中華民國 第50屆中小學科學展覽會
作品說明書

高職組　機械科

第一名
最佳創意獎

090903

有秩序的糾纏

學校名稱：高雄市立高雄高級工業職業學校

作者：	指導老師：
職二 黃亭瑋 職二 蘇鈺婷 職二 郭文凱 職二 陳剛	吳寬瀛 劉慶源

關鍵詞：多面體、撓性與剛性

得獎感言

回想高二這段期間，因為一次圖書館舉辦的活動中，見到了多面體積木。我們因好奇而感興趣，開始向老師請教相關的知識。有了對於多面體初步的認識後，我們決定以多面體作為科展的主題。

開始研究之後，才發現作科展並不是想像中的如此容易，我們總是只看到別人的成功。然而當自己親身去體驗成功背後的辛酸時，才會知道科展真的不是這麼容易。

以下，是一路支持我們走過來的所有人：

1. 感謝製圖科老師們的鼎力相助,使得在研究過程中遇到困難可以得到適當的指導。
2. 感謝學校各處室的幫忙，讓我們能夠順利的參加比賽。
3. 感謝班上的同學們和家長，在比賽的同時也能夠給予不同層面的支持。
4. 謝謝組員們之間的配合！在討論過程中難免的摩擦、遇到瓶頸時的低潮、思考問題時的苦惱與許許許多多的挫折等。都因為組員們的包容和體諒而得以解決。

總之，就是因為有這麼多人的支持與幫助，我們才能得到這麼高的榮譽！感謝大家！

摘要

在日常生活中其實很容易去發覺多面體的存在，像正六面體、正四面體等，這些多面體出現在日常生活中是一點都不奇怪但其實這些線和面組成的規律變化是很多樣化的！

例如:高雄市政府聯合服務中心處(Art corner)，展示出與一般人差不多大的大型雕塑作品，名為SnubDodeca。這類富變化的多面體，也可使用星狀延伸體的型態來表現，並以幾何原理、點、線、面之其中有規律但複雜交錯的特性所製成。

我們研究的多面體是從紙模型觀察出多面體的組成結構，加上中國結的纏繞原理，過程中，研究出將中國結的撓性組合轉換成具剛性的積木組合。

籐球也是運用中國結的纏繞原理編織而成。若將《圖 a》這顆撓性籐球轉換成剛性，就會變成《圖 b》剛性模型。

之所以會把作品名稱取為「有秩序的糾纏」是因為我們研究的多面體中運用了中國結的纏繞原理，看似複雜卻有秩序，這就像英式探戈糾纏環繞的舞步一樣。

＊註　撓性：物體可承受外力造成之彎曲變形的抗性。

《圖 a》

《圖 b》

《中國結》

壹、研究動機

最初我們對多面體並不了解，但在某一次圖書館辦的活動裡，看到各式各樣的多面體積木模型，我們因好奇而感興趣，所以我們找了很多關於這方面的資料，也向老師請教了關於這方面的知識，後來我們對多面體有了初步的概念也發現多面體原來這麼有趣，所以我們就希望以多面體來當作這次科展的主題。

貳、研究目的

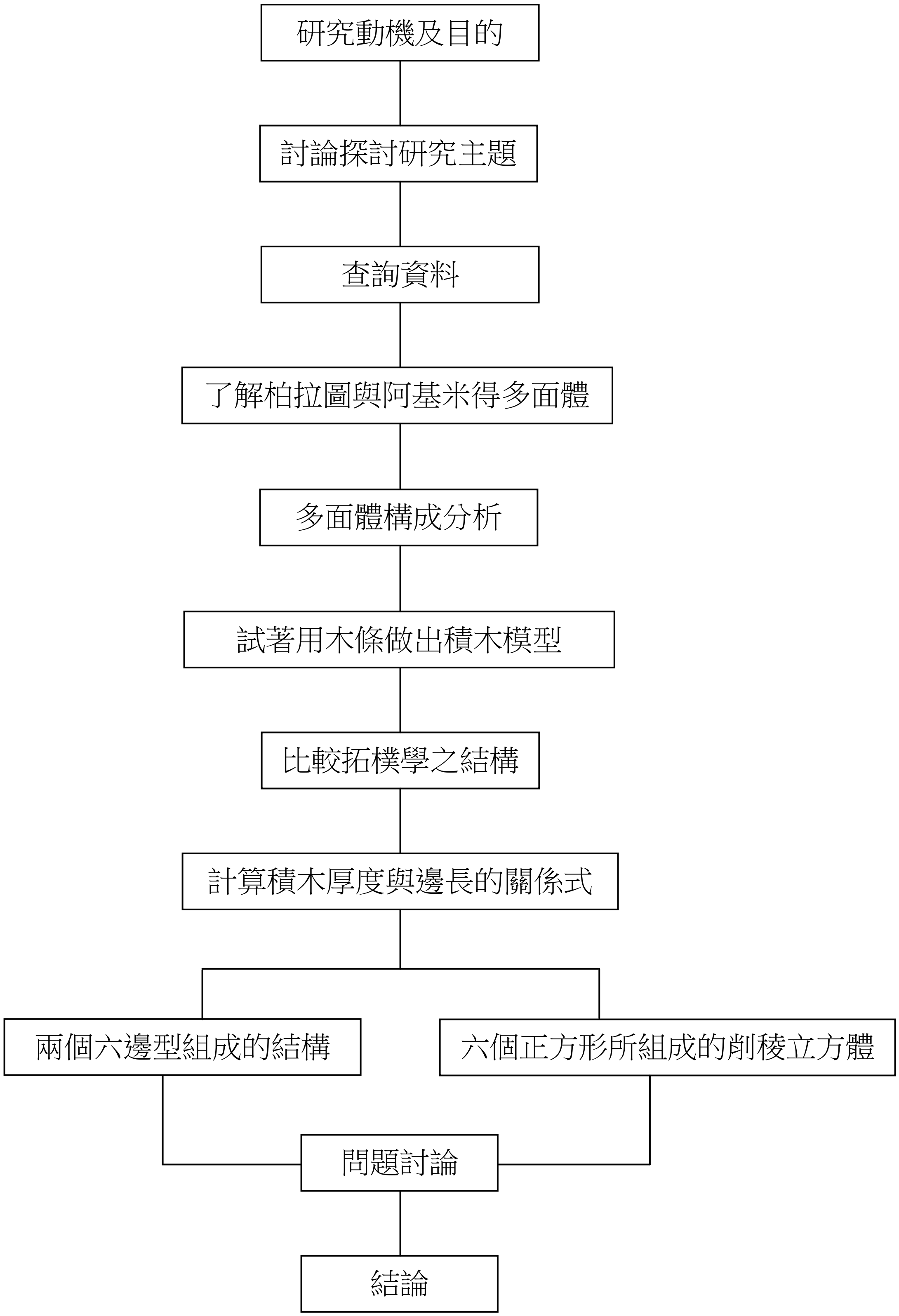
1. 觀察組成結構（觀察阿基米得多面體，可由什麼正多邊形構成）
2. 探討拓樸學（Topology）
3. 製作出木模型並計算積木的厚度與邊長的關係式

參、研究設備與器材

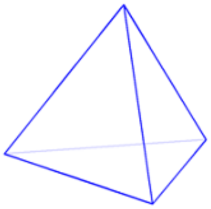
1. 工程用計算機
2. 電腦繪圖軟體Auto CAD 2008
3. 文書編輯軟體Microsoft Word 2003
4. 製作模型用紙
5. 銑床
6. 木材
7. 鑽床
8. 鋁條
9. 螺栓
10. 游標卡尺

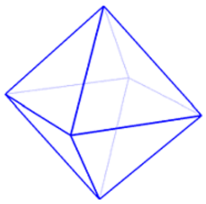
肆、研究過程與方法

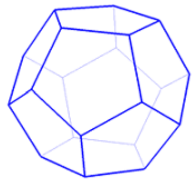
研究流程：

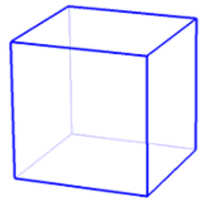


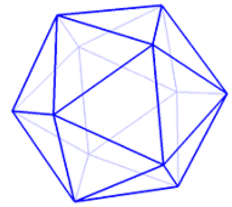
1. 了解並製做柏拉圖多面體模型


正四面體

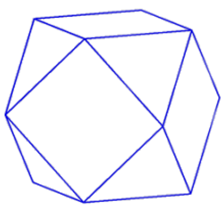

正八面體

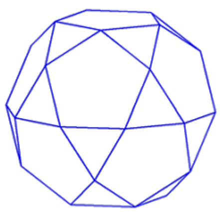

正十二面體

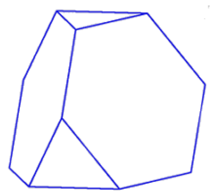

正立方體

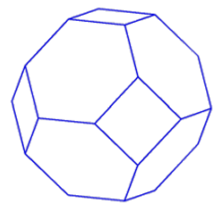

正 20 面體

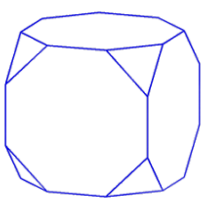
2. 了解並製作阿基米德（Archimedean）多面體模型

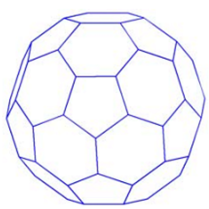

截半 6 面體

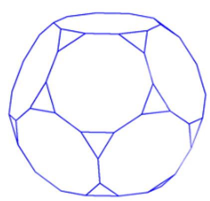

截半 12 面體

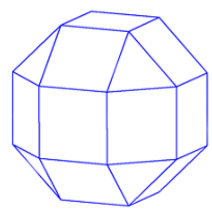

截角 4 面體

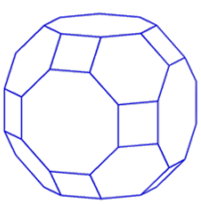

截角 8 面體

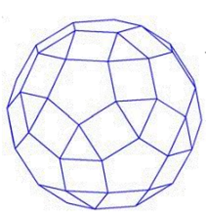

截角立方體

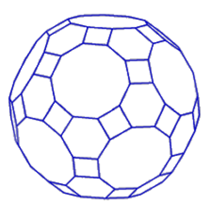

截角 20 面體

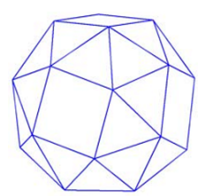

截角 12 面體

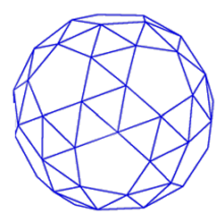

削稜截角立方體


大削稜截角立方體


削稜截角 12 面體


大削稜截角 12 面


扭稜立方體


扭稜 12 面體

3. 多面體結構組成分析

我們透過觀察，得到以下結果。

〔例如〕我們觀察截半六面體，發現它可由八個正三角形構成，或由六個正四邊形構成。

<table>
<tr><th>多面體名稱</th><th>組成分析</th><th>多面體名稱</th><th>組成分析</th></tr>
<tr><td>截半六面體</td><td>(1)八個正三角形
(2)六個正四邊形</td><td>削稜截角立方體</td><td>(1)十八個正四邊形
(2)六個正八邊形</td></tr>
<tr><td>截半十二面體</td><td>(1)十二個正五邊形
(2)二十個正三角形</td><td rowspan="2">大削稜截角立方體</td><td rowspan="2">(1)六個正八邊形、
十二個正四角形
(2)六個正八角形、
八個正六邊形
(3)十二個正四邊形、
八個正六邊形</td></tr>
<tr><td>截半四面體</td><td>四個正六角形</td></tr>
<tr><td>截半八面體</td><td>八個正六角形</td><td rowspan="2">削稜截角十二面體</td><td rowspan="2">(1)十二個正五角形、
二十個正三角形
(2)二十個正五邊形、
三十個正四角形
(3)二十個正三角形、
三十個正四角形
(4)十二個正十角形</td></tr>
<tr><td>截角立方體</td><td>六個正八邊形</td></tr>
<tr><td>截角二十面體</td><td>二十個正六邊形</td><td rowspan="2">大削稜截角十二面體</td><td rowspan="2">(1)十二個正十角形、
三十個正四角形
(2)十二個正十角形、
二十個正六邊形
(4)三十個正四邊形、
二十個正六邊形</td></tr>
<tr><td>截角十二面體</td><td>十二個正十角形</td></tr>
</table>

4. 我們用木條製作我們觀察出來的組成分析，再將他們組成多面體。

5. 比較 拓樸學（Topology）結構

＊拓撲學介紹：

拓撲學的最簡單觀念產生於對周圍世界的直接觀察。直觀的說，關於圖形的幾何性質探討，不限於它們的“度量”性質（長度、角度等等）方面的知識。

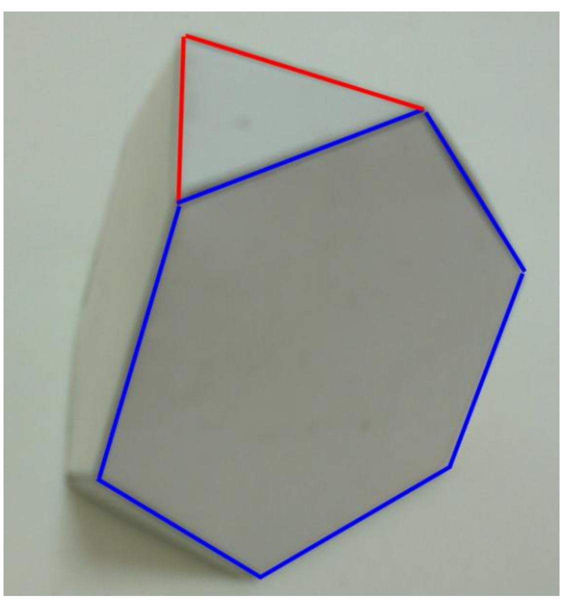
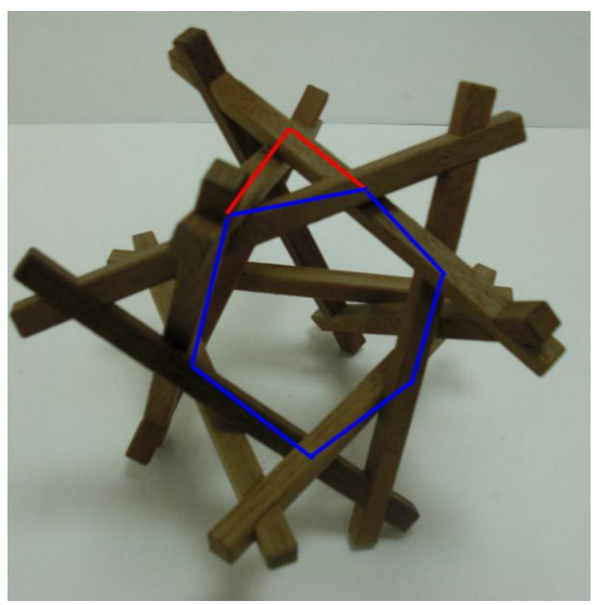
拓撲學探討各種幾何形體的性質，但是其內容卻與幾何學的範疇不盡相同，多數的討論都是圍繞在那些與大小、位置、形狀無關的性質上。

如果曲線是閉合的，則它可以是「纏繞」得很複雜的。兩條以上的閉曲線可以互相套起來，而且有很多型式。立體及它們的表面可以是有「孔洞」的，在不割裂、破壞孔洞下，它們允許做任意的伸縮及變形。這種變形不會減少或增加孔動數量，就叫做它的「拓撲性質」。

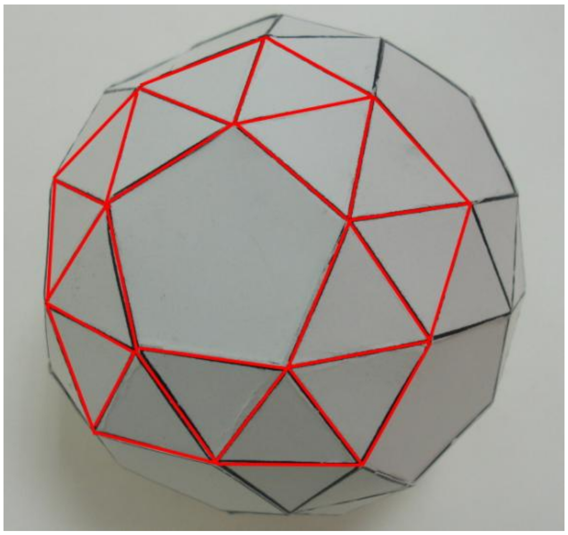
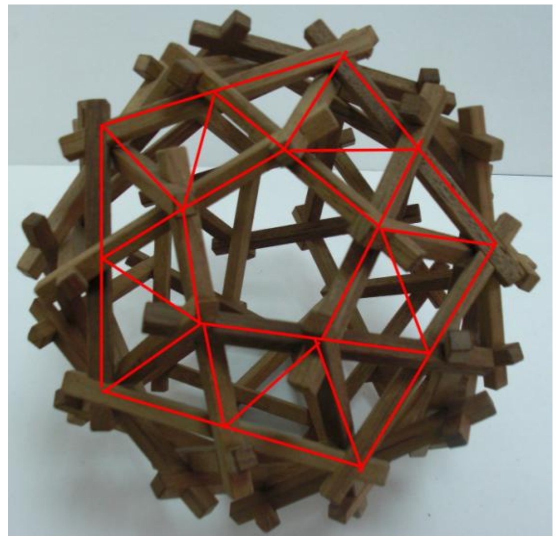
例如:一個橡皮圈，在它的彈性限度內，任憑我們把它拉長、扭轉，只要不把它弄斷，那麼它永遠是一個圈圈。拉長使它的長度改變了，扭轉使它的形狀改變了，然而在拓撲學上不會理會這些，只是專注在“它永遠有一個圈圈”上。

拓撲學只探討各種幾何形體的內稟特質。一個幾何圖形的性質，經由一拓撲變換作用後維持不變，該性質稱為圖形的拓撲性質。

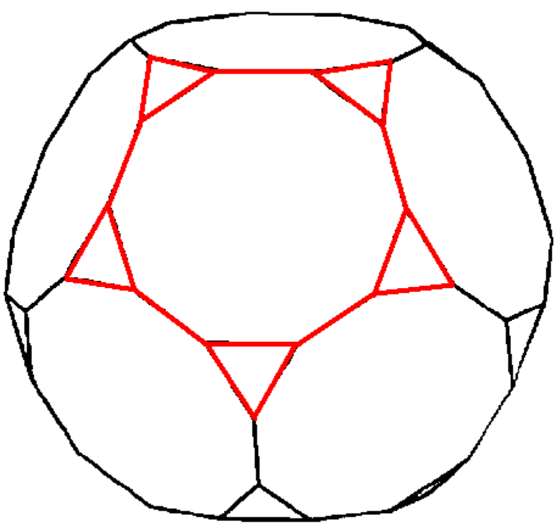
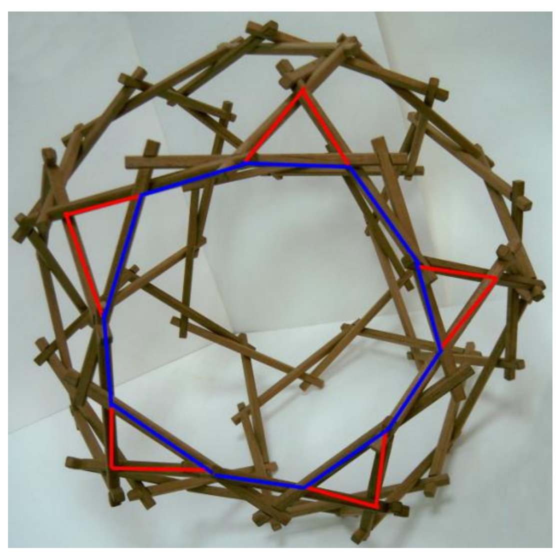
截角四面體 (由四個正三角形組合而成)

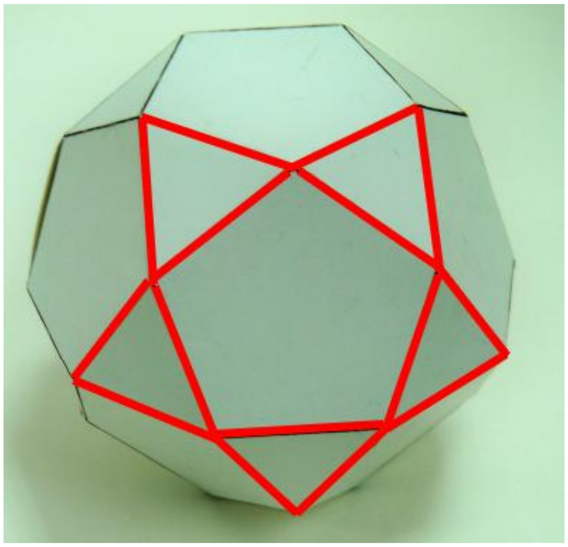
扭稜十二面體 (由十二個正五邊形組合而成)

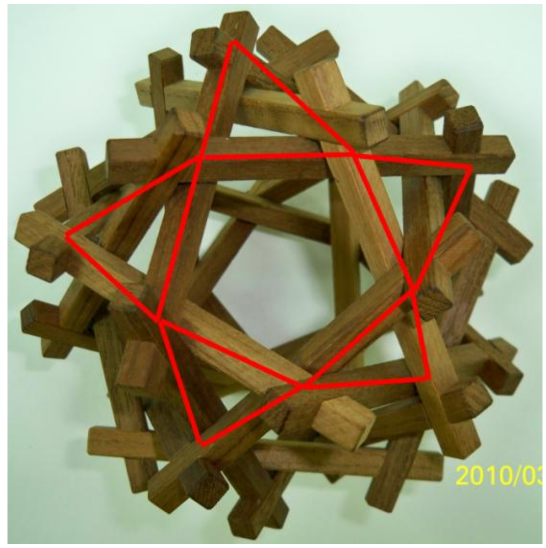
 

截角十二面體 (由十二個正五邊形組合而成)

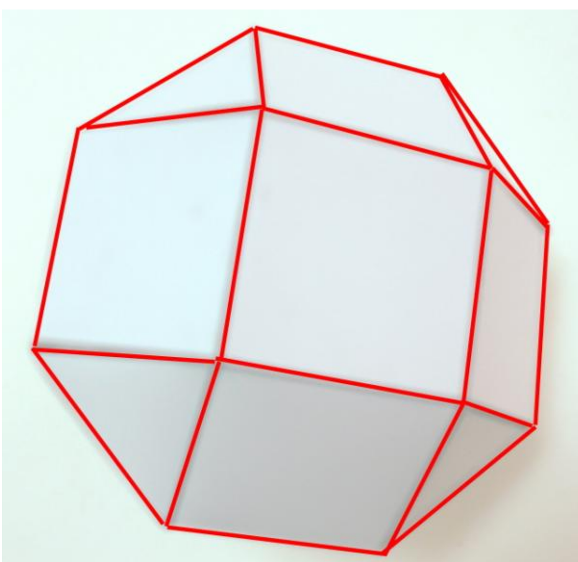
 

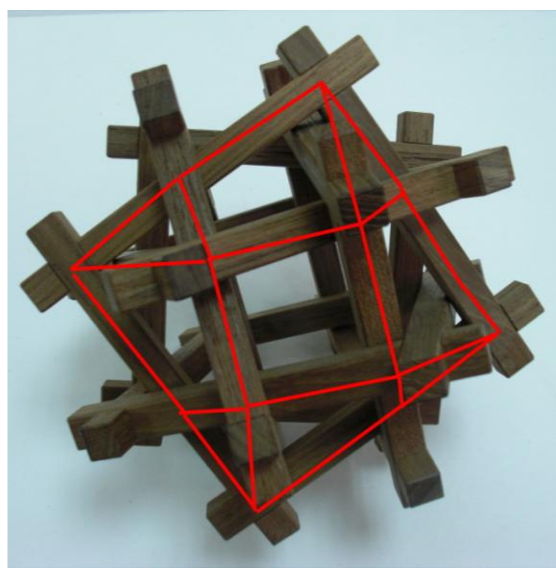
截半十二面體 (由六個正五邊形組合而成)





削稜截角立方體 (由六個正四邊形組合而成)





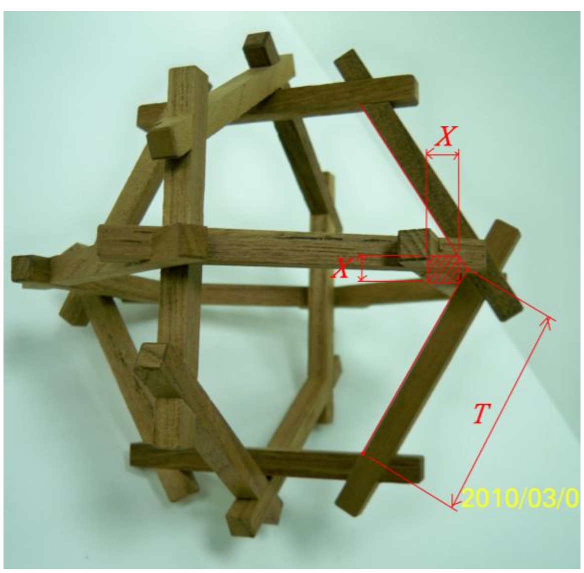
伍、研究結果

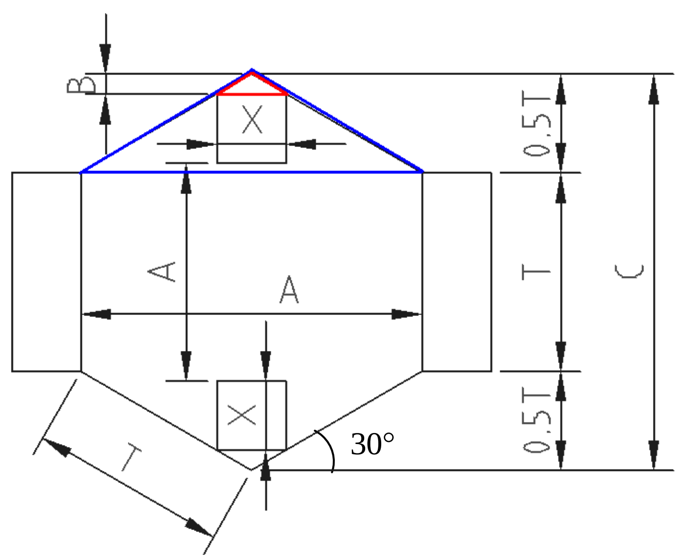
計算積木厚度與邊長的關係式

1. **三個正六邊形組成的結構** [見圖1]：設 邊長為T、積木厚度為X。

《圖 1》

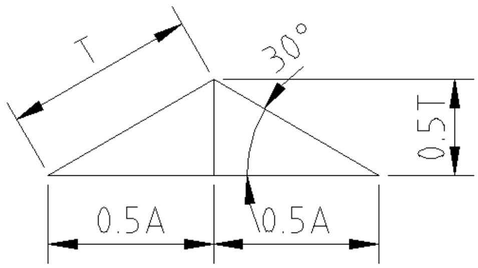
Step1. 將立體模型轉換成平面圖 [見圖二]，再加以計算。





《圖 2》

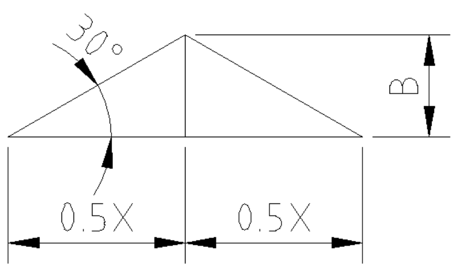
Step2. 計算平面圖中，藍色的那塊三角形，先找出A與T的關係。



$$\frac{A}{2} = T\cos 60^\circ$$

$$A = 2x\frac{\sqrt{3}}{2}T = \sqrt{3}T$$ ←（A 與 T 的關係 ）

Step3. 計算平面圖中，紅色的那塊三角形，求出B與X的關係。



$$1:\sqrt{3} = B:0.5X$$

$$B = \frac{1}{2\sqrt{3}}X$$ ←（B 與 X 的關係 ）

Step4. 設正六邊形最長的對角線為C，計算長度彼此的關係。

$$C = 0.5T\times 2 + T = 2\mathrm{T}\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$C = B\times 2 + X\times 2 + A = \frac{1}{2\sqrt{3}}X\times 2 + 2X + \sqrt{3}T = \frac{\sqrt{3}}{3}X + 2X + \sqrt{3}T\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$\begin{cases} C = 2T \\ C = \dfrac{\sqrt{3}}{3}X + 2X + \sqrt{3}T \end{cases}$$

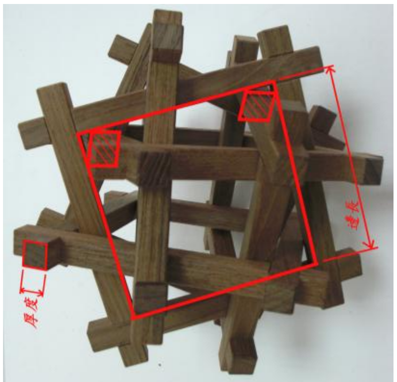
$$\Rightarrow 2T = \frac{\sqrt{3}}{3}X + 2X + \sqrt{3}T$$

$$\Rightarrow T(2-\sqrt{3}) = \frac{(\sqrt{3}+6)}{3}X$$

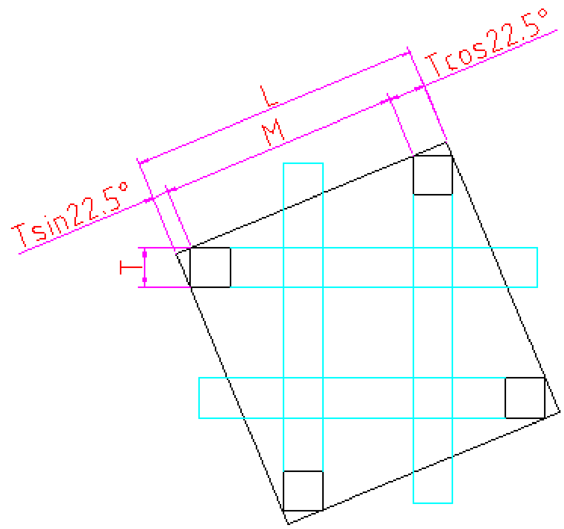
$$\Rightarrow T = \frac{(\sqrt{3}+6)}{3(2-\sqrt{3})}X = \frac{8\sqrt{3}+15}{3}X = 9.618X$$

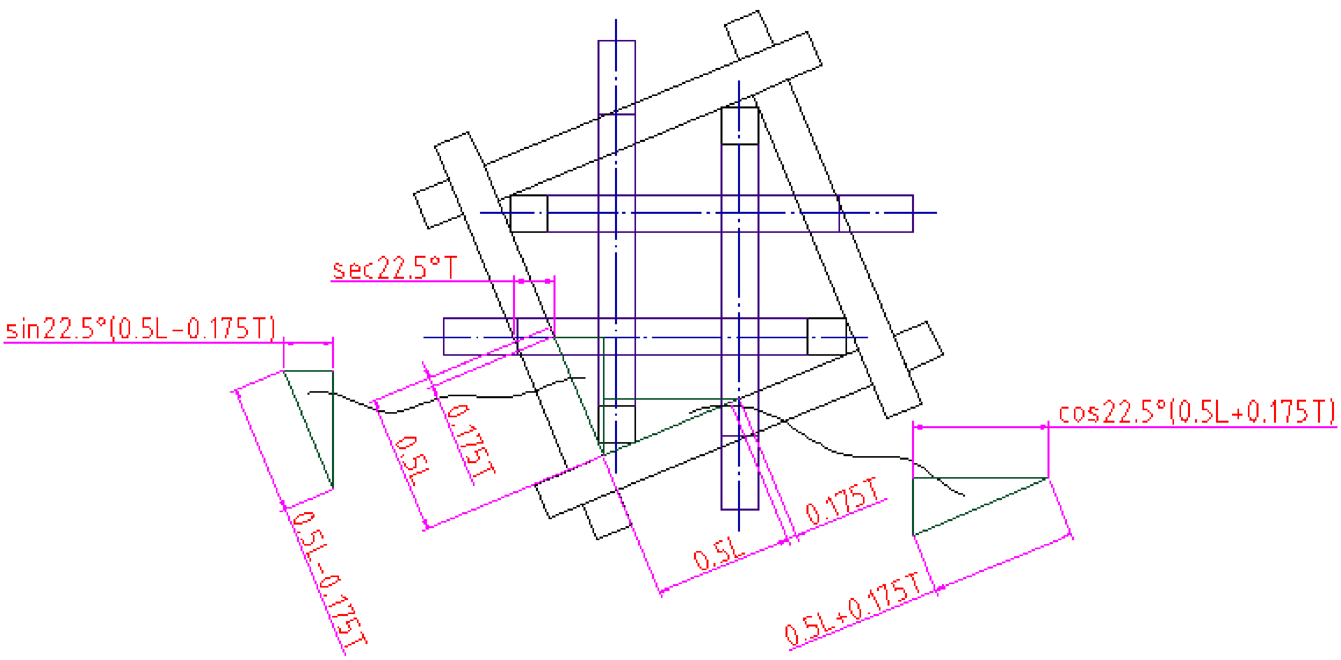
$\therefore \mathrm{T} = 9.618\mathrm{X}$ ←（ 即為所求 ）

2. **削稜截角立方體** [見圖二]：設 邊長為L、積木厚度為T。



《圖二》





$M = \sec 22.5°T + \sin 22.5°(\,0.5L - 0.175T\,) + \cos 22.5°(\,0.5L + 0.175T\,)$

$L = \sec 22.5°T + \sin 22.5°(\,0.5L - 0.175T\,) + \cos 22.5°(\,0.5L + 0.175T\,) + \sin 22.5° + \cos 22.5°$

$L = 2.59T + 0.65L$

$0.35L = 2.59T$

$L = 7.4T$ ← (即為所求)

陸、討論

1. 作品名稱的由來：

我們研究的多面體構成之模式就像是英式探戈看似複雜卻有秩序的糾纏環繞之舞步，因此我們就決定把我們的作品名稱取為「有秩序的糾纏」。

2. 製作紙模型所遇到的問題：

製作阿基米德與喀卜勒-龐索多面體時，我們發現圖形越是複雜，製成立體模型的困難度也就越高，且裕留量也就越小，所以我們做了兩種方法，第一種方法是將多面體的展開圖放大，第二種方法是在做立體模型時，以小牙籤沾白膠做接合，雖然這樣會增加一點工作時間，不過用此方法可將模型做的更為精緻。

3. 每個我們研究的多面體都有屬於自己的數學模式嗎?

(1)是的。

(2)對於我們所研究的多面體，我們皆知道他們的相對關係，但他們的數學模式還在計算中。

4. 不知道數學模式的多面體如何製作?

我們是用『試』的方式來製作以之相對關係之我們所研究的多面體。首先是拿木條，用銑床加工榫接槽，然後將模型組合；若木條的長度太長，則模型會晃動，這時我們就必須把木條鋸短一點，若木條的長度太長，則模型無法組裝，這時就必須換長一點的木條；我們不斷的調整木頭的長度，最後就完成了模型，這過程非常的耗時間，所以我們目前還在研究它的數學模式中，只要計算出厚度與邊長的關係，就可大量的製作，可節省很多時間。

5. 將材料由木頭改成鋁，可不可行?

我們試著將木頭材料換成鋁條，我們發現：

(1)若多面體是由**正三角形**組成，可以藉由計算出來的關係式，算出孔與孔之間的距離並鑽孔，然後用螺栓連接零件。

(2)若多面體是由**正四邊形以上的正多邊形**組成，則用螺栓連接零件後，此多邊形會變成無拘束運動鏈。無拘束鏈，會造成組裝上的困難，所以我們發現，只要將零件向外延長一點，並在相同長度的地方加鑽連接用的孔，再加裝鋁條，使其固定成呆鏈即可順利組裝。

優點：1. 使內容更接近於機械

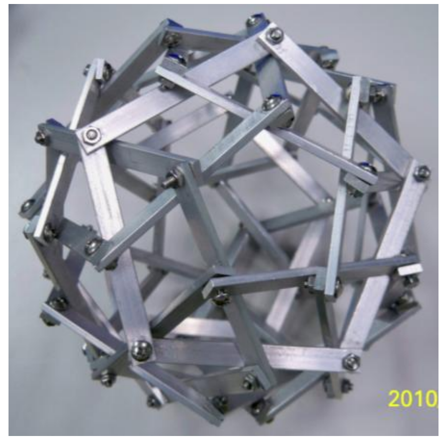
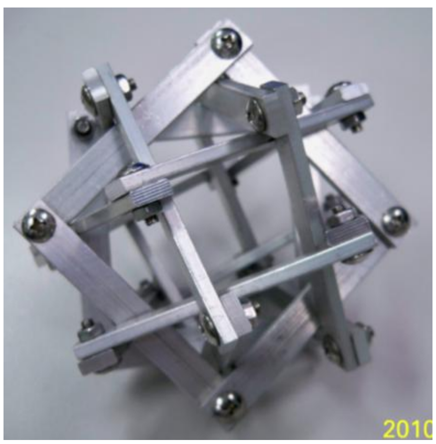
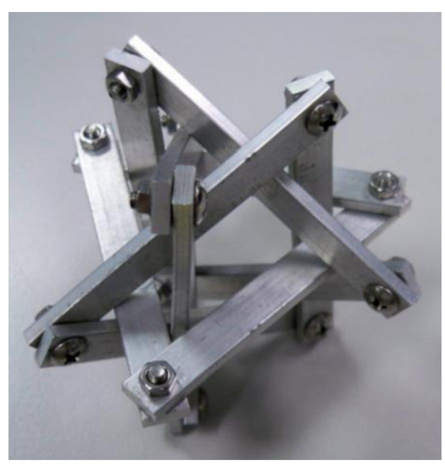
2. 比成本較原先的木製成本低

3. 因鋁製積木組裝方法與木製積木不同，所以也可將這種想法用於益智積木中，如此一來又會是一種新的益智玩具。

螺栓

鋁條

用螺拴連接鋁條

鋁製多面體模型	
 截半十二面體	 扭稜十二面體
 削稜截角立方體	 截角四面體
	

柒、結論

我們以空間概念去觀察多面體的結構組成，剛開始製作模型的材料是細管，後來加上自己的新點子，也就是將中國結的撓性轉變為多面體的剛性去製作模型，這次的材料改用木條，以榫接的方式連接零件，最後將木質材料改為鋁材料，以螺栓連接零件。

以木條為材料製作模型的過程中，我們發現在模型組裝起來剛好不會晃動的情形下，木條的厚度與長度的關係是唯一的，所以決定要計算木條之厚度與邊長的關係式。運用三角函數與空間概念去計算這個多面體所構成的數學模式，算出關係式後，交由工廠大量製作，就可在市面上，以益智積木為的形式出售，並提供組裝步驟給買家作為參考。

這次研究並製作出來的多面體是藝術品，也可以當作益智玩具、燈飾。若做進一步研究，更可把這結構運用在外太空，因為在外太空需要的是以最簡單且牢固的架構，做出最大的可利用空間，這是我們這次研究之多面體擁有的特性。

因此，我們發現多面體是可以一直不斷的改變、延伸的，它的變化就如同宇宙一般，往後能再發展、進步的空間更是不計其量，值得更為深入的研究。

捌、文獻探討

1. 林義強 (民94)。MTS2007第一屆全國高中數學研討會論文集之第九場次，未出版， 高雄市。

2. 經典多面體 (民97)。維基百科全書。民 98 年 8 月 21 日

   取自：http://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E5%A4%9A%E9%9D%A2%E4%BD%93

3. Alan Holden (1991) . *Shapes , space , and symmetry* . Dover Publications (New York)

4. Orderly tangles (1983) . *Cloverleafs , Gordian Knots , and Regular Polylinks* . Columbia

   University Press (NY)

5. Miranda Lundy and Daud Sutton (2002) . 典雅的幾何。葉偉文 譯。天下文化書坊。

6. 生生不息的莫比烏斯帶-拓撲學奇趣。

   取自：http://www.chiuchang.org.tw/download/docu/club/topology.pdf

玖、附錄

以下是由多個正多邊形延伸出的幾何多面體，皆已知其相對位置，數學模式還在研究中。

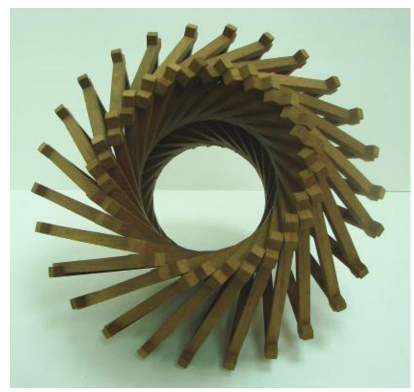
一.正交

由 三個正六邊形 組成

二. 2D

由 九個正三角形 組成

由 十四個正方形 組成



由 二十六個正方形 組成

三. 3D

由 四個正三角形 組成

由 四個正三角形 組成

三. 3D

由 六個正方形 組成

由 八個正三角形 組成

由 十個正三角形 組成

由 八個正三角形 組成

由 十二個正五邊形 組成

由 二十個正三角形 組成

【評語】090903

本隊成員以觀察多面體出發，細心發掘整理出有秩序的外部幾何關係，並進而設計出多種複雜多面體模型，再實際以木材和金屬材料製作出多面體結構。該些複雜多面體具備美觀和高強度特質，未來有不錯的藝術家具及飾品和機械及建築結構之發展潛力。