中華民國 第50屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組　數學科

080415

袋我進入折折稱奇的世界

學校名稱：臺南市中西區協進國民小學

作者：	指導老師：
小六 蘇輊翔	鄭育杰
小五 王馨欣	侯秀雯
小五 江瑞恆	

關鍵詞：紙袋、折法、體積

摘　要

日常生活使用的紙袋看似平凡，大家都不會去在意。無意間，看到教室角落裡有一箱的紙袋，產生我們的好奇：奇怪！一張紙怎麼可以折出大大小小不同的紙袋呢？於是帶我們進入紙袋的探索世界。

從市面上的紙袋中，我們可以分類找出影響紙袋大小的因素，取決於紙袋黏貼處的大小、寬的大小，以及底部的腰長大小，這些因素都足以影響紙袋的體積、各面面積、表面積與形狀，而且不是任何比例的紙張都可以折成正方體。

同時也透過逼近法與遞減法求算，來觀察體積、面積、表面積的變化，發現到底面正方形紙袋的體積都不是最大，而且在遞減法中，發現各組面積差的差跟我們選擇遞減的數是有平方的關係。其中體積最大是第 29 組，長寬比為 70：18 的紙張，表面積最大是第 41 組，也在我們製作的長、寬、高立體模型中，觀察到各組最大體積長、寬、高變化的兩兩關係，呈現出一定規律的曲線，且三者的關係呈現出奇特的分佈。

透過我們的研究發現，市售鋁箔飲料包裝的體積都不是該包裝的最大體積，沒想到日常生活中隨處可見的紙袋，竟讓我們誤闖入這折折稱奇的紙袋世界。

壹、 研究動機

有一天，我來到一間教室，發現一桶裝滿各式各樣的紙袋，因為在日常生活中常常可以見到，所以我們想知道紙袋到底是怎麼折的？如何利用一張紙折出立體紙袋呢？於是我們請老師來指導我們研究這個問題。

貳、 研究目的

一、探討紙袋的製作方式。
二、探討哪些因素會影響紙袋體積、表面積與形狀？
三、探討相同面積、不同長寬比例的紙張，折出最大體積紙袋的底面是不是正方形？
四、對照市面上的相關產品。

參、 研究器材

器材名稱	器材圖片	製作過程	器材名稱	器材圖片	製作過程
四十八個大小不同的紙袋		教室角落裡的一桶紙袋，總共有四十八個紙袋。	計算機		紙袋體積、表面積的計算使用。
尺		測量紙袋大小的工具。	壁報紙		裁成不同比例大小的原紙張，折出該比例最大的體積紙袋。
雙面膠、膠帶、剪刀		做為紙袋黏貼處的使用。	記錄紙、照相機		紙錄實驗過程，及拍攝實驗過程結果的呈現。
日曆紙		學校舉辦跳蚤市場，有人提供家裡不用日曆紙，我們就拿來折紙袋。	長、寬、高立體模型		底座：長 79.7cm、寬 74.6cm 的木板 支架：長 75cm、寬 69.5cm、高 72.7 木條 平面透視：三塊長 70cm、寬 70cm 的壓克力（0.2mm）

肆、 研究問題

一、紙袋拆解後構造為何？
二、哪些因素會影響紙袋的體積、表面積與形狀？
　（一）改變步驟一黏貼處大小會不會影響紙袋的體積、表面積與形狀？
　（二）改變步驟三、四寬的大小會不會影響紙袋的體積、表面積與形狀？
　（三）改變步驟七底部三角形的腰長會不會影響紙袋的體積、表面積與形狀？
三、相同面積、不同長寬比例的紙張，折出最大體積紙袋的底面是不是正方形？
四、對照市面上的相關產品。

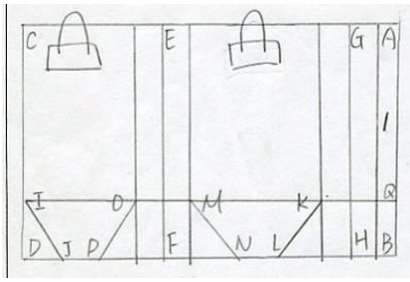
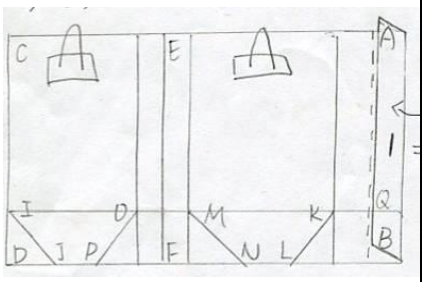
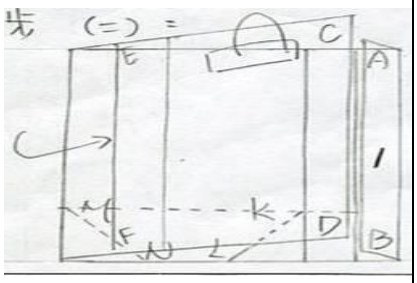
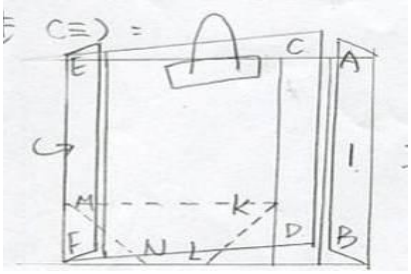
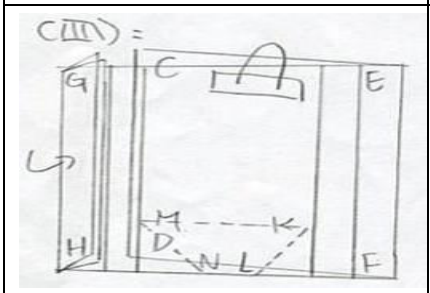
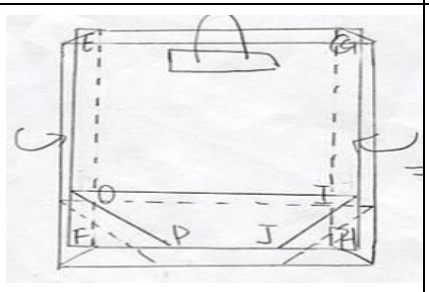
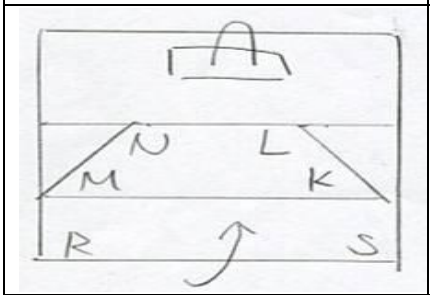
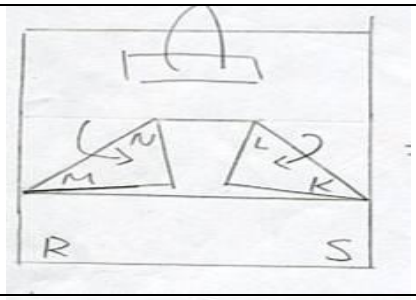
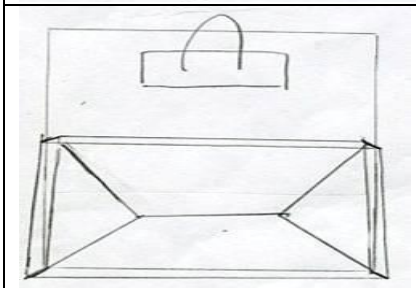
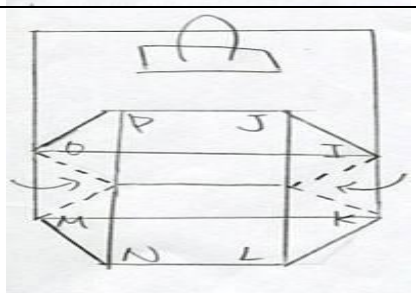
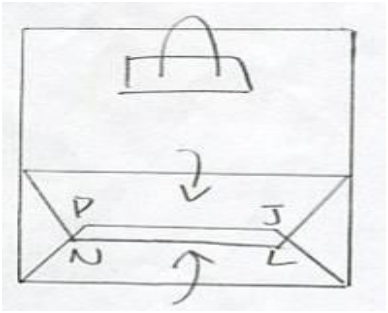
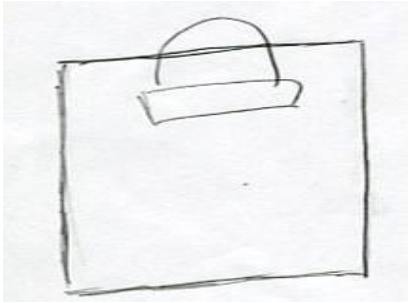
伍、研究過程與結果

一、實驗一：研究紙袋的構造

（一）方法：一開始我們就把教室裡不同的紙袋編號（1～48 號），然後一一把它拆開，做成以下的紀錄。

	1 號		2 號		3 號		4 號		5 號
	6 號		7 號		8 號		9 號		10 號
	11 號		12 號		13 號		14 號		15 號
	16 號		17 號		18 號		19 號		20 號
	21 號		22 號		23 號		24 號		25 號
	26 號		27 號		28 號		29 號		30 號
	31 號		32 號		33 號		34 號		35 號
	36 號		37 號		38 號		39 號		40 號
	41 號		42 號		43 號		44 號		45 號
	46 號		47 號		48 號				

（二）觀察折紙袋的步驟順序：

圖　示	說　明	圖　示	說　明
	**展開圖** 長：88.5cm 寬：40cm 總面積 3540 cm^2		**步驟一** 把 $\overline{AB}$ 向內折 3.5cm。
	**步驟二** 將紙張對折，把 $\overline{CD}$ 黏貼於 1 面上。		**步驟三** 把 $\overline{EF}$ 向內折 7cm 後，再打開。
	**步驟四** 把整張紙翻面後，將 $\overline{GH}$ 向內折 7cm 後，再打開。		**步驟五** 將 $\overline{EF}$ ，$\overline{GH}$ 向內折至剛才的折線。
	**步驟六** 將 $\overline{RS}$ 向上折 17cm。		**步驟七** 將 $\overline{NM}$ 、$\overline{LK}$ 向內折成腰長為 10cm 的等腰三角形。
	**步驟八** 將底部輕輕打開，並把左右兩邊壓至底。		**步驟九** 將兩側壓平至呈現為圖中的樣子。
	**步驟十** 將 $\overline{PJ}$ 向下折至折線，將 $\overline{NL}$ 向上折至折線。		**完成品** 紙袋即為完成。

（三）拆解不同的紙袋並且記錄：（cm）

編號	步一	步二	步三	步四	步五	步六	步七	步八	步九	步十
例如	AB向內	對折	EF向內	GH向內	EFGH向內	RS向上	NMLK腰	打開	壓下	PJ下NL上
1	3.2	對折	5	5	向內	13	8	打開	壓下	same
2	3	對折	5	5	向內	12	6.5	打開	壓下	same
3	4	對折	8	8	向內	19	11	打開	壓下	same
4	3.5	對折	7	7	向內	15.5	8	打開	壓下	same
5	3	對折	6	6	向內	19	7.5	打開	壓下	same
6	3	對折	5	5	向內	13	8	打開	壓下	same
7	2.5	對折	3.5	3.5	向內	9	5	打開	壓下	same
8	2.5	對折	5.5	5.5	向內	13.5	8	打開	壓下	same
9	2	對折	5.5	5.5	向內	7.5	7	打開	壓下	same
10	3	對折	4	4	向內	10	5.5	打開	壓下	same
11	3.2	對折	5	5	向內	13	8	打開	壓下	same
12	3.5	對折	8	8	向內	17.5	10	打開	壓下	same
13	2.5	對折	5.5	5.5	向內	13	7.5	打開	壓下	same
14	3	對折	5.5	5.5	向內	13.5	8	打開	壓下	same
15	3	對折	4	4	向內	10	6	打開	壓下	same
16	4	對折	8.5	8.5	向內	19	11	打開	壓下	same
17	3.5	對折	6	6	向內	13.5	8	打開	壓下	same
18	2.5	對折	5	5	向內	12.5	7	打開	壓下	same
19	3.5	對折	6	6	向內	13.5	7.5	打開	壓下	same
20	2.5	對折	4	4	向內	10	5.5	打開	壓下	same
21	2	對折	4	4	向內	10	6	打開	壓下	same
22	3	對折	5.5	5.5	向內	13.5	8	打開	壓下	same
23	3	對折	6.5	6.5	向內	15.5	9	打開	壓下	same
24	3	對折	5	5	向內	12.5	7.5	打開	壓下	same
25	4	對折	5.5	5.5	向內	13.5	8	打開	壓下	same
26	3.5	對折	6.5	6.5	向內	15	8.5	打開	壓下	same
27	3.5	對折	6.5	6.5	向內	15	8.5	打開	壓下	same
28	3	對折	5.5	5.5	向內	19	7.5	打開	壓下	same
29	4	對折	5	5	向內	12.5	7.5	打開	壓下	same
30	2.5	對折	6	6	向內	15	9	打開	壓下	same
31	2	對折	6	6	向內	14	7	打開	壓下	same
32	2.5	對折	4	4	向內	10.5	6.5	打開	壓下	same
33	3	對折	4	4	向內	10.5	6	打開	壓下	same
34	2	對折	6	6	向內	15	9	打開	壓下	same
35	2.5	對折	7.5	7.5	向內	17	10	打開	壓下	same
36	4.5	對折	7	7	向內	16.5	9	打開	壓下	same
37	3.5	對折	6	6	向內	13.5	8	打開	壓下	same
38	3	對折	4	4	向內	10	6	打開	壓下	same
39	2.5	對折	4	4	向內	10	6	打開	壓下	same

40	2	對折	3	3	向內	8.5	5	打開	壓下	same
41	3	對折	4.5	4.5	向內	11	6.5	打開	壓下	same
42	3	對折	5.5	5.5	向內	14.5	9	打開	壓下	same
43	2	對折	6	6	向內	14	7.5	打開	壓下	same
44	2.5	對折	4	4	向內	10	5.5	打開	壓下	same
45	3	對折	4.5	4.5	向內	11	6.5	打開	壓下	same
46	2.5	對折	3.5	3.5	向內	9	5	打開	壓下	same
47	3.5	對折	12.5	12.5	向內	28	14	打開	壓下	same
48	2	對折	5.5	5.5	向內	11.5	5.5	打開	壓下	same

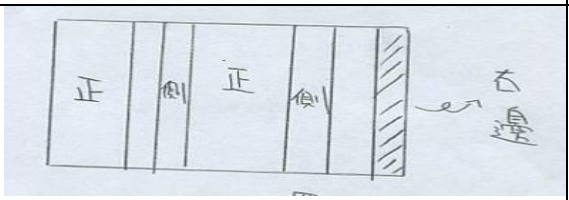
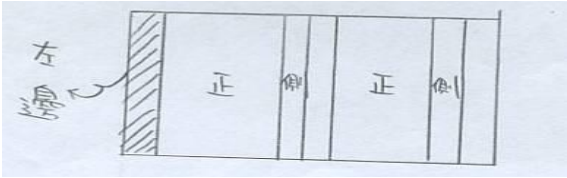
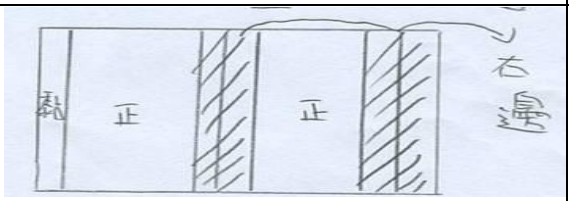
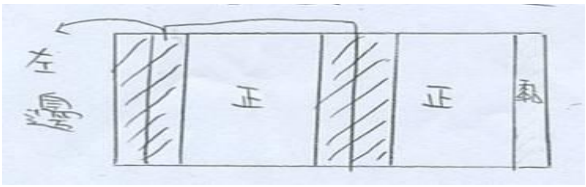
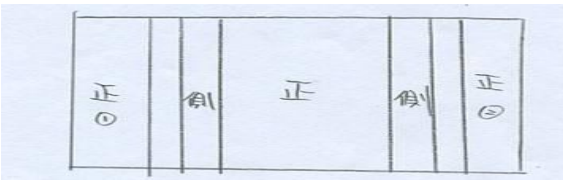
（四）紀錄體積、表面積：

編號	紙長	紙寬	面積	立體長	立體寬	立體高	體積	紙長寬比	立體長寬比	表面積	差
1	66.5	37	2460.5	22	10	29	6380	1.80	2.20	2076	384.5
2	70	38.5	2695	24	10	27.5	6600	1.82	2.40	2110	585
3	87.5	35.5	3106.25	26	21	16	8736	2.46	1.24	2050	1056.25
4	83	31.5	2614.5	26	14	19	6916	2.63	1.86	1884	730.5
5	90	47.5	4275	32	12	40	15360	1.89	2.67	3904	371
6	68.5	38	2603	23	10.5	30	7245	1.80	2.19	2251.5	351.5
7	50.5	38.5	1944.25	19.5	7.5	29.5	4314.375	1.31	2.60	1739.25	205
8	88	40	3520	32	11.5	27.5	10120	2.20	2.78	2760.5	759.5
9	79	31.5	2488.5	27.5	11	21	6352.5	2.51	2.50	1919.5	569
10	88.5	39	3451.5	35	8	29.5	8260	2.27	4.38	2817	634.5
11	66.5	37	2460.5	22	10	29	6380	1.80	2.20	2076	384.5
12	84.5	38	3211	26	15	28	10920	2.22	1.73	2686	525
13	65.5	38.5	2521.75	21	11	27.5	6352.5	1.70	1.91	1991	530.75
14	88	39.5	3476	31.5	12	27.5	10395	2.23	2.63	2770.5	705.5
15	68.5	38	2603	25	8	8	1600	1.80	3.13	728	1875
16	87.5	35.5	3106.25	26	16	21	8736	2.46	1.63	2180	926.25
17	90	47.5	4275	32	11.5	40	14720	1.89	2.78	3848	427
18	61	48	2928	19	10.5	36.5	7281.75	1.27	1.81	2353	575
19	90	40	3600	32	11.5	32.5	11960	2.25	2.78	3195.5	404.5
20	88.5	40	3540	34.5	8	29	8004	2.21	4.31	2741	799
21	53.5	33	1765.5	18	8	23	3312	1.62	2.25	1340	425.5
22	100	44	4400	38	11	31.5	13167	2.27	3.45	3505	895
23	72.5	52	3770	22	12.5	39.5	10862.5	1.39	1.76	3000.5	769.5
24	66.5	35	2327.5	22	10	27.5	6050	1.90	2.20	1980	347.5
25	74.5	35	2607.5	24	11.5	27	7452	2.13	2.09	2193	414.5
26	75	40.5	3037.5	22.5	13	28	8190	1.85	1.73	2280.5	757
27	53	37.5	1987.5	15.5	11	31.5	5370.75	1.41	1.41	1840	147.5

28	88.5	54	4779	31.2	11.5	41.5	14890.2	1.64	2.71	3902.9	876.1
29	67.5	35	2362.5	22	10	27.5	6050	1.93	2.20	1980	382.5
30	85.5	39.5	3377.25	30	13	25	9750	2.16	2.31	2540	837.25
31	70	34.5	2415	22.1	12	22.2	5887.44	2.03	1.84	1779.24	635.76
32	78	35.5	2769	29.8	23.1	8.4	5782.392	2.20	1.29	1577.1	1191.9
33	88.5	39.5	3495.75	35	8.1	29.1	8249.85	2.24	4.32	2791.92	703.83
34	77.5	42.5	3293.75	25.7	11.9	28.4	8685.572	1.82	2.16	2441.51	852.24
35	84	47	3948	25.7	15.2	33.8	13203.63	1.79	1.69	3155.48	792.52
36	75	39	2925	21.7	13.3	29.3	8456.273	1.92	1.63	2339.61	585.39
37	90	47.5	4275	31.8	11.4	40.1	14537.05	1.89	2.79	3827.16	447.84
38	62.5	39	2437.5	22.2	8.1	28.9	5196.798	1.60	2.74	1931.16	506.34
39	66.5	41	2726.5	24	8.6	31.3	6460.32	1.62	2.79	2247.16	479.34
40	48	31	1488	16.2	6.5	22.1	2327.13	1.55	2.49	1108.64	379.36
41	72	39.5	2844	26	8.9	28.8	6664.32	1.82	2.92	2241.64	602.36
42	87.5	45	3937.5	31.4	10.9	32.3	11055	1.94	2.88	3074.84	862.66
43	70	35	2450	22.3	12.1	23	6206.09	2.00	1.84	1852.23	597.77
44	66.5	41	2726.5	24.2	8.8	30.3	6452.688	1.62	2.75	2212.76	513.74
45	60	29	1740	19.8	9.1	18	3243.24	2.07	2.18	1220.58	519.42
46	53	33.5	1775.5	18.3	7.3	28.1	3753.879	1.58	2.51	1572.31	203.19
47	105.5	42.5	4483.75	25	25	25	15625	2.48	1.00	3125	1358.75
48	47.5	38.5	1828.75	11	11	29	3509	1.23	1.00	1397	431.75

（五）我的發現：

1. 將紙袋拆解後，我們發現五種情形：

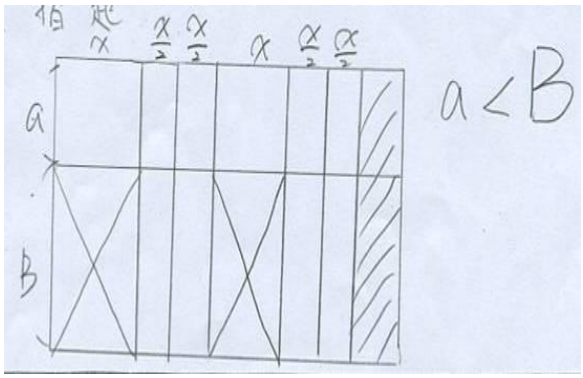
	圖　示		圖　示
變例一	 黏貼處置於右邊	變例二	 黏貼處置於左邊
變例三	 側面置於右邊	變例四	 側面置於左邊
變例五	 黏貼處置於正面		

2.步驟一黏貼處介於 2～4.5cm 之間，如果折多一點會如何？
3.步驟二對折一半的長度剛好是（立體長）＋（立體寬）。
4.步驟三、四的長度介於 3～12.5 之間，剛好是該紙袋立體寬的一半，如果折的長度多一點會如何會怎樣？
5.步驟六的值不會影響立體紙袋大小，只是方便折底部。
6.步驟七的長度決定高的長度跟底面重疊的部分，也是最難折的地方，介於 5～14cm 之間，都比步驟三、四的值還大，如果長度跟步驟三、四一樣折出來的底面會怎樣？
7.我們發現所有紙袋拆開後的面積都比折好後的表面積還大，所以我覺得應該是因為折好後的紙袋表面積有減掉被黏起來的部分，所以面積才會比拆開的紙袋還小。
8.有些紙袋差了只有幾百平方公分，有些則是差了幾千平方公分，其中編號 15 差距最多，我們想應該是因為紙張折成紙袋的大小不同。
9.這 48 個紙袋正面面積都大於側面或底面面積。
10.發現編號 47 正方體的紙袋體積最大，但紙張大小卻不是最大的，編號 28 紙張面積最大，但折起紙袋體積卻比「正方體」小，編號 5 雖然體積不是最大但是表面積卻是最大的，到底紙張面積、立體體積、立體表面積到底有沒有關係？
11.紙張長、寬比的比值介於 1.23～2.63 之間，立體長、寬比的比值介於 1～4.38 之間。
12.正方體紙袋，**（腰長）× 2＝（長）或（寬）**。

※問題： 如何用同一大小的紙張折出體積最大的紙袋？

依我們之前的觀察，發現在 48 個紙袋中，第 47 號紙袋的體積最大，但用紙面積非最大，找出 47 號紙袋發現它是「正方體」，我們認為同一面積的紙袋，折成正方體體積最大。

※我的發現：用日常生活中的日曆紙當作固定大小的紙張，發現若要折起一個正方體，底面用紙過大無法折起。



a：高

B：腰長＝$\frac{1}{2}$×長

X：正方體的長

二、實驗二：改變步驟一黏貼處的大小，會不會影響紙袋的體積、表面積與形狀？

（一）實驗材料：日曆紙、雙面膠、剪刀、尺、記錄紙。

（二）操縱變因：黏貼處的長度(0、1、2、3、4、5、6、7、8、9、10、11cm)

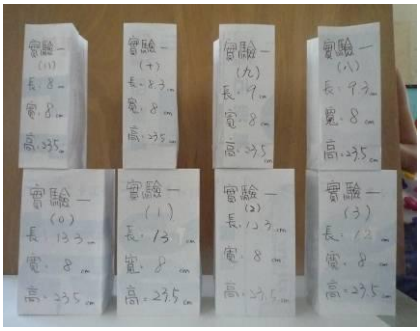
（三）保持不變變因：

1.相同日曆紙（長 42.7cm、寬 29.5cm） 2.立體的寬（8cm）、高(23.5cm) 3.橫向折法

（四）應變變因：紙袋的體積、表面積、形狀

（五）實驗結果：

黏貼處	長	寬	高	體積	正面	側面	底面	表面積
0cm	13.35	8	23.5	2509.8	313.725	188	106.8	1110.25
1cm	12.85	8	23.5	2415.8	301.975	188	102.8	1082.75
2cm	12.35	8	23.5	2321.8	290.225	188	98.8	1055.25
3cm	11.85	8	23.5	2227.8	278.475	188	94.8	1027.75
4cm	11.35	8	23.5	2133.8	266.725	188	90.8	1000.25
5cm	10.85	8	23.5	2039.8	254.975	188	86.8	972.75
6cm	10.35	8	23.5	1945.8	243.225	188	82.8	945.25
7cm	9.85	8	23.5	1851.8	231.475	188	78.8	917.75
8cm	9.35	8	23.5	1757.8	219.725	188	74.8	890.25
9cm	8.85	8	23.5	1663.8	207.975	188	70.8	862.75
10cm	8.35	8	23.5	1569.8	196.225	188	66.8	835.25
11cm	7.85	8	23.5	1475.8	184.475	188	62.8	807.75



三、實驗二之一：改變步驟一黏貼處的大小，折在長的那邊，會不會影響紙袋的體積、表面積與形狀？

（一）實驗材料：日曆紙、雙面膠、剪刀、尺、記錄紙。

（二）操縱變因：黏貼處的長度(1、2、3、4、5、6、7、8、9、10cm)

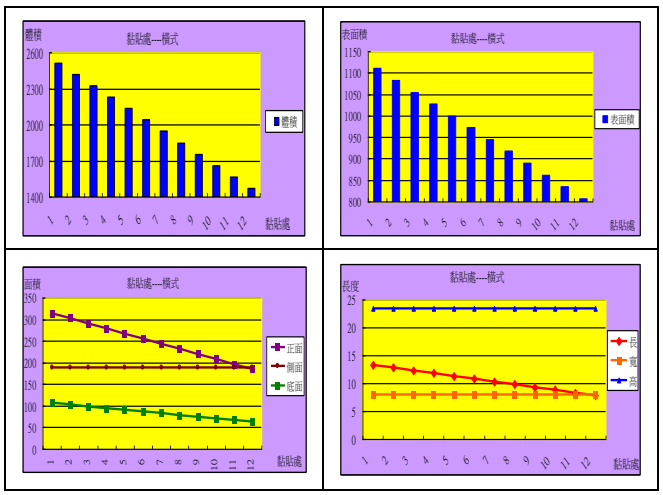
（三）保持不變變因：

1.相同日曆紙（長 42.7cm、寬 29.5cm） 2.立體的寬（4cm）、高(38.6cm) 3.直向折法

（四）應變變因：紙袋的體積、表面積、形狀

（五）實驗結果：

黏貼處	長	寬	高	體積	正面	側面	底面	表面積
1cm	10.25	4	38.6	1582.6	395.65	154.4	41	1141.1
2cm	9.75	4	38.6	1505.4	376.35	154.4	39	1100.5
3cm	9.25	4	38.6	1428.2	357.05	154.4	37	1059.9
4cm	8.75	4	38.6	1351	337.75	154.4	35	1019.3
5cm	8.25	4	38.6	1273.8	318.45	154.4	33	978.7
6cm	7.75	4	38.6	1196.6	299.15	154.4	31	938.1
7cm	7.25	4	38.6	1119.4	279.85	154.4	29	897.5
8cm	6.75	4	38.6	1042.2	260.55	154.4	27	856.9
9cm	6.25	4	38.6	965	241.25	154.4	25	816.3
10cm	5.75	4	38.6	887.8	221.95	154.4	23	775.7



（六）發現：

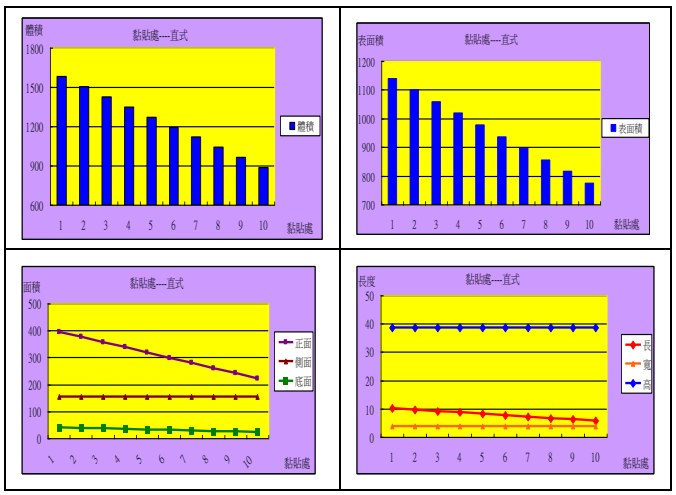
（1）黏貼處長度越大，折成立體後的長越小；長度越小，折成立體後的長越大。

（2）黏貼長度加大 1cm，折成立體後的長度會 0.5 依序減少。

（3）黏貼處長度前、後相加為 11 時，體積相加後都是 3985.6 cm^3，而且兩紙袋放在一起，所合成的長方體高度皆相同。

（4）從黏貼處 0～11cm，發現底面面積越來越小，都相差 4 cm^2；正面面積越來越小，都差 11.75 cm^2；側面面積都一樣，都可以依序放入。

（5）黏貼長度越大，底面形狀由長方形變正方形，折成立體後體積、表面積越小（體積減少 94 cm^3；表面積減少 27.5 cm^2）。



（六）發現：

（1）黏貼長度加大 1cm，折成立體後的長度會 0.5 依序減少。

（2）用直向折法的紙袋，高遠遠大於長和寬。

（3）黏貼處長度越大，折成立體後的長邊越短，正面面積越來越小，都差 19.3 cm^2；底面面積越來越小，都差 2 cm^2；側面面積都一樣。

（4）黏貼長度越大，底面形狀由長方形越來越接近正方形，體積與表面積越小，表面積減少 40.6 cm^2；體積會減少 77.2 cm^3。

※由實驗二、實驗二之一得知，紙張橫向折法或直向折法黏貼處越小，所折成的紙袋體積越大，因此之後的實驗我們選擇用黏貼處 1cm 進行實驗。

四、實驗三：改變步驟三、四寬的大小會不會影響紙袋的體積、表面積與形狀？

（一）實驗材料：日曆紙、雙面膠、剪刀、尺、記錄紙。

（二）操縱變因：寬的長度(2、4、6、8、10cm)

（三）保持不變變因：

1.相同日曆紙（長 42.7cm、寬 29.5cm）2.立體的高(23.5cm)3.橫向折法 4.黏貼處（1cm）

（四）應變變因：紙袋的體積、表面積、形狀

五、實驗三之一：把紙拿成直的，改變步驟三、四寬的大小會不會影響紙袋的體積、表面積與形狀？

（一）實驗材料：日曆紙、雙面膠、剪刀、尺、記錄紙。

（二）操縱變因：寬的長度(2、4、6cm)

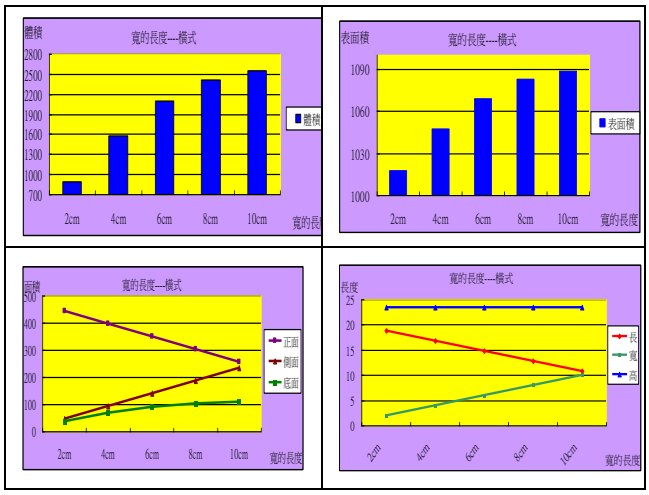
（三）保持不變變因：

1.相同日曆紙（長 42.7cm、寬 29.5cm）2.立體的高(38.6cm)3.直向折法 4.黏貼處（1cm）

（四）應變變因：紙袋的體積、表面積、形狀

（五）實驗結果：

寬的長度	長	寬	高	體積	正面	側面	底面	表面積
2cm	18.85	2	23.5	885.95	442.975	47	37.7	1017.65
4cm	16.85	4	23.5	1583.9	395.975	94	67.4	1047.35
6cm	14.85	6	23.5	2093.85	348.975	141	89.1	1069.05
8cm	12.85	8	23.5	2415.8	301.975	188	102.8	1082.75
10cm	10.85	10	23.5	2549.75	254.975	235	108.5	1088.45



（六）發現：

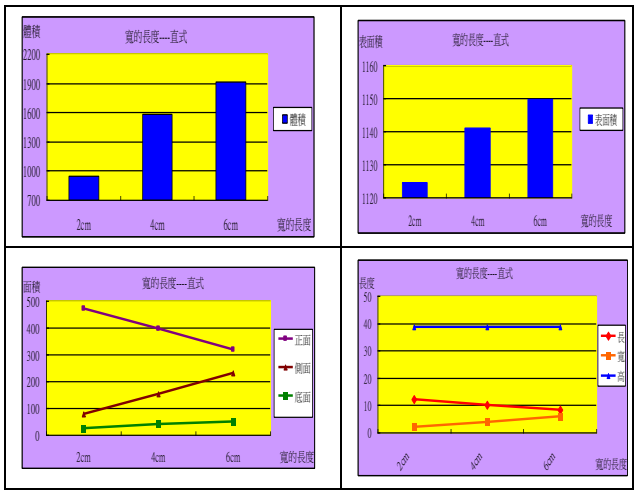
1.寬每增加 2cm，長變減少 2cm。

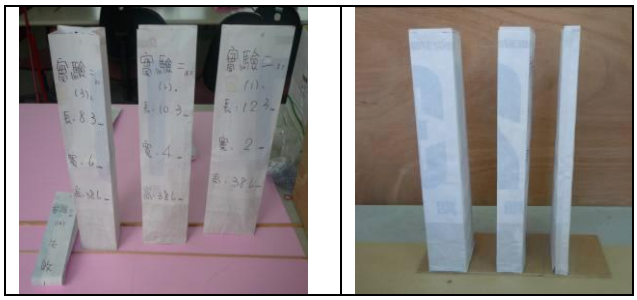
2.當紙袋寬度越來越大時，正面面積越來越小，都差 47 cm^2；側面越來越大，都差 47 cm^2；底面面積增加的程度會減緩（面積差 29.7、21.7、13.7），面積差之間彼此都相差 8。

3.紙袋寬度越來越大，底面的形狀越來越接近正方形，體積與表面積增加的程度會減緩。

（五）實驗結果：

寬的長度	長	寬	高	體積	正面	側面	底面	表面積
2cm	12.25	2	38.6	945.7	472.85	77.2	24.5	1124.6
4cm	10.25	4	38.6	1582.6	395.65	154.4	41	1141.1
6cm	8.25	6	38.6	1910.7	318.45	231.6	49.5	1149.6





（六）發現：

1.寬每增加 2cm，立體時的長便會減少 2cm。

2.當紙袋寬度越來越大時，正面面積越來越小；側面越來越大；底面面積增加的程度會減緩。

3.紙袋的寬越大，底面形狀越來越接近正方形，體積就越大，表面積也越大。

4.直向折法的紙袋表面積都比橫向折法的表面積大。

※由實驗三及實驗三之一得知，日曆紙橫向折法與直向折法皆顯示長、寬的值越接近，體積越大。

六、實驗四：改變步驟七底部三角形的腰長，會不會影響紙袋的體積、表面積與形狀？

（一）實驗材料：日曆紙、雙面膠、剪刀、尺、記錄紙。

（二）操縱變因：底部三角形的腰長(5、6、7、8、9、10cm)

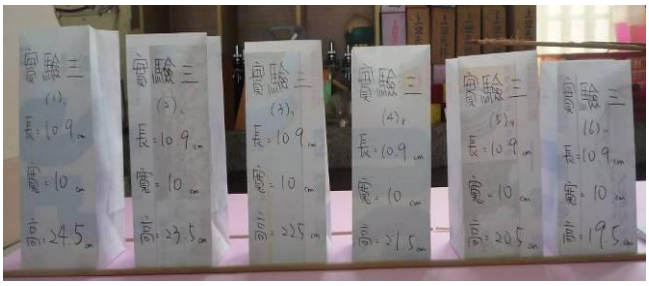
（三）保持不變變因：

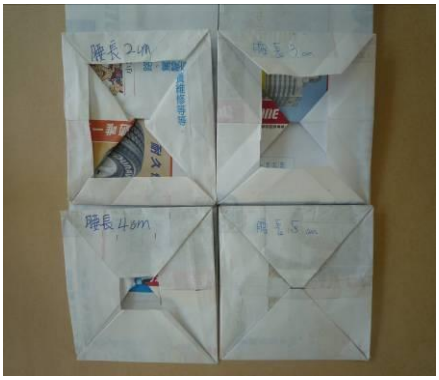
1.日曆紙（長 42.7cm、寬 29.5cm）2.立體的長(10.9cm)、寬(10cm)3.橫向折法 4.黏貼處（1cm）

（四）應變變因：紙袋的體積、表面積、形狀

（五）實驗結果：

三角形腰長	長	寬	高	體積	正面	側面	底面	表面積
5cm	10.85	10	24.5	2658.25	265.825	245	108.5	1130.15
6cm	10.85	10	23.5	2549.75	254.975	235	108.5	1088.45
7cm	10.85	10	22.5	2441.25	244.125	225	108.5	1046.75
8cm	10.85	10	21.5	2332.75	233.275	215	108.5	1005.05
9cm	10.85	10	20.5	2224.25	222.425	205	108.5	963.35
10cm	10.85	10	19.5	2115.75	211.575	195	108.5	921.65





七、實驗四之一：把紙拿成直的，改變底部三角形腰長，會影響紙袋的體積、表面積與形狀？

（一）實驗材料：日曆紙、雙面膠、剪刀、尺、記錄紙。

（二）操縱變因：底部三角形的腰長(4、5、6、7、8cm)

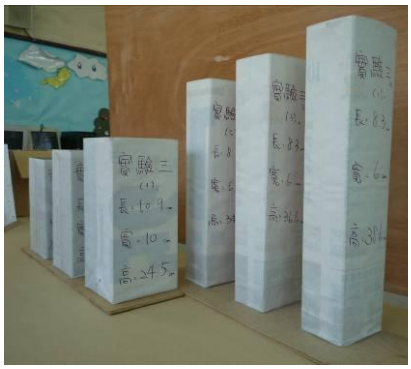
（三）保持不變變因：

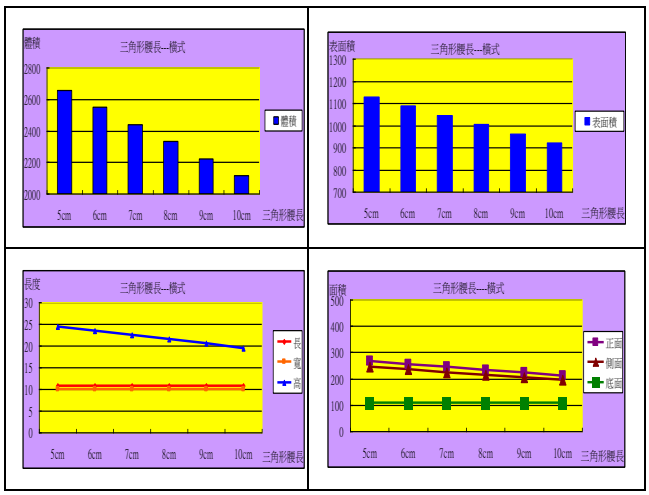
1.日曆紙（長 42.7cm、寬 29.5cm）2.立體的長(8.3cm)、寬(6cm)3.直向折法 4.黏貼處（1cm）

（四）應變變因：紙袋的體積、表面積、形狀

（五）實驗結果：

三角形腰長	長	寬	高	體積	正面	側面	底面	表面積
3cm	8.25	6	39.6	1960.2	326.7	237.6	49.5	1178.1
4cm	8.25	6	38.6	1910.7	318.45	231.6	49.5	1149.6
5cm	8.25	6	37.6	1861.2	310.2	225.6	49.5	1121.1
6cm	8.25	6	36.6	1811.7	301.95	219.6	49.5	1092.6
7cm	8.25	6	35.6	1762.2	293.7	213.6	49.5	1064.1
8cm	8.25	6	34.6	1712.7	285.45	207.6	49.5	1035.6





（六）發現：

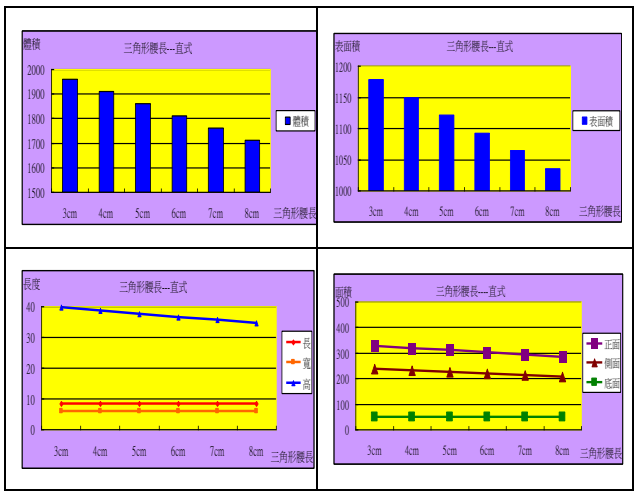
1.腰長增加 1cm 時，折成立體後的高便減少 1cm。

2.腰長增加 1cm，正面面積越來越小，都差 10.85 cm^2；側面面積越來越小，都差 10 cm^2；底面面積皆相同。

3.三角形腰長 5cm 時，體積最大，底部剛好可以封住。

4.兩個腰長相加為 15 時，體積相加後的結果都是 4774 cm^3。

5.腰長增加 1cm，表面積越來越小，相差 41.7 cm^2；體積越來越小，都差 108.5 cm^3。



（六）發現：

1.腰長增加 1cm 時，高便減少 1cm，正面面積減少 8.25 cm^2；側面面積減少 6 cm^2；底面面積不變。

2.腰長相加為 12 時，紙袋體積相加後的結果都是 3623.4 cm^3。

3.不管紙袋高度的變化，底部的形狀都是長方形，三角形腰長越短時，體積最大；表面積越大。

※由實驗四及實驗四之一得知，日曆紙不論橫向折法與直向折法皆顯示，腰長為寬的一半時，恰好可以把紙袋底部封住，體積較大。

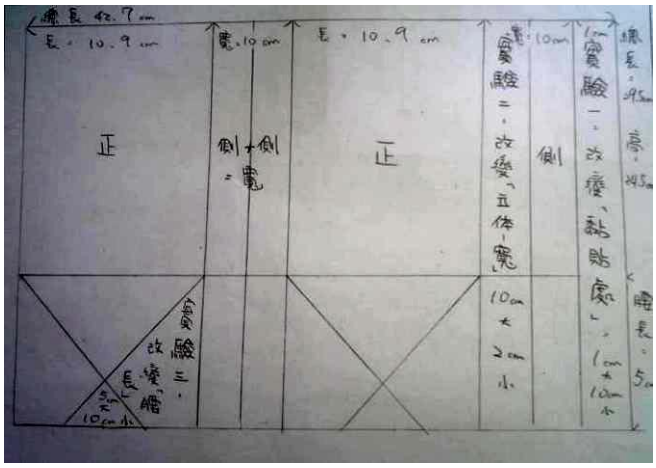
※ 綜合上面實驗的結果，我們想要把日曆紙折出一個最大體積的紙袋：

1.黏貼處越小，所折成的紙袋體積越大。

2.長、寬的值越接近，體積越大。

3.腰長為寬的一半時，恰好可以把紙袋底部封住的長度，體積比較大。

因此我們選擇長 10.4cm、寬 10.4cm（42.7cm÷4＝10.4 cm）、高 23.5cm（29.5cm－腰長 5.2 cm＝24.3cm），體積 2541.76 cm^3。



最大	長	寬	高	體積	正面	側面	底面	表面積
	10.4	10.4	23.5	2541.76	244.4	244.4	108.16	1085.76
實驗四	10.85	10	24.5	2658.25	265.825	245	108.5	1130.15
實驗三	10.85	10	23.5	2549.75	254.975	235	108.5	1088.45

結果發現：體積最大的是實驗四，底面正方形的紙袋體積不是最大的，與我們認為的不同。因此我們想，底面折成正方形的紙袋是不是體積最大的？

八、實驗五：相同面積，不同長寬比例的紙張，折出最大體積紙袋的底面是不是正方形？

（一）一開始我們是用長 42.7cm、寬 29.5cm，面積 1259.65 cm^2 的日曆紙來作實驗，所以我們就取整數用面積 1260 cm^2 來作這個實驗。

（二）實驗材料：壁報紙、雙面膠、剪刀、尺、記錄紙。

（三）實驗步驟：

1.我們把日曆紙的面積取整數 1260 cm^2 來作因數分解，可以拆成

1260 cm^2=長 1cm × 寬 1260cm=2cm × 630cm=……共四十二組

如下表分組：

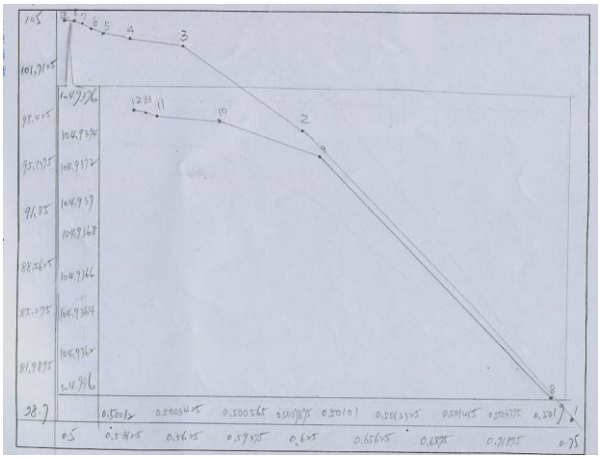
組別	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
紙長	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	14	15	18	20	21	24	25	28	30	35
紙寬	1260	630	420	315	252	210	180	158	140	126	105	90	84	70	63	60	52.5	50.4	45	42	36
組別	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**	**31**	**32**	**33**	**34**	**35**	**36**	**37**	**38**	**39**	**40**	**41**	**42**
紙長	36	42	45	50.4	52.5	60	63	70	84	90	105	126	140	158	180	210	252	315	420	630	1260
紙寬	35	30	28	25	24	21	20	18	15	14	12	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

2.算出各組底面正方形紙袋的體積，我們拿第三組來說明，

公式	例子（長＝3cm、寬＝420cm）
（紙長）－（黏貼處） ＝ （2×立體長＋2×立體寬）	3－1＝2
（2×立體長＋2×立體寬）÷ 4 ＝底面正方形體積的邊長	2÷4＝0.5
（底面正方形體積的邊長）÷ 2 ＝（腰長）	0.5÷2＝0.25
（紙寬）－（腰長） ＝ （立體高）	420－0.25＝419.75
（立體長）×（立體寬）×（立體高）＝（紙袋體積）	0.5× 0.5× 419.75＝104.9375

3.但我們**不確定**底面為正方形的紙袋體積是不是最大的，所以我們使用逼近法來找出會不會有更大的體積出現。

3	3--420	長	寬	高	體積
	1	0.5	0.5	419.75	104.9375
	2	0.75	0.25	419.875	78.7265625
	3	0.625	0.375	419.8125	98.3935546875
	4	0.5625	0.4375	419.78125	103.305541992
	5	0.53125	0.46875	419.765625	104.531478881
	6	0.515625	0.484375	419.7578125	104.836973189
	7	0.5078125	0.4921875	419.75390625	104.911258145
	8	0.50390625	0.49609375	419.751953125	104.931583374
	9	0.501953125	0.498046875	419.750976563	104.936142917
	10	0.5009765625	0.4990234375	419.750488282	104.937221765
	11	0.50048828125	0.49951171875	419.750244141	104.937460958
	12	0.50024414062	0.49975585938	419.750122071	104.937505498
	13	0.50012207030	0.49987792969	419.750061036	104.937509001
	14	0.50018310546	0.49981689454	419.750091553	104.937508814



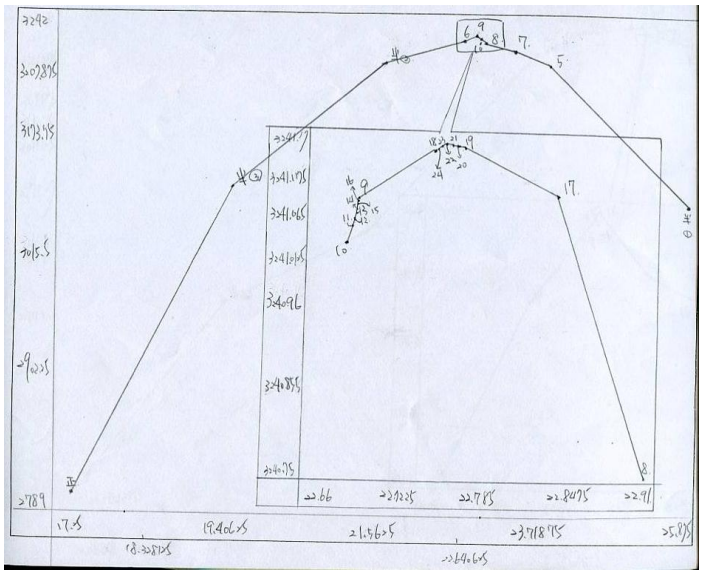
※發現：

1.第三組的底面為正方形的體積不是最大的。

2.逼近過程，長寬值會越靠近正方形的值，在達到長寬相同的正方形之前會出現比底面正方形的體積更大的值。

4.我們繼續逼到第 29 組時，如下表：

29	70--18	長	寬	高	體積
	1	17.25	17.25	9.375	2789.6484375
	2	25.875	8.625	13.6875	3054.66503906
	3	21.56625	12.9375	11.53125	3216.81335449
	4	19.40625	15.09375	10.453125	3061.85718143
	6	23.71875	10.78125	12.609375	3224.44129943
	7	22.640625	11.859375	12.0703125	3240.92310905
	8	23.1796875	11.3203125	12.33984375	3237.99111770
	9	22.91015625	11.58984375	12.205078125	3240.75497075
	10	22.69453125	11.89546875	12.097265625	3241.09431895
	11	22.667578125	11.832421875	12.0837890625	3241.02142823
	12	22.6810546875	11.8189453125	12.0905273438	3241.06105582
	13	22.6877929687	11.8122070313	12.0938964844	3241.09784834
	14	22.6911627343	11.8088372657	12.0955813672	3241.08660172
	15	22.6928469920	11.8071530079	12.0964234961	3241.09051007
	16	22.6936891200	11.8063108790	12.0968445605	3241.09242681
	17	22.6941101850	11.8058898150	12.0970550925	3241.09337606
	18	22.8023437500	11.6976562500	12.1511718750	3241.13042229
	19	22.7484375000	11.7515625000	12.1242187500	3241.16358001
	20	22.7753906250	11.7246093750	12.1376953125	3241.15983285
	21	22.7619140625	11.7380859375	12.1309570313	3241.16491070
	22	22.7551757812	11.7448242188	12.1275878906	3241.16504596
	23	22.7585449218	11.7414550782	12.1292724609	3241.16517854
	24	22.7568603515	11.7431396485	12.1284301758	3241.16516230
	25	22.7602294921	11.7397705079	12.1301147461	3241.16509468



※發現：

1.第一次逼的體積已經比底面是正方形的大。

2.最大體積的長、寬值離正方形的長、寬差距很大。

※疑問：

1.在逼近的過程中，我們不知道要逼上半部還是逼下半部，才能找出最大的體積？

2.所以我想知道各組體積變化，確定現在找出來的各組體積是不是接近最大值？

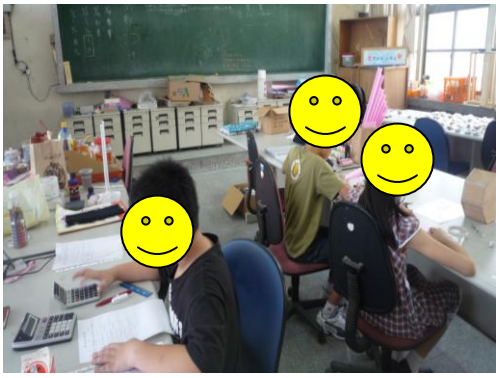
5.所以我想瞭解各組體積的變化，我們採用從正方形的那組逐一遞減寬，如下表：

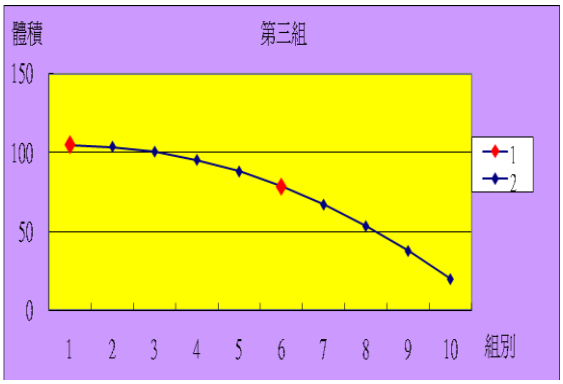
第三組

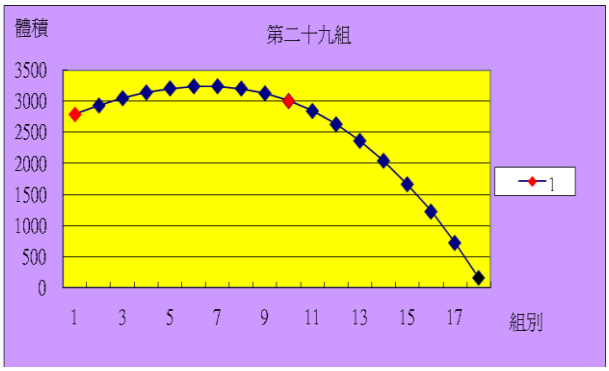
3	3--420	長	寬	高	體積
	1	0.50	0.50	419.750	104.93750000000
	2	0.55	0.45	419.775	103.8943125
	3	0.60	0.40	419.800	100.752
	4	0.65	0.35	419.825	95.5101875
	5	0.70	0.30	419.850	88.1685
	6	0.75	0.25	419.875	78.7265625
	7	0.80	0.20	419.900	67.184
	8	0.85	0.15	419.925	53.5404375
	9	0.90	0.10	419.950	37.7955
	10	0.95	0.05	419.975	19.9488125

第二十九組

29	70--18	長	寬	高	體積
	1	17.25	17.25	9.375	2789.6484375
	2	18.25	16.25	9.875	2928.554688
	3	19.25	15.25	10.375	3045.710938
	4	20.25	14.25	10.875	3138.117188
	5	21.25	13.25	11.375	3202.773438
	6	22.25	12.25	11.875	3236.679688
	7	23.25	11.25	12.375	3236.835938
	8	24.25	10.25	12.875	3200.242188
	9	25.25	9.25	13.375	3123.898438
	10	26.25	8.25	13.875	3004.804688
	11	27.25	7.25	14.375	2839.960938
	12	28.25	6.25	14.875	2626.367188
	13	29.25	5.25	15.375	2361.023438
	14	30.25	4.25	15.875	2040.929688
	15	31.25	3.25	16.375	1663.085938
	16	32.25	2.25	16.875	1224.492188
	17	33.25	1.25	17.375	722.1484375
	18	34.25	0.25	17.875	153.0546875







※體積發現：

1.體積變化有規律，呈現遞減的弧線。

2.最大值可能介於第 1、2 組之間。

※體積發現：

1.體積有規律，呈現拱形分佈。

2.最大值不是接近正方形。

3.最大值可能介於第 6、7 組之間。

歸納以上：1.從第 3 組到第 29 組最大值的長、寬離正方形的數越來越遠。

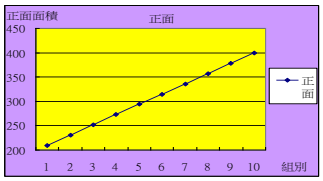
2.剖半可以慢慢逼出較大的體積。

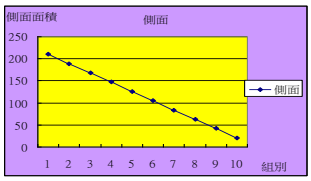
3.體積曲線從弧線變成拱形。

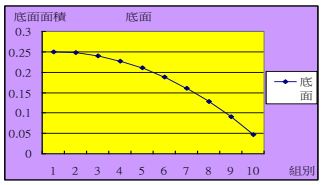
5. 我們也從上面的遞減法發現各組面積的變化，如下表：

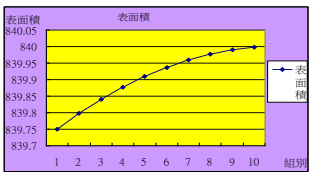
3	3--420	正面	差	差的差	側面	差	差的差
	1	209.875			209.875		
	2	230.87625	21.00125		188.89875	20.97625	
	3	251.88	21.00375	0.0025	167.92	20.97875	0.0025
	4	272.88625	21.00625	0.0025	146.93875	20.98125	0.0025
	5	293.895	21.00875	0.0025	125.955	20.98375	0.0025
	6	314.90625	21.01125	0.0025	104.96875	20.98625	0.0025
	7	335.92	21.01375	0.0025	83.98	20.98875	0.0025
	8	356.93625	21.01625	0.0025	62.98875	20.99125	0.0025
	9	377.955	21.01875	0.0025	41.995	20.99375	0.0025
	10	398.97625	21.02125	0.0025	20.99875	20.99625	0.0025
		底面	差	差的差	表面積	差	差的差
	1	0.25			839.75		
	2	0.2475	0.0025		839.7975	0.0475	
	3	0.24	0.0075	0.005	839.84	0.0425	0.005
	4	0.2275	0.0125	0.005	839.8775	0.0375	0.005
	5	0.21	0.0175	0.005	839.91	0.0325	0.005
	6	0.1875	0.0225	0.005	839.9375	0.0275	0.005
	7	0.16	0.0275	0.005	839.96	0.0225	0.005
	8	0.1275	0.0325	0.005	839.9775	0.0175	0.005
	9	0.09	0.0375	0.005	839.99	0.0125	0.005
	10	0.0475	0.0425	0.005	839.9975	0.0075	0.005

第三組

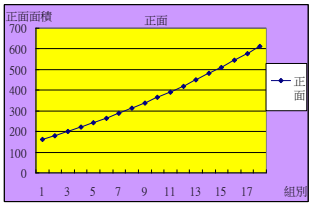


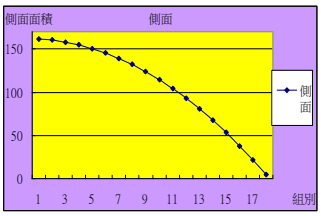


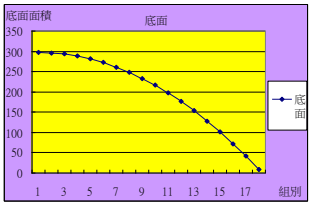


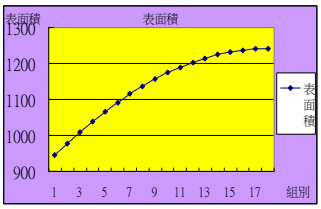


第二十九組









29	70--18	正面	差	差的差	側面	差	差的差
	1	161.71875			161.71875		
	2	180.21875	18.5		160.46875	1.25	
	3	199.71875	19.5	1	158.21875	2.25	1
	4	220.21875	20.5	1	154.96875	3.25	1
	5	241.71875	21.5	1	150.71875	4.25	1
	6	264.21875	22.5	1	145.46875	5.25	1
	7	287.71875	23.5	1	139.21875	6.25	1
	8	312.21875	24.5	1	131.96875	7.25	1
	9	337.71875	25.5	1	123.71875	8.25	1
	10	364.21875	26.5	1	114.46875	9.25	1
	11	391.71875	27.5	1	104.21875	10.25	1
	12	420.21875	28.5	1	92.96875	11.25	1
	13	449.71875	29.5	1	80.71875	12.25	1
	14	480.21875	30.5	1	67.46875	13.25	1
	15	511.71875	31.5	1	53.21875	14.25	1
	16	544.21875	32.5	1	37.96875	15.25	1
	17	577.71875	33.5	1	21.71875	16.25	1
	18	612.21875	34.5	1	4.46875	17.25	1
		底面	差	差的差	表面積	差	差的差
	1	297.5625			944.4375		
	2	296.5625	1		977.9375	33.5	
	3	293.5625	3	2	1009.4375	31.5	2
	4	288.5625	5	2	1038.9375	29.5	2
	5	281.5625	7	2	1066.4375	27.5	2
	6	272.5625	9	2	1091.9375	25.5	2
	7	261.5625	11	2	1115.4375	23.5	2
	8	248.5625	13	2	1136.9375	21.5	2
	9	233.5625	15	2	1156.4375	19.5	2
	10	216.5625	17	2	1173.9375	17.5	2
	11	197.5625	19	2	1189.4375	15.5	2
	12	176.5625	21	2	1202.9375	13.5	2
	13	153.5625	23	2	1214.4375	11.5	2
	14	128.5625	25	2	1223.9375	9.5	2
	15	101.5625	27	2	1231.4375	7.5	2
	16	72.5625	29	2	1236.9375	5.5	2
	17	41.5625	31	2	1240.4375	3.5	2
	18	8.5625	33	2	1241.9375	1.5	2

＊發現：

1.每組遞減過程正面面積越來越大，側面面積越來越小，底面面積越來越小，表面積越來越大。

2.正面和側面差的差都相同，代表它的每一組之間都是有關係的。

我們想要知道差的差是否跟我們選擇遞減的數有關係。

以第三組遞減 0.05 為例：

第四組 209.875

差 20.97625

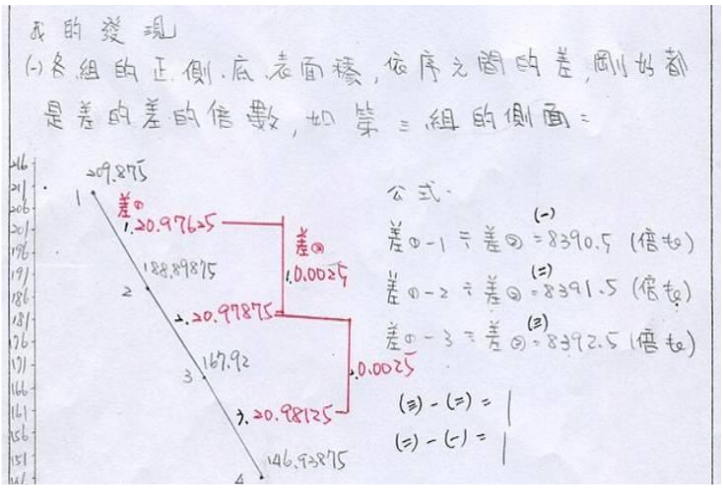
第三組 188.89875　　0.0025

差 20.97875

第二組 167.92　　0.0025

差 20.98125

第一組 146.93875　　$0.0025 = (0.05)^2$



	遞減	正面		遞減	正面		遞減	正面		遞	底面		底面	遞減		遞	底面
遞減 0.005	0.05	0.0025	遞減 0.2	0.8	0.64	遞減 2	6	36	遞減 0.005	0.05	0.005	遞減 0.2	0.8	1.28	遞減 2	6	72
	0.1	0.01		1	1		8	64		0.1	0.02		1	2		8	128
	0.15	0.0225		1.2	1.44		10	100		0.15	0.045		1.2	2.88		10	200
	0.2	0.04		1.4	1.96		12	144		0.2	0.08		1.4	3.92		12	288
	0.25	0.0625		1.6	2.56		14	196		0.25	0.125		1.6	5.12		14	392
遞減 0.1	0.3	0.09	遞減 1	1.8	3.24	遞減 4	18	324	遞減 0.1	0.3	0.18	遞減 1	1.8	6.48	遞減 4	18	648
	0.4	0.16		2.8	7.84		22	484		0.4	0.32		2.8	15.68		22	968
	0.5	0.25		3.8	14.44		26	676		0.5	0.5		3.8	28.88		26	1352
	0.6	0.36		4.8	23.04		30	900		0.6	0.72		4.8	46.08		30	1800
	0.7	0.49		5.8	33.64		34	1156		0.7	0.98		5.8	67.28		34	2312

統整：1.正面、側面公差 ＝ $(遞減)^2$

2.底面、表面積公差 $= 2\times(遞減)^2$

第三組面積
第二組面積　面積差 a-2
第一組面積 d　面積差 a-1　面積差的差 b

（a-2）÷b －（a-1）÷b=1

我們推算出一套公式，可以推算出遞減之後的數據。

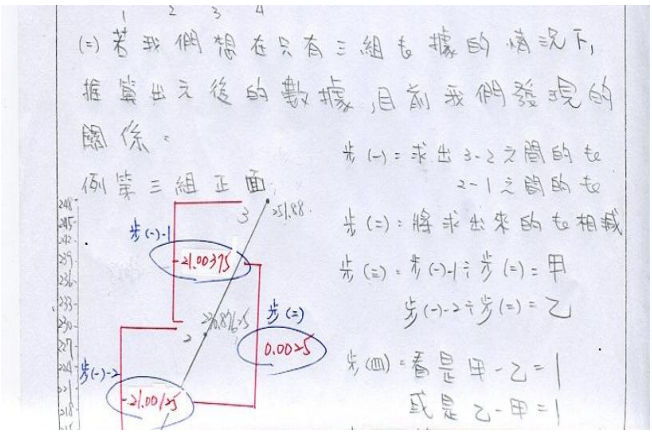
以第三組為例：

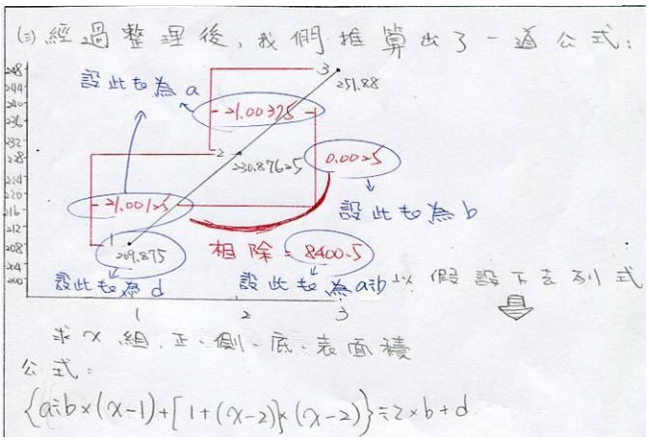
1.求出各組的差 ＝ （a-1）、（a-2）

2.將求出的差相減 ＝b

公式：

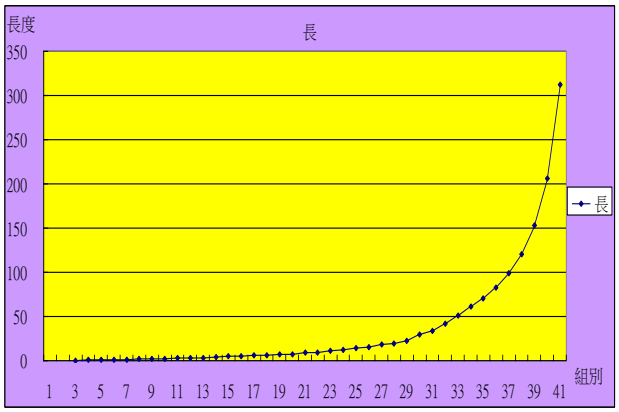
第 x 組正面、側面、底面、表面積$= \{a \div b \times (x-1) + [1+(x-2)] \times (x-2)\} \div 2 \times b + d$

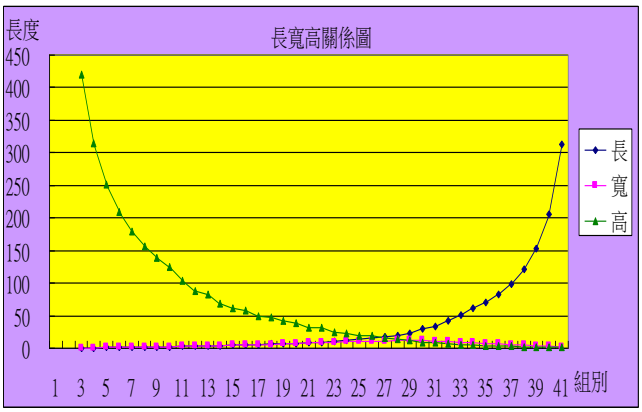


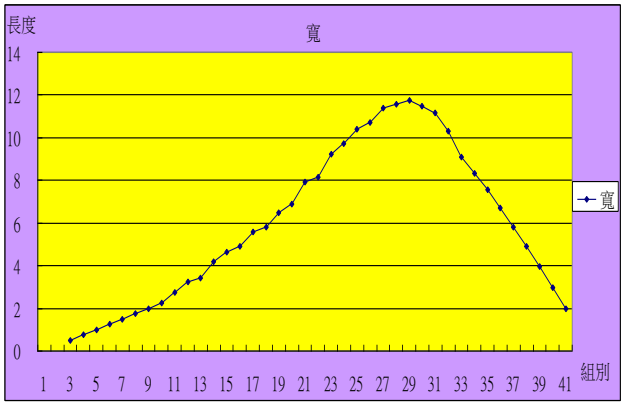


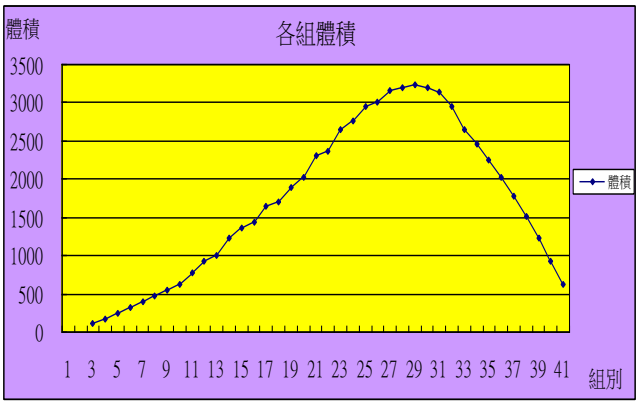
6.各組所逼出最接近最大體積的值，如下表：

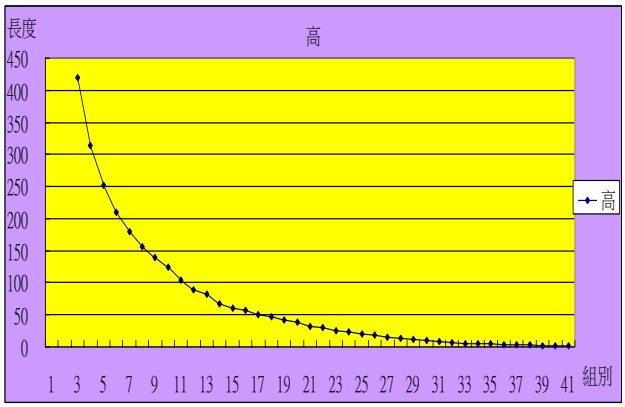
	紙長	紙寬	長寬比	立體的長	立體的寬	立體的高	體積	立體長寬比
1	1	1260	0.000793651					
2	2	630	0.003174603					
3	3	420	0.007142857	0.50012207030	0.49987792969	419.75006103600	104.93750900100	1.0004884
4	4	315	0.012698413	0.75036621093	0.74963378907	314.62518310600	176.97662330200	1.00097704
5	5	252	0.01984127	1.00097656250	0.99902343750	251.50048828200	251.50024843100	1.001955034
6	6	210	0.028571429	1.25198364257	1.24801635743	209.37599182200	327.14916336100	1.003178873
7	7	180	0.038888889	1.50315856934	1.49684143066	179.25157928500	403.31426507500	1.004220313
8	8	158	0.050793651	1.75512695312	1.74487304688	156.62756347700	479.66779609000	1.005876592
9	9	140	0.064285714	2.00708007813	1.99291992187	139.00354004000	556.00719225800	1.007105231
10	10	126	0.079365079	2.25988769532	2.24011230468	124.87994384800	632.19250665200	1.008827857
11	12	105	0.114285714	2.76829528807	2.73170471193	103.63414764500	783.69855339300	1.013394777
12	14	90	0.155555556	3.27995300294	3.22004699706	88.38997650150	933.53982486500	1.018604078
13	15	84	0.178571429	3.53717041016	3.46282958984	82.26858520500	1007.676484620	1.021468229
14	18	70	0.257142857	4.31653057861	4.18346942139	67.90826528940	1226.29245822000	1.031806413
15	20	63	0.317460317	4.84291839599	4.65708160401	60.67145919800	1368.37597119000	1.03990413
16	21	60	0.35	5.10848999030	4.89151000970	57.55424499520	1438.17870692000	1.044358486
17	24	52.5	0.457142857	5.91600036630	5.58399963378	49.70800018320	1642.10099637000	1.059455722
18	25	50.4	0.496031746	6.18964453125	5.81035546880	47.49482226560	1708.10544799000	1.065278117
19	28	45	0.622222222	7.02191162110	6.47808837890	41.76095581060	1899.64591402000	1.083948105
20	30	42	0.714285714	7.59006500250	6.90993499755	38.54503250130	2021.56576118000	1.098427844
21	35	36	0.972222222	9.06445312500	7.93554687500	32.03222656250	2304.12266694000	1.142259414
22	36	35	1.028571429	9.36523437400	8.13476562600	30.93261718700	2356.57009528000	1.151260504
23	42	30	1.4	11.27412414550	9.22587585450	25.38706207280	2640.60148995000	1.222011257
24	45	28	1.607142857	12.28906250000	9.71093750000	23.14453125000	2762.02942728000	1.265486726
25	50.4	25	2.016	14.27968730000	10.42031270000	19.78984365000	2944.70512433000	1.370370325
26	52.5	24	2.1875	15.03445434560	10.71554565440	18.64222717300	3003.30720202000	1.403050748
27	60	21	2.857142857	18.11790466290	11.38209533710	15.30895233150	3157.00783544000	1.591789923
28	63	20	3.15	19.44859313980	11.55140686020	14.22429656990	3195.61072714000	1.683655798
29	70	18	3.888888889	22.75854492180	11.74145507820	12.12927246090	3241.16517854000	1.93830703
30	84	15	5.6	30.03650732410	11.46349267590	9.26825366210	3191.27551673000	2.62018812
31	90	14	6.428571429	33.32157812500	11.17842187500	8.41078906250	3132.87306438000	2.98088393
32	105	12	8.75	41.69375000000	10.30625000000	6.84687500000	2942.14471300000	4.04548211
33	126	10	12.6	51.00000000000	9.07226562500	5.46386718750	2648.39433179000	5.621528525
34	140	9	15.55555556	61.16015625000	8.33984375000	4.83007812500	2463.65933820000	7.333489461
35	158	8	19.6875	70.69921875000	7.55078125000	4.22460937500	2255.24153771000	9.363166063
36	180	7	25.71428571	82.79492187500	6.70507812500	3.64746093750	2024.87487981000	12.34809205
37	210	6	35	98.68261718800	5.81738281250	3.09130859375	1774.64162424000	16.9634044
38	252	5	50.4	120.60449218800	4.89550781250	2.55224609375	1506.89773520000	24.63574706
39	315	4	78.75	153.05273437500	3.94726562500	2.02636718720	1224.20906172000	38.77436912
40	420	3	140	206.52148437500	2.97851562500	1.51074218750	929.29901676200	69.33704918
41	630	2	315	312.50683593800	1.99316406250	1.00341796875	625.00637014700	156.789319

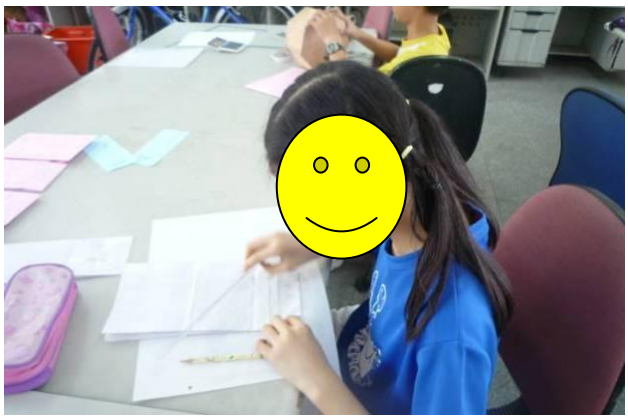












＊發現：

1.折成紙袋的長寬比值逐漸變大，越後面數據差越大。

2.每一組最大體積底面都不是正方形，但長＜寬的比例紙張所算出的長寬都很接近正方形。

3.長對寬 35：9 比例的第 29 組體積是最大的。

4.從編號第 30 組紙袋開始，體積逐漸減小。

5.寬大於長的紙張折成的紙袋底面都接近正方形。

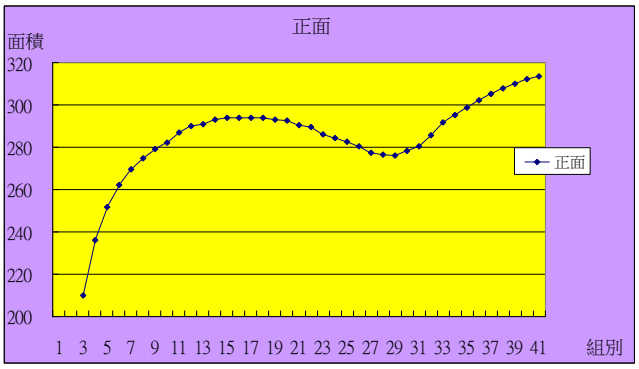
6.高越來越低。

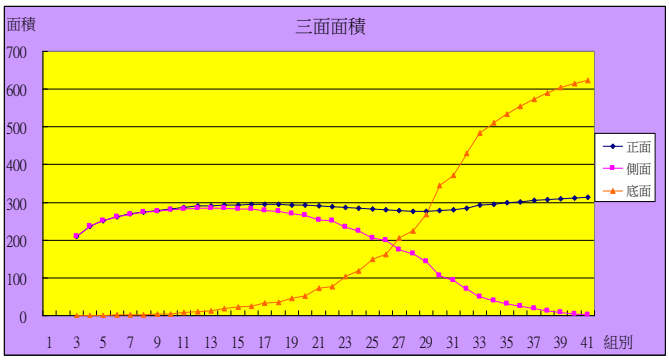
7.長越來越長。

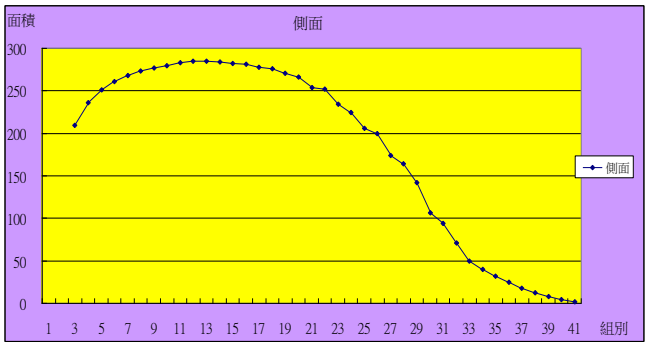
8.寬慢慢變大到第 29 組的寬最大，之後寬又慢慢變小。

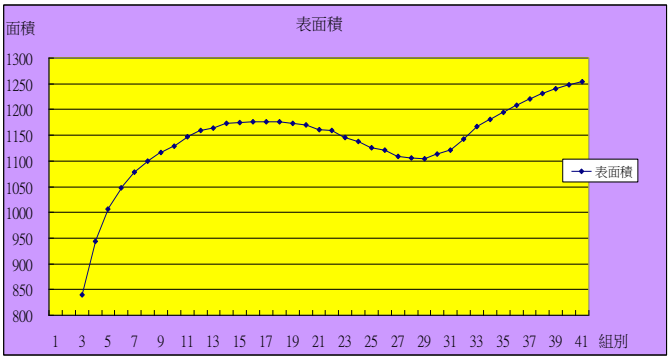
7.各組所逼出最接近最大體積的各面面積，如下表：

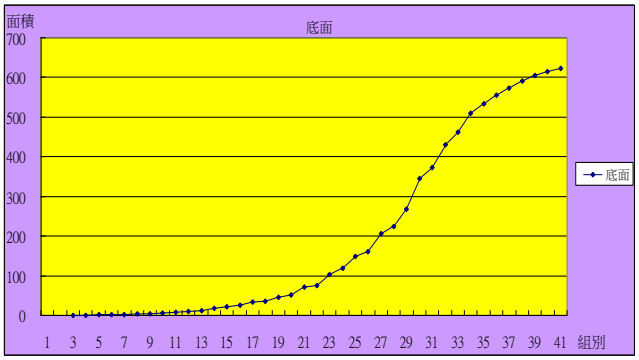
	紙長	紙寬	正面	側面	底面	表面積
1	1	1260				
2	2	630				
3	3	420	209.92626953388	209.82379149793	0.24999998509	839.75012204870
4	4	315	236.08410651041	235.85366814859	0.56249986589	944.43804918389
5	5	252	251.74609422759	251.25488233641	0.99999904633	1007.00195217433
6	6	210	262.13531690801	261.30466264699	1.56249606516	1048.44245517516
7	7	180	269.44354746998	268.31119038502	2.24999002344	1077.75946573344
8	8	158	274.90125826000	273.29521390950	3.06247371435	1099.45541805335
9	9	140	278.99123600383	277.02292415617	3.99994987249	1116.02827019249
10	10	126	282.21464849435	279.74509882165	5.06240223348	1128.98189686548
11	12	105	286.88992260880	283.09788943870	7.56216528243	1147.53778937743
12	14	90	289.91496885589	284.61987840386	10.56160281761	1159.63129733711
13	15	84	290.99800527285	284.88209116215	12.24861836061	1164.00881123061
14	18	70	293.12810366206	284.09215129785	18.05807368211	1172.49858360191
15	20	63	293.82692586155	282.55193651945	22.55386617169	1175.31159093369
16	21	60	294.01528445725	281.52716549475	24.98822992200	1176.07312982600
17	24	52.5	294.07254729185	277.56945481893	33.03494387886	1176.31894810041
18	25	50.4	293.97606689896	275.96180029061	35.96403495208	1175.83976933123
19	28	45	293.24174091470	270.53116252840	45.48856407031	1173.03437095651
20	30	42	292.55930220834	266.34366906244	52.44685579445	1170.25279833601
21	35	36	290.35461616516	254.19323539734	71.93139266968	1161.02709579467
22	36	35	289.69120975748	251.62959101502	76.18398666505	1158.82558821005
23	42	30	286.21688949826	234.21788299414	104.01366973460	1144.88321471940
24	45	28	284.42459106445	224.75509643555	119.33831787109	1137.69769287109
25	50.4	25	282.59277903789	206.21635911711	148.79880692422	1126.41708323422
26	52.5	24	280.27571333277	199.76163637198	161.10238192927	1121.17708133877
27	60	21	277.36613883100	174.24795494825	206.21971818162	1109.44790574012
28	63	20	276.64255668784	164.31063697906	224.65861221632	1106.56499955012
29	70	18	276.04459217014	142.41530773091	267.21843284451	1104.13823264661
30	84	15	278.38596900328	106.24655797387	344.32328171944	1113.58833567374
31	90	14	280.26076483899	94.01934844226	372.48265782202	1121.04288438452
32	105	12	285.47189453125	70.56560546875	429.70621093750	1141.78121093750
33	126	10	291.92204475403	49.56965446472	484.71059799194	1167.69399642944
34	140	9	295.40833282471	40.28209686279	510.06614685059	1181.44700622558
35	158	8	298.67658233643	31.89910125732	533.83433532715	1194.98570251464
36	180	7	301.99124336243	24.45651054382	555.14641952515	1208.04192733764
37	210	6	305.05842256701	17.98332548141	574.07456112199	1220.15805721883
38	252	5	307.81234407553	12.49454069138	590.42023372895	1231.03400326275
39	315	4	310.14103884874	7.99860954166	604.13979721069	1240.41909399149
40	420	3	312.00071907043	4.49976921082	615.12746810913	1248.12844467163
41	630	2	313.57497453740	1.99997663498	622.87739467721	1254.02729702196

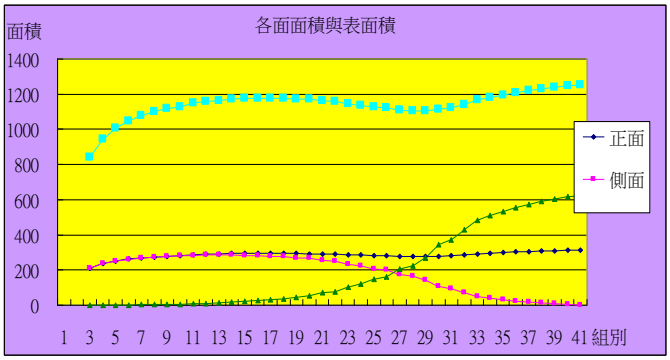












＊發現：

1.每一組的最大體積底面都不是正方形。

2.底面面積越來越大，長、寬比值越來越大。

3.表面積的曲線與正面面積曲線很像，其中第 33 組忽然降低。

4.表面積與體積沒有絕對的關係。

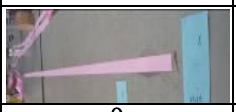
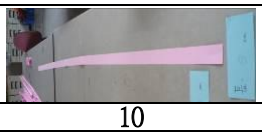
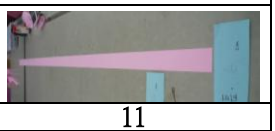
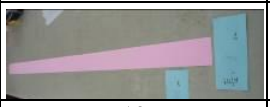
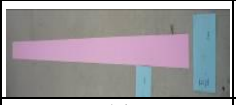
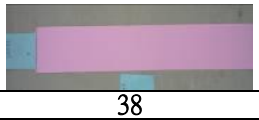
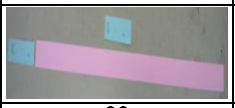
5.側面面積一開始越來越大，到第 14 組（18-70）比例的紙張之後開始越來越小。

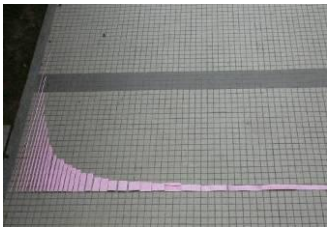
6.正面面積一開始越來越大，到第 17 組開始越來越小，到第 30 組又越變越大，除了第 33 組例外。

7.正面面積都比側面面積大。

8.表面積最大為第 41 組。

8.我們想要看看這 41 組紙袋的樣子，我們實際使用壁報紙張裁成上面 41 組紙張：

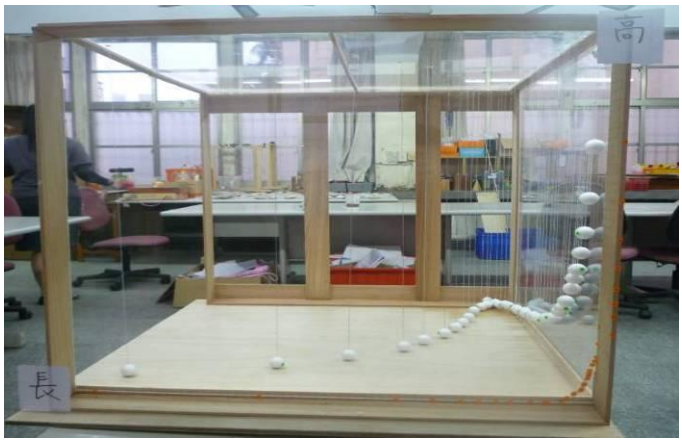
組別	2	3	4	5	6
紙長	2	3	4	5	6
紙寬	630	420	315	252	210
紙張					
組別	7	8	9	10	11
紙長	7	8	9	10	12
紙寬	180	158	140	126	105
紙張					
組別	12	13	14	15	16
紙長	14	15	18	20	21
紙寬	90	84	70	63	60
紙張					
組別	17	18	19	20	21
紙長	24	25	28	30	35
紙寬	52.5	50.4	45	42	36
紙張					
組別	22	23	24	25	26
紙長	36	42	45	50.4	52.5
紙寬	35	30	28	25	24
紙張					
組別	27	28	29	30	31
紙長	60	63	70	84	90
紙寬	21	20	18	15	14
紙張					
組別	32	33	34	35	36
紙長	105	126	140	158	180
紙寬	12	10	9	8	7
紙張					
組別	37	38	39	40	41
紙長	210	252	315	420	630
紙寬	6	5	4	3	2
紙張					

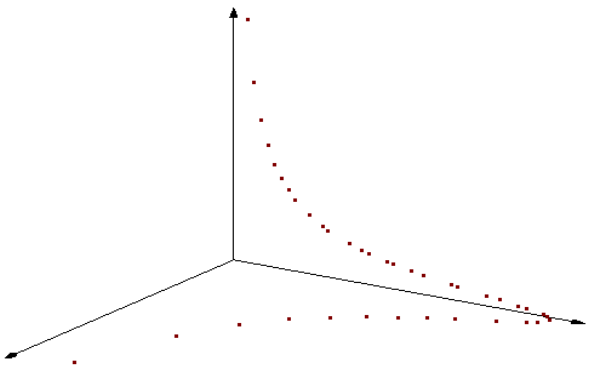


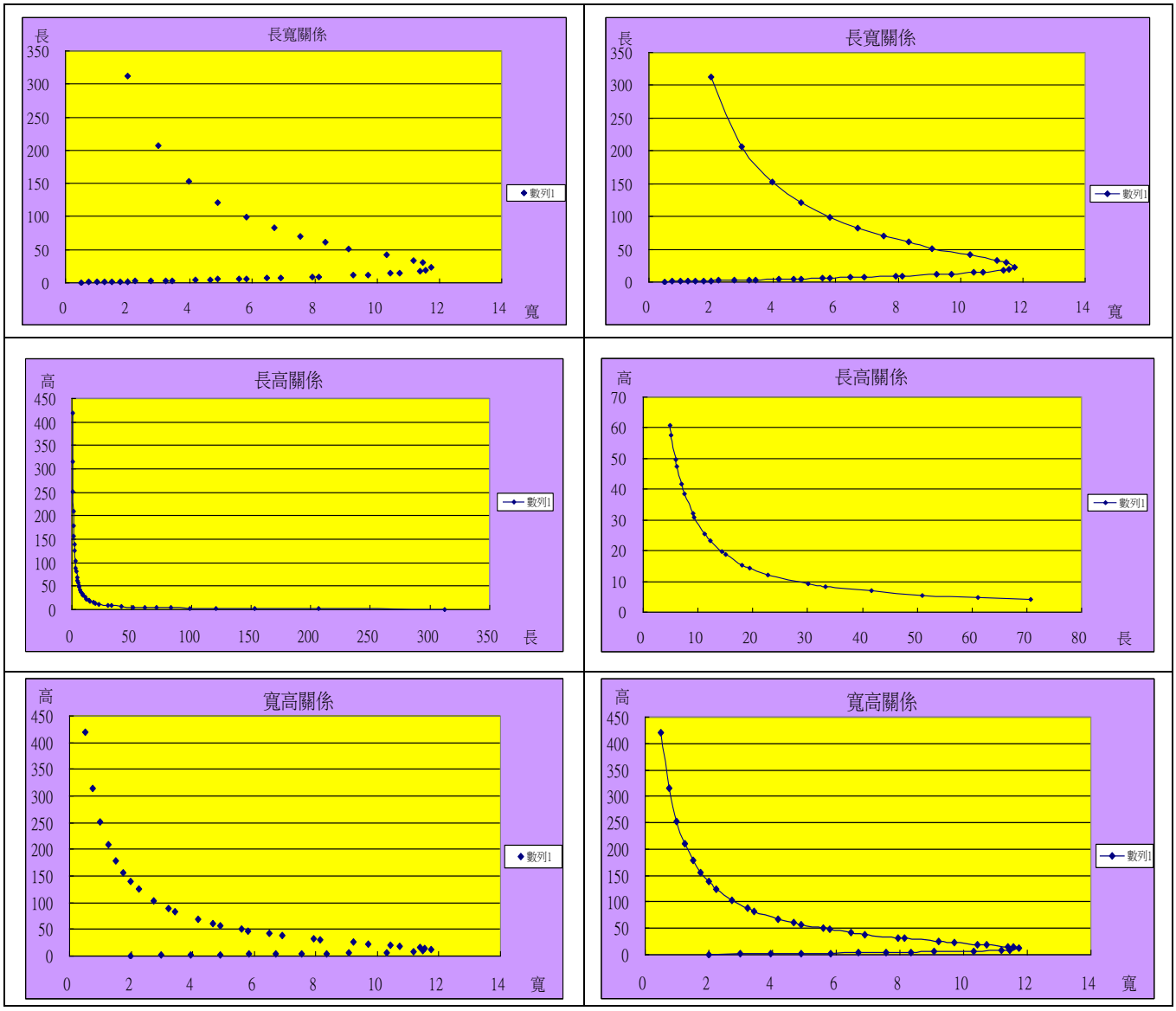
＊發現：

1.第二組實際折的時候無法折出。
2.第三組因為寬太小很難折成功。
3.長寬比值越小紙張，折出來的紙袋越細長；長寬比值越大的紙張，折出來的紙袋越扁寬。
4.長寬比值越小的底面看起來很像正方形，長寬比值越大底面形狀越來越呈現長方形。
5.從第 3 組到第 29 組之間的紙袋都可以依序放進去後一組的紙袋裡。

9.想要知道 41 組紙袋長、寬、高之間的關係，我們設計了一個最大體積的長、寬、高立體模型，如下圖：







＊發現：

1. 保麗龍球越來越低。
2. 保麗龍球都不在同一平面上，看起來好像一條彎曲的山路。
3. 保麗龍球的彼此的距離都不同，越往前後的組別差距更大。
4. 由寬跟高的那面看過去，在第 13 與 14 組－第 20 與 21 組－第 22 與 23 組的保麗龍球差距變大，如果再多算一些組別曲線可能會更完整。
5. 長-寬的關係圖曲線和寬-高的關係圖曲線很像，都在第 29 組呈現折返。
6. 長跟高的關係，紙袋的長變小紙袋的高變大，減緩的程度不一樣，呈現一個像溜滑梯的曲線。

九、實驗六：日常生活中的應用

（一）觀察麥香紅茶

有一天在桌上看到老師教容積的教具，發現紅茶包裝和紙袋很像都是長方體，因此想說要觀察紅茶包裝，如下：

1.紅茶立體的長 6.2cm，寬 4cm，高 10.5cm，體積 260 cm^3 。
2.拆開後是一張長 20.5cm，寬 12.5cm 的長方形紙。
3.拆開都有三角形折痕。
4.腰長是寬的一半。
5.紅茶的容器有蓋，我折的紙袋上面沒有封住。
6.紅茶包裝底面有一條將前後兩面黏和的厚度。
7.在折底面的方式有些不同。
8.紅茶的黏貼處折法為變例五。
9.內容量 250ml。

用實驗五的結果去推紅茶鋁箔包最大體積的算法：

※我的發現：

1.拆開後是一張長 20.5cm，寬 12.5cm 的長方形紙，長寬比例 16.8 較接近第 24 組。

	紙長	紙寬	長寬比	立體的長	立體的寬	立體的高	體積	立體長寬比
24	45	28	1.607142857	12.2890625	9.7109375	23.14453125	2762.02942728	1.265486726

2.紅茶立體長 6.2cm，寬 4cm，高 10.5cm，體積 260 cm^3 ，立體長寬比 1.55。

3.正方形長寬 20.5÷4＝5.125……長.寬
5.125÷2＝2.5625……腰長
12.5-2.5625＝9.9375……高
5.125×5.125×9.9375＝246.240234375……體積（比 250ml 少）

4.較大體積推算 20.5÷2＝10.25……長＋寬
1.26+1＝2.26……等份
10.25÷2.26＝4.53539823008……寬
4.53539823008×1.26＝5.7146017699……長

取長 5.71cm、寬 4.54cm
4.54÷2＝2.27……腰長
12.5-2.27＝10.23……高
5.71×4.54×10.23＝265.196382……體積

5.市面上的紅茶包裝折出來並不是該紙張的最大體積。

（二）觀察市面上的飲料包裝，並將實驗結果應用於日常生活中，結果如下：

編號	原長	寬	長寬比	面積	立長	寬	高	體積	推算長	寬	高	推算最大體積
1	16	10.1	1.5841	161.6	4.7	3.1	8.5	123.845	4.348	3.451	8.3745	125.658937
2	20.9	10.3	2.0291	215.27	6.2	3.9	8.2	198.276	5.925	4.324	8.138	208.4931186
3	21.3	12.5	1.704	266.25	6.3	4	11	267.12	5.714	4.535	10.2325	265.1546702
4	25.5	13.9	1.8634	354.45	7.5	4.6	12	396.75	7.052	5.147	11.3265	411.1139383
5	21.3	14	1.5214	298.2	6.2	4	12	295.12	5.714	4.535	11.7325	304.0241552
6	21.5	14.2	1.5140	305.3	6.2	3.9	12	297.414	5.7	4.524	11.938	307.8428184
7	22.6	15.6	1.4487	352.56	6.1	4.6	13	370.392	5.962	4.887	13.1565	383.331652
8	22.5	15.5	1.4516	348.75	6.2	4.6	13	376.464	5.962	4.887	13.0565	380.4180226
9	21.3	15.6	1.3653	332.28	6.2	4	14	334.8	5.605	4.594	13.303	342.5438691
10	21.4	16.2	1.3209	346.68	6.2	3.9	14	343.356	5.605	4.594	13.903	357.9934911
11	25.6	16.5	1.5515	422.4	7.5	4.6	14	496.8	6.829	5.42	13.79	510.4117522
12	22.5	17.5	1.2857	393.75	5.7	5	15	421.8	5.99	4.909	15.0455	442.4115734
13	32.5	20	1.625	650	9.4	6.2	17	979.104	8.697	6.902	16.549	993.381759
14	29.9	22.3	1.3408	666.77	9	5.7	20	1000.35	8.078	6.621	18.9895	1015.642735
15	25	16.9	1.4792	422.5	7.5	4.6	15	503.7	6.649	5.45	14.175	513.6601838
16	21.3	15.6	1.3653	332.28	6.2	3.9	14	328.848	5.632	4.617	13.2915	345.6181302
17	20	14.8	1.3513	296	5	4.1	12	254.2	5.33	4.369	12.6155	293.7742469

分組歸納：

原面積	100~200	201~300	301~400	401~500	600 以上
	1	2、3、5、17	4、6、7、8、9、10、12、16	11、15	13、14
原長	4~5	5.1~6	6.1~7	7.1~8	8.1~10
	1、7	12	2、3、5、6、7、8、9、10、16	4、11、15	13、14
原寬	3~4	4.1~5	5.1~6	6.1~7	7.1~8
	1、2、6、10、16、3、5、9、	17、4、7、8 11、15、12	14	13	
原高	8~12	12.1~13	13.1~14	14.1~15	15.1 以上
	1、2、3 4、5	6、17	7、8、9、16	10、11、12、15	13、14
長寬比	23 組	24 組	25 組		
	7、8、9、10、12、14、15、16、17	1、3、5、6、11、13	2、4		
原體積大小	1＜2＜17＜3＜5＜6＜16＜9＜10＜7＜8＜4＜12＜11＜15＜13＜14				
原面積大小	1＜2＜3＜17＜5＜6＜16=9＜10＜8＜7＜4＜12＜11＜15＜13＜14				
推算較大體積	1＜2＜3＜17＜5＜6＜9＜16＜10＜8＜7＜4＜12＜11＜15＜13＜14				

我的發現：

1.市面上的飲料包裝，紙張面積越大，算出來的體積越大，紙張長寬比例大約都在第 23～24 組之間。

2.編號 7 紙張面積比編號 8 大，但編號 7 卻折出較小的體積，是因為黏貼處大小的選擇。

3.編號 14（光泉牛奶）的紙張面積大，體積大，可是內容量卻不是最大的。

4.編號 12 和編號 17 的形狀都相同，寬都呈現出弧形，體積也因此變大。

一般方形設計　弧形設計

水面　黑線

弧型設計　一般方形設計

弧形設計

5.利用推算較大體積的方法，推算出各包裝的體積，結果發現都大於現在市面上飲料廠商所使用的體積。

※市面上的鋁箔飲料包裝為什麼都不採用這張紙的最大體積呢？我想可能是因為：

a.最大體積正面的面積比較小，顧客會覺得飲料的容量較小，而不願意購買。

b.內容量紅茶只有 250ml，實際上不需要紙盒提供那麼大的體積空間。

c.寬的大小都在 3~5 之間，可見老闆考量消費者手拿方便，配合手型設計而設計出較方便拿取的寬度。

（三）與日常生活中 48 個紙袋（原先教室裡的那些紙袋）對照發現：

1.一般市面上紙袋的紙張黏貼處都是 2～4.5cm 之間，並不是採用我們選擇比較小的數字，我們想可能和紙袋承受的重量有關。

2.市面上紙袋的紙張比例介在 1.22～2.63 之間，是我們研究中的第 23～26 組之間，正面面積都比側面和底面面積大，其餘比例的紙張可能折出來的紙袋形狀不適合使用，所以在市面上很少看到。

陸、結論

（一）從觀察紙袋的實驗中， 發現市面上不論大大小小的紙袋，折法都一樣，薄薄的一張紙竟然可以折出這麼多不同的紙袋，我們把紙袋分成十個步驟，其中有些步驟的細微變化，可以產生出不同的紙袋，而且黏貼處可歸納出五種形式，其中體積最大的是正方體形狀的紙袋，但隨便拿一張紙卻不見得可以折出正方體紙袋。

（二）製作一個紙袋需要針對以下的因素來考慮：

1.紙張的大小：**（紙張的長）＞（物體的長＋物體的寬）× 2＋黏貼處**

（紙張的寬）＞（物體的高＋$\frac{1}{2}$物體的寬）

2.黏貼處大小的選擇：黏貼處黏越多，體積就越來越小，而表面積也越來越小，底面形狀由長方形變成正方形，底面面積越來越小，但側面面積都一樣。

3.寬大小的選擇：**$\frac{1}{2}$物體的寬＜內折長度＜$\frac{1}{2}$物體的長**，寬越來越寬，長就越來越短，長、寬長度就會越來越接近，使底面會越來越接近正方形，而體積跟表面積也越來越大，正面面積越來越小，側面與底面面積皆越來越大。

4.腰長大小的選擇：**腰長大小的選擇＞內折的大小**，才能把底部封住，腰長越長，體積與表面積越小，底面面積皆相同。

（三）透過逼近法與遞減法求紙張可以折出的最大體積：

1.同樣面積不同比例的紙張：第 29 組的體積是最大的，第 41 組表面積最大。

2.不同長寬比例的紙最大體積的底面都不是正方形，且正面面積都大於側面面積。

3.利用遞減法得知，一張紙只要有兩組不同長、寬、高組合的各面面積（正面、側面、底面、表面積）就可以去推算出其他組的各面面積：

第 x 組正面、側面、底面、表面積＝ $\{a \div b \times (x-1) + [1+(x-2)] \times (x-2)\} \div 2 \times b + d$

4.實際折出所推算的最大體積紙袋，發現長＜寬的紙張，最大體積的底面都接近正方形，高的大小遠遠超過長跟寬，呈現細細高高的形狀，第 3～30 組的紙袋都可以依序放到下一個紙袋裡。

5.透過長、寬、高立體模型，發現保麗龍球都不在同一平面上，但是看起來好像一條可以連起來的彎曲山路，其中在 29 組呈現轉折。

6.生活應用：透過這次實驗的結果，根據紙張的長寬比例就可以推算出該紙張的最大體積是介於多少之間，而且能夠折出成品，在生活中，我們可以發現鋁箔包裝的飲料所呈現的體積不是該紙張的最大體積，可能有顧慮到其他因素。

（四）從這次實驗中，我們發現固定高只改變長、寬，所折出的紙袋底面正方形的紙袋體積最大，但長、寬、高同時改變時，紙袋的最大體積都沒有出現底面是正方形的，與我們一開始以為底面是正方形的紙袋體積最大是不同的，因此長、寬、高三者的互相組合竟然會有如此奇妙的變化，沒想到日常生活中隨處可見的紙袋，竟讓我們誤闖入這折折稱奇的紙袋世界。

（五）未來繼續研究的方向：

長、寬、高呈現的立體彎曲曲線彼此之間是否有什麼特殊關係？

柒、參考資料

1.紙袋折法

http://tw.myblog.yahoo.com/treebox21/article?mid=4736&prev=4850&next=4736&sc=1

http://blog.yam.com/sandi8295/article/24532093

2. 康軒版五下數學第五單元體積、容積與容量

【評語】080415

1.從生活中的包裝紙袋入手，是非常有趣的問題。

2.討論分析可以再深入點，並可引用數學模型導出體積、表面積之公式，以求在各種情況下的極值。

3.模型實作相當好，惟數學分析能力可再加強。