

# 中華民國第 51 屆中小學科學展覽會 作品說明書

---

國中組 物理科

030109

虛像你在何處？—視深的深入探討

學校名稱：新北市私立南山高級中學

作者：	指導老師：
國二 廖帝凱	杜俊明
國二 范延愷	張永隆
國二 劉 行	

關鍵詞：移動間距、視線斜率、觀察方位角

# 作品名稱：虛像你在何處？——視深的深入探討

## 摘要

我們探討的內容有兩項主題：第一是觀察者在空氣中(疏介質)看水中(密介質)的物體，第二是觀察者從水中(密介質)去看空氣中(疏介質)的物體。這兩項主題皆有虛像位置的推導與測量，及分析觀察方向改變時虛像位置的奇妙變動。首先，我們運用簡易的數學與物理知識自創一個『虛像位置』的幾何公式，及自行設計兩種『觀測視角測量器』的工具，進行實驗測量與理論演算的工作。接著引入複雜但精確的微分公式作為檢驗自創公式的依據，最後再全面分析各種實深條件下的測量值與理論值之差距。

## 壹、研究動機

在國二理化的第四單元介紹光的『視深』現象時，當中有一幅視深的圖片引起我們熱烈的討論。該圖片介紹從空氣中看水中的物體時，物體與虛像不在同一位置，且僅止於視深小於實深等定性上的描述。之後為了探求隱藏在實深與視深之間的關係，我們請老師來指導與協助，但面對艱深的三角函數和微積分的繁雜過程，我們仍是毫無具體的概念。幸好在師長們不斷地鼓勵與探究真相的好奇心牽引之下，經過漫長時間的努力，我們團隊終於獲得完整的成果。

## 貳、研究目的

### 研究一、推導虛像位置公式的相關理論

- (一) 以簡易的數學理論導出虛像位置的公式(簡稱：自創公式)
- (二) 融合物理與數學的理論導出視線斜率的公式(簡稱：斜率公式)
- (三) 藉由三角函數與微積分導出虛像位置的公式(簡稱：微分公式)

### 研究二、分析『微分公式』理論的虛像坐標

### 研究三、分析『自創公式』理論的虛像坐標

### 研究四、檢視『自創公式』理論值與『微分公式』理論值的差距

### 研究五、檢視『自創公式』測量值與『微分公式』理論值的差距

## 參、研究設備及器材

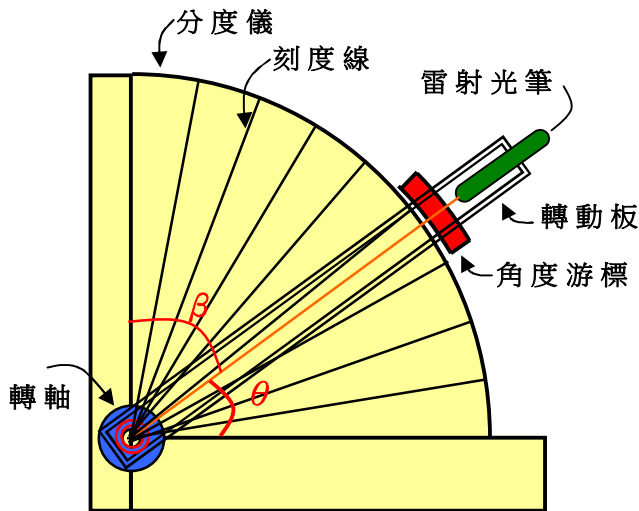
### 一、基本器材

1. 鋼尺
2. 布尺
3. 自製分度儀
4. 圓規
5. 壓克力板
6. 磁鐵
7. 小型水族箱
8. 雷射光筆
9.  $\frac{1}{4}$ 圓木板
10. 長條木板

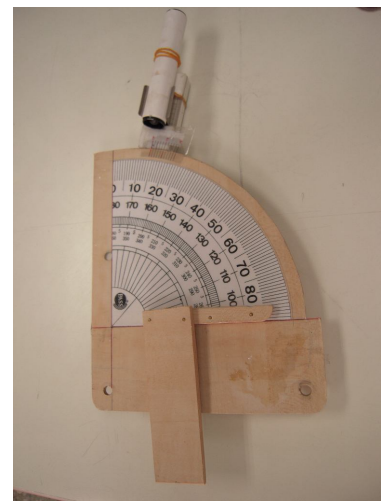
### 二、自製的測量工具

(一) **第一套** 觀測視角測量裝置：應用在空氣中觀看水中的物體

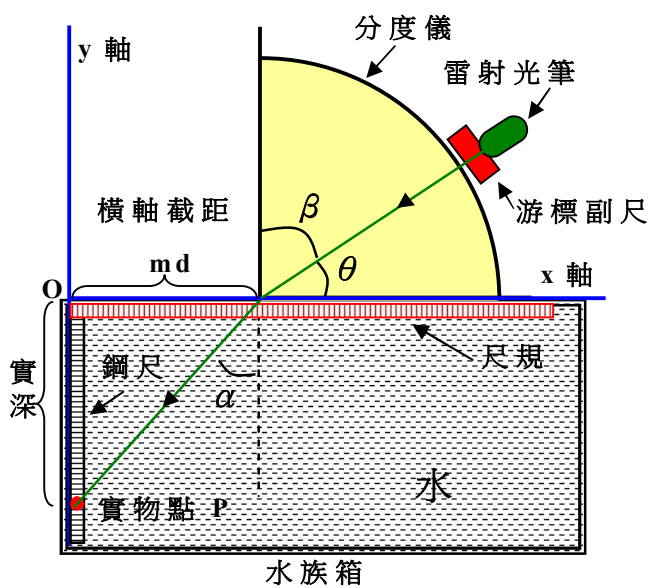
1. 下圖(一)是測量器的示意圖，下圖(二)是測量器的實物相片。



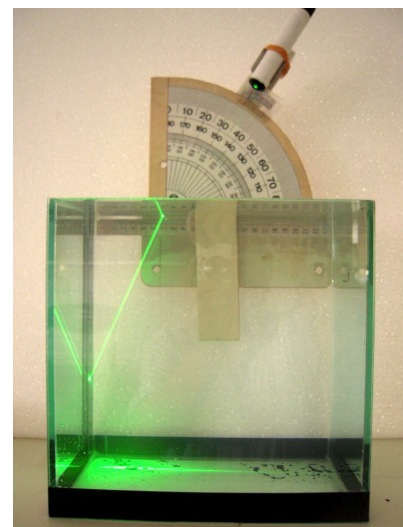
視角測量器示意圖  
(圖一)



視角測量器相片  
(圖二)



整套裝置示意圖  
(圖三)

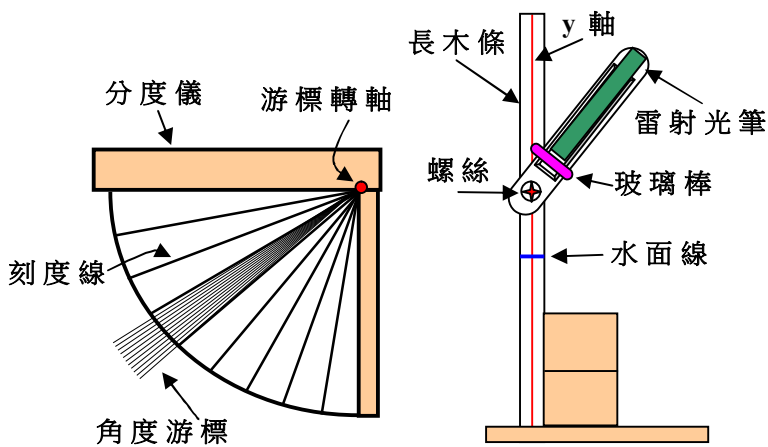


整套裝置相片  
(圖四)

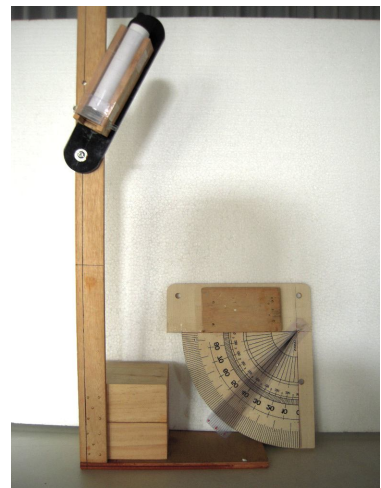
2. 上頁圖(三)是觀察者在空中看水中物體的整套測量裝置示意圖。圖中的物體 P 安排在 y 軸上，應用**光徑的可逆性**，雷射光線如同水中物體發出的光線。圖中的  $\beta$  角當作進入眼睛的視線折射角(後續皆以**視角代表**)。
3. 上頁圖(四)是整套裝置測量時的實物相片。

(二) **第二套觀測視角測量裝置：應用在水中觀看空氣中的物體**

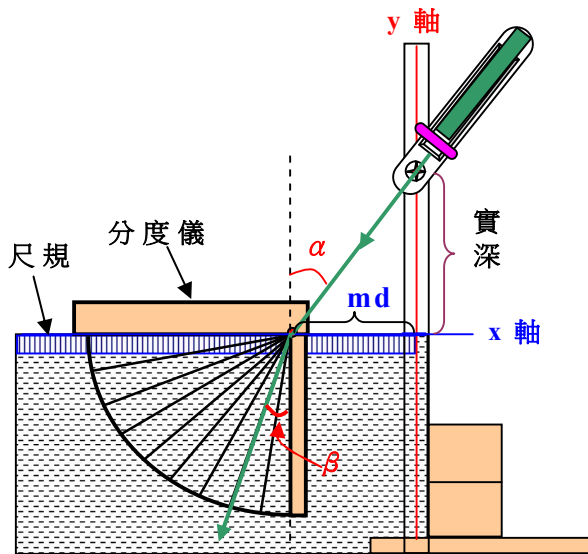
1. 下左圖(五)是測量器的示意圖，下右圖(六)是測量器的實物相片。



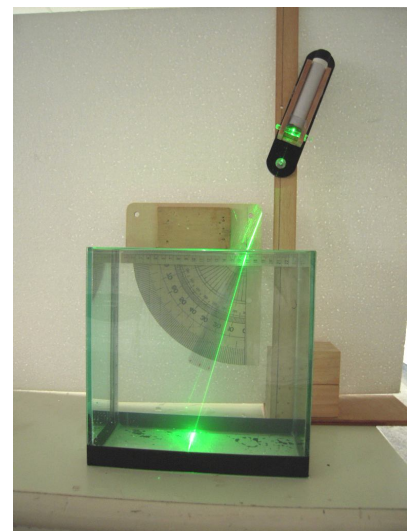
分度儀與光源架之示意圖  
(圖五)



分度儀與光源架之相片  
(圖六)



整套裝置示意圖  
(圖七)

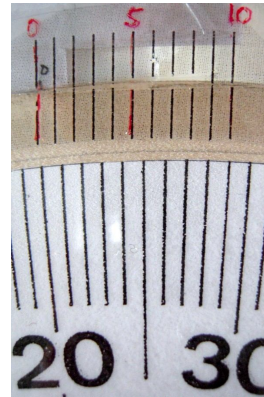


整套裝置相片  
(圖八)

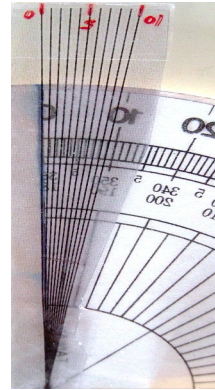
- 上頁圖(七)是觀察者在水中看空氣中物體的整套裝置示意圖。圖中**螺絲**代表物體 P，而雷射光線如同 P 所發出的光線。圖中的  $\beta$  角是進入眼睛的視線折射角。
- 上頁圖(八)是整套裝置測量時的實物相片。

### (三) 角度游標尺

- 角度游標尺的設計原理仿照直線游標尺。
- 角度游標尺的測量精密度  $=1^\circ - 0.9^\circ = 0.1^\circ$ 。
- 右圖(九)是第一套測量裝置的角度游標相片。
- 右圖(十)是第二套測量裝置的角度游標相片。



第一套實驗裝置的角度游標(圖九)



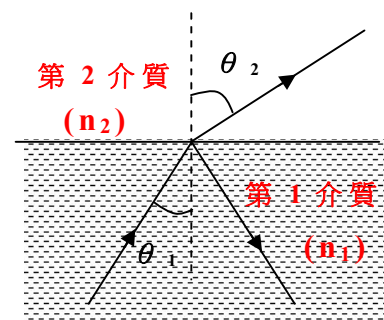
第二套實驗裝置的角度游標(圖十)

## 肆、研究過程或方法

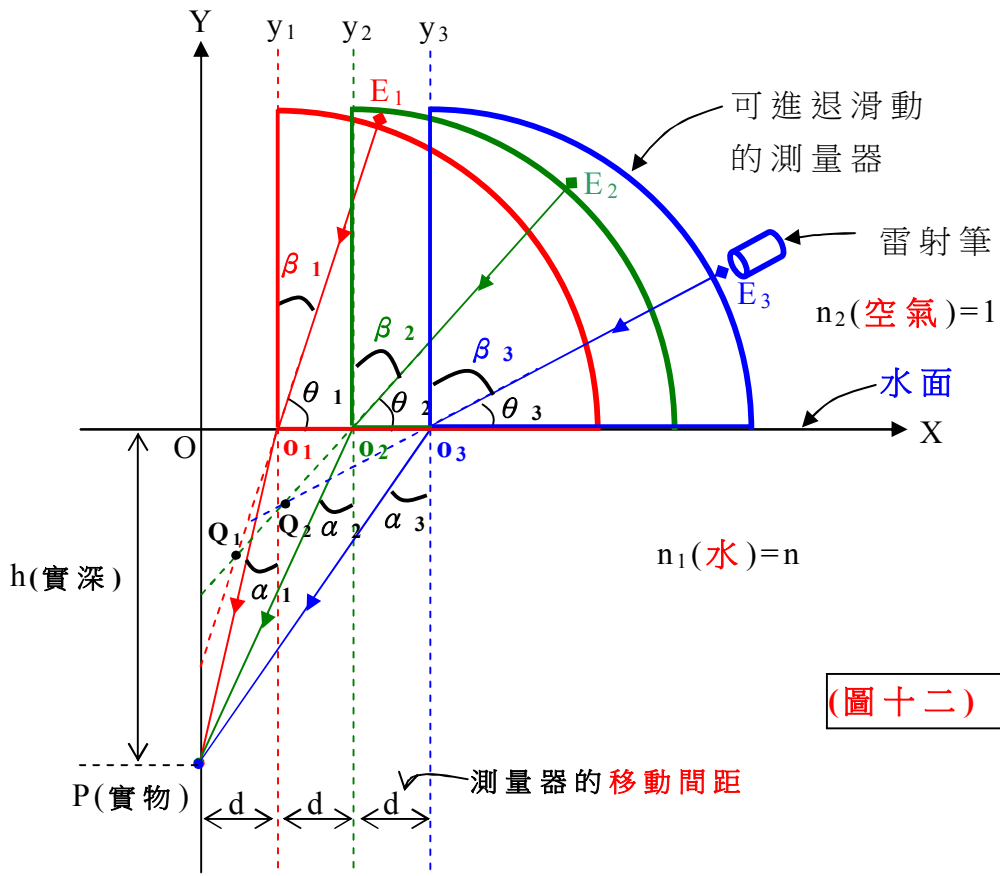
### 研究一、推導虛像位置公式的相關理論

#### (一) 以簡易的數學理論導出虛像位置的公式 (簡稱：自創公式)

- 光徑可逆性：在一條光徑的終點，發出反方向的光，此光可沿原路徑回到原來的起點。
- 司乃耳折射定律： $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$   
光線的折射及反射之簡圖如右圖(十一)所示。
- 物體發出的每一條光線通過水面折射後進入觀察者的眼睛，所以眼睛看見的虛像是由許多折射線的反方向延長線匯聚而成，因此我們藉助光徑可逆性的觀念，使用雷射光循著折射線路徑來追蹤物體 P 的位置，即可測出重要的視角  $\beta$ 。
- 視線(折射線)的方程式：**(後續的折射線皆以視線代表)**
  - 設每條視線的折射角為  $\beta_m$ ，而視線與水面之夾角為  $\theta_m (=90^\circ - \beta_m)$ ，則視線的斜率  $s_m = \tan \theta_m$ 。又每一條視線通過水面的位置( $O_m$ )和坐標原點(O)之距離  $md$  稱為該**視線的『橫軸截距』**。其中  $d$  值是相鄰兩條指定視線通過水面的間距(也是測量器的移動間距)， $m$  則是代表視線的編號， $m=1,2,3,\dots$ 。



(圖十一)



(圖十二)

- (2) 下列是每一條視線 ( $O_m E_m$ ) 的基本條件：**配合上圖(十二)**
- $O_1 E_1$  稱為視線  $L_1$ ：橫軸截距  $d$ ，傾斜角  $\theta_1$ ，斜率  $s_1 = \tan\theta_1$
  - $O_2 E_2$  稱為視線  $L_2$ ：橫軸截距  $2d$ ，傾斜角  $\theta_2$ ，斜率  $s_2 = \tan\theta_2$
  - $O_3 E_3$  稱為視線  $L_3$ ：橫軸截距  $3d$ ，傾斜角  $\theta_3$ ，斜率  $s_3 = \tan\theta_3$
  - $O_4 E_4$  稱為視線  $L_4$ ：橫軸截距  $4d$ ，傾斜角  $\theta_4$ ，斜率  $s_4 = \tan\theta_4$
- 依此類推.....
- $O_m E_m$  稱為視線  $L_m$ ：橫軸截距  $md$ ，傾斜角  $\theta_m$ ，斜率  $s_m = \tan\theta_m$

- (3) 幾何的運用：
- 若已知一直線的斜率  $s$  及其橫軸截距  $d$ ，則可列出該直線的方程式為  $y = s(x-d)$ 。現將每一條視線作如下的推論：
- 視線  $L_1$  的直線方程式： $y = s_1(x-d)$
  - 視線  $L_2$  的直線方程式： $y = s_2(x-2d)$
  - 視線  $L_3$  的直線方程式： $y = s_3(x-3d)$
  - 視線  $L_4$  的直線方程式： $y = s_4(x-4d)$
- 依此類推.....
- 視線  $L_m$  的直線方程式： $y = s_m(x-md)$ ， $m = 1, 2, 3, \dots$

5. 虛像位置的坐標公式：**(觀察者位於第一象限中的公式)**



- (1) 將上述的相鄰兩直線方程式皆作聯立演算，可得一系列的兩視線交會點 Q 之坐標，它是眼睛在空中看到水中『虛像』的坐標。
- (2) 因為虛像位置是相鄰兩條視線的交會點，所以我們制訂一個『觀察方位角  $\gamma$ 』來對應位置。這個  $\gamma$  是相鄰兩視角  $\beta$  之算術平均數，即  $\gamma_m = (\beta_m + \beta_{m+1})/2$ 。
- (3) 演算與結果：

$$L_1 \text{ 與 } L_2 \text{ 的交點 } Q_1 \text{ 坐標： } x_1 = \left(\frac{s_1 - 2s_2}{s_1 - s_2}\right) \times d, \quad y_1 = -\left(\frac{s_1 s_2}{s_1 - s_2}\right) \times d$$

$$L_2 \text{ 與 } L_3 \text{ 的交點 } Q_2 \text{ 坐標： } x_2 = \left(\frac{2s_2 - 3s_3}{s_2 - s_3}\right) \times d, \quad y_2 = -\left(\frac{s_2 s_3}{s_2 - s_3}\right) \times d$$

$$L_3 \text{ 與 } L_4 \text{ 的交點 } Q_3 \text{ 坐標： } x_3 = \left(\frac{3s_3 - 4s_4}{s_3 - s_4}\right) \times d, \quad y_3 = -\left(\frac{s_3 s_4}{s_3 - s_4}\right) \times d$$

依此類推，.....

$L_m$  與  $L_{m+1}$  的交點  $Q_m$  坐標為  $(x_m, y_m)$ ，其中  $m=1,2,3,4,\dots$ ，得虛像坐標公式為：**(斜率  $s_m > 0$ )**

$$x_m = \left[\frac{ms_m - (m+1)s_{m+1}}{s_m - s_{m+1}}\right] \times d \quad \text{與} \quad y_m = -\left(\frac{s_m s_{m+1}}{s_m - s_{m+1}}\right) \times d \quad \text{---- 自創公式之一}$$

6. 若觀察者在**第二象限**中，則虛像位置的坐標公式為：**(斜率  $s_m < 0$ )**

$$x_m = \left[-\frac{ms_m - (m+1)s_{m+1}}{s_m - s_{m+1}}\right] \times d \quad \text{與} \quad y_m = \left(\frac{s_m s_{m+1}}{s_m - s_{m+1}}\right) \times d \quad \text{---- 自創公式之二}$$

7. 若觀察者在水中而物體在空中，則觀察者從**第三象限**中看見虛像坐標的公式為：**(斜率  $s_m > 0$ )**

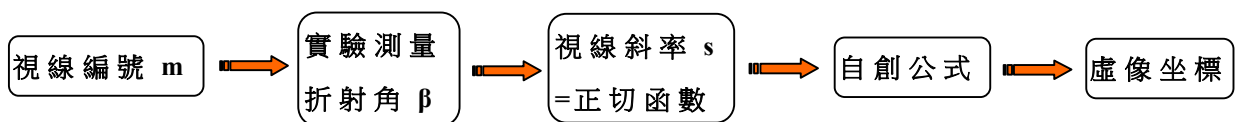
$$x_m = \left[-\frac{ms_m - (m+1)s_{m+1}}{s_m - s_{m+1}}\right] \times d \quad \text{與} \quad y_m = \left(\frac{s_m s_{m+1}}{s_m - s_{m+1}}\right) \times d \quad \text{---- 自創公式之三}$$

8. 若觀察者在水中而物體在空中，則觀察者從**第四象限**中看見虛像坐標的公式為：**(斜率  $s_m < 0$ )**

$$x_m = \left[\frac{ms_m - (m+1)s_{m+1}}{s_m - s_{m+1}}\right] \times d \quad \text{與} \quad y_m = -\left(\frac{s_m s_{m+1}}{s_m - s_{m+1}}\right) \times d \quad \text{---- 自創公式之四}$$

9. 我們設定『空氣』的分佈區域在平面坐標系的**第一象限**與**第二象限**，而『水』的分佈區域則在平面坐標系的**第三象限**與**第四象限**。物體的位置則指定在 y 軸線上。

10. 『自創公式』的運用流程：**實驗專用**



(二) 融合物理與數學的理論導出視線斜率的公式(簡稱：**斜率公式**)

1. 由折射定律推導視線斜率  $s_m$ ：(觀察者位於**第一象限**中)

(1) 依折射定律  $n \times \sin \alpha_1 = 1 \times \sin \beta_1$ ，其中  $n$  為水的折射率， $\alpha$  為入射角， $\beta$  為折射角， $h$  為物體的實深。由圖(十二)可知

$$\sin \alpha_1 = \frac{d}{\sqrt{h^2 + d^2}} \quad , \quad \sin \beta_1 = \frac{nd}{\sqrt{h^2 + d^2}} \quad \rightarrow \quad \tan \beta_1 = \frac{nd}{\sqrt{h^2 + (1-n^2)d^2}}$$

$$\text{得視線斜率 } s_1 = \tan \theta_1 = \tan(90^\circ - \beta_1) = \frac{\sqrt{h^2 + (1-n^2)d^2}}{nd}$$

(2) 承(1)結果可推導至第  $m$  條視線斜率的公式： $m=1,2,3,\dots$

$$\sin \alpha_m = \frac{md}{\sqrt{h^2 + m^2 d^2}} \quad , \quad \sin \beta_m = \frac{nmd}{\sqrt{h^2 + m^2 d^2}} \quad \rightarrow \quad \tan \beta_m = \frac{nmd}{\sqrt{h^2 + (1-n^2)m^2 d^2}}$$

$$\text{得視線斜率 } s_m = \tan(90 - \beta_m) = \frac{\sqrt{h^2 + (1-n^2)m^2 d^2}}{nmd} \quad \text{----} \quad \boxed{\text{斜率公式之一}}$$

(3) **全反射現象** 限制  $m$  值的使用範圍：(光線由水中進入空氣中)

$$\text{全反射臨界角 } \phi_c \text{ 的由來：} \quad n \times \sin \phi_c = 1 \times \sin 90^\circ \quad , \quad \sin \phi_c = \frac{1}{n}$$

光線由水中折射進入空氣中，其入射角  $\alpha_m$  必小於臨界角  $\phi_c$

$$\text{即有 } \sin \alpha_m < \sin \phi_c \quad \rightarrow \quad \frac{md}{\sqrt{h^2 + m^2 d^2}} < \frac{1}{n}$$

$$\text{得出限制範圍：} \quad \boxed{m < \frac{h}{d\sqrt{n^2 - 1}}}$$

2. 若觀察者在**第二象限**中，則視線斜率的公式為：( $m$  值限制同上)

$$s_m = -\frac{\sqrt{h^2 + (1-n^2)m^2 d^2}}{nmd} \quad \text{----} \quad \boxed{\text{斜率公式之二}}$$

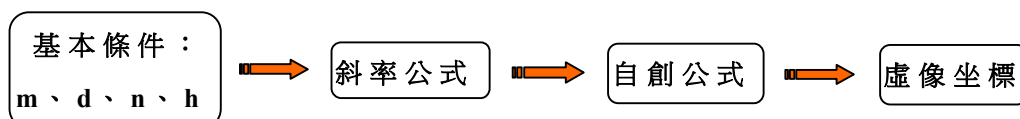
3. 若觀察者在水中而物體在空中，則觀察者在**第三象限**中的視線斜率之公式為：(因為物體在疏介質中，所以  $m$  值沒有限制)

$$s_m = \frac{\sqrt{n^2 h^2 + (n^2 - 1)m^2 d^2}}{md} \quad \text{----} \quad \boxed{\text{斜率公式之三}}$$

4. 若觀察者在水中而物體在空中，則觀察者在**第四象限**中的視線斜率之公式為：(因為物體在疏介質中，所以  $m$  值沒有限制)

$$s_m = -\frac{\sqrt{n^2 h^2 + (n^2 - 1)m^2 d^2}}{md} \quad \text{----} \quad \boxed{\text{斜率公式之四}}$$

5. 『斜率公式』與『自創公式』的運用流程：**理論專用**





(三) 藉由三角函數與微積分導出虛像位置的公式(簡稱：微分公式)

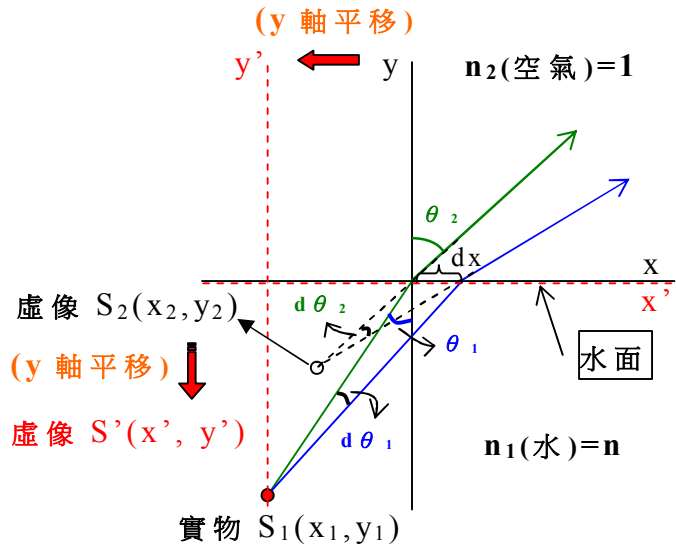
1. 微分公式的由來：配合下頁圖(十三)所示

- (1) 司乃耳定律  $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$ ，設空氣折射率  $n_2=1$ ，水折射率  $n_1=n$   
 有  $n \times \sin \theta_1 = 1 \times \sin \theta_2$ ，左式對  $\theta$  微分  
 得  $n \cos \theta_1 d\theta_1 = \cos \theta_2 d\theta_2$  ----- ①

- (2) 在  $x-y$  坐標系：  
 實物位置  $S_1(x_1, y_1)$   
 虛像位置  $S_2(x_2, y_2)$   
 而  $x$  與  $y$  的關係如下  
 $x_1 = y_1 \tan \theta_1$ ， $x_2 = y_2 \tan \theta_2$

將上面二式對  $\theta$  微分  
 得  $dx_1 = y_1 \sec^2 \theta_1 d\theta_1$  與  
 $dx_2 = y_2 \sec^2 \theta_2 d\theta_2$  ----- ②

- (3) 聯立方程式 ① 與 ②，  
 且  $dx_1 = dx_2 (=dx)$ ，並  
 消除  $d\theta_1$  與  $d\theta_2$  之後，  
 得  $\frac{y_2}{y_1} = \frac{\cos^3 \theta_2}{n \cos^3 \theta_1}$  ----- ③



(圖十三)

- (4) 由方程式 ① 可知， $\sin \theta_1 = \frac{\sin \theta_2}{n}$ ， $\cos \theta_1 = \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_2}}{n}$

以及設定  $y_1 = -h$  ( $h$  為實深)。這些條件代入方程式 ③ 中，即得虛像

位置  $y_2$  坐標為 
$$y_2 = -\frac{hn^2 \cos^3 \theta_2}{(n^2 - \sin^2 \theta_2)^{3/2}}$$
 ----- ④

- (5) 將  $x-y$  坐標系轉換成  $x'-y'$  坐標系：**(實物定位在原點的正下方)**

虛像位置坐標由  $(x_2, y_2)$  轉換成新的表示  $(x', y')$

兩組關係： $x' = x_2 - x_1 = y_2 \tan \theta_2 - y_1 \tan \theta_1$ ， $y' = y_2$  ----- ⑤

將相關條件和方程式 ④ 一起代入方程式 ⑤ 中

得  $x' = -\frac{h \cos^3 \theta_2}{n \cos^3 \theta_1} \times \frac{\sin \theta_2}{\cos \theta_2} - (-h) \times \frac{\sin \theta_1}{\cos \theta_1} = \frac{h(n^2 - 1) \sin^3 \theta_2}{(n^2 - \sin^2 \theta_2)^{3/2}}$

- (6) 觀察者在 **第一象限** 中看到虛像的位置坐標公式：

虛像的水平位置：
$$x' = \frac{h(n^2 - 1) \sin^3 \theta_2}{(n^2 - \sin^2 \theta_2)^{3/2}}$$

虛像的鉛直位置：
$$y' = -\frac{hn^2 \cos^3 \theta_2}{(n^2 - \sin^2 \theta_2)^{3/2}}$$

} ----- **微分公式之一**

2. 觀察者在**第二象限**中看到虛像的位置坐標公式：

$$\left. \begin{array}{l} \text{虛像的水平位置：} \\ x' = -\frac{h(n^2 - 1)\sin^3 \theta_2}{(n^2 - \sin^2 \theta_2)^{3/2}} \\ \text{虛像的鉛直位置：} \\ y' = -\frac{hn^2 \cos^3 \theta_2}{(n^2 - \sin^2 \theta_2)^{3/2}} \end{array} \right\} \text{---微分公式之二}$$

3. 觀察者在水中而物體在空中，則從**第三象限**中看到虛像的位置坐標公式：

$$\left. \begin{array}{l} \text{虛像的水平位置：} \\ x' = \frac{nh(n^2 - 1)\sin^3 \theta_2}{(1 - n^2 \sin^2 \theta_2)^{3/2}} \\ \text{虛像的鉛直位置：} \\ y' = \frac{nh \cos^3 \theta_2}{(1 - n^2 \sin^2 \theta_2)^{3/2}} \end{array} \right\} \text{---微分公式之三}$$

4. 觀察者在水中而物體在空中，則從**第四象限**中看到虛像的位置坐標公式：

$$\left. \begin{array}{l} \text{虛像的水平位置：} \\ x' = -\frac{nh(n^2 - 1)\sin^3 \theta_2}{(1 - n^2 \sin^2 \theta_2)^{3/2}} \\ \text{虛像的鉛直位置：} \\ y' = \frac{nh \cos^3 \theta_2}{(1 - n^2 \sin^2 \theta_2)^{3/2}} \end{array} \right\} \text{---微分公式之四}$$

5. 『微分公式』的運用流程：**理論專用**



## 研究二、分析『微分公式』理論的虛像位置

### (一) 探討觀察者在各種方向看見的虛像位置分佈情形

1. 分析項目：此處僅對**實深 200 mm**的情形進行研究。

- (1) 觀察者在空中的第一象限和第二象限，他的視角從  $0^\circ$  增大至  $90^\circ$  附近，其虛像坐標的數據演算。
- (2) 觀察者在水中的第三象限和第四象限，他的視角從  $0^\circ$  增大至  $48^\circ$  附近，其虛像坐標的數據演算。

2. 分析觀察者在四個象限中看見的虛像位置分佈圖。

### (二) 探討虛像位置隨觀察方向改變所產生的變動

1. 觀察者在空中(**第一象限的分析**)

- (1) 研究觀察方位角  $\gamma$  每變動 1 度時，其虛像位移有何變化。
- (2) 觀察方位角  $\gamma$  = 微分公式中的視角  $\theta_2$ 。

2. 觀察者在水中(**第三象限的分析**)

- (1) 研究觀察方位角  $\gamma$  每變動 1 度時，其虛像位移有何變化。
  - (2) 全反射造成觀察方位角  $\gamma < 48.59^\circ$  (臨界角) 的限制。
  - (3) 分析虛像的水平位移與鉛直位移之關係。
3. 上述過程採用  $h=200\text{ mm}$ 、 $h=160\text{ mm}$ 、 $h=120\text{ mm}$  的三種實深。

### 研究三、分析『自創公式』理論的虛像位置

#### (一) 探討各個觀察方位角 $\gamma$ 與虛像坐標之關係

1. 推算觀察者在空中看水中的虛像之坐標理論值。
2. 推算觀察者在水中看空中的虛像之坐標理論值。

#### (二) 探討虛像位置隨觀察方向改變所產生的變動

1. 分析觀察者在空中時，虛像位移與**觀察方位角  $\delta$**  之關係。
2. 分析觀察者在水中時，虛像位移與**觀察方位角  $\delta$**  之關係。
3. 研究說明：
  - (1)  $(\Delta x)/(\Delta \gamma) =$  觀察方位角  $\gamma$  每變動  $1^\circ$  時，虛像  $x$  坐標的變化量。  
 $\rightarrow \Delta x$ (**水平位移**) $=x_{m+1}-x_m$ ， $\Delta \gamma=\gamma_{m+1}-\gamma_m$ 。
  - (2)  $(\Delta y)/(\Delta \gamma) =$  觀察方位角  $\gamma$  每變動  $1^\circ$  時，虛像  $y$  坐標的變化量。  
 $\rightarrow \Delta y$ (**鉛直位移**) $=y_{m+1}-y_m$ ， $\Delta \gamma=\gamma_{m+1}-\gamma_m$ 。
  - (3) 因為虛像位移是指虛像在  $\Delta \gamma$  範圍內的位置變動，故我們必須另用**觀察方位角  $\delta$**  的名稱來對應這個虛像位移，其  $\delta_m=(\gamma_m+\gamma_{m+1})/2$ 。

### 研究四、檢視『自創公式』理論值與『微分公式』理論值的差距

#### (一) 探討相同觀察方位角 $\gamma$ 的虛像坐標之差距

1. 觀察者在空中(**第一象限**)看水中的虛像：設定實深  $h=200\text{ mm}$ 。
  - (1) 設定自創公式中的視線移動間距  $d=5\text{ mm}$ 。
  - (2) 設定自創公式中的視線移動間距  $d=1\text{ mm}$ 。
2. 觀察者在水中(**第三象限**)看空中的虛像：設定實深  $h=200\text{ mm}$ 。
  - (1) 設定自創公式中的視線移動間距  $d=5\text{ mm}$ 。
  - (2) 設定自創公式中的視線移動間距  $d=1\text{ mm}$ 。

### 研究五、檢視『自創公式』測量值與『微分公式』理論值的差距

#### (一) 觀察者在空中(**第一象限**)看水中虛像的實驗

1. 操作步驟：(採用**第一套觀測視角測量裝置**)
  - (1) 將鋼尺用磁鐵吸附在水族箱的玻璃壁，尺上的刻度線代表物體  $P$ ，而刻度數字就是實深  $h$  大小。
  - (2) 選定實深  $h$  與移動間距  $d$  後，開始移動測量器至指定的橫軸截距

md 位置，分度儀的圓心與玻璃壁上的布尺刻度線必須對齊。

- (3) 撥動雷射筆至適當的角度附近，微調雷射光方向使它恰好通過分度儀的圓心，光線進入水中後射至鋼尺上的刻度線。
- (4) 接著觀察游標副尺上的刻度線與分度儀上的刻度線，即可讀取該視線的視角數據。

2. 實驗紀錄與演算方式：

- (1) 將每一視線的編號  $m$  與對應的視角  $\beta_m$  依序紀錄在表格內。
- (2) 把每一視線的視角  $\beta_m$  代入正切函數中，即得每一視線的斜率  $s_m = \tan(90^\circ - \beta_m)$ 。
- (3) 最後將視線編號  $m$ 、斜率  $s_m$  及移動間距  $d$  等數據代入『自創公式之一』，即可算出在某觀察方位角  $\gamma_m$  的虛像坐標  $(x_m, y_m)$ 。

## (二) 觀察者在水中(第三象限)看空中虛像的實驗

1. 操作步驟：(採用第二套觀測視角測量裝置)

- (1) 將光源木架用 C 型夾固定在桌面，並使長木條上的鉛直線(代表  $y$  軸線)對齊玻璃壁上布尺的 0 刻度線。
- (2) 長木條上的螺絲用來代表物體，所以設計雷射光線必通過螺絲的中心點，可代表物體發出的每一條光線。
- (3) 螺絲中心點至水面的距離=物體實深  $h$ 。
- (4) 選定實深  $h$  與移動間距  $d$  後，開始移動分度儀至指定的橫軸截距  $md$  位置，每次都必須將分度儀的圓心與玻璃壁上的布尺刻度線對齊，再微調雷射光使它恰好通過分度儀的圓心。
- (5) 接著撥動游標副尺，使副尺上的 0 刻度線與水中的雷射光線對齊，即可讀取每一條視線的視角  $\beta$  數據。

2. 紀錄與演算

- (1) 將每一視線的編號  $m$  與對應的視角  $\beta_m$  依序紀錄在表格內。
- (2) 把每一視線的視角  $\beta_m$  代入正切函數中，即得每一視線的斜率  $s_m = \tan(90^\circ - \beta_m)$ 。
- (3) 最後將視線編號  $m$ 、斜率  $s_m$  及移動間距  $d$  等數據代入『自創公式之三』，即可算出在某觀察方位角  $\gamma_m$  的虛像坐標  $(x_m, y_m)$ 。

## 伍、研究結果

研究一、推導虛像位置公式的相關理論：本段內文已在『肆、研究過程或方法』中詳述，故此處不再重複。

研究二、分析『微分公式』理論的虛像位置

(一) 探討觀察者在各種方向看見的虛像位置分佈情形

1. 虛像位置坐標之數據表

(1) 觀察者在空中看水中的物體：

[表格 A-1]				
控制變因：實物的位置(0, -200)，水的折射率=4/3				
觀察方位角 $\gamma$ (視角 $\theta_2$ ) (度)	觀察者在第一象限中		觀察者在第二象限中	
	虛像 x'坐標 (mm)	虛像 y'坐標 (mm)	虛像 x'坐標 (mm)	虛像 y'坐標 (mm)
1	0.000	-149.970	0.000	-149.970
2	0.003	-149.880	-0.003	-149.880
3	0.009	-149.730	-0.009	-149.730
28	8.282	-125.928	-8.282	-125.928
29	9.250	-124.144	-9.250	-124.144
30	10.297	-122.295	-10.297	-122.295
53	65.102	-63.674	-65.102	-63.674
54	69.188	-60.651	-69.188	-60.651
55	73.434	-57.623	-73.434	-57.623
87	224.660	-0.074	-224.660	-0.074
88	225.834	-0.022	-225.834	-0.022
89	226.542	-0.003	-226.542	-0.003

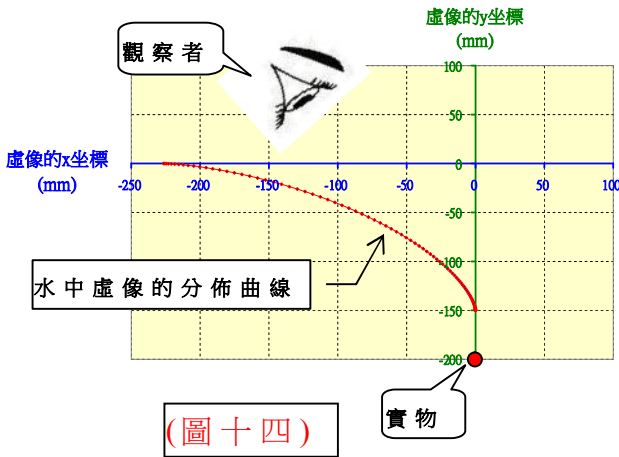
(2) 觀察者在水中看空中的物體：

[表格 A-2]				
控制變因：實物的位置(0, 200)，水的折射率=4/3				
觀察方位角 $\gamma$ (視角 $\theta_2$ ) (度)	觀察者在第三象限中		觀察者在第四象限中	
	虛像 x'坐標 (mm)	虛像 y'坐標 (mm)	虛像 x'坐標 (mm)	虛像 y'坐標 (mm)
1	0.001	266.761	-0.001	266.761
2	0.009	267.047	-0.009	267.047
3	0.030	267.523	-0.030	267.523
18	8.090	303.238	-8.090	303.238
19	9.790	308.314	-9.790	308.314

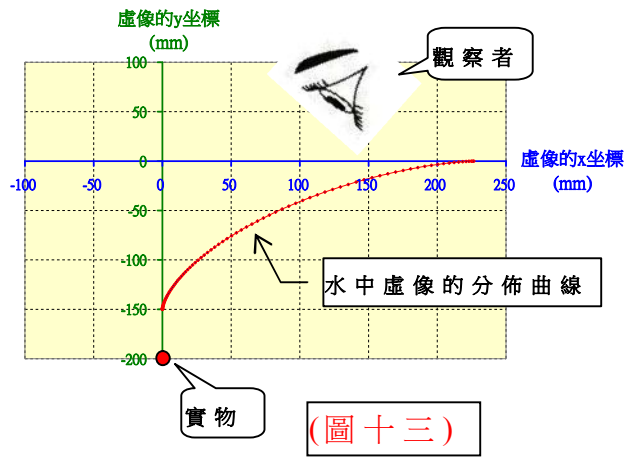
20	11.772	313.911	-11.772	313.911
38	259.847	700.541	-259.847	700.541
39	321.126	777.520	-321.126	777.520
40	402.732	876.435	-402.732	876.435

## 2. 觀察者在四個象限中看見的虛像位置分佈圖

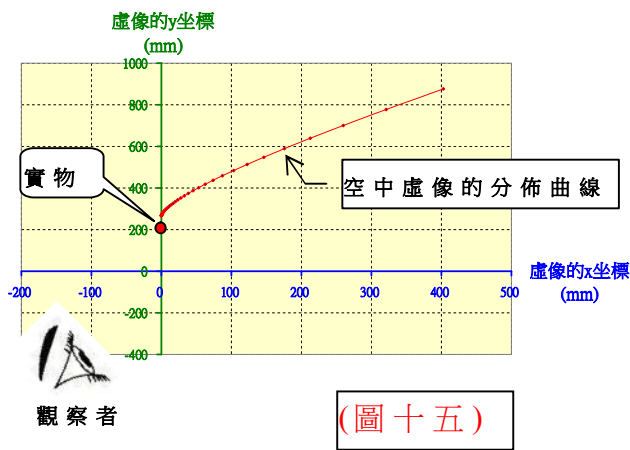
觀察者在第二象限中看見的虛像位置分佈圖  
[實物位置(0, -200)]



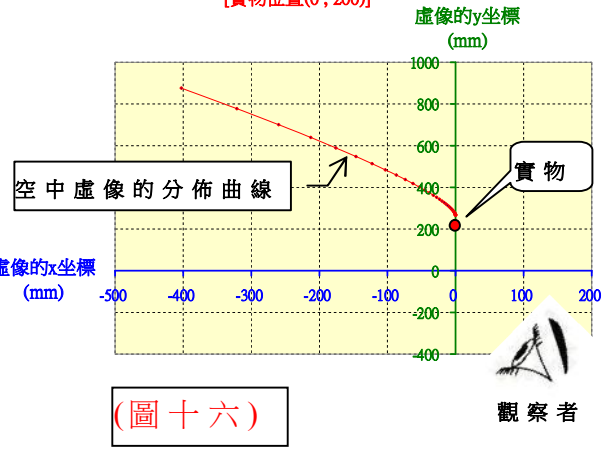
觀察者在第一象限中看見的虛像位置分佈圖  
[實物位置(0, -200)]



觀察者在第三象限中看見的虛像位置分佈圖  
[實物位置(0, 200)]



觀察者在第四象限中看見的虛像位置分佈圖  
[實物位置(0, 200)]



上面四個圖形的重點：觀察者不論在甚麼位置觀看物體，它所看見的虛像必定是出現在四條曲線上的某一點位置。

## (二) 探討虛像位置隨觀察方向改變所產生的變動

### 1. 觀察者在空中(第一象限)的分析

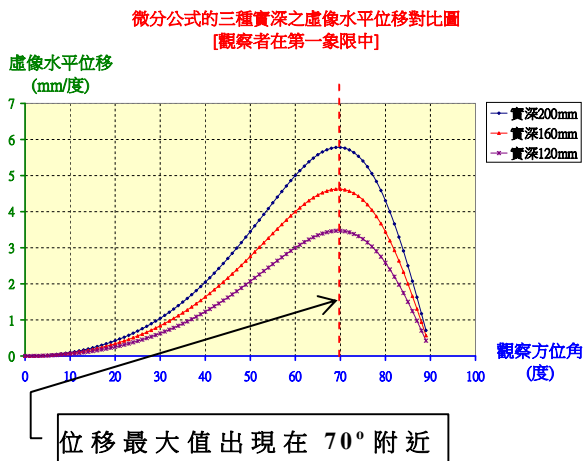
#### (1) 虛像位移數據表：



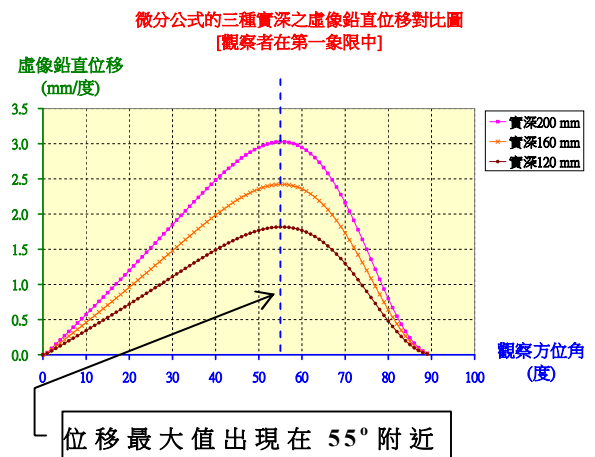
[表格 B-1]：觀察者在空中，物體在水中

觀察方位角 $\delta$ (度)	實深 $h=200$ mm		實深 $h=160$ mm		實深 $h=120$ mm	
	虛像水平位移 (mm/度)	虛像鉛直位移 (mm/度)	虛像水平位移 (mm/度)	虛像鉛直位移 (mm/度)	虛像水平位移 (mm/度)	虛像鉛直位移 (mm/度)
1	0.000	0.030	0.000	0.024	0.000	0.018
2	0.002	0.090	0.002	0.072	0.001	0.054
3	0.007	0.150	0.005	0.120	0.004	0.090
54	4.086	3.023	3.269	2.418	2.451	1.814
<b>55</b>	4.245	<b>3.028</b>	3.396	<b>2.422</b>	2.547	<b>1.817</b>
56	4.403	3.026	3.523	2.421	2.642	1.816
69	5.781	2.277	4.625	1.822	3.469	1.366
<b>70</b>	<b>5.782</b>	2.162	<b>4.626</b>	1.729	<b>3.469</b>	1.297
71	5.759	2.040	4.607	1.632	3.456	1.224
87	1.631	0.100	1.304	0.080	0.978	0.060
88	1.174	0.052	0.939	0.042	0.704	0.031
89	0.708	0.019	0.567	0.015	0.425	0.012

(2) 三種實深的虛像位移對比圖：



(圖十七)



(圖十八)

**說明一**：物體在不同實深的狀況下，虛像水平位移的最大值都出現在相同的角度，鉛直位移也是如此。

**說明二**：我們發現虛像在水平和鉛直兩個方向上的位移，都是先增大後減小。其中，位移的最大值可解釋成觀察者在這個特別角的附近移動時，他看到虛像位置的**移動最為迅速**。

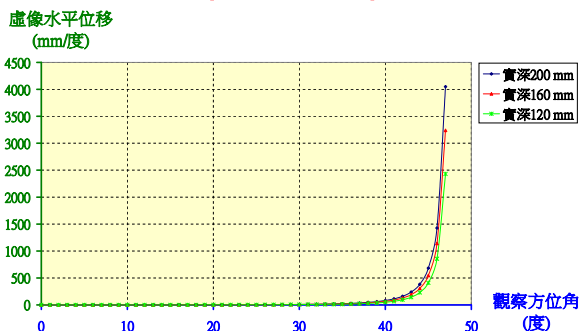
2. 觀察者在水中(第三象限)的分析

(1) 虛像位移數據表：

[表格 B-2]：觀察者在水中，物體在空氣中						
觀察方位角 $\delta$ (度)	實深 $h=200$ mm		實深 $h=160$ mm		實深 $h=120$ mm	
	虛像水平位移 (mm/度)	虛像鉛直位移 (mm/度)	虛像水平位移 (mm/度)	虛像鉛直位移 (mm/度)	虛像水平位移 (mm/度)	虛像鉛直位移 (mm/度)
1	0.001	0.094	0.001	0.076	0.001	0.057
2	0.008	0.285	0.006	0.228	0.005	0.171
3	0.021	0.477	0.017	0.382	0.013	0.286
45	682.432	693.208	545.946	554.567	409.459	415.925
46	1426.257	1398.267	1141.005	1118.613	855.754	838.960
47	4049.972	3829.807	3239.978	3063.845	2429.983	2297.884

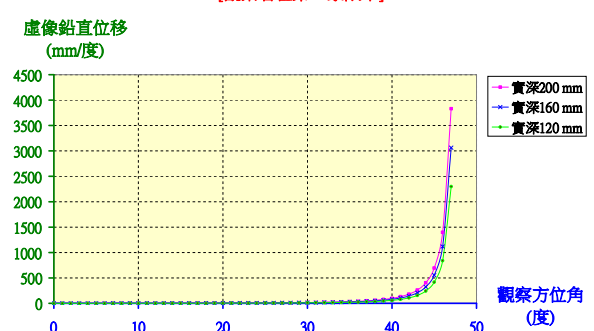
(2) 三種實深的虛像位移對比圖：

微分公式的三種實深之虛像水平位移對比圖  
[觀察者在第三象限中]



(圖十九)

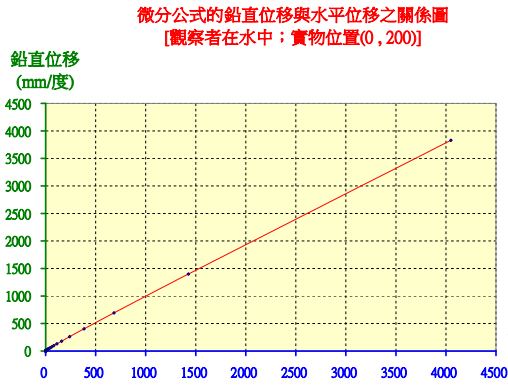
微分公式的三種實深之虛像鉛直位移對比圖  
[觀察者在第三象限中]



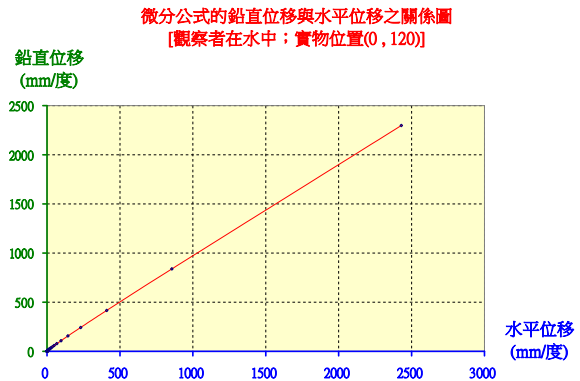
(圖二十)

上面兩圖形顯示：觀察者在水中看空氣中物體的虛像位置變動時，發現在不同實深的條件下，無論是水平位移或是鉛直位移的變化曲線都幾乎相似，位移量值約在  $30^\circ$  以後才開始逐漸作大幅度的增加，。

(3) 鉛直位移與水平位移之關係圖：(以實深 200 mm 和 120 mm 代表)



(圖二十一)



(圖二十二)

上頁的圖(二十一)與圖(二十二)顯示雖然實深不同但物理意義相同。當觀察方位角  $\delta$  的角度逐漸增大時，雖然圖線皆有稍微下彎的情形，但是鉛直位移與水平位移二者之間仍可視為幾乎呈正比的走勢。

### 研究三、分析『自創公式』理論的虛像位置

#### (一) 探討各個觀察方位角 $\gamma$ 與虛像坐標之關係

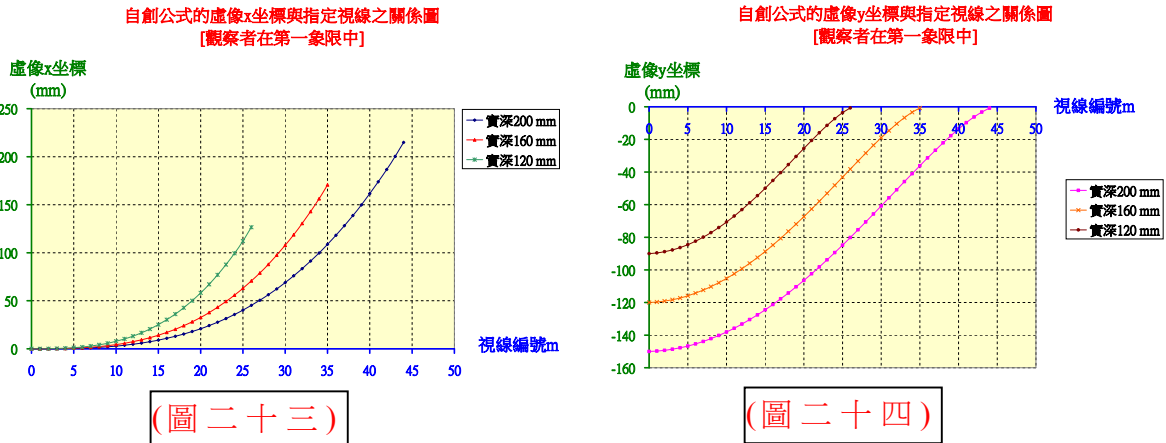
1. 推算觀察者在空中看水中的虛像之理論坐標值

(1) 虛像位置坐標數據表：

[表格 C-1]：觀察者在第一象限中						
固定條件：視線的移動間距 $d=5 \text{ mm}$ ，水折射率 $=4/3$						
視線 編號 m	實深 200 mm		實深 160 mm		實深 120 mm	
	虛像 x 坐標 (mm)	虛像 y 坐標 (mm)	虛像 x 坐標 (mm)	虛像 y 坐標 (mm)	虛像 x 坐標 (mm)	虛像 y 坐標 (mm)
0	0.000	-150.000	0.000	-120.000	0.000	-90.000
1	0.007	-149.745	0.011	-119.681	0.020	-89.575
2	0.036	-149.308	0.057	-119.135	0.101	-88.847
3	0.102	-148.653	0.160	-118.317	0.284	-87.760
23	31.534	-93.832	49.280	-53.040	87.698	-11.421
24	35.735	-89.376	55.846	-48.115	99.426	-7.274
25	40.294	-84.812	62.971	-43.158	112.224	-3.634
26	45.224	-80.151	70.678	-38.196	126.559	-0.703
33	91.382	-45.912	142.931	-6.673	X	X
34	99.815	-40.987	156.232	-3.394	X	X

35	108.753	-36.115	170.727	-0.773	X	X
42	186.745	-6.270	X	X	X	X
43	200.349	-3.251	X	X	X	X
44	214.926	-0.839	X	X	X	X

(2) 虛像坐標與指定視線的關係圖：



1. 因為自創公式是由視線編號  $m$  引導產生的，所以用指定視線與虛像坐標的關係作圖，才能將三種實深的坐標曲線一起在同一個圖中比較。

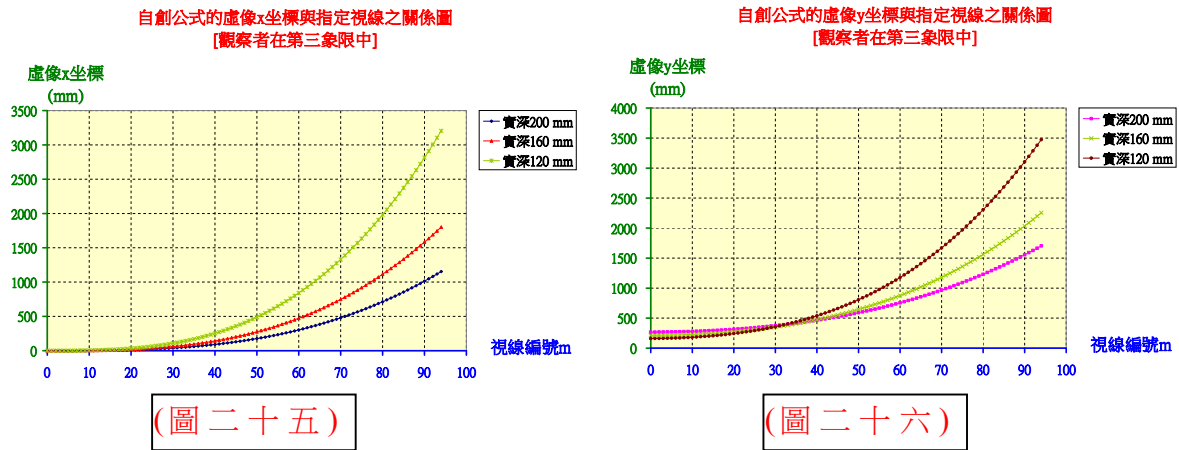
2. 在上面的兩個圖形中可以看出，雖然實深不同但是它們都有相似的曲線，尤其是圖(二十四)的三條曲線近乎相同。

2. 推算觀察者在水中看空中的虛像之理論坐標值

(1) 虛像位置坐標數據表：

[表格 C-2]：觀察者在第三象限中						
固定條件：視線的移動間距 $d=5\text{ mm}$ ，水折射率 $=4/3$						
視線 編號 $m$	實深 200 mm		實深 160 mm		實深 120 mm	
	虛像 x 坐標 (mm)	虛像 y 坐標 (mm)	虛像 x 坐標 (mm)	虛像 y 坐標 (mm)	虛像 x 坐標 (mm)	虛像 y 坐標 (mm)
0	0	266.667	0	213.333	0	160.000
1	0.004	266.922	0.006	213.652	0.011	160.425
2	0.021	267.360	0.032	214.200	0.057	161.156
3	0.057	268.017	0.090	215.021	0.159	162.253
92	1082.011	1627.418	1690.638	2142.945	3005.572	3285.466
93	1117.485	1664.736	1746.066	2198.047	3104.111	3378.749
94	1153.726	1702.741	1802.693	2254.213	3204.780	3473.916

(2) 虛像坐標與指定視線的關係圖：



1. 因為觀察者從水中看空氣中的物體時，視線是來自疏介質中，所以自創公式中的視線數量就沒有全反射現象的限制，但也造成了坐標數據的數量非常龐大，因此我們就取至編號  $m=94$  來作圖觀察。

2. 可以看出上面兩個圖形中的曲線，也是以近乎相似地走勢呈現。

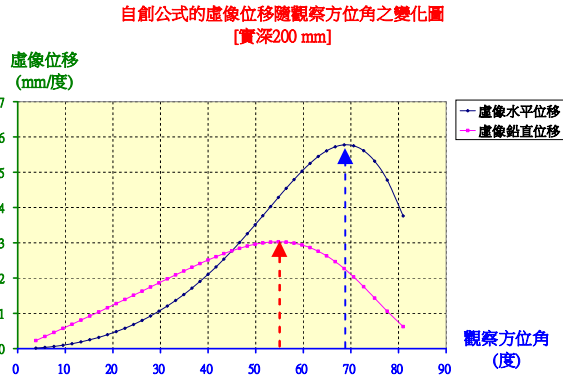
(二) 探討虛像位置隨觀察方向改變所產生的變動

1. 觀察者在空中的情形

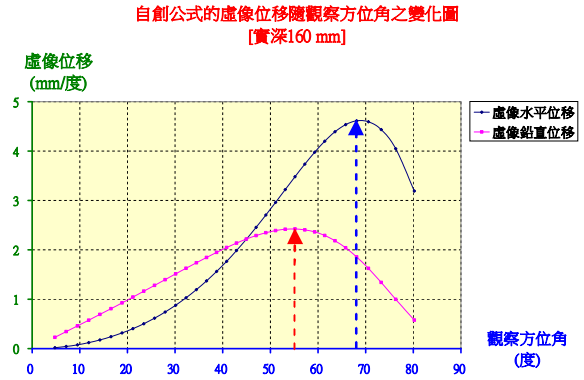
(1) 虛像位移數據表：

[表格 D-1]：觀察者在第一象限中								
實深 $h=200$ mm			實深 $h=160$ mm			實深 $h=120$ mm		
觀察方位角 $\delta$ (度)	虛像水平位移 (mm/度)	虛像鉛直位移 (mm/度)	觀察方位角 $\delta$ (度)	虛像水平位移 (mm/度)	虛像鉛直位移 (mm/度)	觀察方位角 $\delta$ (度)	虛像水平位移 (mm/度)	虛像鉛直位移 (mm/度)
3.82	0.015	0.229	4.77	0.019	0.229	6.35	0.026	0.230
5.72	0.034	0.344	7.15	0.043	0.344	9.51	0.058	0.345
53.13	4.027	3.020	53.13	3.221	2.416	53.13	2.416	1.812
<b>54.76</b>	4.287	<b>3.028</b>	<b>55.17</b>	3.481	<b>2.422</b>	<b>55.86</b>	2.675	<b>1.814</b>
<b>68.58</b>	<b>5.776</b>	2.268	<b>68.12</b>	<b>4.613</b>	1.856	<b>67.35</b>	<b>3.443</b>	1.440
70.56	5.749	2.033	70.58	4.595	1.624	70.62	3.438	1.216
77.62	4.777	1.060	76.31	4.047	0.998	74.31	3.233	0.919
80.98	3.763	0.623	80.22	3.191	0.577	79.06	2.580	0.527

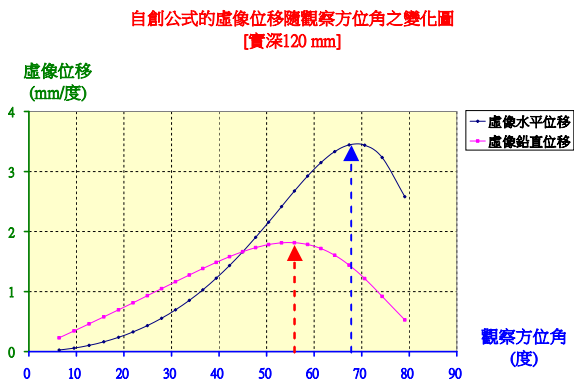
(2) 虛像位移與觀察方位角  $\delta$  之關係圖：



(圖二十七)



(圖二十八)



(圖二十九)

1. 三個圖形內的水平位移曲線形狀相同，而曲線之最高點大約都在  $55^\circ$  附近。
2. 三個圖形內的鉛直位移曲線形狀相同，而曲線之最高點都很接近  $70^\circ$ 。

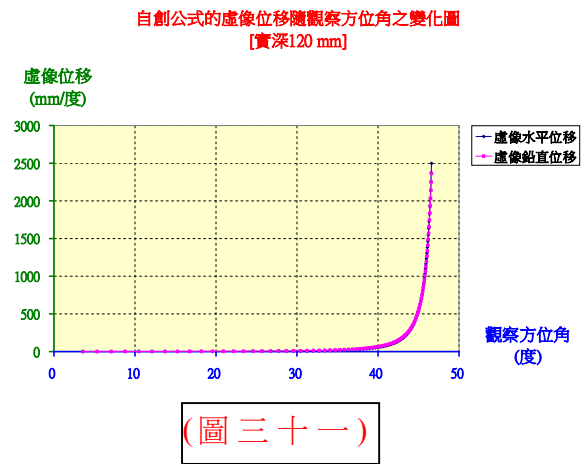
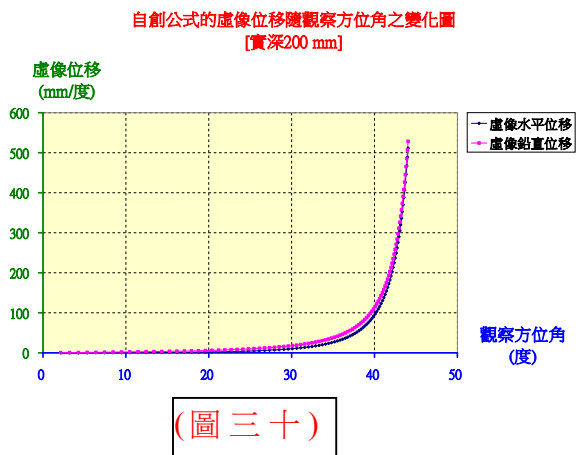
2. 觀察者在水中的情形

(1) 虛像位移數據表：

[表格 D-2]：觀察者在第三象限中								
實深 $h=200$ mm			實深 $h=160$ mm			實深 $h=120$ mm		
觀察方位角 $\delta$ (度)	虛像水平位移 (mm/度)	虛像鉛直位移 (mm/度)	觀察方位角 $\delta$ (度)	虛像水平位移 (mm/度)	虛像鉛直位移 (mm/度)	觀察方位角 $\delta$ (度)	虛像水平位移 (mm/度)	虛像鉛直位移 (mm/度)
2.14	0.015	0.409	2.68	0.019	0.410	3.57	0.006	0.240
3.21	0.035	0.616	4.01	0.043	0.619	5.33	0.026	0.416
4.27	0.062	0.826	5.33	0.078	0.833	7.08	0.059	0.634
43.81	446.194	465.074	45.35	977.145	965.006	46.53	2253.588	2139.644
43.89	467.130	485.476	45.41	1024.866	1010.029	46.57	2372.662	2249.355
43.97	488.866	506.619	45.47	1074.467	1056.769	46.61	2496.779	2363.611



(2) 虛像位移與觀察方位角  $\delta$  之關係圖：(以實深 200 mm 和 120 mm 代表)



我們以兩個實深的圖形為代表說明，從水中看空氣中的虛像位移都是隨觀察方位角  $\delta$  的增大而變大，但虛像位移開始作急遽增大的角度卻不同。

#### 研究四、檢視『自創公式』理論值與『微分公式』理論值的差距

##### (一) 探討相同觀察方位角 $\gamma$ 的虛像坐標之差距

1. 觀察者在空中(第一象限)看水中的虛像：設定實深 200 mm

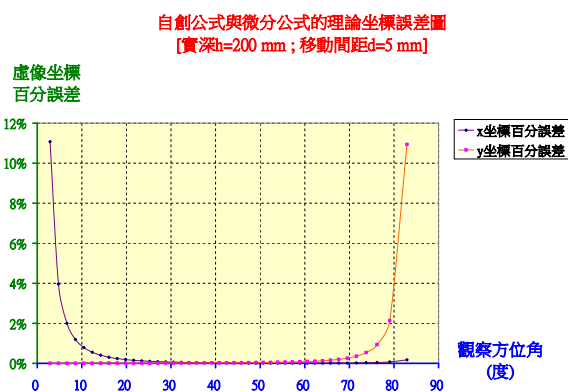
(1) 虛像坐標數據表：

[表格 E-1]：自創公式中的移動間距 $d=5$ mm						
觀察方位角 $\gamma$ (度)	微分公式的理論坐標 (mm)		自創公式的理論坐標 (mm)		自創與微分的百分誤差	
	$x'$ (mm)	$y'$ (mm)	$x$ (mm)	$y$ (mm)	$(x' - x)/x'$	$(y' - y)/y'$
2.86	0.008	-149.754	0.007	-149.745	11.075%	0.006%
4.77	0.038	-149.317	0.036	-149.308	3.961%	0.006%
6.67	0.104	-148.662	0.102	-148.653	2.001%	0.006%
8.57	0.221	-147.791	0.219	-147.781	1.195%	0.007%
73.77	173.876	-9.807	173.825	-9.754	0.029%	0.541%
76.20	186.823	-6.330	186.745	-6.270	0.042%	0.938%
79.05	200.487	-3.322	200.349	-3.251	0.069%	2.131%
82.92	215.294	-0.943	214.926	-0.839	0.171%	10.936%

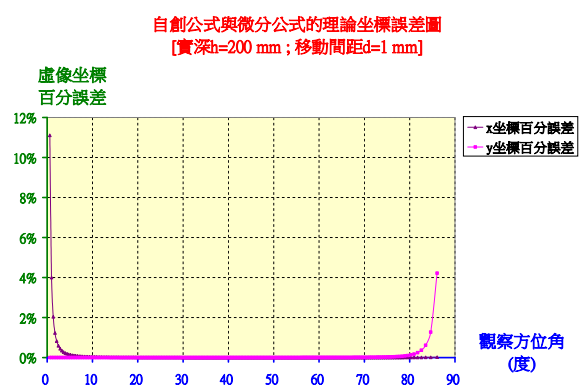
[表格 E-2]：自創公式中的移動間距  $d=1\text{ mm}$

觀察方位角 $\gamma$ (度)	微分公式的 理論坐標 (mm)		自創公式的 理論坐標 (mm)		自創與微分的 百分誤差	
	$x'$ (mm)	$y'$ (mm)	$x$ (mm)	$y$ (mm)	$(x'-x)/x'$	$(y'-y)/y'$
0.57	0.000	-149.990	0.000	-149.990	11.110%	0.000%
0.95	0.000	-149.973	0.000	-149.972	3.998%	0.000%
1.34	0.001	-149.946	0.001	-149.946	2.039%	0.000%
1.72	0.002	-149.911	0.002	-149.911	1.233%	0.000%
82.59	214.223	-1.079	214.210	-1.075	0.006%	0.365%
83.53	217.138	-0.723	217.120	-0.719	0.008%	0.617%
84.64	220.091	-0.417	220.064	-0.411	0.012%	1.274%
86.05	223.113	-0.168	223.064	-0.161	0.022%	4.219%

(2) 兩種公式的坐標誤差對比圖：



(圖三十二)



(圖三十三)

1. 上面兩個圖形顯示，當觀察角度小於  $10^\circ$  或大於  $80^\circ$  時，因為坐標數值都小於 1 或是更小，所以演算後的誤差值就相對比較大，但是中間範圍角度的誤差值就非常的小，甚至小於萬分之 1。
2. 若選擇愈小的移動間距  $d$  值，則兩公式的誤差值就會愈小，這表示『自創公式』的精確度與  $d$  的大小有關。

2. 觀察者在水中(第三象限)看空中的虛像：設定實深  $200\text{ mm}$

(1) 虛像坐標數據表：

[表格 F-1]：自創公式中的移動間距  $d=5 \text{ mm}$

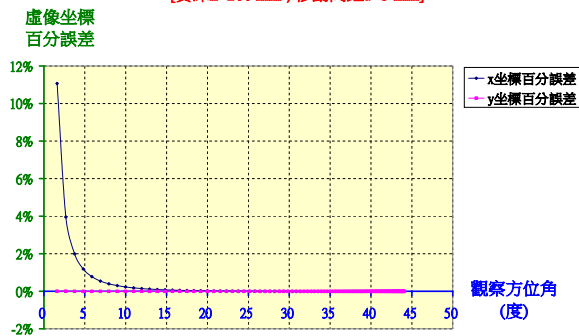
觀察方位角 $\gamma$ (度)	微分公式的理論坐標 (mm)		自創公式的理論坐標 (mm)		自創與微分的百分誤差	
	$x'$ (mm)	$y'$ (mm)	$x$ (mm)	$y$ (mm)	$(x' - x)/x'$	$(y' - y)/y'$
1.610	0.005	266.913	0.004	266.922	11.066%	-0.003%
2.681	0.021	267.350	0.021	267.360	3.952%	-0.003%
3.748	0.059	268.007	0.057	268.017	1.992%	-0.004%
4.809	0.125	268.884	0.123	268.893	1.185%	-0.004%
43.855	1228.479	1780.758	1228.542	1780.838	-0.005%	-0.005%
43.937	1267.069	1820.864	1267.133	1820.945	-0.005%	-0.004%
44.018	1306.459	1861.685	1306.524	1861.767	-0.005%	-0.004%
44.097	1346.657	1903.227	1346.723	1903.310	-0.005%	-0.004%

[表格 F-2]：自創公式中的移動間距  $d=1 \text{ mm}$

觀察方位角 $\gamma$ (度)	微分公式的理論坐標 (mm)		自創公式的理論坐標 (mm)		自創與微分的百分誤差	
	$x'$ (mm)	$y'$ (mm)	$x$ (mm)	$y$ (mm)	$(x' - x)/x'$	$(y' - y)/y'$
0.967	0.001	266.755	0.001	266.756	1.233%	0.000%
1.181	0.002	266.799	0.002	266.799	0.824%	0.000%
1.396	0.003	266.852	0.003	266.852	0.590%	0.000%
1.611	0.005	266.913	0.005	266.913	0.442%	0.000%
19.021	9.829	308.428	9.829	308.428	0.001%	0.000%
19.187	10.137	309.319	10.137	309.320	0.001%	0.000%
19.352	10.452	310.220	10.452	310.221	0.001%	0.000%
19.516	10.774	311.132	10.774	311.133	0.001%	0.000%

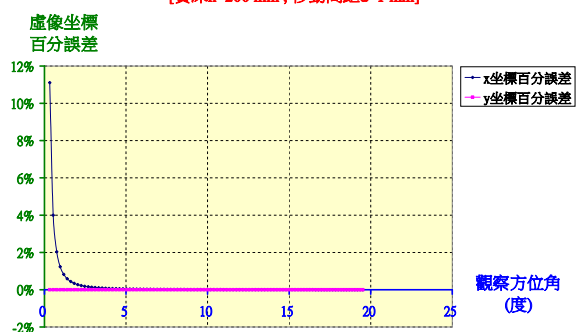
(2) 兩種公式的坐標誤差對比圖：

自創公式與微分公式的虛像坐標誤差圖  
[實深  $h=200 \text{ mm}$ ，移動間距  $d=5 \text{ mm}$ ]



(圖三十四)

自創公式與微分公式的虛像坐標誤差圖  
[實深  $h=200 \text{ mm}$ ，移動間距  $d=1 \text{ mm}$ ]



(圖三十五)

1. 虛像的  $x$  坐標值最初都很小，所以它的誤差值也相對較大，但觀察角大於  $5^\circ$  以後，它的誤差值就急速地減小至 0 左右。至於  $y$  坐標的誤差值幾乎都維持在很小的情況，相當的精準。

2. 若自創公式的  $d$  值愈小，則  $x$  坐標的高誤差值會向愈小的觀察角靠攏。

## 研究五、檢視『自創公式』測量值與『微分公式』理論值的差距

### (一) 觀察者在空中(第一象限)看水中虛像的實驗

#### 1. 實驗測量與公式演算的數據表

##### (1) 實深 $h=200\text{ mm}$ :

[表格 G-1]：移動間距 $d=5\text{ mm}$ ，水折射率 $n=4/3$							
實驗測量與自創公式的配合						微分公式	
視線編號 $m$	折射角 $\beta$ (度)	視線斜率 $S_m$	觀察方位角 $\gamma$ (度)	$x$ 坐標 (mm)	$y$ 坐標 (mm)	$x'$ 坐標 (mm)	$y'$ 坐標 (mm)
1	1.90	30.145	2.85	0.011	-150.392	0.008	-149.756
2	3.80	15.056	4.75	0.055	-149.730	0.037	-149.323
3	5.70	10.019	6.60	-0.675	-157.039	0.101	-148.692
27	48.30	0.891	49.10	48.879	-76.731	50.691	-75.309
28	49.90	0.842	50.70	54.730	-71.804	56.311	-70.576
29	51.50	0.795	52.30	60.855	-66.932	62.338	-65.784

##### (2) 實深 $h=160\text{ mm}$ :

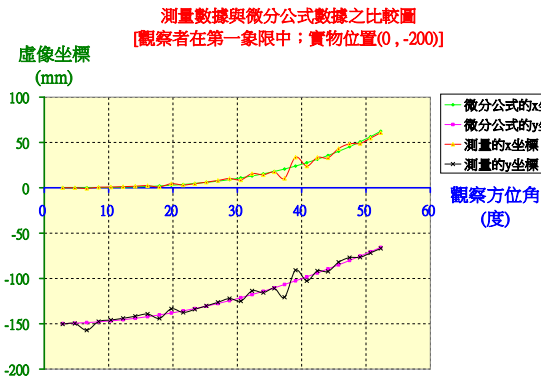
[表格 G-2]：移動間距 $d=5\text{ mm}$ ，水折射率 $n=4/3$							
實驗測量與自創公式的配合						微分公式	
視線編號 $m$	折射角 $\beta$ (度)	視線斜率 $S_m$	觀察方位角 $\gamma$ (度)	$x$ 坐標 (mm)	$y$ 坐標 (mm)	$x'$ 坐標 (mm)	$y'$ 坐標 (mm)
1	2.40	23.859	3.60	0.02	-118.88	0.013	-119.689
2	4.80	11.909	5.95	-0.35	-123.20	0.059	-119.150
3	7.10	8.028	8.30	0.44	-116.86	0.161	-118.343
27	59.30	0.594	60.35	78.84	-33.35	79.001	-33.306
28	61.40	0.545	62.50	89.15	-27.72	88.036	-28.386
29	63.60	0.496	64.70	97.18	-23.74	97.704	-23.588

(3) 實深  $h=120\text{ mm}$  :

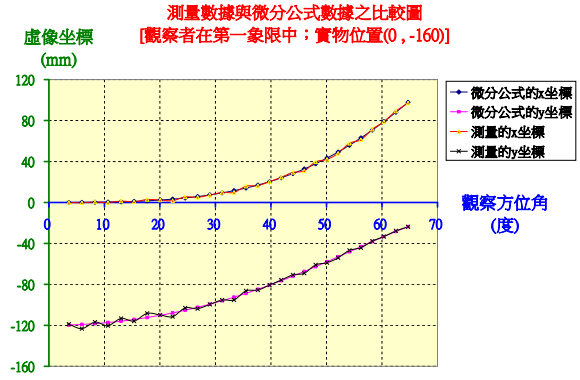
[表格 G-3]：移動間距 $d=5\text{ mm}$ ，水折射率 $n=4/3$							
實驗測量與自創公式的配合						微分公式	
視線編號 $m$	折射角 $\beta$ (度)	視線斜率 $S_m$	觀察方位角 $\gamma$ (度)	x 坐標 (mm)	y 坐標 (mm)	x' 坐標 (mm)	y' 坐標 (mm)
1	3.2	17.886	4.80	0.031	-88.874	0.023	-89.585
2	6.4	8.915	8.00	0.155	-87.766	0.108	-88.846
3	9.6	5.912	11.10	-0.549	-91.930	0.290	-87.774
21	61.4	0.545	62.85	67.372	-20.516	67.161	-20.704
22	64.3	0.481	65.80	76.779	-15.988	76.999	-15.976
23	67.3	0.418	68.90	87.417	-11.538	87.687	-11.515

**[特別註明]**：因受實驗測量器材的影響，在視線移動間距  $d=5\text{ mm}$  時，實深  $200\text{ mm}$  的視線編號數只用到『29』，實深  $160\text{ mm}$  的視線編號數只用到『29』，而實深  $120\text{ mm}$  的視線編號數只用到『23』。

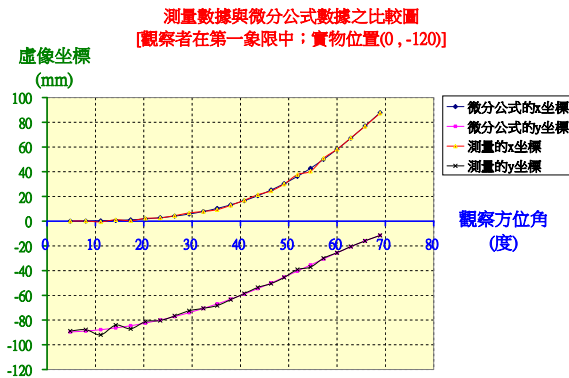
2. 虛像坐標的測量數據與微分公式數據之比較圖



(圖三十六)



(圖三十七)



(圖三十八)

1. 折射角必須經過多次非常仔細的測量，才能計算出誤差較低的視線斜率與虛像坐標之數據。
2. 圖中的測量數據偶有脫離理想的軌道曲線仍可接受，除非折射角的測量精密度能達到  $0.1^\circ$  以下。

(二) 觀察者在水中(第三象限)看空中虛像的實驗

1. 實驗測量與公式演算的數據表

(1) 實深  $h=200\text{ mm}$  :

[表格 H-1]：移動間距 $d=5\text{ mm}$ ，水折射率 $n=4/3$							
實驗測量與自創公式的配合						微分公式	
視線編號 $m$	折射角 $\beta$ (度)	視線斜率 $S_m$	觀察方位角 $\gamma$ (度)	$x$ 坐標 (mm)	$y$ 坐標 (mm)	$x'$ 坐標 (mm)	$y'$ 坐標 (mm)
4	4.30	13.300	4.80	1.389	284.466	0.124	268.876
5	5.30	10.780	5.85	-1.092	257.722	0.226	269.966
6	6.40	8.915	6.90	1.669	282.337	0.374	271.288
7	7.40	7.700	7.95	-1.823	255.445	0.578	272.851
32	27.90	1.889	28.20	36.349	370.839	46.739	389.810
33	28.50	1.842	28.80	34.072	366.645	51.511	398.597
34	29.10	1.797	29.35	72.288	435.305	56.321	407.247
35	29.60	1.760	X	X	X	X	X

(2) 實深  $h=160\text{ mm}$  :

[表格 H-2]：移動間距 $d=5\text{ mm}$ ，水折射率 $n=4/3$							
實驗測量與自創公式的配合						微分公式	
視線編號 $m$	折射角 $\beta$ (度)	視線斜率 $S_m$	觀察方位角 $\gamma$ (度)	$x$ 坐標 (mm)	$y$ 坐標 (mm)	$x'$ 坐標 (mm)	$y'$ 坐標 (mm)
4	5.40	10.579	6.05	0.599	217.911	0.200	216.160
5	6.70	8.513	7.35	0.463	216.752	0.363	217.542
6	8.00	7.115	8.65	0.269	215.374	0.600	219.226
7	9.30	6.107	9.95	0.008	213.779	0.929	221.229
32	31.80	1.613	32.05	95.208	411.608	70.261	368.098
33	32.30	1.582	32.55	92.352	407.091	76.426	377.849
34	32.80	1.552	33.05	89.418	402.538	83.201	388.360
35	33.30	1.522	X	X	X	X	X

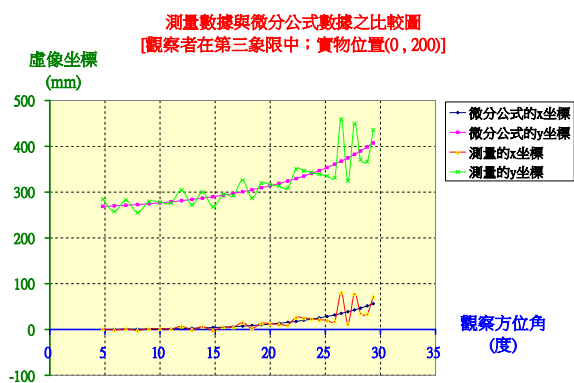
(3) 實深  $h=120\text{ mm}$  :



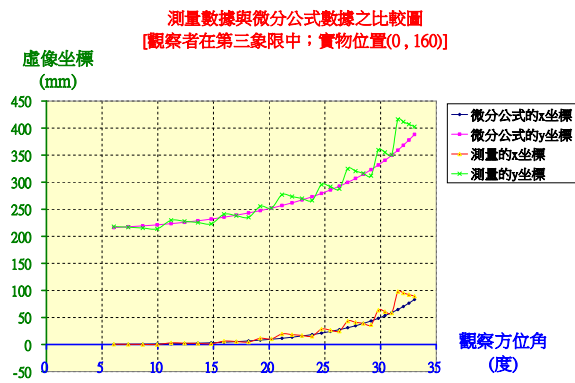
[表格 H-3]：移動間距  $d=5\text{ mm}$ ，水折射率  $n=4/3$

實驗測量與自創公式的配合				微分公式			
視線編號 $m$	折射角 $\beta$ (度)	視線斜率 $S_m$	觀察方位角 $\gamma$ (度)	$x$ 坐標 (mm)	$y$ 坐標 (mm)	$x'$ 坐標 (mm)	$y'$ 坐標 (mm)
4	7.10	8.028	7.95	0.587	165.281	0.347	163.711
5	8.80	6.460	9.65	0.353	163.769	0.633	165.553
6	10.50	5.396	11.35	0.021	161.977	1.056	167.827
7	12.20	4.625	13.00	1.750	169.976	1.632	170.491
30	36.10	1.371	36.35	121.022	371.664	112.641	363.375
31	36.60	1.347	36.85	117.467	366.878	123.965	378.620
32	37.10	1.322	37.35	113.829	362.067	136.734	395.501
33	37.60	1.299	X	X	X	X	X

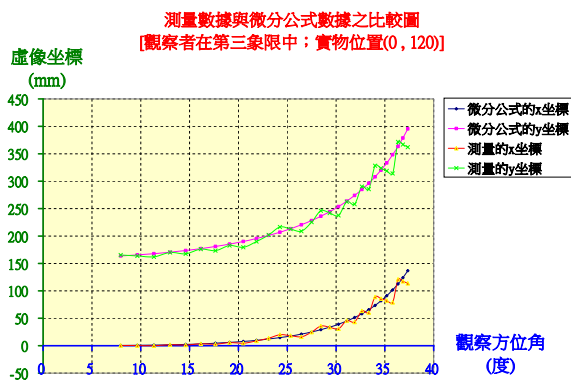
2. 虛像坐標的測量數據與微分公式數據之比較圖：



(圖三十九)



(圖四十)



(圖四十一)

1. 在實驗操作時，第二套測量工具的技术難度比較高，加上整套工具各處環節的微小誤差，因此坐標數據的曲線難免表現的較差。
2. 測到的視角數據經過計算後，每一條視線的斜率值和虛像坐標值的誤差都顯示出相對的偏高。

## 陸、討 論

### 一、理論的分析與歸納

1. 一位觀察者不論他出現在空中或水中的哪個位置，他所見到的虛像位置必定都在圖(十三)至圖(十六)的四條曲線上。
2. 若固定實深，而觀察者在平行於水面(界面)的平面上逐漸遠離物體，即**觀察方位角  $\gamma$  逐漸增大**時：
  - (1) 觀察者在空中看水中的物體：虛像會逐漸**接近**觀察者。其中虛像與物體之間的水平距離**逐漸增大**，但虛像與界面之間的鉛直距離(=**視深**)卻是逐漸**減小至 0**。
  - (2) 觀察者在水中看空中的物體：虛像會逐漸**遠離**觀察者。其中虛像與物體之間的水平距離和虛像與界面之間的鉛直距離(=**視深**)都是同步進行**先緩慢而後急遽的增大**。
3. 當觀察者在空中看水中的物體時，若觀察方位角  $\delta$  每次改變  $1^\circ$ ，則虛像**位置的變動量(=位移)**會出現一個特殊景像。
  - (1) 當觀察方位角  $\delta$  逐漸增大時，虛像的水平位移會**先增大後減小**，而鉛直位移(=**兩次視深的差**)也是**先增大後減小**。
  - (2) 我們對照三種實深的虛像位移與觀察方位角  $\delta$  之關係圖，發現實深雖然不同但曲線的最高點卻有共同的特徵。即水平位移的最大值出現在  $55^\circ$  附近，而鉛直位移的最大值出現在  $70^\circ$  的附近。
4. 『**自創公式**』的視線編號  $m$  之問題：觀察者在空中看水中的物體。
  - (1) 選用  **$d=5\text{ mm}$** ：
    - Ⓐ 實深  $h=200\text{ mm}$ ： $m_{\text{理論}} \leq 45$
    - Ⓑ 實深  $h=160\text{ mm}$ ： $m_{\text{理論}} \leq 36$
    - Ⓒ 實深  $h=120\text{ mm}$ ： $m_{\text{理論}} \leq 27$
  - (2) 選用  **$d=1\text{ mm}$** ：
    - Ⓐ 實深  $h=200\text{ mm}$ ： $m_{\text{理論}} \leq 226$
    - Ⓑ 實深  $h=160\text{ mm}$ ： $m_{\text{理論}} \leq 181$
    - Ⓒ 實深  $h=120\text{ mm}$ ： $m_{\text{理論}} \leq 136$
5. 『斜率』與『坐標』的數值為何都取用到小數點下三位？
  - (1) 當初導出『自創公式』後進行數字驗算的工作時，發現斜率的數值在小數點下的位數愈多，則『自創公式』與『微分公式』之間的坐標誤差就愈小。
  - (2) 當虛像坐標的數值採用較精細的數字時，我們才能從坐標的數值變動中觀察出它們有奇妙的位移變化。

## 二、測量值與理論值之對照與分析

1. 我們在所有實驗的測量和理論推算中都用  $d=5\text{ mm}$  的移動間距，這是為兼顧『降低誤差』與『求取較多的測量數據』。
2. 為何『測量數據』與『理論數據』會出現相當明顯的誤差？
  - (1) 因為整套測量工具是完全自製的，且實驗期間仍不斷地修改與調整，但仍有其測量能力的極限，導致無法測出更準確的視角。
  - (2) 當我們分析自創公式的理論數據時，發現其中某一個視角數值若有微小的誤差，則它對應的斜率也跟著變動，這樣將會連帶使前後兩個虛像坐標的數值同時產生誤差，這就是圖線會出現鋸齒狀的走勢之故。

## 三、實驗操作的困擾與解決

1. 視角測量器每次移動時，水族箱內的水總會溢出一些，需要隨時加水至滿才能使實深的數值符合實驗的要求，否則測得的視角就有誤差。
2. 剛開始時，視角的精密度本來只到 1 度，結果演算出來的坐標數據非常不理想。後來才設計一個角度游標尺，使測量的角度可以達到 0.1 度的精密度，但是顯然還不夠好。
3. 分度儀上的刻度線是用小型分度器影印放大，因此刻度線條也跟著變粗，提高了讀取角度的工作難度，因此需要稍加修飾。
4. 觀察者在水中看空中的物體時，為何實驗數據誤差相對比較高？
  - (1) 因為第二套實驗裝置的結構比第一套複雜，需要注意長度的地方很多，所以無形中就在累積誤差。
  - (2) 這個實驗的視角讀取方式是將水中的雷射光線與游標副尺上的 0 刻度線對齊，但這種觀察方法容易出現誤差，仍有改進的空間。
5. 當折射角有點小時，投射在鋼尺上的雷射光並沒有出現一個光點，而是一個長條狀的光斑，造成測量上的困擾。後來在水中加入少許的牛奶，使水中的光線清晰可見後，便採用該光斑範圍的中心。

## 柒、結論

1. 『視深』是物理學的專有名詞，不論是學生或老師對這個名詞都相當地熟悉，所以我們特別將它擺放在**作品名稱**上，當作整個研究的**起點**。

2. 本專題的重點是把物體當作一個『**質點**』來處理，唯有物體質點化才能簡化問題，而把問題簡化後才比較容易解決與研究。
3. 『**微分公式**』的**特色**：只要『**一個折射角**』就能求得虛像的坐標。在公式的推導過程中運用微分方法而取得視角的微小變動，這代表公式內已經有兩條視線進行交會的演算而求取虛像坐標。
4. 『**自創公式**』的**實用**：不需要學習**深奧的數學**。
  - (1) 理論方面：我們只要選定實深、移動間距及介質的折射率，就可以由公式求得觀察者看到的虛像坐標，且不限空氣與水的兩種介質。
  - (2) 實驗方面：只要有精密工具與細心操作的兩項條件，任何學生都能測量出準確的視角數據，然後從公式求出準確的虛像坐標。

## **捌、參考資料及其他**

1. 徐國誠老師：科學教育月刊第 267 期的視深文章。
2. 張慶堂老師：光學動畫，光的折射與視深。  
<http://mail2.cjhs.kh.edu.tw/PhysicsElearning/about/>
3. 翰林出版社：高中選修物理(上)的幾何光學。

## 【評語】 030109

1. 本件作品探討課程相關物理學中視深問題，並系統化應用理論推導分析。
2. 本件作品乃屬光學折射率問題，應可應用司乃耳折射定律而分析得到本作用相同對此結果。
3. 對於數值處理的方式論(例如誤差分析及有效位數等)應留意。並建議本作品可深思努力之。