中華民國 第50屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組　數學科

第三名

080414

數字方塊尋極限 ～數字方塊擴展層數極限的探討

學校名稱：臺北市士林區士東國民小學

作者：	指導老師：
小五 唐麒鈞	林華葵
小六 葉沛鎧	李品琦

關鍵詞：數字方塊、最高層數、上推法

摘要

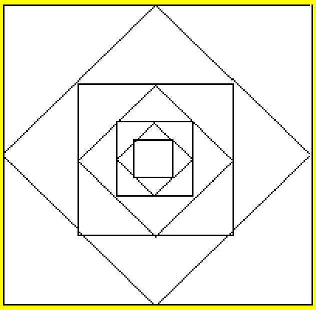
數字方塊曾以不同的樣式出現在一些數學書籍中，在科展活動中也有過幾件類似的作品，大部分都在討論它的共同特徵，例如：其中的奇偶現象，或是往內部發展時數字間的和差關係，我們這次的研究目標是挑戰在特定區間內（例如：只准用 1~50 的數字）的最高層數解答，以及特定區間內的最佳解答個數，研究結果顯示，應用我們反向思考得到的「上推法」，以及應用「費式數列變形」來抓取數字做數字方塊，並以「波峰現象」來輔助檢驗，確認了 1~50 之間的最佳解答為十三層以及解答數（２群解答）甚至更精確的說，特定區間不應該用 10 的倍數為斷點，而是確認十三層的最佳解區間（1~45），最佳解答為（1,8,21,45）及(1, 25,38,45)。

壹、研究動機

有一次，我們看見一位老師在玩數字方塊（遊戲規則如下圖一），我們覺得很好玩，就好奇的問那位老師，老師很有耐心的跟我們講解規則，並建議我們回家自行找一些數字玩玩看。

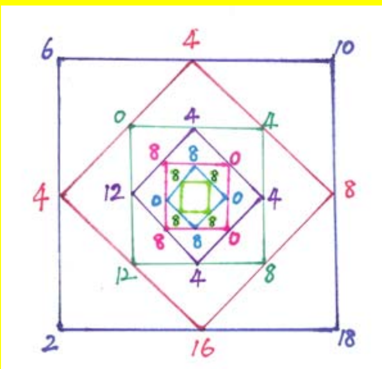
我們在玩的過程中，發現有的題目很長命～也就是創造出很多層數字方塊，但有些很短命，數字方塊很快就結束了。我們請教老師如何做出長命數字方塊的方法，老師說他也不知道，但介紹我們去找一篇多年前數學科全國第一名的資料（34 屆初小全國第一名～數字方塊）

我們從資料中看到他們當時的未來發展，其中我們了解到他們想進一步探討的是多次運算的數字方塊（如附件一），也就是找做出很多層的數字方塊，我們繼續尋找其他相關資料，結果發現從 1995～2009 年中有人做數字方塊研究，卻無人完成最佳解的探討，因此我們決定試著挑戰它，希望能找到最佳解答。



數字方塊的遊戲規則如下：

1. 先畫一個正方形
2. 取四個中點作出一個正方形，一直持續這個步驟（如圖）
3. 在最外面的四個點各填上一個數字，例如：6,10,18,2
4. 把相鄰的兩個點的差寫在邊的中點，一直持續下去，如 10-6=4 18-10=8 18-2=16 6-2=4
5. 直到有一個正方形所有的數都一樣才結束，再計算有幾個正方形（四個點都一樣數字也算一層）左圖的例子是七層的數字方塊



圖一

貳、研究目的

一、在特定區間內，數字方塊能做到最多層數為何？特定區間內最高層的數字方塊有多少個解答？

(一) 1~10 內最高層數為何？
(二) 1~20 內最高層數為何？
(三) 1~30 內最高層數為何？
(四) 1~40 內最高層數為何？
(五) 1~50 內最高層數為何？

二、數字方塊能構成「家族系統」嗎？可以用家族系統來加速找出數字方塊的層數嗎？

參、研究設備及器材

紙卡、計算機、紙張、尺。

肆、研究過程與結果

名詞解釋：

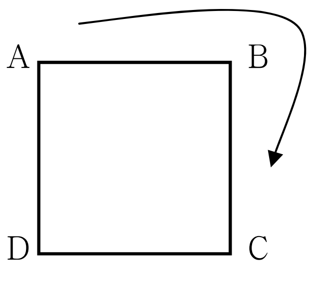
數字方塊的極限：在特定區間內，（例如：1~50 區間內）找到最多層的數字方塊為 N 層，就表示 1~50 區間中數字方塊的極限為 N 層，也就是 N 為 1~50 區間內的上限。

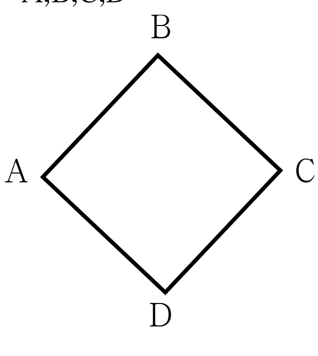
一、在特定區間內，數字方塊能做到最多層數為何？特定區間內最高層的數字方塊有多少個解答？

數字方塊的統一記錄格式如下：

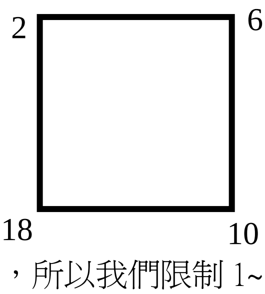
在以下的報告中，我們統一格式如下：

從左上角順時針方向填上四個數字，A,B,C,D





在做簡單數字表示時，以（A,B,C,D）表示，如：(2,6,10,18) 的數字原始圖則為



(一) 亂試歷程

1. 剛開始，因為沒有頭緒，所以我們限制 1~10 的數字以嘗試錯誤的方式來試試看。
2. 做很多次之後，發現亂做的結果最高層數都是 7 層，所以認為七層是最佳解。
3. 但是後來我覺得最高層應該不會有很多個解答，而七層中卻有 26 個解，所以在腸思枯竭中就想說為何不反向思考，由下往上推。
4. 亂試歷程中我們一些小發現如下：
5. 研究結果：

（1）差距很大的數，(例如：(1,2,49,50)）一般層數較高

（2）（A－C）×2（×3、×4…）＝B－D 或 A－C＝（B－D）×2（×3、×4…）大多是八層，例如：(9,15,19,20)

（3）三奇一偶或三偶一奇層數會較高。

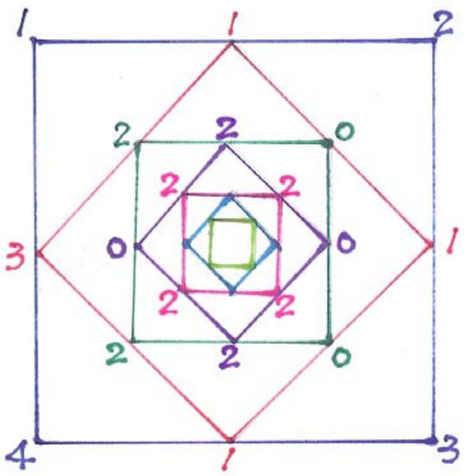
（4）用 1 當 A（第一個數)，2 到 20 的數當 B 到 D（第二、三、四個數）最多只會做到七層。

（5）全部加 X 或者全部減 X，層數不變〈負數跟零之外〉 例如：(1,2,3,4)→五層，全部加 100→（101,102,103,104）還是五層。

（6）全部乘以 X 或者全部除以 X，層數不變〈負數、零、小數之外〉例如：（1,2,3,4）→五層 全部乘 101→（101,202,303,404）還是五層。

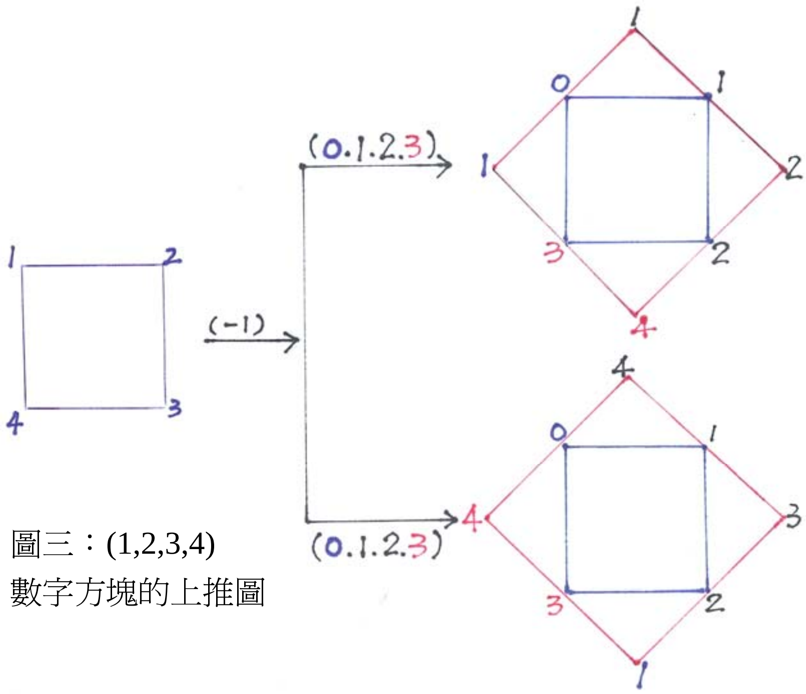
(二) 上推法

1. 經過亂試歷程後，我們想到一般人在玩數字方塊時大都是由外向內解，例如：(1,2,3,4)，一般人只會向內解。



圖二：一般玩數字方塊，都是向內找解答。

2. 而上推法的定義是反向思考由內往外擴張。如：(1,2,3,4）可上推成（1,1,2,4）和（1,3,4,4）(如下圖三）上推法之詳細過程請參照第 5 頁 7.舉例說明



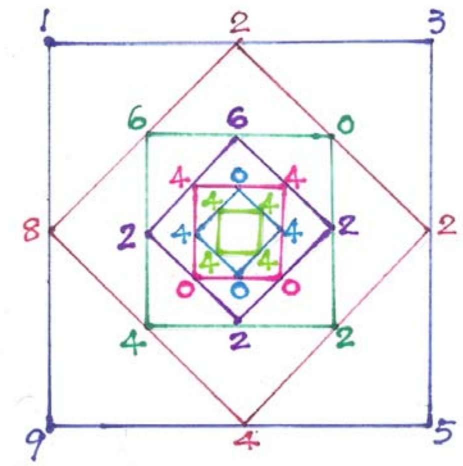
圖三：(1,2,3,4)
數字方塊的上推圖

3. 亂試過程中，數字限制在 1~10 之間，做過很多次後，發現亂做的結果最高

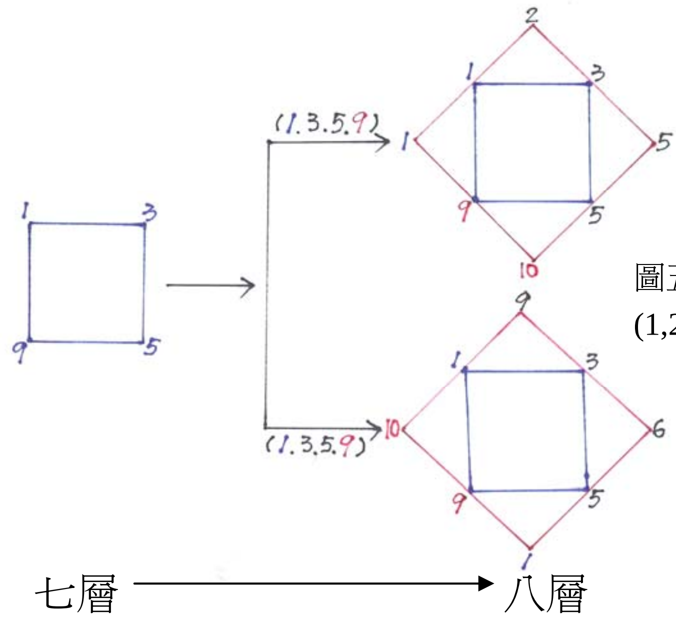
層數都是 7 層，當時曾認爲七層是最佳解，而七層的解答我們找到 26 個解答。

4. 想到了上推法後，我們把這 26 個解答都試著用上推法推推看。

（1）我們發現 26 個 7 層中，能往上推的數字方塊只有一個（1,3,5,9）（如下圖四），上推時還發現 1 個數字方塊（1,3,5,9）能夠推出 2 個數字方塊（1,2,5,10）和（1,6,9,10）（如下圖五）（數字方塊由七層變成八層仍在 1~10 的區間內）。



圖四：數字方塊（1,3,5,9）的一般向內解法。



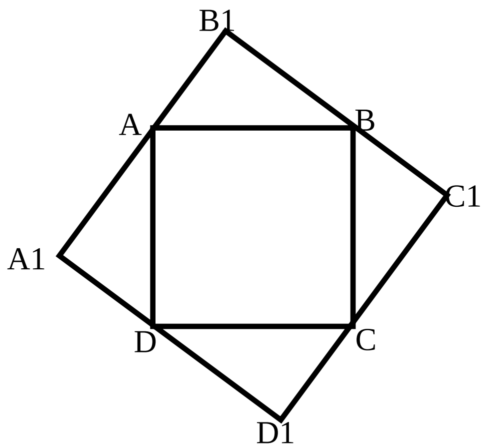
圖五：（1,3,5,9）推出(1,2,5,10)和(1,6,9,10)

（2）我們就覺得非常的奇怪，爲什麼這們多個七層當中只有一個可以往上推，經過仔細觀察發現，只有(1,3,5,9)是 A＋B＋C＝D 因此提出了凡（A,B,C,D）四個數字當中最小的 3 個數字相加等於第四數時，可往上推的假設。

（3）因此我們可知上推法是有限制的。

5. 應用上推法找到了（1~10）區間的這 2 個八層解答後，想說還可能有 9 層，可是後來一無所獲，也找不到第三個八層。所以覺得這是最佳解了。

6. 證明上推法之前的假設



設 A＜B＜C＜D
且 A1＜B1＜C1＜D1
A＝B1－A1
B＝C1－B1
C＝D1－C1
D＝D1－A1
A＋B＋C＝~~B1~~－A1＋~~C1~~－~~B1~~＋D1－~~C1~~
＝－A1＋D1＝D1－A1＝D
所以 A＋B＋C＝D

7. 上推法

（1）定義

A. 一個可以上推之數就像一個母親，這個母親可以生出兩個孩子。一個孩子是延續的孩子，母親會把上推之術交給他，因為可以持續往上推延續數字方塊的生命；另外一個孩子是終止的孩子，因為數字方塊無法再往上推展。

B. 如何分辨延續的孩子與終止的孩子

凡 A＋B＋C≦D 為延續的孩子（以下以延代表延續的孩子）如：（1,3,5,9）

凡 A＋B＋C＞D 為終止的孩子（以下以終代表終止的孩子）如：（1,6.9.10）

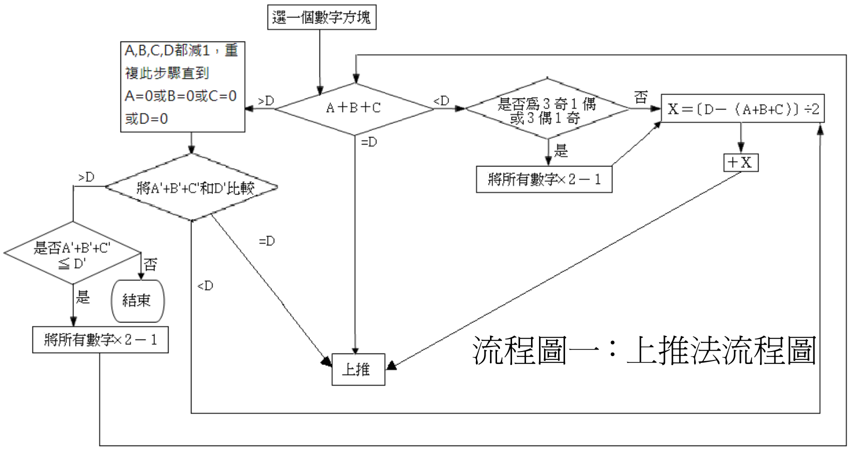
C. 上述中的例外

家族完美：生了 2 個延續的孩子，如：（1,1,1,1）

（2）上推的方法

Step1：選一個數字方塊
Step2：如果 A＋B＋C＝D 就直接上推
Step3：如果 A＋B＋C＜D 如果是三奇一偶或三偶一奇就將所有數字×2－1
Step4：不是三奇一偶就設 X 為〔D－（A＋B＋C）÷２〕並加上 X，然後上推
Step5：如果 A＋B＋C＞D 全部的數字減一，重複此步驟，直到有一個數字為零，得到（A',B',C',D'）
Step6：如果 A'＋B'＋C'＝D'就上推
Step7：如果 A'＋B'＋C'＜D'→Step4
Step8：如果 A'＋B'＋C'＞D'將所有數字×2－1→重複 Step2、Step3 或 Step5

（3）流程圖：（流程圖一）



流程圖一：上推法流程圖

（4）說明：

A. 計算需要加上去的值

設需要加的數爲 x

（A+B+C）+3x=D+x（A、B、C有三個數，一次會加 3 個１，所以是是３x，D只有一個數，一次會加 1 個１，所以是x）

3x－x=D－（A+B+C）

2x=D－（A+B+C）

x=〔D－（A+B+C）〕÷2

舉例①：數字方塊（1,18,21,45）

(1＋18＋21)＋3x＝45＋x

3x－x＝45－(1＋18＋21)

2x＝45－40，2x＝5

x＝2.5

2.5 不是整數，所以要先把四個數同時×2－1，變成：

(1,18,21,45) →×2－1＝（1,15,41,89）

(1＋15＋41)＋3x＝89＋x

3x－x＝89－(1＋15＋41)

2x＝89－(1＋15＋41)

2x＝89－57

2x＝32

x＝16

所以（1,15,41,89）＋16＝（17,31,57,105），17＋31＋57＝105，可以用（17,31,57,105）往上推一層。

舉例②：數字方塊（1,18,49,106）

(1＋18＋49)＋3x＝106＋x

3x－x＝106－(1＋18＋49)

2x＝106－68

2x＝38

x＝19

所以（1,18,49,106）＋19＝（20,37,68,125），20＋37＋68＝125，可以用（20,37,68,125）往上推一層。

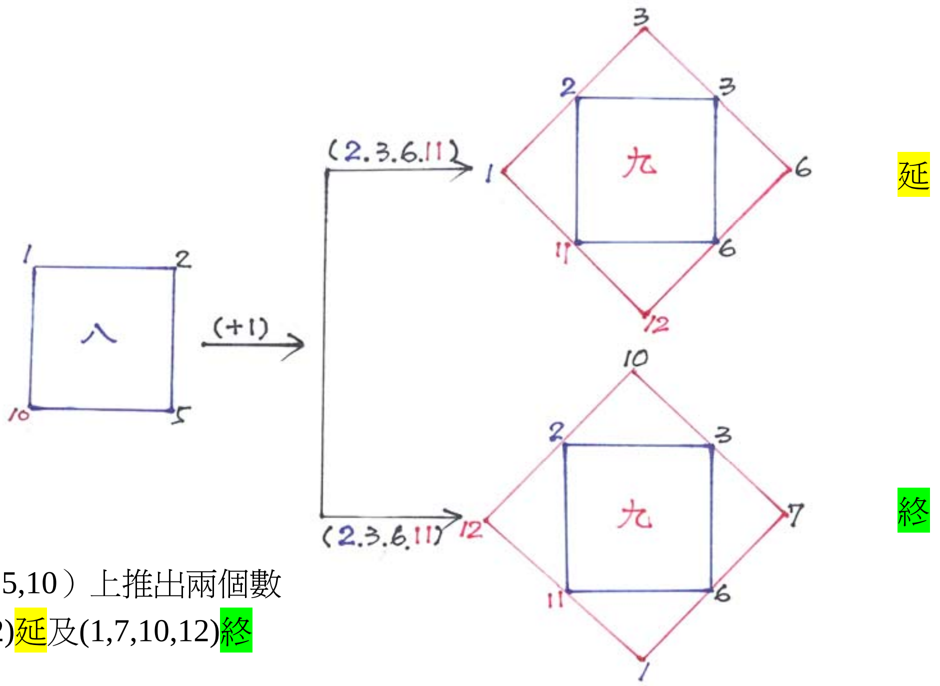
B. 爲什麼３奇１偶或３偶１奇要先×２－１才能繼續上推？

因爲三個奇數加起來永遠不會等於偶數；三個偶數加起來也永遠不等於奇數，但是上推法要符合A＋B＋C＝D才能上推，所以先把它變成四個都是奇數。

舉例③：（1,2,3,4）因爲 A＋B＋C＞D，所以必須減一，成爲（0,1,2,3）可上推成（1,1,2,4）和（1,3,4,4）

（5）應用

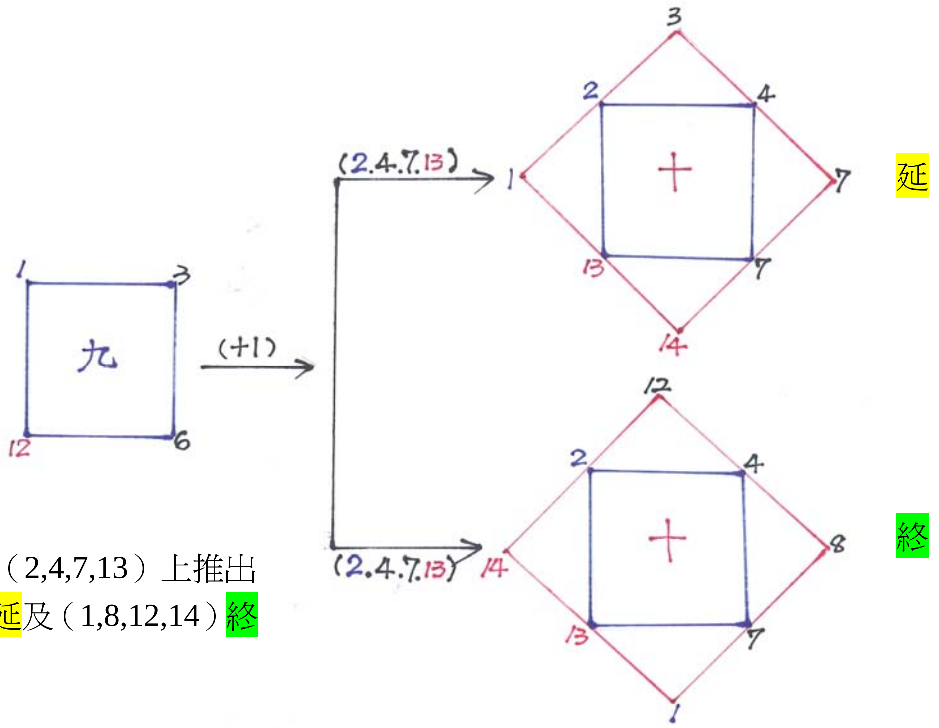
A. (1,2,5,10)因爲 A＋B＋C＜D 所以必須加到 A＋B＋C＝D 的時候，全部加 1 時→（2,3,6,11）就成爲 A＋B＋C＝D 所以可以繼續往上推，上推結果顯示：(2,3,6,11)→(1,3,6,12)延和(1,7,10,12)終，（如下圖六）



圖六：由（1,2,5,10）上推出兩個數字方塊(1,3,6,12)延及(1,7,10,12)終

B. （1,3,6,12）因爲 A＋B＋C＜ D 所以必須加到 A＋B＋C＝D 的時候，全部加 1 時→（ 2,4,7,13）就成爲 A＋B＋C＝D 所以可以繼續往上推，上推結果顯示：(2,4,7,13)→(1,3,7,14)延及(1,8,12,14)終（如下圖七）

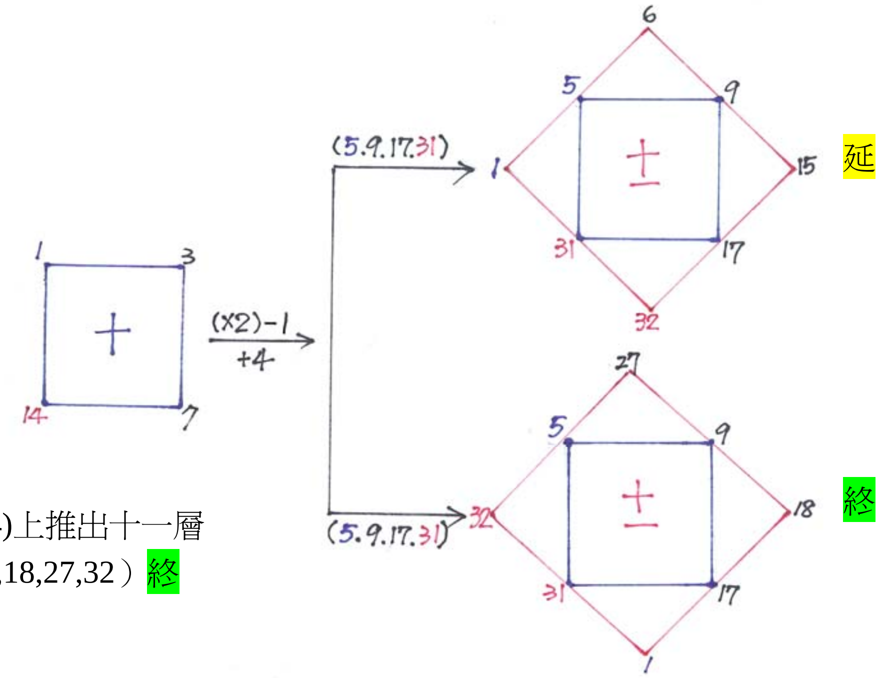
因爲已經三奇一偶所以必須×2→（2,6,14,28）



圖七：由九層的（2,4,7,13）上推出十層的(1,3,7,14)延及（1,8,12,14）終

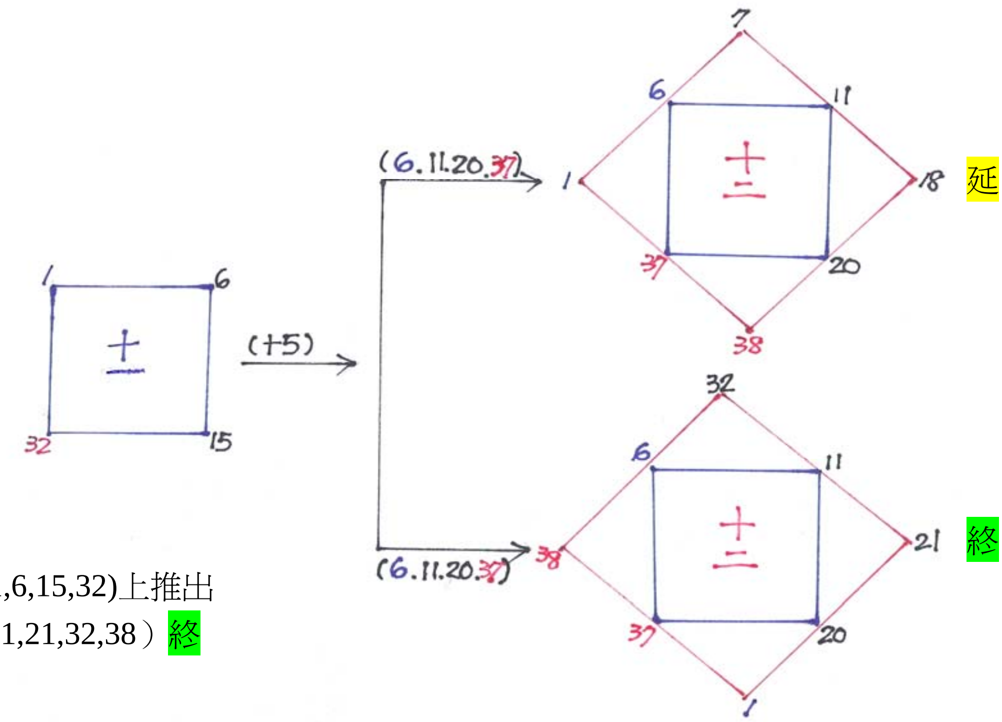
C. （2,6,14,28）所以將全部-1→（1,5,13,27）因爲 A＋B＋C＜D 所以

必須加到 A＋B＋C＝D 的時候，全部加 4 時→（5,9,17,31）就成爲 A＋B＋C＝D 所以可以繼續往上推，上推結果顯示：(5,9,17,31）→（1,6,15,32）延及（1,18,27,32）終（如下圖八）



圖八：由十層的(1,3,7,14)上推出十一層的（1,6,15,32）延及（1,18,27,32）終

D.　（1,6,15,32），因爲 A＋B＋C＜D 所以必須加到 A＋B＋C＝D 的時候，全部加 5 時→（6,11,20,37）就成爲 A＋B＋C＝D 所以可以繼續往上推。上推結果顯示：(6,11,20,37）→（1,7,18,38）延及（1,21,32,38）終（如圖九）

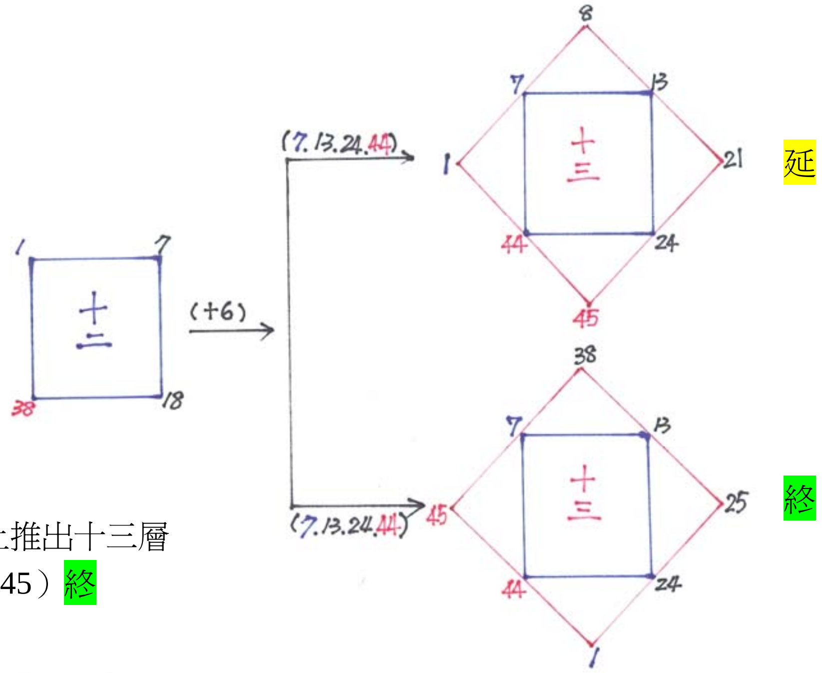


圖九：由十一層的(1,6,15,32)上推出（1,7,18,38）延及（1,21,32,38）終

E.　（1,7,18,38）因爲 A＋B＋C＜D 所以必須加到 A＋B＋C＝D 的時候，全部加 6 時→（7,13,24,44）就成爲 A＋B＋C＝D 所以可以繼

續往上推。

上推結果顯示：（7,13,24,44）→（1,8,21,45）延及（1,25,38,45）終



圖十：由十二層的(1,7,18,38)上推出十三層的（1,8,21,45）延及（1,25,38,45）終

（6）（1,8,21,45）因為 A＋B＋C＜D 且 3 個奇數 1 個偶數，所以必須乘以 2，成為（2,16,42,90），因為已經超過 50 所以不考慮

（7）我們找到（1,8,21,45）及（1,25,38,45）為 1～50 的最佳解（十三層）。

（8）1~45 中只能出現兩個最佳解的證明：

我們的研究資料顯示，每一次×２過程中，確定可以上推四層。

約上推四層

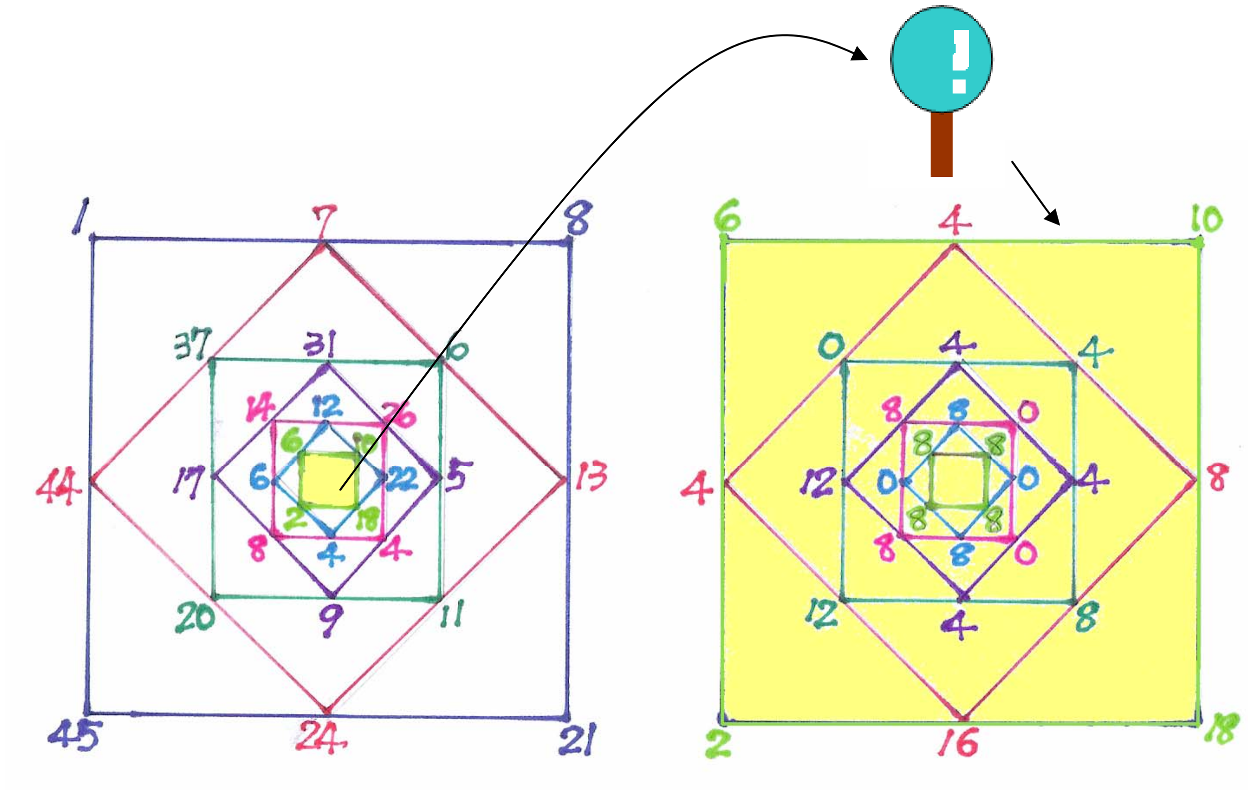
（1,1,1,1）×2 ⟶（2,2,2,2） ⟶ （4,4,4,4）⟶（8,8,8,8）

三次的×２後是４×３＝12 層，因此十三層應該是極限。

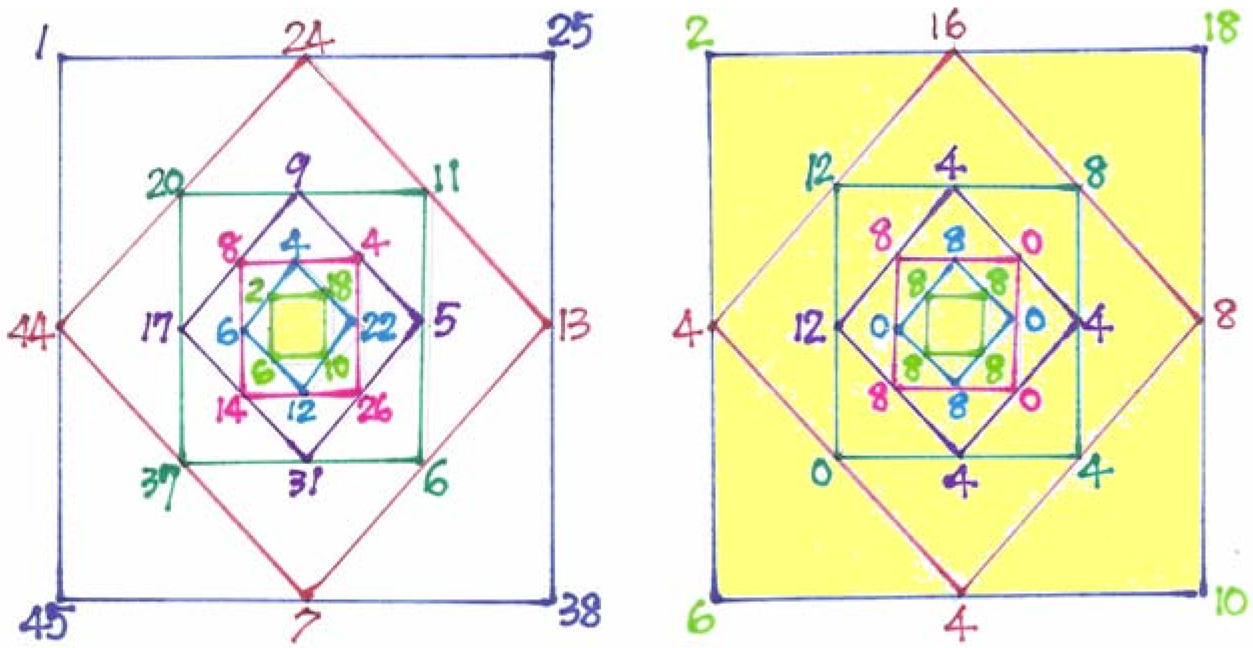
（9）因為用1×2^n，（n＝１～５）或3^n（n＝１～３），這些數字都小於 50，如果底的數字越大，上推數就會越少， (1,1,1,1)可推出十三層。但是比它大的數就不行了。

（１０） 在我們進行上推法中，如果碰到 A＋B＋C＜D 的情況，根據流程圖方塊中所有的數字都要×2－1，因此進入流程圖的數字拿來各往上推中被放大兩倍，進入流程圖Ｎ次就放大2^n倍，因此2^6＝64 已經大於 50，也就是說只進入流程圖五次，（2^5＝32）＜50，所以以（1,1,1,1）為開始是最好的。如果用（3,3,3,3）開始只能進入流程圖３次，因為越大的數字進入流程圖的次數越少，能夠產生的數字方塊層數就越少，所以用（1,1,1,1）為開始是最好的。

1~50 之間兩個十三層的最佳解答(如下圖十一及圖十二)



圖十一：(1,8,21,45) 延十三層數字方塊



7 層加 6 層等於 13 層

圖十二：(1,25,38,45) 終十三層數字方塊

8. 研究結果：

(1) 我們找到的特定區間內，數字方塊能做到的最多層如下表一

表一	
範圍	最高層
1~10	8 層
1~20	10 層
1~30	10 層
1~40	12 層
1~50	13 層

（2）特定區間內解答最高層數總表如下表二

表二		
區間	母群數字方塊	子群數字方塊
1~10	(1,2,5,10)延、(1,6,9,10)終	
1~20	(1,3,7,14)延	(2,4,8,15)、(3,5,9,16)、(4,6,10,17)、(5,7,11,18)、(6,8,12,19)、(7,9,13,20)
	(1,8,12,14)終	(2,9,13,15)、(3,10,14,16)、(4,11,15,17)、(5,12,16,18)、(6,13,17,19)、(7,14,18,20)
	(1,4,10,20)延	
	(1,11,17,20)終	
1~40	(1,7,18,38)延	(2,8,19,39)、(3,9,20,40)
	(1,21,32,38)終	(2,22,33,39)、(3,23,34,40)
1~50	(1,8,21,45)延	(2,9,22,46)、(3,10,23,47)、(4,11,24,48)、(5,12,25,49)、(6,13,26,50)
	(1,25,38,45)終	(2,26,39,46)、(3,27,40,47)、(4,28,41,48)、(5,29,42,49)、(6,30,43,50)

（3）事實上的最高層區間斷點不應該是以 10 爲單位的整數，我們研究結果認爲，區間斷點應改爲如表三，可以發現解答就簡化很多。

表三			
最高層數	區間	數字方塊解答	
1	1	（1,1,1,1）	
2	1~2	（1,2,1,2）	
3	1~2	（1,1,2,2,）	
4	1~2	（1,1,1,2）	
5	1~4	（1,2,3,4）	
6	1~4	（1,1,2,4）	（1,3,4,4）
7	1~5	（1,2,3,5）	（1,3,4,5）
8	1~10	（1,2,5,10）	（1,6,9,10）
9	1~12	（1,3,6,12）	（1,7,10,12）
1 0	1~14	（1,3,7,14）	（1,8,12,14）
1 1	1~32	（1,6,15,32）	（1,18,27,32）
1 2	1~38	（1,7,18,38）	（1,21,32,38）
1 3	1~45	（1,8,21,45）	（1,25,38,45）

（三）由費式數列看數字方塊

1. 看到另一位同學可以做很多層，就也想要做更多層，所以我就想要用其他方法看能不能找到較多層的解答。
2. 突然想到以前有看過一本書，上面有講到費式數列，（註１）我認爲數字方塊與和差有關，就想到了同樣與和差有關的費式數列（0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,377,610,987……），數列的規則是第一項加第二項等於第三項，會有無限多個數，987 是最接近 1000 的數。我把數列每四個一組，一直到 987，總共有 14 組，我發現只有第一、二、四組不是七層，其它 11 組都是七層。
3. 這時候另一位同學已經研究到十幾層了（見上推法），我就想要再找出好一點的方法，我就想到可以把費式數列改變，做出新的數列，於是我列出了四種數列：

   （1）0,1,1,2,4,7,13,24,44,81,149,274,504,927……（0,1,1 開始）

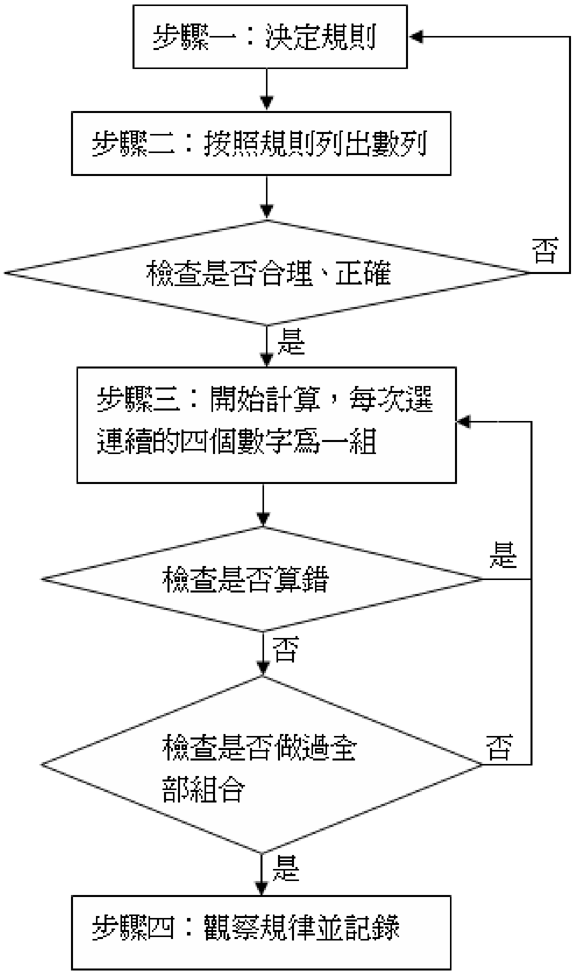
   （2）0,1,2,3,4,11,20,37,68,125,230,423,778……（0,1,2 開始）

   （3）0,1,3,4,8,15,27,50,92,169,311,572,……（0,1,3 開始）

   （4）0,1,4,5,10,19,34,63,116,213,392,721……（0,1,4 開始）

   第一種是由 0,1,1 先開頭，第四數等於前三數之和，共有 11 組。
   第二種是由 0,1,2,先開頭，第四數等於前三數之和，共有 10 組。
   第三種是由 0,1,3,先開頭，第四數等於前三數之和，共有 9 組。
   第四種是由 0,1,4,先開頭，第四數等於前三數之和，共有 9 組。
4. 這四組數列的層數也有一些規律性，第一種數列的層數是 3,6,6,9,9,12,12,15,15,18,18，第二種數列的層數是 5,5,8,8,11,11,14,14,17,17，第一種數列比第二種數列的層數多一層。所以我又再找出以 0,1,3 開頭和以 0,1,4 開頭的，發現層數都和第二種新數列一樣，所以層數最多的是第一種新數列。這些數列都符合 A＋B＋C＝D（見第一種想法），所以可以再往上推一層，做出新的兩組數列，我還發現第二種數列往上推一層的其中一組的最簡數列，是第一種數列的最簡數列（A＞大於 1 時，可以把 A 的值寫成 1，A、B、C 的值減去 A 和 1 之差，做出最簡數列），表示兩種數列有關係，第一種數列有一組 12 層的數列上推一層爲（1,8,21,45）和(1,25,38,45)，同時也驗證了另一位同學的 13 層爲 1～50 的數字最小解答。

（註１）費式數列是費布納西數列的簡稱，是費布納西發明的。費布納西在想一個問題：如果有一對兔子，每個月生出一對新兔子，新兔子一個月後有繁殖能力，如果這些兔子都沒死，那麼一年後會有幾隻兔子？費布納西在做這個問題時發現了費布納西數列。而我在亂試的過程中嘗試費式數列，並加以改變，發現了一些規律。



流程圖二：費式數列改變流程

6. 研究結果：費式數列做出的數字系統如下表四

表四.1（費式數列）

原始數列	最簡數列	數字方塊層數
（0,1,1,2）	（0,1,1,2）	3
（1,1,2,3）	（1,1,2,3）	4
（1,2,3,5）	（1,2,3,5）	7
（2,3,5,8）	（1,2,4,7）	6
（3,5,8,13）	（1,3,6,11）	7
（5,8,13,21）	（1,4,9,17）	7
（8,13,21,34）	（1,6,14,27）	7
（13,21,34,55）	（1,9,22,43）	7
（21,34,55,89）	（1,14,35,69）	7
（34,55,89,144）	（1,22,56,111）	7
（55,89,144,233）	（1,35,90,179）	7
（89,144,233,377）	（1,56,145,289）	7
（144,233,377,610）	（1,90,234,467）	7
（233,377,610,987）	（1,145,378,755）	7

表四.2（新數列一）				
原始數列	最簡數列	數字方塊層數	往上推一層	另一組數列
（0,1,1,2）	（0,1,1,2）	3	（1,2,3,1）	（1,2,3,3）
（1,1,2,4）	（1,1,2,4）	6	（1,2,3,5）	（1,3,4,5）
（1,2,4,7）	（1,2,4,7）	6	（1,2,4,8）	（1,5,7,8）
（2,4,7,13）	（1,3,6,12）	9	（1,3,7,14）	（1,8,12,14）
（4,7,13,24）	（1,4,10,21）	9	（1,5,12,25）	（1,14,21,45）
（7,13,24,44）	（1,7,18,38）	12	（1,8,21,45）	（1,25,38,45）
（13,24,44,81）	（1,12,32,69）	12	（1,14,38,82）	（1,45,69,82）
（24,44,81,149）	（1,21,58,126）	15	（1,25,69,150）	（1,82,126,150）
（44,81,149,274）	（1,38,106,231）	15	（1,45,126,275）	（1,150,231,275）
（81,149,274,504）	（1,69,194,424）	18	（1,82,231,505）	（1,275,424,505）
（149,274,504,927）	（1,126,356,779）	18	（1,150,424,928）	（1,505,779,928）

表四.3（新數列二）				
原始數列	最簡數列	數字方塊層數	往上推一層	另一組數列
（0,1,2,3）	（0,1,2,3）	5	（1,1,2,4）	（1,3,4,4）
（1,2,3,6）	（1,2,3,6）	5	（1,2,4,7）	（1,4,6,7）
（2,3,6,11）	（1,2,5,10）	8	（1,3,6,12）	（1,7,10,12）
（3,6,11,20）	（1,4,9,18）	8	（1,4,10,21）	（1,12,18,21）
（6,11,37,68）	（1,6,32,63）	11	（1,7,18,38）	（1,21,32,38）
（11,20,37,68）	（1,10,27,58）	11	（1,12,32,69）	（1,38,58,69）
（20,37,68,125）	（1,18,49,106）	14	（1,21,58,126）	（1,69,106,126）
（37,68,125,230）	（1,32,89,194）	14	（1,38,106,231）	（1,126,194,231）
（68,125,230,423）	（1,58,163,356）	17	（1,69,194,424）	（1,231,356,424）
（125,230,423,778）	（1,106,299,654）	17	（1,126,356,779）	（1,424,654,779）

表四.4（新數列三）			
原始數列	數字方塊層數	往上推一層	另一組數列
（0,1,3,4）	5	（1,2,5,1）	（1,4,5,5）
（1,3,4,8）	5	（1,2,5,9）	（1,5,8,9）
（3,4,8,15）	8	（1,4,8,16）	（1,9,13,16）
（4,8,14,27）	8	（1,5,13,28）	（1,16,24,28）
（8,15,27,50）	11	（1,28,43,51）	（1,9,24,51）
（15,27,50,92）	11	（1,51,78,93）	（1,16,43,93）
（27,50,92,169）	14	（1,28,78,170）	（1,93,143,170）
（50,92,169,311）	14	（1,51,143,312）	（1,170,262,312）
（92,169,311,572）	17	（1,312,481,573）	（1,93,262,573）

表四.5（新數列四）			
原始數列	數字方塊層數	往上推一層	另一組數列
（0,1,4,5）	5	（1,1,2,6）	（1,5,6,6）
（1,4,5,10）	5	（1,2,6,11）	（1,6,10,11）
（4,5,10,19）	8	（1,5,10,20）	（1,11,16,20）
（5,10,19,34）	8	（1,6,16,35）	（1,20,30,35）
（10,19,34,63）	11	（1,11,30,64）	（1,35,54,64）
（19,34,63,116）	11	（1,20,54,117）	（1,64,98,117）
（34,63,116,213）	14	（1,35,98,213）	（1,117,180,214）
（63,116,213,392）	14	（1,64,180,393）	（1,214,330,393）
（116,213,392,721）	17	（1,117,330,722）	（1,393,606,722）

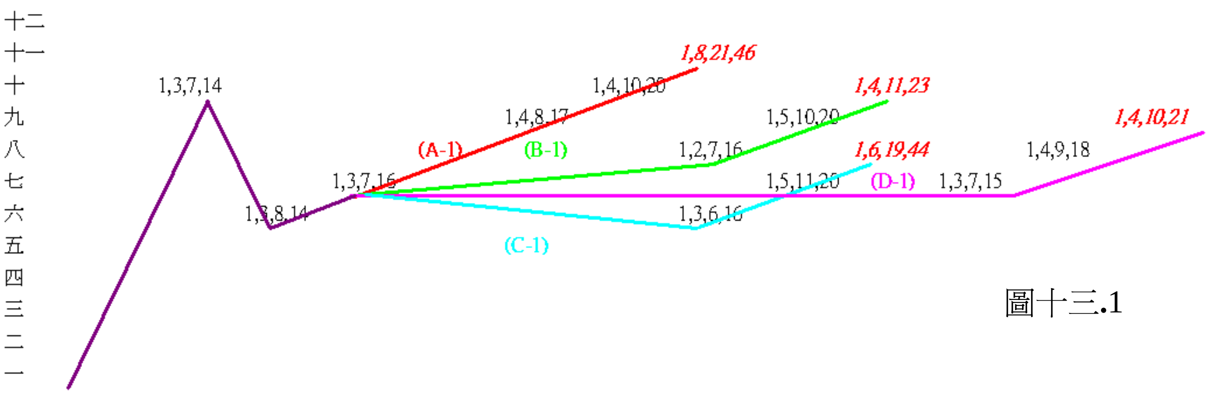
（四）數字方塊中的波峰現象

1. 在還不知道×２層數不變時，遇到了（1,3,7,14）無法往上推的瓶頸，所以，在想要找到 1~30 間高層過程中，又恢復原本的亂試階段。而在某一次，媽媽找出了一個數字方塊（1,6,13,28），經過驗算後發現是九層，而我們使用這個九層往上推，推到了十一層時，也就是（1,7,18,39）。推到（1,7,18,39）時，無法往上推，又遇到了原來的瓶頸，所以我們想到使用各個數加減一的方式，上推結果如下表五：

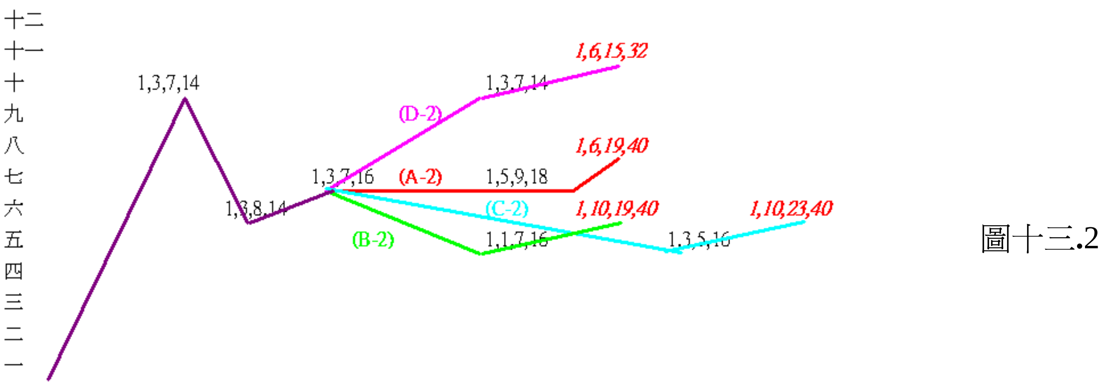
表五		
母體	加減一的數字	層數
（1,7,18,39）	（1,6,17,38）	8
	（1,8,18,39）	9
	（1,7,19,39）	9
	（1,7,18,40）	9
	（1,8,19,40）	9
	（1,6,18,39）	9
	（1,7,17,39）	7
	（1,7,18,38）	１２

2. 因為我們覺得這個方法不實用，就停頓下來，也在這個時候發現×２層數不變的想法。
3. 但是在我們給同學亂試的時候，有一位同學無意中發現另外一個 1~20 的十層，不在我們的解答中，經過多次的推算之後，我們發現這個數字可以掉入我們的波峰系統中，因此又開始發現波峰問題的重要性。我們可能可以應用波峰方法來找出更多的最佳層數解。
4. 波峰有什麼用？應用波峰現象，我們在 1~20 中找到兩個解答(1,4,10,20)延及（1,11,17,20） 終，同時也証明了 1~50 沒有其他組的解答。
5. 接著我們進行最小值的波峰探討。
6. 波峰現象目前還不夠完整，我們繼續在研究中。
7. 研究結果：波峰現象圖：圖十三

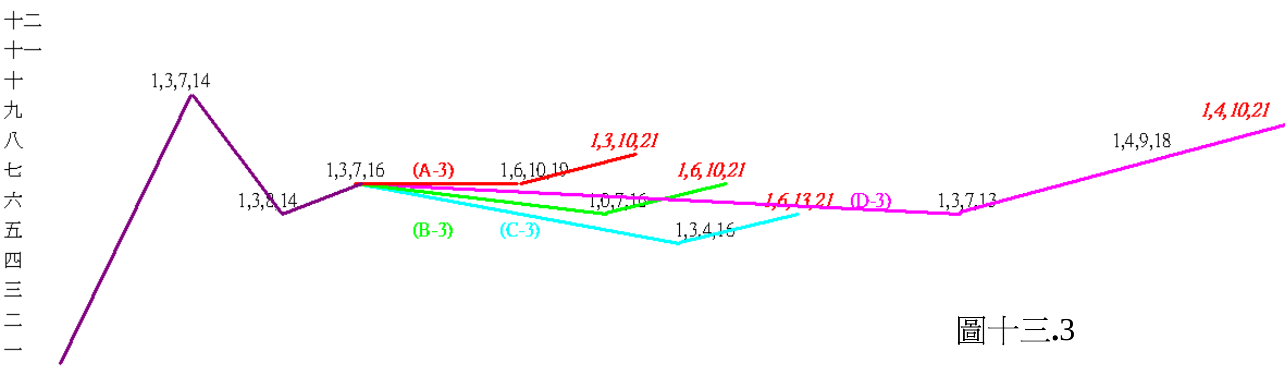
（1） 舉例：以(1,3,7,14)的 A、B、C、D 各＋1－1 及＋2－2 會有 16 組波峰圖(詳細資料請看現場說明)現在以(1,3,7,14)之 (1,3,7,16)、(1,3,8,17)、(1,4,10,20)三組為例



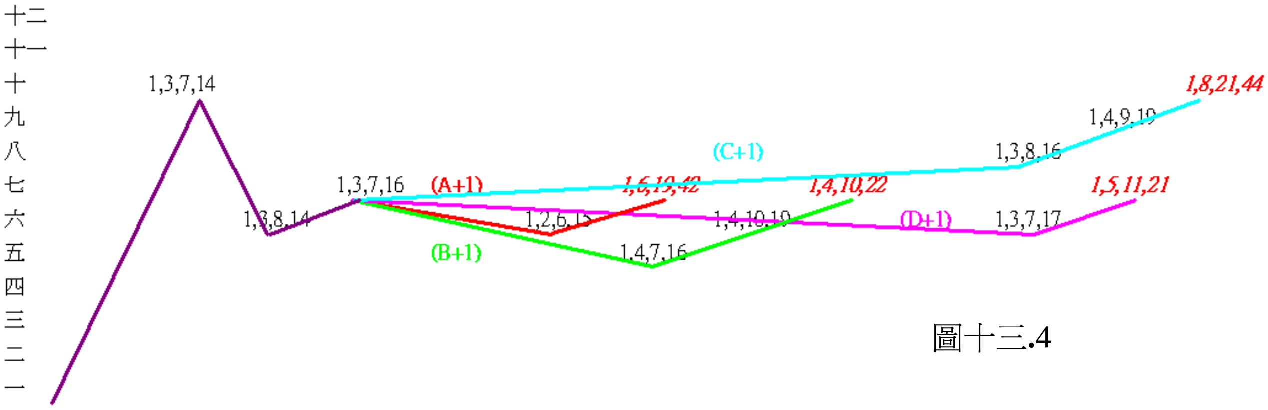
（1,3,7,14）之（1,3,7,16）-1 波峰



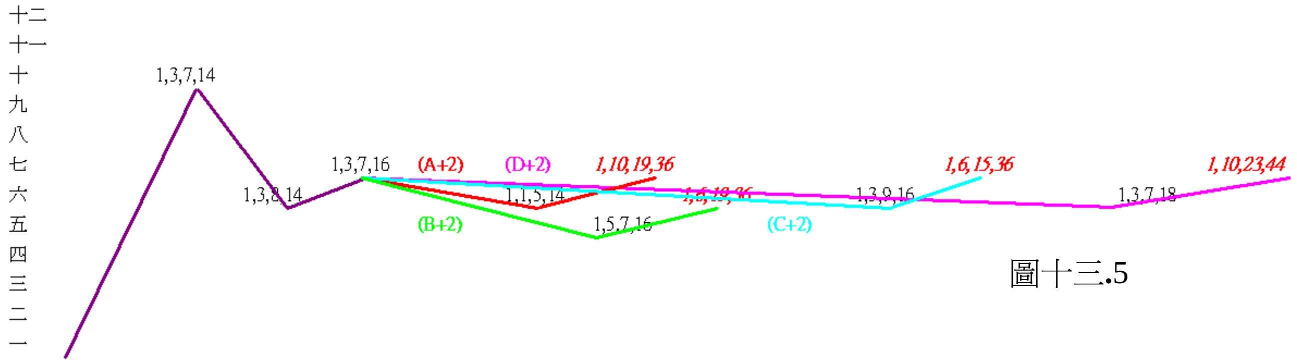
（1,3,7,14）之（1,3,7,16）-2 波峰



（1,3,7,14）之（1,3,7,16）-3 波峰

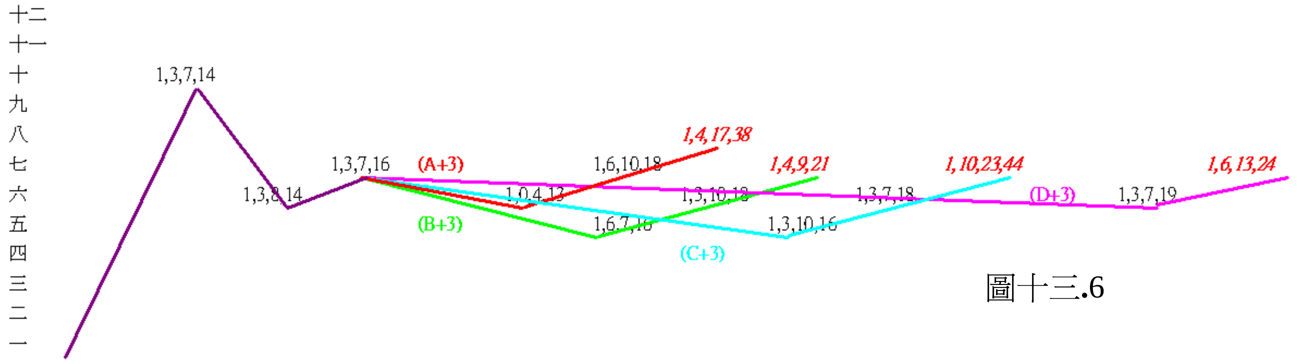


（1,3,7,14）之（1,3,7,16）+1 波峰



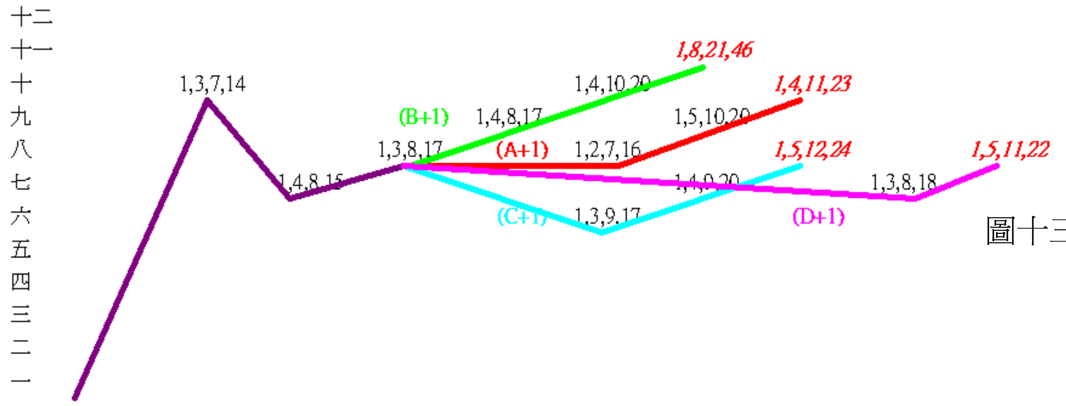
圖十三.5

（1,3,7,14）之（1,3,7,16）+2 波峰



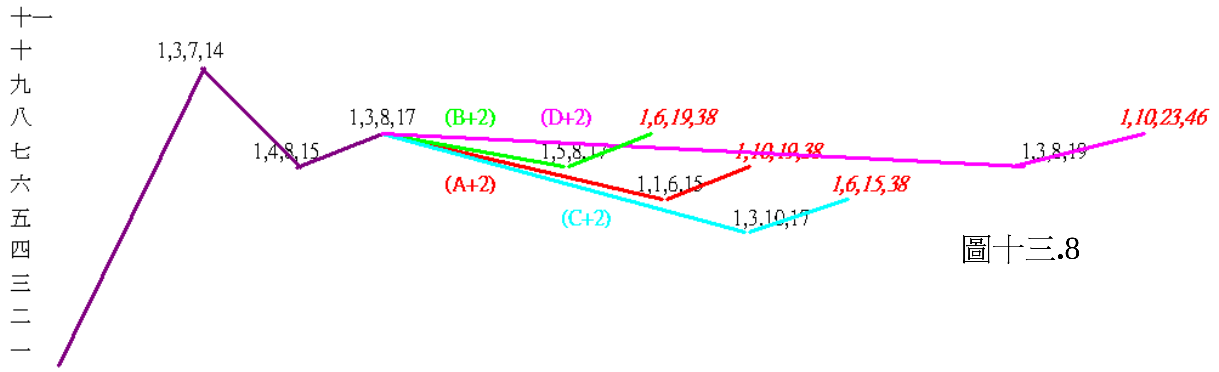
圖十三.6

（1,3,7,14）之（1,3,7,16）+3 波峰



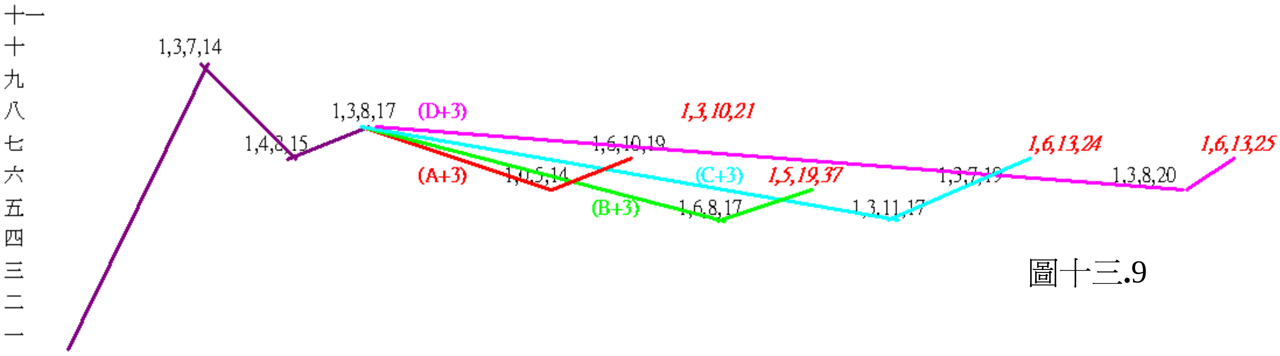
圖十三.7

（1,3,7,14）之（1,3,8,17）+1 波峰



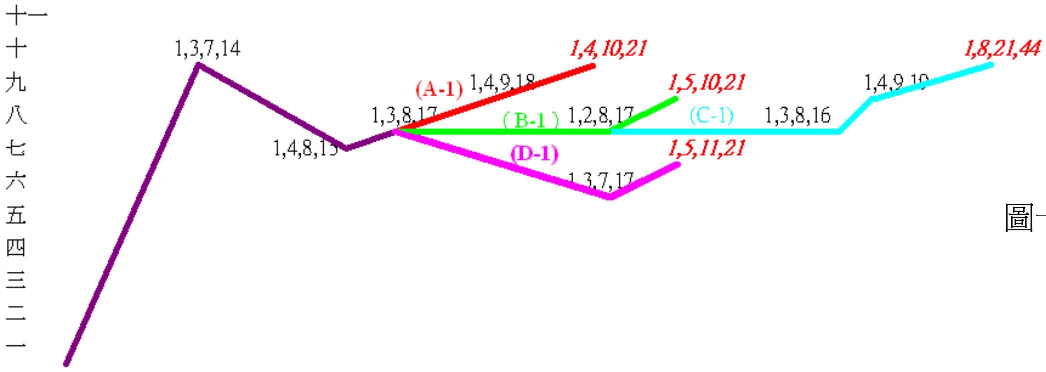
圖十三.8

（1,3,7,14）之（1,3,8,17）+2 波峰



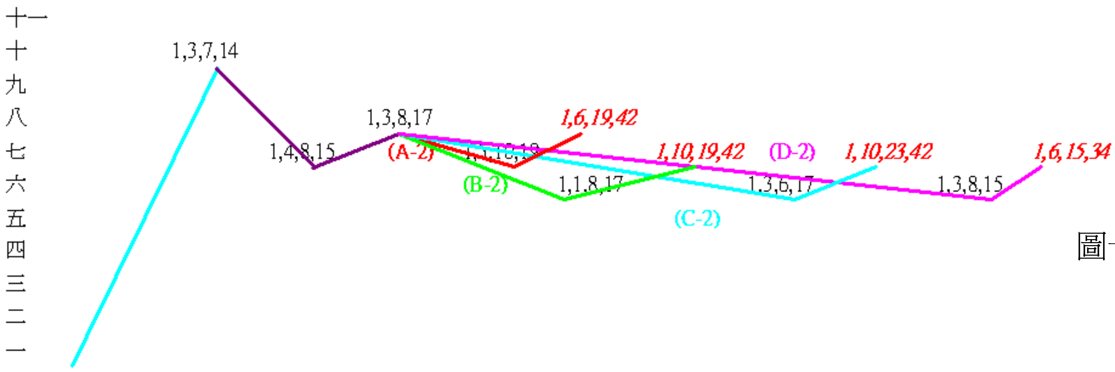
圖十三.9

（1,3,7,14）之（1,3,8,17）+3 波峰



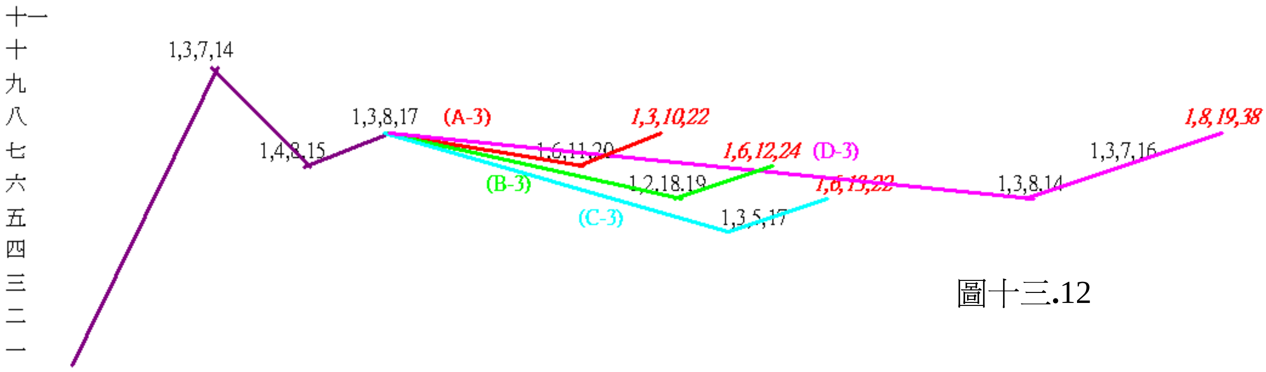
圖十三.10

（1,3,7,14）之（1,3,8,17）－1 波峰



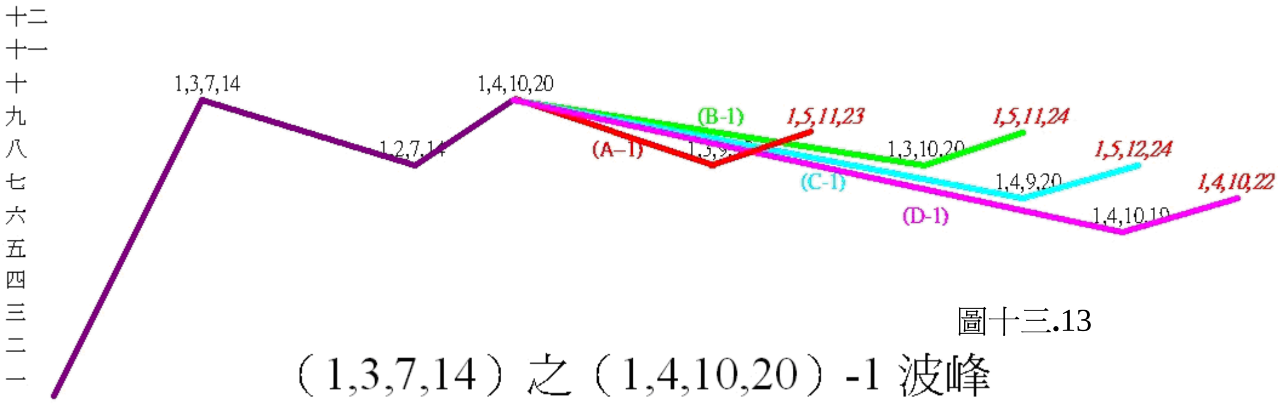
圖十三.11

（1,3,7,14）之（1,3,8,17）-2 波峰



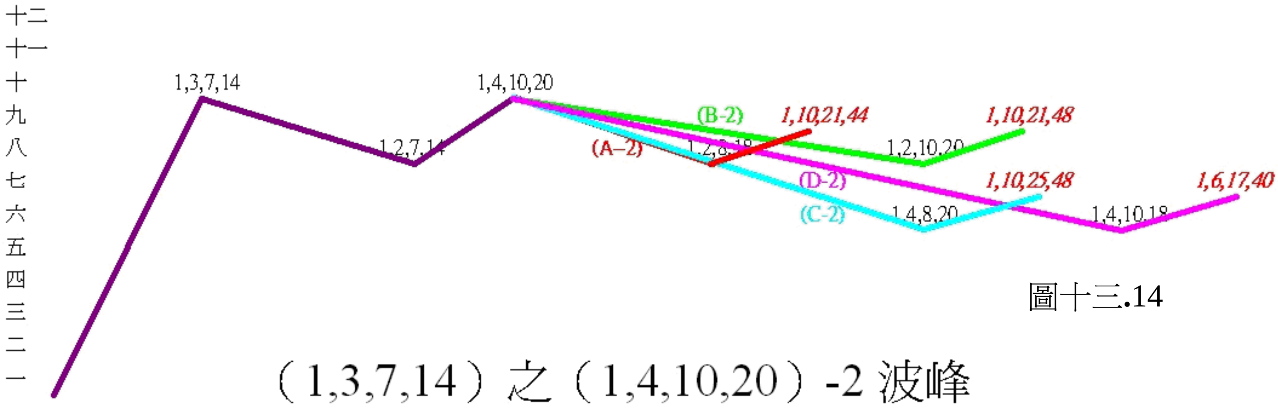
圖十三.12

（1,3,7,14）之（1,3,8,17）-3 波峰



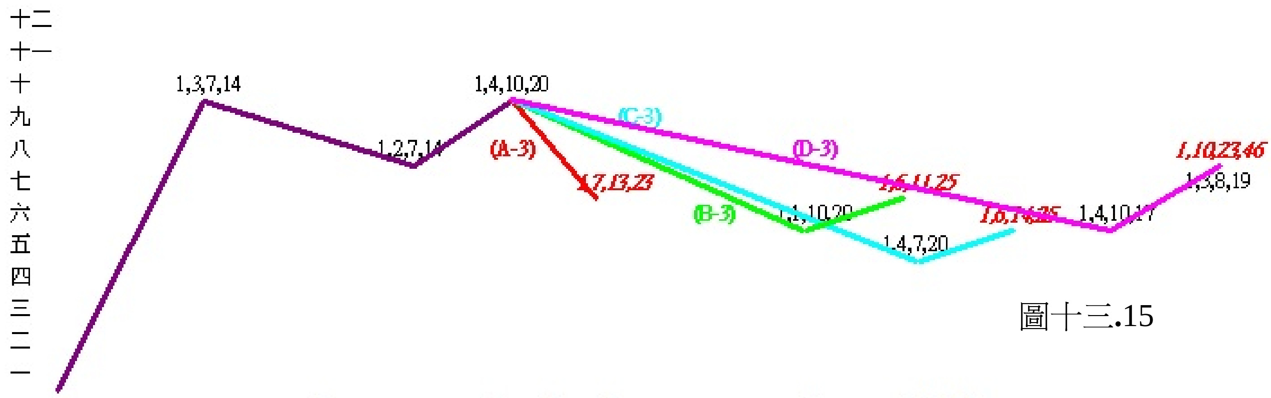
圖十三.13

（1,3,7,14）之（1,4,10,20）-1 波峰



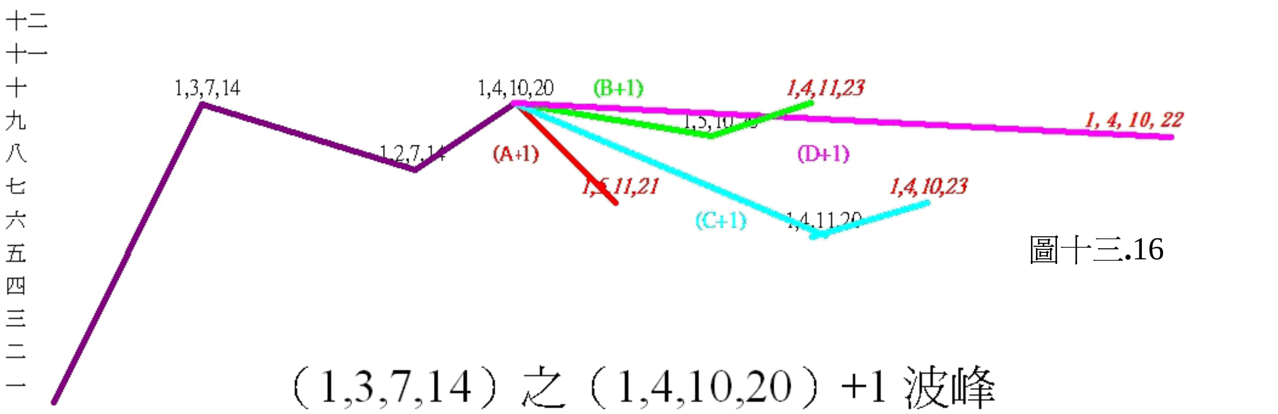
圖十三.14

（1,3,7,14）之（1,4,10,20）-2 波峰



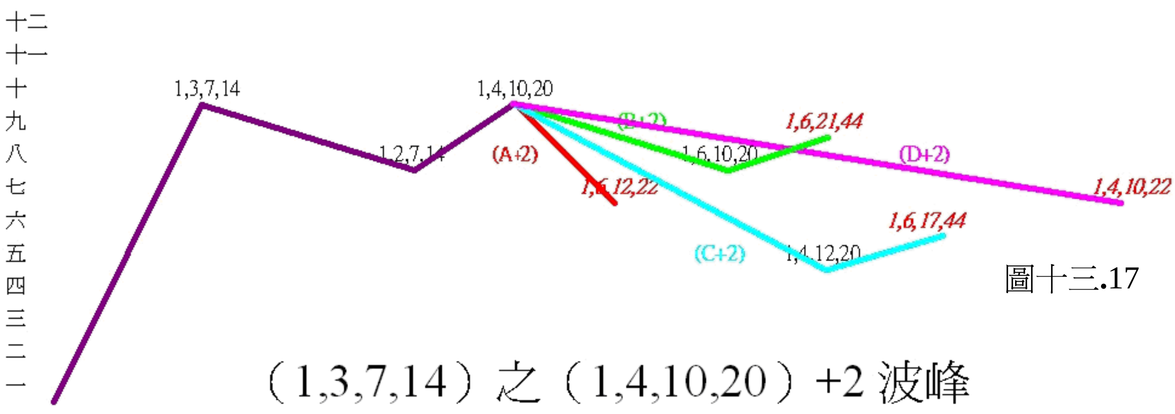
圖十三.15

（1,3,7,14）之（1,4,10,20）-3 波峰



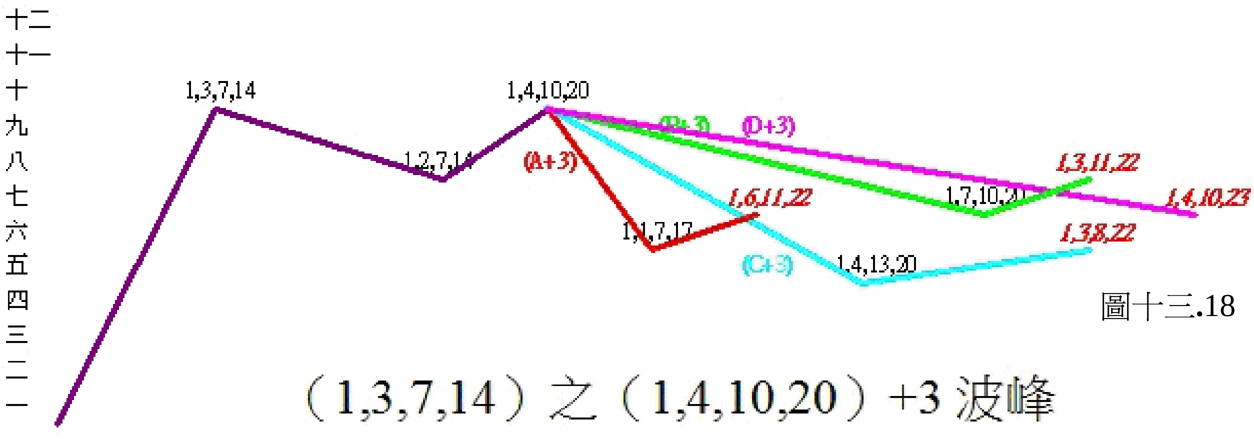
圖十三.16

（1,3,7,14）之（1,4,10,20）+1 波峰



圖十三.17

（1,3,7,14）之（1,4,10,20）+2 波峰



圖十三.18

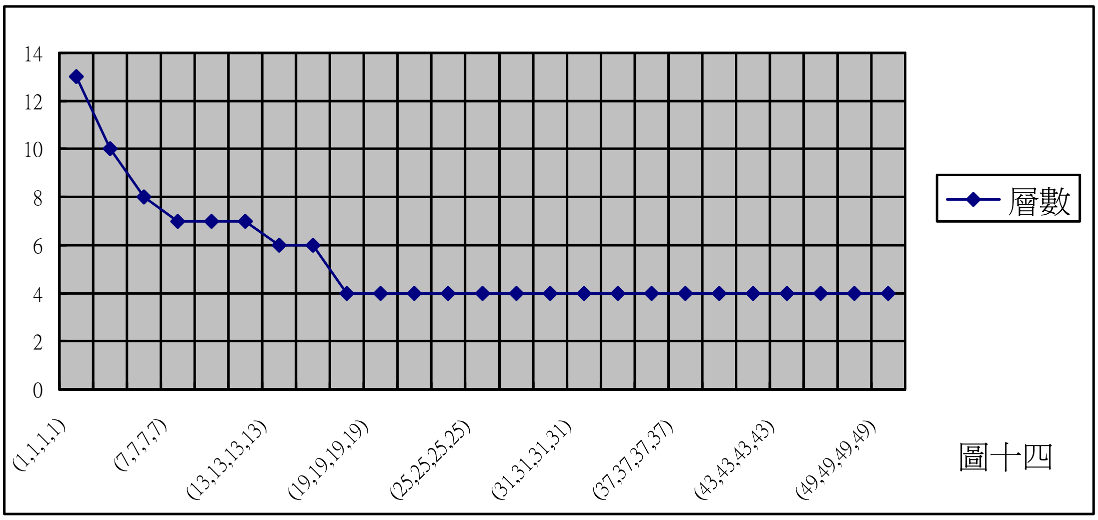
（1,3,7,14）之（1,4,10,20）+3 波峰

（2） 應用波峰現象，我們在 1~20 中找到兩個解答(1,4,10,20)延及(1.11.7.20)終，同時也證明 1~50 沒有其他解答

二、數字方塊能構成「家族系統」嗎？可以用家族系統來加速找出數字方塊的層數嗎？

(一) 在研究過程中，曾經找了一些同學來玩數字方塊，大家用自行隨機出題的方式玩，曾經有多次同學說找到了很高層的答案，但經檢驗後發現是計算錯誤造成的，其實沒有很多層，因此我們在想能不能設計出一個檢驗系統，快速估算數字方塊的層數，因此我們試著探討「數字方塊的家族」。

(二) 開始時我們是從 1~50 的母體們去往上推，在製作此系統時發現只要有三個數加起來等於第四個數字之外，當前面兩個數字相加等於其餘兩數時，也可以往上推，所以此系統非常的龐大。大概的形式如下圖十四：



圖十四

所以後來我們取最中間的值（7,7,7,7）來製作完整系統，雖然花了 1 整天的時間只做了不到 1%，因爲覺得實在是太難了。

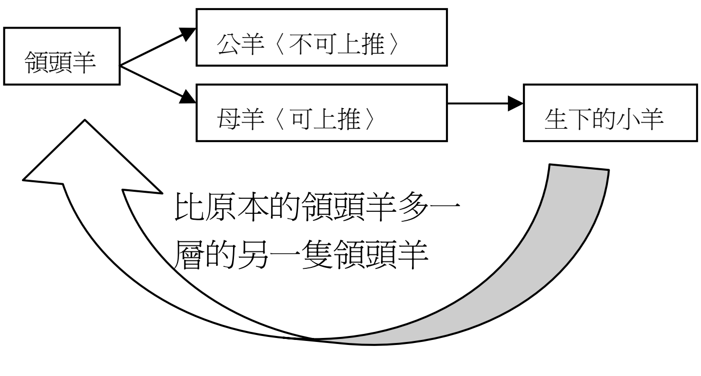
(三) 老師要我們降低範圍到 1~10，剛開始時覺得好簡單，因爲往上推一下子就會超過 10 了所以很少，發現 10 個母體中只做出 4 個而其他 6 個卻做不完，後來我們發現共有 10x10x10x10=10000，所以有 10000 個數字方塊的題目，所以還是解不完。

(四) 我覺得不能再用以前 1~50 的老方法了，所以我們想到說從（1,1,1,1）往上推，而因此想到了領頭羊的方法，所謂的領頭羊就是比母體地位還要高的羊，但是領頭羊還是一隻母羊，以（1,3,5,9）爲例雖然他是一隻母羊但是還有比他地位更高的羊（1,2,3,5），因爲（1,2,3,5）x2-1 是（1,3,5,9）所以領頭羊就是這一隻（1,2,3,5），透過此想法覺得只要從（1,1,1,1）上推在每一隻羊上做 x2、x3 就可以將（1,1,1,1）~（7,7,7,7）全部找到，所以我們發現了 23 隻領頭羊。如下表六

表六

數字方塊層數	領頭羊	數字方塊層數	領頭羊
一層	（1,1,1,1）	六層	（0,1,4,7）
二層	（1,0,1,0）		（0,0,1,3）
三層	（0,0,1,1）		（0,2,4,9）
四層	（0,0,1,2）		（0,2,3,3）
	（0,2,2,5）		（0,5,7,9）
	（0,1,1,3）		（0,1,2,8）
	（0,3,4,7）		（0,5,7,8）
	（0,0,0,1）	七層	（0,1,2,4）
	（0,5,8,8）		（0,2,3,4）
	（0,6,9,9）	八層	（0,1,4,9）
五層	（0,1,2,3）		（0,5,8,9）
	（0,0,3,7）		

(五) 找到了這 23 隻領頭羊後，就覺得已經把全部一網打盡，當我信心滿滿時我一直覺得不會有別的了，但是有一個同學，就隨便出了一個數字，卻發現居然掉不進去，因爲當他到 1~10 內時爲（1,4,7,10），而在這 23 個領頭羊裡卻找不到，後來又經過多次的實驗，發現只有少部分的機會會進入此系統，而大部份卻不見了，一定還有漏網之魚，一定有地方沒寫到。後來透過從（1,4,7,10）往下推的結果發現與（1,1,1,2）領頭羊下的下的小羊一樣，因此經過多次的實驗後發現的結果如下圖十五



圖十五

(六) 順時鐘的數字方塊都掉落在此系統內：因此成為一個非常完整的系統了，以下是這 64 個領頭羊：如下表七

表七

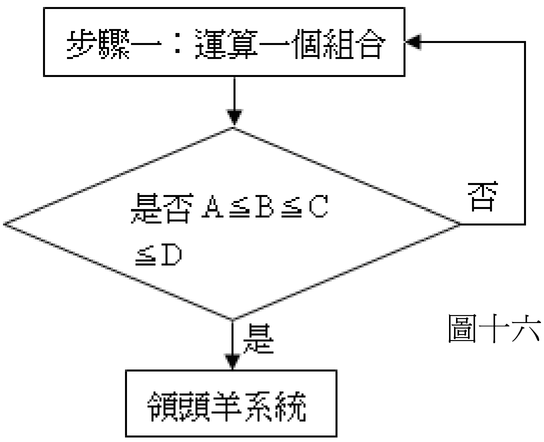
數字方塊層數	領頭羊	數字方塊層數	領頭羊
一	(1,1,1,1)	四	(0,0,4,8)
二	(1,0,1,0)		(0,0,5,10)
	(0,1,2,1)		(0,3,6,6) = (0,1,2,2)
三	(0,0,1,1)		(0,4,8,8)
	(0,2,2,4) = (0,1,1,2)		(0,5,10,10)
	(0,3,3,6)	五	(0,1,2,3)
	(0,4,4,8)		(0,0,3,7)
	(0,5,5,10) = (0,1,1,2)		(0,1,4,7)
四	(0,0,1,2)		(0,2,4,6)
	(0,2,2,5)		(0,3,6,9)
	(0,1,1,3)		(0,1,2,5)
	(0,3,4,7)		(0,2,4,10)
	(0,0,0,1)		(0,3,4,5)
	(0,5,8,8)		(0,6,8,10)
	(0,0,0,3)	六	(0,0,1,3)
	(0,0,0,4)		(0,2,4,9)
	(0,0,0,5)		(0,2,3,3)
	(0,0,0,6)		(0,5,7,9)
	(0,0,0,7)		(0,1,2,8)
	(0,0,0,8)		(0,5,7,8)
	(0,0,0,9)		(0,0,2,6)
	(0,0,0,10)		(0,4,6,6)
	(0,3,3,3)		(0,0,3,9)
	(0,4,4,4)		(0,6,9,9)
	(0,5,5,5)		(0,1,3,6)
	(0,6,6,6)		(0,3,5,6)
	(0,7,7,7)	七	(0,1,2,4)
	(0,8,8,8)		(0,2,3,4)
	(0,9,9,9)		(0,1,3,7)
	(0,10,10,10)		(0,4,6,7)
	(0,0,2,4)	八	(0,1,4,9)
	(0,0,3,6)		(0,5,8,9)

(七) 但是後來發現許多的數字都重複，例如表三塗同色標記部份，為同一群羊，所以後來經過簡化後，成為 32 隻領頭羊，如下表八。

表八

數字方塊層數	領頭羊	數字方塊層數	領頭羊
一	（1,1,1,1）	六	（0,0,1,3）
二	（1,0,1,0）		（0,2,5,9）
	（0,1,2,1）		（0,2,3,3）
三	（0,0,1,1）		（0,5,7,9）
	（0,1,1,2）		（0,1,2,8）
四	（0,0,1,2）		（0,5,7,8）
	（0,2,2,5）		（0,1,3,6）
	（0,1,1,3）		（0,3,5,6）
	（0,3,4,7）	七	（0,1,2,4）
	（0,0,0,1）		（0,2,3,4）
	（0,5,8,8）		（0,1,3,7）
	（0,1,2,2）		（0,4,6,7）
	（0,1,1,1）	八	（0,1,4,9）
五	（0,1,2,3）		（0,5,8,9）
	（0,0,3,7）		
	（0,1,4,7）		
	（0,1,2,5）		
	（0,3,4,5）		

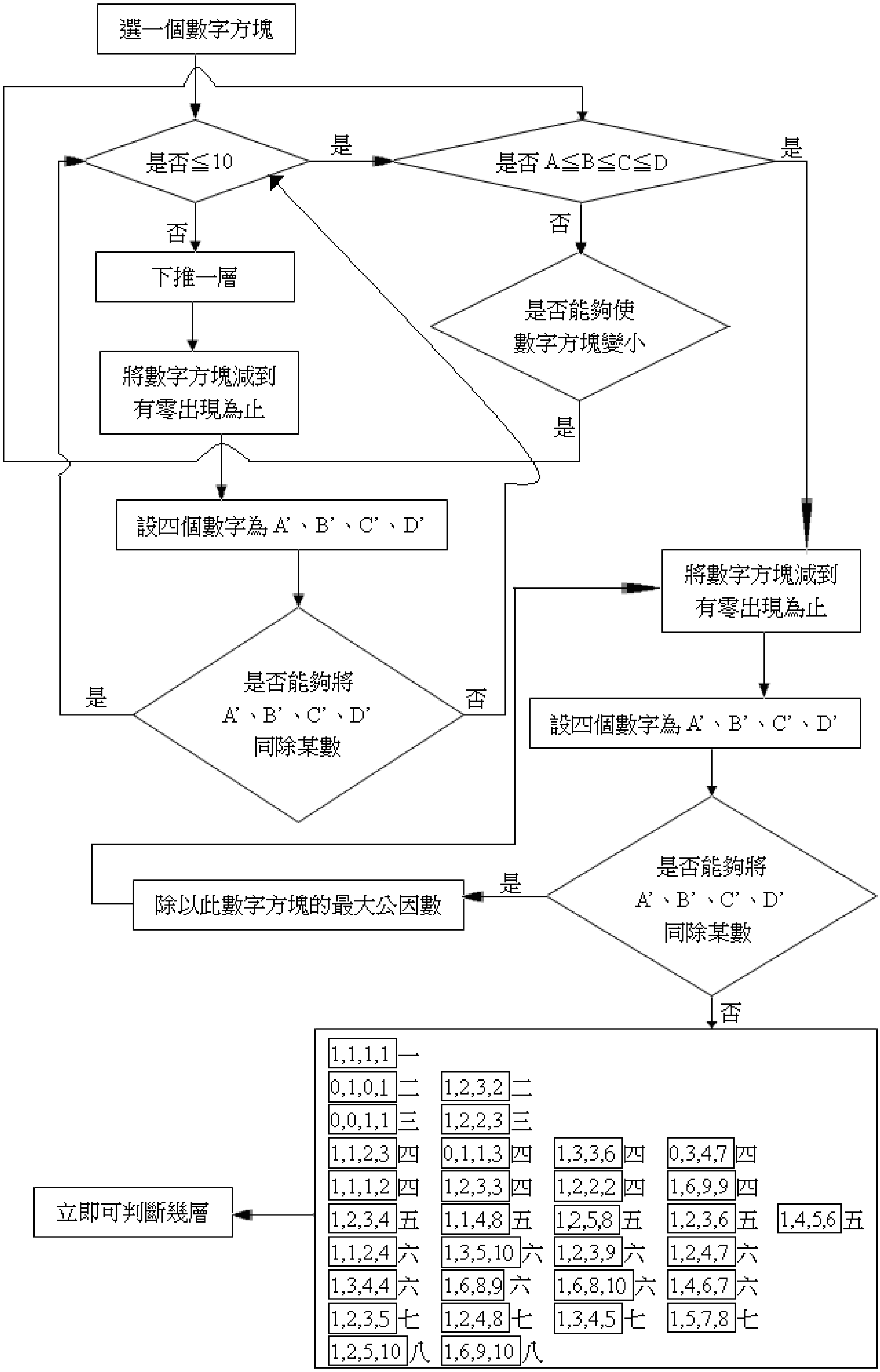
(八) 找領頭羊的步驟如下圖十六



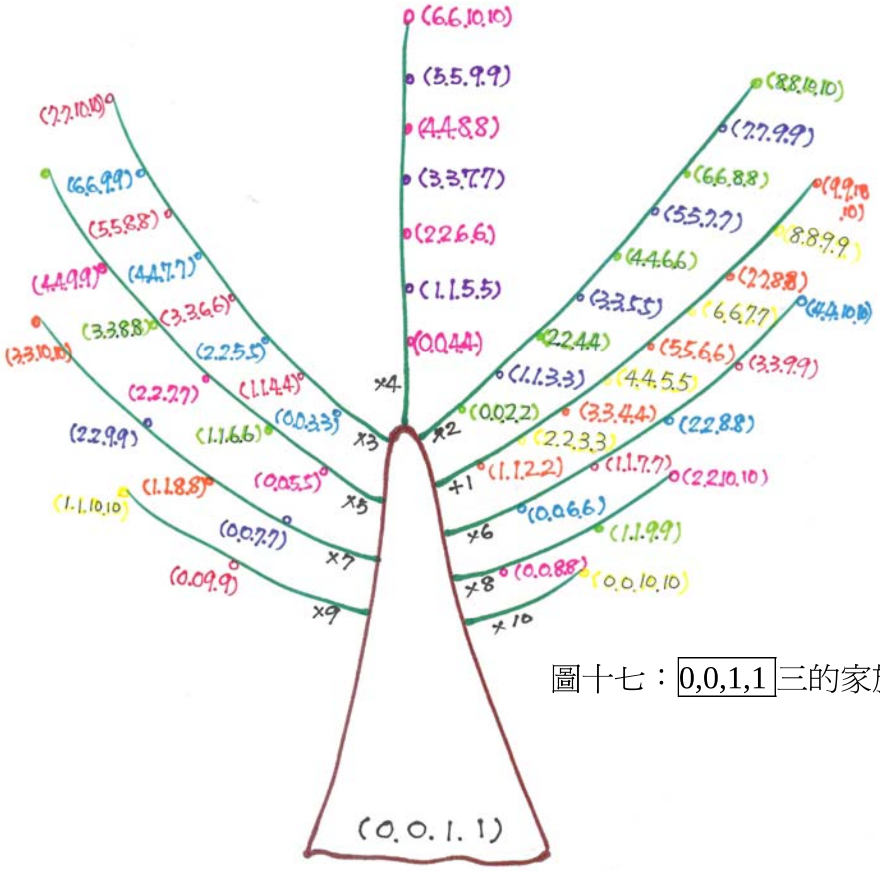
圖十六

(九) 領頭羊系統目前還不完整，尤其是數字排列不是由小到大排列的部份，我們還在繼續研究中。
(十) 由小到大排列的部份，大部分都已經可以由系統中快速找出它的層數。

(十一)研究結果：我們將剛剛所說的家族系統繪製成流程圖三



(十二)上流程圖中 $\boxed{0,0,1,1}$ 三，代表一群三層的數字方塊所生的小孩，舉例 $\boxed{0,0,1,1}$ 共有 56 個數字方塊如下圖十七



圖十七：$\boxed{0,0,1,1}$ 三的家族圖共五十六個

(十三)1~10 由小到大排列的數字方塊共有三十二棵樹，詳細資料請看現場說明資料

伍、討論

(一) 問題：確認特定區間內數字方塊最高層解答，以及最高層解答的個數，是我們最重要的挑戰目標，應用「上推法」及「費式數列」、「波峰波谷」等相對照後，在原先的預定區間內（1~50）之間最高層解答及解答個數應已經得到確認，但是在更大的區間呢？比對資料後，我們發現用上推法和費式數列在 15 層的時候，最佳解答的區間有差異，分別是（1,26,58,131）及(1,21,58,126)，原因何在？

(二) 討論結果：我們認爲有可能是計算的誤差，因此我們決定分別去檢查原來的解答是否有錯。

(三) 發現：用上推法的地方有記錄錯誤造成最佳解答的區間有差異（1,8,49,106）→（1,18,49,106），因此我們重新再用上推法找到正確結果發現到完全一致，因此我們的研究結果可以上推到 1000 以內的十九層的最佳解答。

下表九是由費式數列改變所找到的 1000 以內所有最佳解答

表九

數列	數字方塊層數	原始數列	上推數列		數字方塊層數
新數列一	6	（1,1,2,4）	（1,2,3,5）	（1,3,4,5）	7
	9	（2,4,7,13）	（1,3,7,14）	（1,8,12,14）	10
	12	（7,13,24,44）	（1,8,21,45）	（1,25,38,45）	13
	15	（24,44,81,149）	（1,25,69,150）	（1,82,126,150）	16
	18	（81,149,274,504）	（1,82,231,505）	（1,275,424,505）	19
新數列二	5	（0,1,2,3）	（1,1,2,4）	（1,3,4,4）	6
	8	（2,3,6,11）	（1,3,6,12）	（1,7,10,12）	9
	11	（6,11,20,37）	（1,7,18,38）	（1,21,32,38）	12
	14	（20,37,68,125）	（1,21,58,126）	（1,69,106,126）	15
	17	（68,125,230,423）	（1,69,194,424）	（1,231,356,424）	18

陸、結論

一、在特定區間內，數字方塊能做到最多層數為何？特定區間內最高層的數字方塊有多少個解答？

(一) 以十的倍數為區間單位，最高層數如下表十

表十

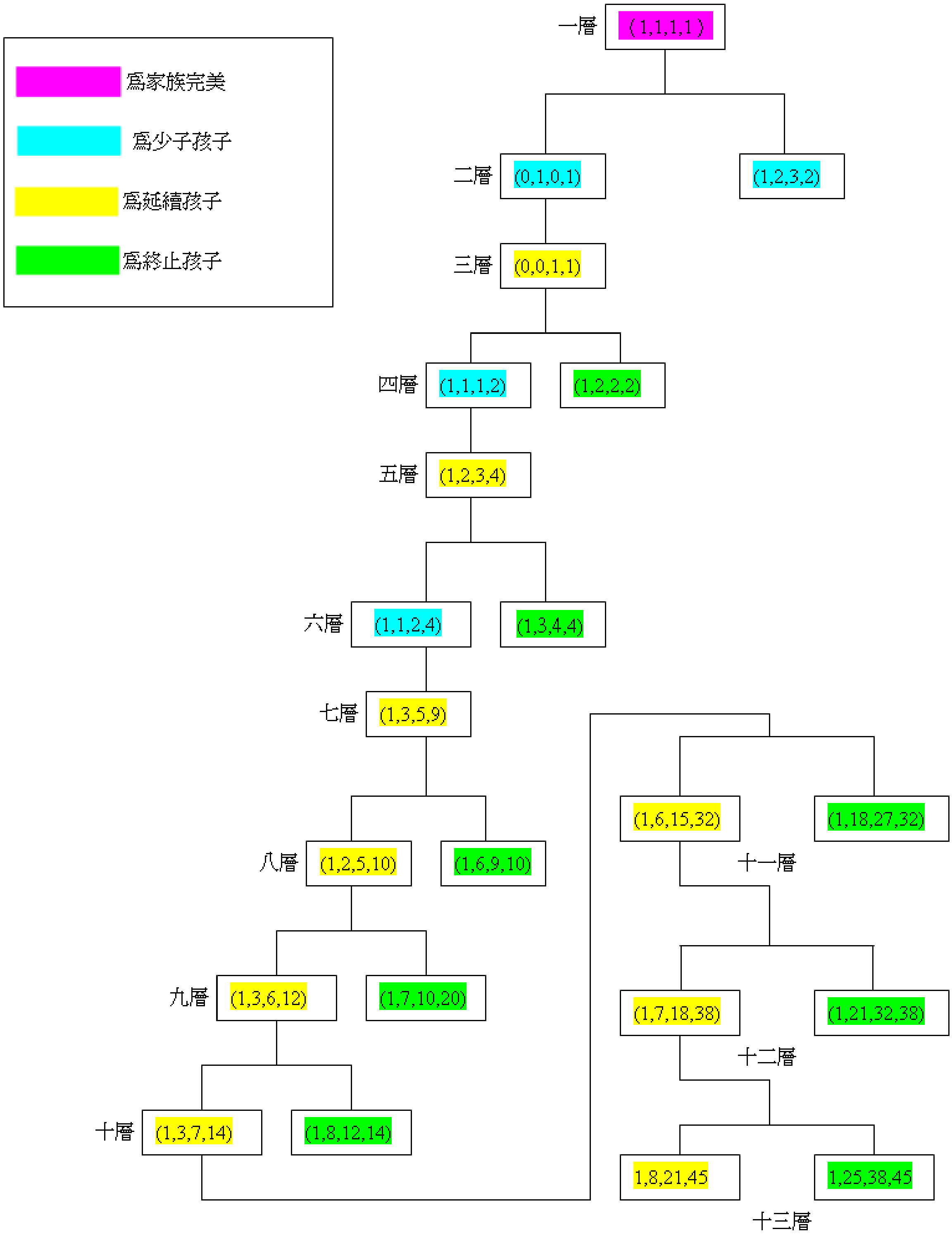
區間	1~10	1~20	1~30	1~40	1~50
最高層數	八	十	十	十二	十三
解答總數	2	16	＞50	6	12

(二) 研究結果顯示更好的區間分段點如下表十一（此最佳區間分段點可確認均為唯一解）

表十一

區間	最高層數	解答
1	1	(1,1,1,1)
1~2	4	(1,1,1,2)
1~4	6	(1,1,2,4)、(1,3,4,4)
1~5	7	(1,2,3,5)、(1,3,4,5)
1~10 三奇一偶	8	(1,2,5,10)、(1,6,9,10)
1~12	9	(1,7,10,12)、(1,3,6,12)
1~14	10	(1,3,7,14)、(1,8,12,14)
1~32 三奇一偶	11	(1,6,15,32)、(1,18,27,32)
1~38	12	(1,7,18,38)、(1,21,32,38)
1~45	13	(1,8,21,45)、(1,25,38,45)
1~106 三奇一偶	14	(1,18,49,106)、(1,58,89,106)
1~126	15	(1,21,58,126)、(1,69,106,126)
1~150	16	(1,25,69,150)、(1,82,126,150)
1~356 三奇一偶	17	(1,58,163,356)、(1,194,299,356)
1~424	18	(1,69,194,424)、(1,231,356,424)
1~505	19	(1,83,231,505)、(1,275,424,505)

(三)　由(1,1,1,1)上推的最佳解答家族



二、由(數字方塊能構成「家族系統」嗎？可以用家族系統來加速找出數字方塊的層數嗎？

(一)　數字方塊能利用領頭羊的想法來構成家族系統。

(二)　1~10 以內的順時針的數字方塊可以用家族系統來加速找出它的層數。

柒、參考資料及其他

一、中華民國中 34 屆小學科學展覽優勝作品專輯　83 年 6 月。國立台灣科學教育館。『數字方塊』。

二、中華民國中 45 屆國中科學展覽優勝作品專輯　94 年 6 月。國立台灣科學教育館。『層出不窮』。

三、葛老爹的推理遊戲２。2002.04.1 版。台北市。天下文化。『往布法羅之旅』p190~194。

四、最ㄅㄧㄤˋ的數學公式。2008.12.20 版。『費布納西數列』。胡守仁譯．Lionel Salem、Coralie Salem 及 Frederic Testard 著。台北市。天下遠見出版。

五、數學遊樂園之妙想天開　2002.08.10 版。台北市。牛頓出版社。『菲爾弗的防禦工事』p22~23、p103~104。

六、康軒文教事業教科書群。六下數學課本。2010.02 版。台北市。康軒文教事業公司。第四單元怎樣解題(一)。

七、教育部編教科書。五下數學課本。2010.02 版。台北市。教育部。第六單元未知數。

附件

六、進一步想研究的問題

研究如何設計必須經過很多次運算之後，才會結束的〔數字方塊〕問題。

附件一

【評語】080414

1.作者以上推法，以及應用「費氏數列變形」求得數字方塊層數的最佳解，並以波峰現象輔助檢驗，研究內容頗為詳細。建議作者在敘述上能更嚴謹，發現結果和陳述原因之間要交代清楚。

2.本問題已經有相當多人研究過，但這件作品討論的更深入一點，惟創意仍嫌不足。