - 2b) - (3b - 4a) = 7a - 5b$$

$$\text{且 } \overline{MN} = 2\overline{IM} \Leftrightarrow 3b - 4a = 2(7a - 5b)$$

$$\therefore 3b - 4a = 14a - 10b \Leftrightarrow 13b = 18a \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{18}{13}$$



圖(12)

5、我們用連分數也可以將 $\frac{b}{a}$ 值摺出近似值為 $[1,2,1,2]$

$$\therefore \frac{b}{a} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}} = \frac{18}{13}$$

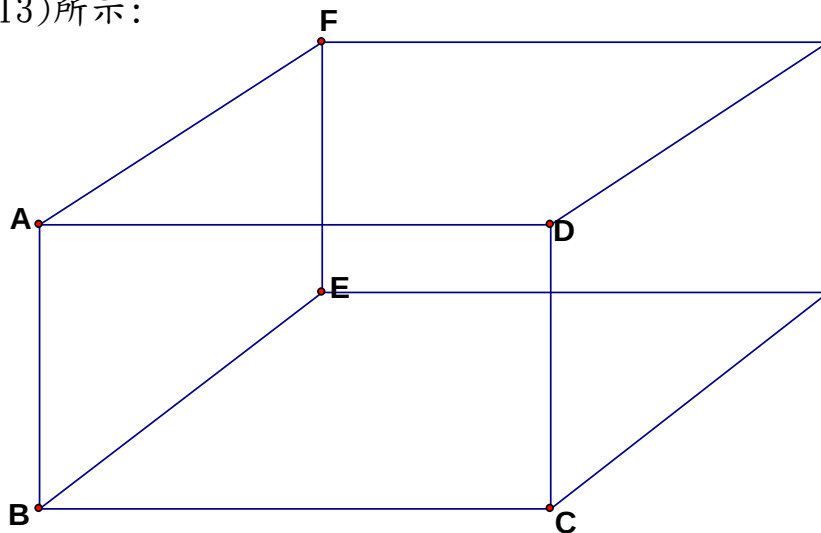
由此可知這個矩形的長和寬的比值為 $\frac{18}{13}$ 。

所以,任何矩形(長為 b 單為,寬為 a 單位)其長和寬的比值

$$\frac{b}{a} = [n_1, n_2, n_3, n_4, \dots] = n_1 + \frac{1}{n_2 + \frac{1}{n_3 + \frac{1}{n_4 + \dots}}}$$

三、利用摺紙的方式，摺出長方體的長寬高的比。

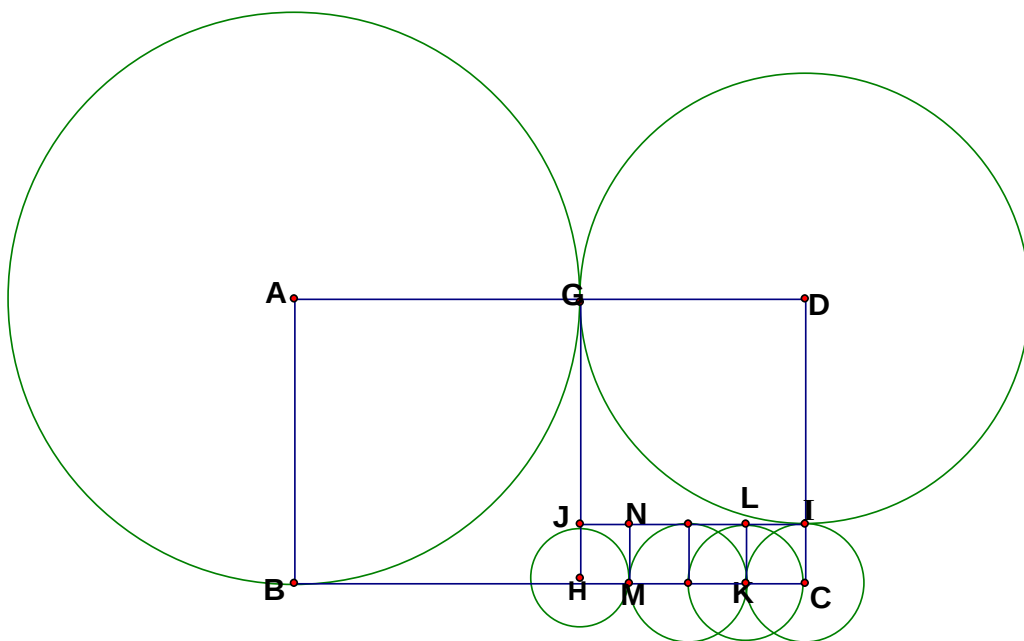
如圖(13)所示：



圖(13)

$$\frac{\text{長}}{\text{高}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{a}{c}; \quad \frac{\text{寬}}{\text{高}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{AB}} = \frac{b}{c}$$

1、首先對矩形 $ABCD$ 摺出 $\frac{\text{長}}{\text{高}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{a}{c}$ 近似值，如下圖(14)所示：



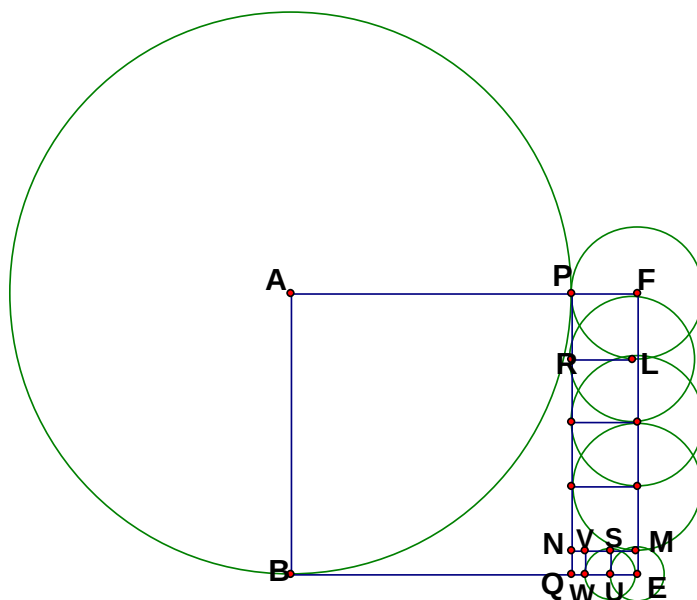
圖(14)

由上圖(14)可摺出 1 個正方形 $ABGH$ 、1 個正方形 $GDIJ$ 、

3 個正方形 $JCLK$ 和 1 個小正方形 $NMJH$ ；

$$\text{所以 } \frac{\text{長}}{\text{高}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{a}{c} = [1, 1, 3, 1] = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1}}} = \frac{9}{5}。$$

2、同理, 對矩形 $ABEF$ 摺出 $\frac{\text{寬}}{\text{高}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{AB}} = \frac{b}{c}$ 近似值, 如下圖(15)所示:



圖(15)

由上圖(15)可摺出 1 個正方形 $ABQP$ 、4 個正方形 $PFLR$ 、

2 個正方形 $SUEM$ 和 1 個小正方形 $NQVW$ ；

$$\text{所以 } \frac{\text{寬}}{\text{高}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{AB}} = \frac{b}{c} = [1, 4, 2, 1] = 1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1}}} = \frac{16}{13}$$

3、所以由上可知 $\frac{a}{c} = \frac{9}{5}$ 及 $\frac{b}{c} = \frac{16}{13}$ $a:b:c = \frac{9}{5}:\frac{16}{13}:1 = 117:80:65$

由此, 我們也可以相同摺法, 摺出 $\frac{\text{長}}{\text{高}} = \frac{a}{c} = [n_1, n_2, n_3, n_4, \dots]$ 和

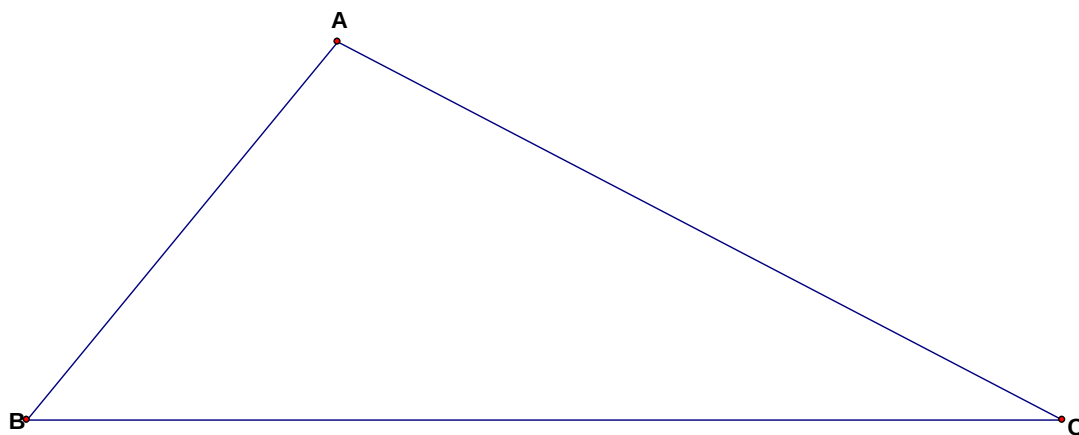
$\frac{\text{寬}}{\text{高}} = \frac{b}{c} = [m_1, m_2, m_3, m_4, \dots]$ 進而求出長方體的長寬高的比

$\Rightarrow \text{長:寬:高} = [n_1, n_2, n_3, n_4, \dots]:[m_1, m_2, m_3, m_4, \dots]:1$

四、以尺規作圖的方式，逼近多邊形的邊長比。

在任意 $\triangle ABC$ 中， $a = \overline{BC}$; $b = \overline{AC}$; $c = \overline{AB}$ 且 $c \leq b \leq a$ ，我們以三角形

最短邊長為基準邊，摺出 $\frac{b}{c}$ 的近似值，如圖(16)所示：



圖(16)

1、求 $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{b}{c}$ 的近似值：如下圖(17)所示：

(1)先以 A 為圓心， $\overline{AB} = c$ 為半徑畫弧交 $\overline{AC}$ 與 $\overline{BC}$ 於 D, E 兩點。

(2)再以 D 為圓心， $\overline{DC} = b - c$ 為半徑畫弧 1 次交 $\overline{AD}$ 於 D_1 點。

(3)再以 D_1 為圓心， $\overline{D_1A} = 2c - b$ 為半徑畫弧 2 次交 $\overline{D_1D}$ 於 F_2 點。

(4)最後以 F_2 為圓心， $\overline{F_2D} = 3b - 5c$ 為半徑畫弧 12 次剛好交至 F_1 點。

$$2、\frac{b}{c} = [1, 1, 2, 12] = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + 12}} = \frac{62}{37}$$

$$\therefore \frac{b}{c} = 1 + \frac{b-c}{c} = 1 + \frac{1}{\frac{c}{b-c}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{b-c}{2c-b}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{2c-b}{3b-5c}}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{12}}} = \frac{62}{37}$$

(1)再以 B 為圓心, $\overline{BA}=c$ 為半徑畫弧 2 次交 $\overline{BC}$ 於 H_2 點。

(2)再以 H_2 為圓心, $\overline{H_2C}=a-2c$ 為半徑畫弧 9 次交 $\overline{H_1H_2}$ 於 F_2

剛好交至 H_1 點。

$$4、\frac{a}{c}=[2,9]=2+\frac{1}{9}=\frac{19}{9}$$

$$\therefore \frac{a}{c}=2+\frac{a-2c}{c}=2+\frac{1}{\frac{c}{a-2c}}=2+\frac{1}{9}=\frac{19}{9}$$

$$\therefore a:b:c=\frac{a}{c}:\frac{b}{c}:1=[2,9]:[1,1,2,12]:1=\frac{19}{9}:\frac{62}{37}:1=703:558:333$$

5、所以在任意 $\triangle ABC$ 中, $a=\overline{BC}; b=\overline{AC}; c=\overline{AB}$ 且 $c \leq b \leq a$,

以最短邊 c 做為基準邊, 則其它邊以此為基準; 求其比值

為 $\frac{a}{c}=[n_1, n_2, n_3, \dots], \frac{b}{c}=[m_1, m_2, m_3, \dots]$; 則三角形三邊長比為

$$a:b:c=\frac{a}{c}:\frac{b}{c}:1=[n_1, n_2, n_3, \dots]:[m_1, m_2, m_3, \dots]:1$$

6、推廣: 多邊形邊長為 $d_n \geq d_{n-1} \geq \dots \geq d_2 \geq d_1$; 並以最短邊 d_1 為基準邊;

, 則其它邊以此為基準; 求其比值為(其中 $n_i, m_j, p_k \in N$)

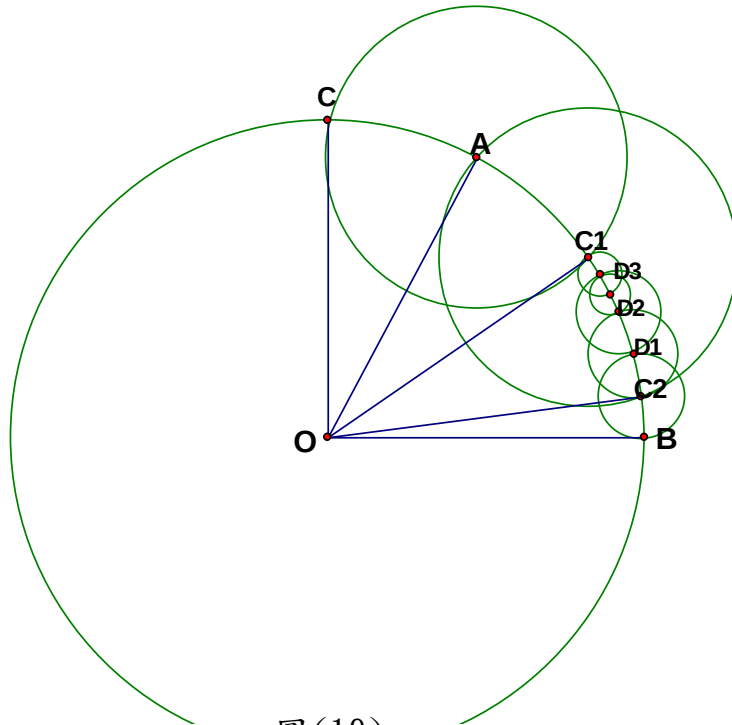
$$\frac{d_n}{d_1}=[n_1, n_2, n_3, \dots], \frac{d_{n-1}}{d_1}=[m_1, m_2, m_3, \dots], \dots, \frac{d_2}{d_1}=[p_1, p_2, p_3, \dots]$$

因此多邊形邊長比為:

$$d_n:d_{n-1}:\dots:d_2:d_1=\frac{d_n}{d_1}:\frac{d_{n-1}}{d_1}:\dots:\frac{d_2}{d_1}:1=[n_1, n_2, n_3, \dots]:[m_1, m_2, m_3, \dots]:\dots:[p_1, p_2, p_3, \dots]:1$$

五、以尺規作圖的方式，逼近扇形的圓心角。

1、當扇形的圓心角 $\angle AOB = \theta < 90^\circ$ 時，如圖(19)所示：



圖(19)

(1)先作 $\overline{OB}$ 的垂直線段，使得 $\overline{OC} \perp \overline{OB}$ ，所以 $\angle COB = 90^\circ$ ，則

$$\angle COA = 90^\circ - \theta$$

(2)以 A 為圓心， $\overline{CA}$ 為半徑畫弧 2 次，交弧 AB 於 C_1, C_2 兩點，則

$$\angle C_1OC_2 = 90^\circ - \theta \text{ 且剩下 } \angle C_2OB = \theta - 2(90^\circ - \theta) = 3\theta - 180^\circ$$

(3)再以 C_2 為圓心， $\overline{C_2B}$ 為半徑畫弧 3 次，交弧 C_2C_1 於 D_1, D_2, D_3 三點，

$$\text{則 } \angle C_1OD_3 = (90 - \theta) - 3(3\theta - 180) = 630^\circ - 10\theta$$

(4)最後再以 D_3 為圓心， $\overline{C_1D_3}$ 為半徑，剛好畫弧 2 次交於 D_2 點

$$\therefore 2(630 - 10\theta) = 3\theta - 180 \Leftrightarrow 1260 - 20\theta = 3\theta - 180$$

$$\Leftrightarrow 23\theta = 1440 \quad \therefore \theta = \frac{1440}{23} = 62.6087^\circ$$

(5) 我们以弧 AC 為基準弧；並假設 $\angle AOB = \theta$ 則 $\angle AOC = 90 - \theta$

以連分數呈現 $\frac{\text{弧}AB}{\text{弧}AC} = \frac{\theta}{90 - \theta}$ 的比值

$$\therefore \frac{\text{弧}AB}{\text{弧}AC} = \frac{\theta}{90 - \theta} = [2, 3, 2] = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2}} = \frac{16}{7}$$

$$\text{經過交叉相乘得 } 1440 - 16\theta = 7\theta \Leftrightarrow 23\theta = 1440 \therefore \theta = \frac{1440}{23} = 62.6087^\circ$$

2、當扇形的圓心角 $\angle AOB = \theta > 90^\circ$ 時，如圖(20)所示：

(1) 先作 $\overline{OB}$ 的垂直線段，使得 $\overline{OC} \perp \overline{OB}$ ，所以 $\angle COB = 90^\circ$ ，則

$$\angle COA = \theta - 90^\circ$$

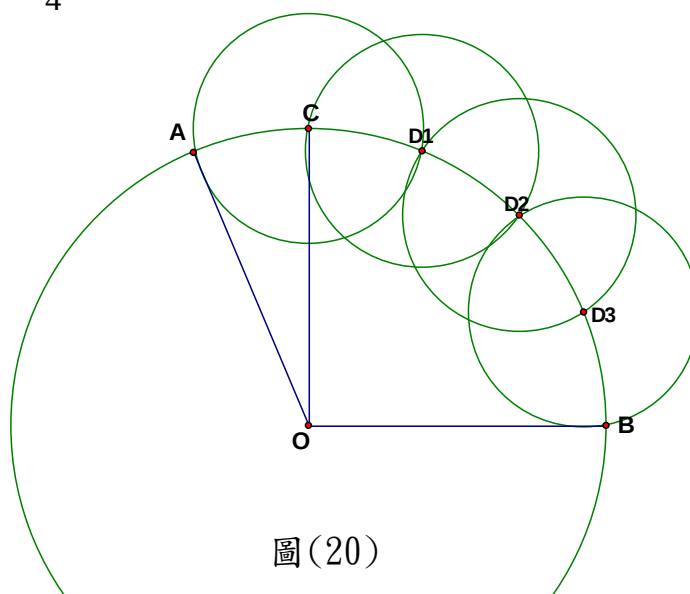
(2) 以 C 為圓心， $\overline{CA}$ 為半徑畫弧 5 次，剛好交弧 AB 於 B 點，則

$$\angle AOB = 5\angle AOC \Rightarrow \theta = 5(\theta - 90) \Leftrightarrow \theta = 5\theta - 450 \therefore \theta = \frac{450^\circ}{4} = 112.5^\circ$$

(3) 我们以弧 AC 為基準弧；並假設 $\angle AOB = \theta$ 則 $\angle AOC = \theta - 90$

以連分數呈現 $\frac{\text{弧}AB}{\text{弧}AC} = \frac{\theta}{\theta - 90}$ 的比值

$$\therefore \frac{\text{弧}AB}{\text{弧}AC} = \frac{\theta}{\theta - 90} = [5] = 5 \therefore \theta = \frac{450^\circ}{4} = 112.5^\circ$$



圖(20)

3、以尺規作圖的方式，逼近扇形的圓心角分兩種情況，

(1) 當扇形的圓心角 $\angle AOB = \theta < 90^\circ$ 時， $\angle AOC = 90 - \theta$

我们以弧 AC 為基準弧；則 $\frac{\text{弧}AB}{\text{弧}AC} = \frac{\theta}{90 - \theta}$ 以連分數呈現為

$$\frac{\text{弧}AB}{\text{弧}AC} = \frac{\theta}{90 - \theta} = [n_1, n_2, n_3, n_4, \dots] = k ; \text{其中 } k \text{ 為有理數}$$

$$\text{則 } \angle AOB = \theta = \frac{90k}{k+1} .$$

(2) 當扇形的圓心角 $\angle AOB = \theta > 90^\circ$ 時， $\angle AOC = \theta - 90$

我们以弧 AC 為基準弧；則 $\frac{\text{弧}AB}{\text{弧}AC} = \frac{\theta}{\theta - 90}$ 以連分數呈現為

$$\frac{\text{弧}AB}{\text{弧}AC} = \frac{\theta}{\theta - 90} = [n_1, n_2, n_3, n_4, \dots] = k ; \text{其中 } k \text{ 為有理數}$$

$$\text{則 } \angle AOB = \theta = \frac{90k}{k-1} .$$

伍、研究結果

一、利用摺紙的方式摺出 $\sqrt{2}$ 、 $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ 、 $\sqrt{2} \times \sqrt{3}$ 的值。

$$(一) \frac{\sqrt{2}}{1} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}} \text{ 可得出 } \sqrt{2} = [1, 2, 2, 2] = \frac{17}{12}$$

我們利用計算機計算出 $\left| \sqrt{2} - \frac{17}{12} \right| \leq 0.0025$ 誤差小於 0.25%

由此可知，利用尺規作圖可以摺出 $\sqrt{2}$ 的近似值。

$$(二) \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \text{ 近似值為 } [1, 4, 2] = 1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{2}} = \frac{11}{9}$$

我們利用計算機計算出 $\left| \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - \frac{11}{9} \right| \leq 0.003$ 誤差小於 0.3%

由此可知，利用尺規作圖可以摺出 $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ 的近似值。

$$(三) \quad \sqrt{2} \times \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = [2, 2, 4] = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{4}} = \frac{22}{9}$$

我們利用計算機計算出 $\left| \sqrt{2} \times \sqrt{3} - \frac{22}{9} \right| \leq 0.005$ 誤差小於 0.5%

由此可知, 利用尺規作圖可以摺出 $\sqrt{2} \times \sqrt{3}$ 的近似值。

(四) 以遞迴疊代方式, 歸納出 $\sqrt{K}$ 連分數之規律性

K	$\sqrt{K}$	連分數
$n^2 + 1$	$\sqrt{n^2 + 1}$	$[n; 2n, 2n, 2n, 2n, \dots] = [n; \overline{2n}]$
$n^2 + 2$	$\sqrt{n^2 + 2}$	$[n; n, 2n, n, 2n, n, 2n, \dots] = [n; \overline{n, 2n}]$
$n^2 + n$	$\sqrt{n^2 + n}$	$[n; 2, 2n, 2, 2n, \dots] = [n; \overline{2, 2n}]$
$n^2 + 2n$	$\sqrt{n^2 + 2n}$	$[n; 1, 2n, 1, 2n, \dots] = [n; \overline{1, 2n}]$

二、利用摺紙的方式, 摺出未知矩形的長寬比值。

任何矩形(長為 b 單為, 寬為 a 單位)其長和寬的比值

$$\frac{b}{a} = [n_1, n_2, n_3, n_4, \dots] = n_1 + \frac{1}{n_2 + \frac{1}{n_3 + \frac{1}{n_4 + \dots}}}$$

三、利用摺紙的方式, 摺出長方體的長寬高的比。

$$\frac{\text{長}}{\text{高}} = \frac{a}{c} = [n_1, n_2, n_3, n_4, \dots] \text{ 和}$$

$$\frac{\text{寬}}{\text{高}} = \frac{b}{c} = [m_1, m_2, m_3, m_4, \dots] \text{ 進而求出長方體的長寬高的比}$$

$$\Rightarrow \text{長: 寬: 高} = [n_1, n_2, n_3, n_4, \dots] : [m_1, m_2, m_3, m_4, \dots] : 1$$

四、以尺規作圖的方式，逼近多邊形的邊長比。

假設多邊形邊長為 $d_n \geq d_{n-1} \geq \dots \geq d_2 \geq d_1$ ；並以最短邊 d_1 為基準邊；

，則其它邊以此為基準；求其比值為（其中 $n_i, m_j, p_k \in N$ ）

$$\frac{d_n}{d_1} = [n_1, n_2, n_3, \dots], \frac{d_{n-1}}{d_1} = [m_1, m_2, m_3, \dots], \dots, \frac{d_2}{d_1} = [p_1, p_2, p_3, \dots]$$

因此多邊形邊長比為：

$$d_n : d_{n-1} : \dots : d_2 : d_1 = \frac{d_n}{d_1} : \frac{d_{n-1}}{d_1} : \dots : \frac{d_2}{d_1} : 1 = [n_1, n_2, n_3, \dots] : [m_1, m_2, m_3, \dots] : \dots : [p_1, p_2, p_3, \dots] : 1$$

五、以尺規作圖的方式，逼近扇形的圓心角。

(1) 當扇形的圓心角 $\angle AOB = \theta < 90^\circ$ 時， $\angle AOC = 90 - \theta$

我们以弧 AC 為基準弧；則 $\frac{\text{弧}AB}{\text{弧}AC} = \frac{\theta}{90 - \theta}$ 以連分數呈現為

$$\frac{\text{弧}AB}{\text{弧}AC} = \frac{\theta}{90 - \theta} = [n_1, n_2, n_3, n_4, \dots] = k ; \text{其中 } k \text{ 為有理數}$$

$$\text{則 } \angle AOB = \theta = \frac{90k}{k+1} .$$

(2) 當扇形的圓心角 $\angle AOB = \theta > 90^\circ$ 時， $\angle AOC = \theta - 90$

我们以弧 AC 為基準弧；則 $\frac{\text{弧}AB}{\text{弧}AC} = \frac{\theta}{\theta - 90}$ 以連分數呈現為

$$\frac{\text{弧}AB}{\text{弧}AC} = \frac{\theta}{\theta - 90} = [n_1, n_2, n_3, n_4, \dots] = k ; \text{其中 } k \text{ 為有理數}$$

$$\text{則 } \angle AOB = \theta = \frac{90k}{k-1} .$$

陸、參考資料

- 1、數學史概論(譯著:歐陽絳 P60-P61)
- 2、數學傳播期刊之認識連分數(筆者:林聰源)
- 3、與中學生談中國數學上的幾大成就(華羅庚著 P58-P61;P80-P93)

【評語】 030402

本作品是利用摺紙的輔助來了解並探討連分數，內容也呈現不少研究成果。較為不足的地方是在創新的部分。