中華民國第51屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

030401

光纖網路連連看

學校名稱：高雄市立鹽埕國民中學

作者：	指導老師：
國二 李明叡	嚴銘鴻 許進富

關鍵詞：網路、遞迴數列、數學歸納法

作品名稱：光纖網路連連看

摘要

某日看到一建立光纖網路的題目，發現這個題目和實際應用有些關聯。於是我們先從畫圖列出所有可能的種類，並從各城市連結的關係推得城市數和所有可能數關係：
N(n+2)=3N(n+1)－N(n) ,（$n \geq 1$,n 爲自然數），再利用遞迴數列得到其一般項，並且由數學歸納法證明：$N(n+1)=\frac{1}{\sqrt{5}}(x_1^n - x_2^n)$,(n≥1,n 爲自然數,其中 $x_1=\frac{3+\sqrt{5}}{2}, x_2=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$)。
再來，我們將標號差推廣至差≤3，發現這比原題目複雜很多，因此我們把 K(n)分類爲 A(n)+B(n)表示（其中 A(n)爲從 K(n－1)延伸之可能種類，B(n)則爲由 n 號城市必與 n-1,n-2,n-3 號 3 個城市相連而成之網路）
K(2)=1=A(2)
K(3)=3=A(3)
K(4)=16=A(4)+B(4),其中 A(4)=15,B(4)=1
K(5)=75=A(5)+B(5),其中 A(5)=72,B(5)=3
K(6)=335=A(6)+B(6),其中 A(6)=325,B(6)=11
K(7)=1485=A(7)+B(7),其中 A(7)=1439,B(7)=46
但經過重重討論，仍然沒有一個好的結果。

壹、 研究動機

某日於 2008 數學奧林匹亞選訓營報告上看到一建立光纖網路的題目「有標號從 1 至 n 的城市，要建立一光纖網路，但每一段只能從一座城市建到另一座城市，中間不經其他城市，而且標號差超過 2 的城市間也不能建一段。若要求任何城市都可以直接或間接連線，則最少需建(n－1)段，那麼只需(n－1)段的不同建法有多少種？」，發現這個題目和實際應用有些關聯，因此興起了研究興趣，由原題的城市標號差超過二的不相連開始討論，竟別有洞天，於是促成此次研究。

貳、 研究目的

一、求出原題目
二、推展到城市標號差超過三的不相連

參、 研究設備及器材

紙、筆。

肆、　研究過程、方法、討論及結果

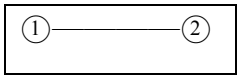
有標號從 1 至 n 的城市，要建立一光纖網路，但每一段只能從一座城市建到另一座城市，中間不經其他城市，而且標號差超過 2 的城間也不能建一段。若要求任何城市都可以直接或間接連線，則最少需建 n－1 段，那麼只需 n－1 段的不同建法有多少種？

目的一：求出原題目

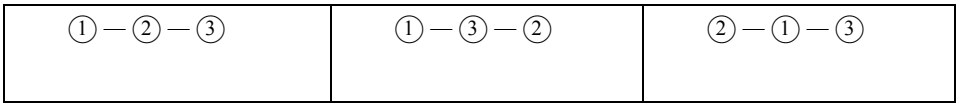
令 N(n)=方法數 N(2)=1,N(3)=3,n≥4

標號差≤2

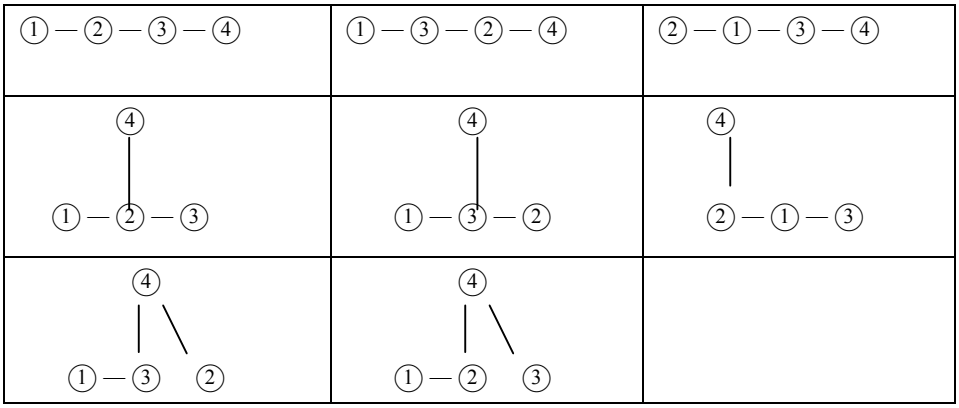
N(2)=1



N(3)=3



N(4)=8



N(5)＝21

①－②－③－④－⑤	①－②－③－⑤－④	⑤ | ①－②－③－④
④－⑤ | ①－②－③	④ | ①－②－③－⑤	
①－②－④－③－⑤	①－②－④－⑤－③	⑤ | ①－②－④－③
⑤ | ①－③－②－④	⑤ | ①－③－②－④	
④－⑤ | ①－③－②	④ ⑤ ①－③－②	④　⑤ ①－③－②
⑤ | ①－③－④－②	①－③－⑤－④－②	⑤ | ①－③－④－②
⑤ | ②－①－③－④	②－①－③－⑤－④	⑤ | ②－①－③－④
⑤ | ④－②－①－③	⑤ | ④－②－①－③	

由上式知：在 N(5)時，當③－④連時，⑤有 3 種放法；但當③、④不相連時，⑤只有 2 種放法(⑤只能和③、④相接)。

現我們先將 N(4)的 8 種排法之中③－④都視同連結，則 N(5)有 3×N(4)種連法(Q N(5)是將⑤接至 N(4)之中的 8 種排法中)。但是並非 N(4)的 8 種排法之中③－④都是連結的，且 N(4)的 8 種排法之中③－④不連結的正好有 N(3)=3 種(Q N(4)是將④接至 N(3)之中的 3 種排法中，且④不是和③連就是和②連)。

N(5)= 3N(4)-N(3)

同理可得：N(4)=3N(3)-N(2) , 因此確定：N(n+2)=3N(n+1)－N(n), n≥ 2

現在我們想要得到 N(n+2)的一般式,做法如下:

N(n+2)=3N(n+1)－N(n), n≥2 欲推得 $\begin{cases} N(n+2)-x_1N(n+1)=x_2[N(n+1)-x_1N(n)] \\ N(n+2)-x_2N(n+1)=x_1[N(n+1)-x_2N(n)] \end{cases}, n\ge 2$

$\Rightarrow N(n+2)=(x_1+x_2)N(n+1)-x_2x_1N(n), n\ge 2$

$\Rightarrow \begin{cases} x_1+x_2=3 \\ x_1x_2=1 \end{cases}$,可將 x_1,x_2 視爲一個「一元二次方程式」的兩根得

$x^2-3x+1=0, x=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$, 可令 $x_1=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}, x_2=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$

則我們已經得到 $x_1=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}, x_2=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ 確定值的方程組

$\begin{cases} N(n+2)-x_1N(n+1)=x_2[N(n+1)-x_1N(n)] \\ N(n+2)-x_2N(n+1)=x_1[N(n+1)-x_2N(n)] \end{cases}, n\ge 2$

若令 $\begin{cases} P_{n+2}=N(n+2)-x_1N(n+1) \\ q_{n+2}=N(n+2)-x_2N(n+1) \end{cases}, n\ge 2 \Rightarrow \begin{cases} P_{n+2}=x_2P_{n+1} \\ q_{n+2}=x_1q_{n+1} \end{cases}, n\ge 2$

可得: $P_{n+2}=x_2P_{n+1}, P_{n+1}=x_2P_n$,L L ,$P_5=x_2P_4, P_4=x_2P_3 \Rightarrow P_{n+2}=x_2^{n-1}P_3$,同理 $q_{n+2}=x_1^{n-1}q_3$

$\begin{cases} N(n+2)-x_1N(n+1)=x_2^{n-1}P_3 \\ N(n+2)-x_2N(n+1)=x_1^{n-1}q_3 \end{cases}, n\ge 2 \Rightarrow N(n+1)=\dfrac{x_1^{n-1}q_3-x_2^{n-1}p_3}{x_1-x_2}=\dfrac{1}{x_1-x_2}(x_1^n\dfrac{q_3}{x_1}-x_2^n\dfrac{P_3}{x_2})$

因 $q_3=N(3)-x_2N(2)=3-1\times x_2=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}=x_1$,同理 $P_3=x_2 \Rightarrow \dfrac{q_3}{x_1}=\dfrac{P_3}{x_2}=1$ 且 $\dfrac{1}{x_1-x_2}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

故 $N(n+1)=\dfrac{1}{\sqrt{5}}(x_1^n-x_2^n), n\ge 1$

以第二數學歸納法證明之：

1. $n=1\Rightarrow N(2)=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\times\sqrt{5}=1, n=2\Rightarrow N(3)=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\times\sqrt{5}\times 3=3$,成立

2.假如: $n=k\Rightarrow N(k+1)=\dfrac{1}{\sqrt{5}}(x_1^k-x_2^k), n=k+1\Rightarrow N(k+2)=\dfrac{1}{\sqrt{5}}(x_1^{k+1}-x_2^{k+1})$ 時成立

則 $n=k+2$ 時,Q $x^2=3x-1$

$\Rightarrow N(k+3)=3N(k+2)-N(k+1)=3\times\dfrac{1}{\sqrt{5}}(x_1^{k+1}-x_2^{k+1})-\dfrac{1}{\sqrt{5}}(x_1^k-x_2^k)$

$=\dfrac{1}{\sqrt{5}}[(3x_1^{k+1}-x_1^k)-(3x_2^{k+1}-x_2^k)]=\dfrac{1}{\sqrt{5}}(x_1^{k+2}-x_2^{k+2})$，故以數學歸納法證明得證!

$\Rightarrow N(n+1)=\dfrac{1}{\sqrt{5}}(x_1^n-x_2^n), n\ge 1$ 其中 $x_1=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}, x_2=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$，故得證。

目的二:延伸探討,若標號差≤3 的城市均可相連,則它是否會如標號差≤2 的城市相連這般，有一個不錯的結果?

令 K(n)=方法數,K(2)=1,K(3)=3,n≥4

標號差≤3

探討如下:

K(2)=1

①——②

K(3)=3

①—②—③	①—③—②	②—①—③

我們發現「標號差≤3」的情形複雜度遠高於「標號差≤2」的情形,而且例如在「n=4」的情形時,除了須從「n=3」延伸出 15 種之外,因爲城市④尚可接①,②,③號城市,因此我們將這種情形,自成一格以 B(4)來計,而由「n=3」延伸出 15 種記爲 A(4)=15,故可得 K(2)=1=A(2),K(3)=3=A(3),K(4)=16=15+1=A(4)+B(4),以下以此類推 K(n)=A(n)+B(n)

A(4)=15

①—②—③—④	①—②—④—③	④ | ①—②—③
①—④—②—③	④ | ①—②—③	①—③—②—④
①—③—④—② ④—①—③—②	④ | ①—③—②	①—④—③—② ②—①—③—④
②—①—④—③	④ | ②—①—③	②—④—①—③ ④—②—①—③

B(4)=1

② | ①—④—③

K(5)=75=A(5)+B(5)=72+3,其中 A(5)=72,B(5)=3

A(5)=72

1	④—①—②—③—⑤	④—①—②—⑤—③	⑤ | ④—①—②—③
2	⑤—④—①—②—③	④—①—③—②—⑤	④—①—③—⑤—②
3	⑤ | ④—①—③—②	⑤—④—①—③—②	④—②—①—③—⑤
4	④—⑤—②—①—③	⑤ | ④—②—①—③	⑤—④—②—①—③
5	⑤ | ①—④—③—②	①—④—⑤—③—②	⑤ | ①—④—③—②
6	①—④—③—⑤—②	①—④—③—②—⑤	①—④—②—③—⑤
7	①—④—②—⑤—③	⑤ | ①—④—②—③	①—④—⑤—②—③
8	⑤ | ①—④—②—③	②—④—①—③—⑤	⑤ | ②—④—①—③
9	②—⑤—④—①—③	⑤—②—④—①—③	④ | ①—②—③—⑤
10	④ | ①—②—⑤—③	④—⑤ | ①—②—③	④—⑤ / ①—②—③
11	④ ⑤ | / ①—②—③	④ | ①—③—②—⑤	④ | ①—③—⑤—②
12	④—⑤ / ①—③—②	④—⑤ | ①—③—②	④ ⑤ | / ①—③—②

13	④ | ②—①—③—⑤	④ | ⑤—②—①—③	④—⑤ | ②—①—③
14	①—②—④—③—⑤	①—②—④—⑤—③	⑤ | ①—②—④—③
15	①—②—⑤—④—③	⑤ | ①—②—④—③	①—③—④—②—⑤
16	①—③—④—⑤—②	⑤ | ①—③—④—②	①—③—⑤—④—②
17	⑤ | ①—③—④—②	②—①—④—③—⑤	②—①—④—⑤—③
18	⑤ | ②—①—④—③	⑤—②—①—④—③	①—②—③—④—⑤
19	①—②—③—⑤—④	⑤ | ①—②—③—④	①—②—⑤—③—④
20	⑤ | ①—②—③—④	①—③—②—④—⑤	①—③—②—⑤—④
21	⑤ | ①—③—②—④	①—③—⑤—②—④	⑤ | ①—③—②—④
22	②—①—③—④—⑤	②—①—③—⑤—④	⑤ | ②—①—③—④
23	⑤—②—①—③—④	②—⑤ | ①—④—③	② | ①—④—③—⑤
24	② | ①—④—⑤—③	②—⑤ / ①—④—③	②—⑤ | ①—④—③

B(5)=3

④ ①—②—⑤—③	④ ②—⑤—③—①	④—① ②—⑤—③

K(6)=336=A(6)+B(6)=325+11 其中 A(6)=325,,B(7)=11

因太多種，我們使用幾個游離“|”或”－” 來表示第六個城市可連接的位置:

A(6)=325

1	有 4 種 — ⑤—④—①—②—③ —	⑤— 有 3 種 — ④—①—②—③—
2	有 4 種 — ④—①—②—⑤—③ —	有 4 種 — ④—①—②—③—⑤ —
3	有 4 種 — ⑤—④—①—③—②	⑤ — 有 4 種 — ④—①—③—②
4	有 4 種 — ④—①—③—⑤—②	有 3 種 — ④—①—③—②—⑤ —
5	有 4 種 — ⑤—④—②—①—③ —	有 4 種 —④—⑤—②—①—③ —
6	⑤— 有 3 種 —④—②—①—③—	有 4 種 — ④—②—①—③—⑤ —
7	⑤—有 4 種 ①—④—②—③—	有 4 種 ①—④—⑤—②—③
8	有 3 種 ⑤— ①—④—②—③—	有 4 種 ①—④—②—⑤—③
9	有 4 種 ①—④—②—③—⑤	⑤— 有 5 種 ①—④—③—②
10	有 5 種 ①—④—⑤—③—②	⑤— 有 5 種 ①—④—③—②

11	有 5 種 ①—④—③—⑤—②	有 4 種 ①—④—③—②—⑤
12	有 3 種 ⑤—②—④—①—③	有 4 種 ②—⑤—④—①—③
13	⑤—　有 4 種 ②—④—①—③—	有 4 種 ②—④—①—③—⑤
14	—④—⑤—有 4 種 ①—②—③—	④—　有 4 種 ⑤— ①—②—③—
15	④—有 4 種 ①—②—③—⑤	④—有 4 種 ①—②—⑤—③
16	—④　⑤—有 3 種 ①—②—③—	⑤—　有 5 種 ④— ①—③—②
17	④—　有 5 種 ⑤— ①—③—②	—④　⑤—　有 5 種 —　— ①—③—②
18	④—　有 5 種 ①—③—⑤—②	④—有 4 種 ①—③—②—⑤—
19	有 3 種　④— —⑤—②—①—③—	④—有 4 種 ②—①—③—⑤
20	—④—⑤—有 4 種 ②—①—③—	⑤—　有 4 種 ①—②—④—③
21	有 5 種 ①—②—⑤—④—③	有 5 種 ①—②—④—⑤—③
22	⑤—有 5 種 ①—②—④—③—	有 5 種 ①—②—④—③—⑤

23	有 4 種 ①—③—④—②—⑤	有 5 種 ①—③—④—⑤—②
24	⑤—有 5 種 ①—③—④—②	有 5 種 ①—③—⑤—④—②
25	—⑤有 5 種 ①—③—④—②	有 5 種 ②—①—④—③—⑤
26	有 5 種 ②—①—④—⑤—③	有 5 種 —⑤ ②—①—④—③—
27	有 4 種 —⑤—②—①—④—③	有 5 種 ①—②—③—④—⑤
28	有 5 種 ①—②—③—⑤—④	有 5 種 ⑤— ①—②—③—④—
29	有 5 種 ①—②—⑤—③—④	—⑤ 有 4 種 ①—②—③—④—
30	有 4 種 ①—③—②—④—⑤	有 4 種 ①—③—②—⑤—④
31	—⑤ 有 3 種 ①—③—②—④—	有 4 種 ①—③—⑤—②—④
32	—⑤ 有 4 種 ①—③—②—④—	有 5 種 ②—①—③—④—⑤
33	有 5 種 ②—①—③—⑤—④	有 5 種 ⑤— ②—①—③—④—
34	有 4 種 ⑤—②—①—③—④	②—⑤—有 4 種 ①—④—③—

35	②有 5 種 ①—④—③—⑤	②有 5 種 ①—④—⑤—③
36	②　有 5 種 ⑤— ①—④—③—	—⑤　②　有 5 種 — ①—④—③—
37	④—　有 5 種 — ①—②—⑤—③—	④—　有 5 種 — ②—⑤—③—①
38	—④—①有 5 種 — ②—⑤—③—	

B(6)=11

④ ①—②—⑤—⑥—③	④ ⑤—⑥—③—②—①	④—②—① ⑤—⑥—③
④　② ⑤—⑥—③—①	②—④—① ⑤—⑥—③	① ④ ②—⑤—⑥—③
① ④ ⑤—⑥—③—②	④—② ⑤—⑥—③—①	④—①—② ⑤—⑥—③
④ ②—⑤—⑥—③—①	④ ⑤—⑥—③—①—②	

K(7) =1485=A(7)+B(7)=1439+46,其中 A(7)=1439,B(7)=46
圖以附件呈現(請參見附件 A)

標號差≤3,我們得到 K(2)=1,K(3)=3,K(4)=16,K(5)=75,K(6)=336,K(7)=1485
但似乎未能歸納一個好的結果

伍、 結論與未來展望

1.標號差≤2，得：
N(2)=1
N(3)=3
N(4)=8
N(5)=21
⇒N(n+2)=3N(n+1)－N(n)
並由數學歸納法⇒ $N(n+1)=\frac{1}{\sqrt{5}}(x_1^n-x_2^n)$ 其中 $x_1=\frac{3+\sqrt{5}}{2}, x_2=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$
且<N(2),N(3),N(4),……>之各項恰好爲斐波那契數列之偶數項

2.標號差≤3，得：
K(2)=1=A(2)
K(3)=3=A(3)
K(4)=16=A(4)+B(4),其中 A(4)=15,B(4)=1
K(5)=75=A(5)+B(5),其中 A(5)=72,B(5)=3
K(6)=336=A(6)+B(6),其中 A(6)=325,B(6)=11
K(7) =1485=A(7)+B(7),其中 A(7)=1439,B(7)=46

我們期望能由數列<K(2),K(3),K(4),..... >、.<A(2),A(3),A(4),…… >或<B(4),B(5),B(6),…… >
尋找前後項的關係,而推出例如:N(n+1)的情形。

陸、 參考資料

1.二零零八數學奧林匹亞選訓營報告
2.高中數學
3.高中數學競賽教程

【評語】030401

本作品利用一個連接頂點的規則及遞迴關係求出所有可能的連結方式，推論井然流暢，所得到結果也是正確，美中不足的地方是連接方式過於侷限，未能適度延伸，成果較為單薄。