中華民國 第50屆中小學科學展覽會

作品說明書

國小組　數學科

第一名

080412

“拼”給你看~一面二體三尤拉

學校名稱：臺南縣鹽水鎮鹽水國民小學

作者：	指導老師：
小六 游蕙綺	何鳳珠
小六 翁珮慈	沈冠君
小五 吳茂萁	
小五 郭怡妏	

關鍵詞：均勻多面體、尤拉公式、對稱

得獎感言

「要怎麼收穫，先那麼栽。」經過數月的洗禮與淬煉，讓我們體會到成功者必須的付出，過程中難免遭受到重重的難關，但總能柳暗花明又一村。因為深獲評審的肯定，這份小小的成就卻開啟了我們對數學的渴望與企圖心，這是我們參加這次科展的最大收穫。

連月來的鑽研與沉浸，開拓我們的視野，原來數學除了數字、圖形以外，還能與生活連結變換出如此多采的結晶。過程中體悟到～奇怪的問題需要天馬行空的想法，解不出的問題更需要絞盡腦汁的思考；堅定的毅力是必備之行囊，失敗的過程是必經之道路，團體合作更是必要的條件。信心滿滿的北上參賽，心中只想著要將作品分享給評審老師，就像分享給志同道合的朋友一般自在。

衷心感謝背後的推手，在您 們諄諄訓勉中，我們不負所望的奪下最高榮譽，也感謝幾位並肩作戰的夥伴。在這同時，我們也正式結束了國小生涯，算是劃下一個完美的句點，如果時光能倒流，我們一定會再加倍努力，更盡情地翱翔體驗數學之美。

摘要

本研究以尤拉公式【面數＋頂點數－邊數＝2】為發想起點，先探究多面體由邊緣或內部外凸、內凹、截切頂點所形成的形體是否仍能滿足尤拉公式，再運用反推手法，探究單一或二種以上正多邊形搭配固定頂點組合模式，所能推得的元件片數，找出規律進而拼出均勻多面體，同時驗證了五種柏拉圖多面體的組成元素。過程中因察覺部分形體可以透過稜線切割出一正多邊形截面，沿此截面轉動後又可衍生出不同頂點組合的 Johnson 多面體，深入探究得知，當給予頂點組合要件，再搭配尤拉公式，即可利用聯立方程式找出元件要素順利拼組成功。最後利用頂點珠製作的骨架圖，觀察均勻多面體中各種具對稱性的截切面，進行模擬切割並繪成展開圖，製成多組立體益智拼圖，做為此研究之具體成果。

關鍵字詞：均勻多面體、尤拉公式、對稱

"拼"給你看

～ 一面二體三尤拉 ～

一、研究動機

記得小時候，爸媽買了二盒的百力智慧片給我和哥哥玩，印象中曾經拼出一顆很像大球的形體，得到眾人的掌聲，現在教室裡也有很多的百力智慧片，我和同學竟然無法組出”大球”，心中開始疑惑，選用怎樣的元件可以拼出怎樣的立體球形，又各需要多少片呢？上網查了資料，看到很多有關柏拉圖多面體與阿基米德多面體的資訊，也約略知道阿基米德多面體是由柏拉圖多面體切割而來的，但，我們想回歸到原始點，期望能在元件種類、片數與頂點組合模式之間找到關聯性，讓我們更能得心應用，拼組出我們想要的均勻多面體；再者由於形體具對稱性，因此，我們也想在後續分析等分切割後所形成的形體，期望製作出一組組的多面體立體拼圖，延伸此研究的應用價值。

二、研究目的

1. 探索由基本立體圖形外凸、截切或內凹後，其面、頂點及邊是否仍滿足尤拉公式。
2. 運用尤拉公式反推正多面體的類型有多少種。
3. 探索二種以上正多邊形，組成的相同頂點組合之均勻多面體。
4. 探索利用正多邊形，組成不同頂點組合之封閉性多面體。
5. 利用等分原理探究均勻多面體的切割模式，並製作立體拼圖。

三、實驗研究器材

百力智慧片、頂點珠、分度器、計算機、相機、立體模型、雲彩紙、3M 完稿膠、方眼紙、量角器、三角板、波麗堡 Poly Pro 軟件、圓形標籤紙、膠帶

四、名詞定義

1. 正多面體：又稱柏拉圖多面體，指各面都是全等的正多邊形，且每一個頂點所接的面數都是一樣的凸多面體。
2. 均勻多面體：本研究指的是利用正多邊形以相同頂點拼組方式組合出的多面體。
3. N 角共頂：頂點是由 N 片元件(N 個角)組合而成

五、研究歷程與各種方法

活動一：探索由基本立體圖形外凸、截切頂點或內凹後的多面體，其面、頂點及邊數是否仍滿足尤拉公式。

【過程 1-1】透過國小學過的柱體與錐體觀察推出或驗證尤拉公式。

結果

1. 依外在形體來觀察柱體與錐體之面、頂點、邊。

	柱體						錐體					
	三角柱	四角柱	五角柱	六角柱	七角柱	八角柱	三角錐	四角錐	五角錐	六角錐	七角錐	八角錐
面	5	6	7	8	9	10	4	5	6	7	8	9
頂點	6	8	10	12	14	16	4	5	6	7	8	9
邊	9	12	15	18	21	24	6	8	10	12	14	16

我們發現每一種形體的面數＋頂點數皆比邊數多 2。

2. 我們發現面、頂點、邊的個數都與柱體的底面是幾邊形有關，當柱體的底面是 n 邊形(n≧3，n 是整數)時，n 角柱都有 n＋2 個面、n×2 個頂點、n×3 個邊，皆滿足尤拉公式【面數＋頂點數－邊數＝2】。
3. 我們發現面、頂點、邊的個數也與錐體的底面是幾邊形有關，當錐體的底面是 n 邊形(n≧3，n 是整數)時，n 角錐都有 n＋1 個面、n＋1 個頂點、n×2 個邊，也滿足尤拉公式。

【過程 1-2】探索以基本立體圖形的面外凸、內凹及截切頂點所形成新的形體，其面、頂點、邊之關係。

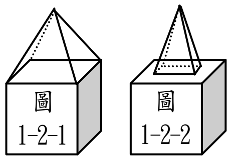


圖 1-2-1　圖 1-2-2

＊凸增或內凹形體：①多一個頂點(頂端匯聚成點形成錐體)
②多一個面(頂端匯聚成面形成錐台或柱體)
③多一個邊(頂端匯聚成線成帳棚形)

＊凸增或內凹方式：①面的邊緣外凸(內凹)<圖 1-2-1>　②面的內部外凸(內凹)< 圖 1-2-2 >

＊特殊面、頂點、邊的判別方式：

<在內凹穿透情況下時的探討，以右圖1-2-3六角柱內部內凹穿透四角柱為例>

①**判別** A(內外算同一面，不重複計數)：面(+5)、頂點(+12)、邊(+16)

②**判別** B(內外屬不同面，分開計數)：面(+10)、頂點(+16)、邊(+24)


圖1-2-3

結果

1. 柱體的探討(以四角柱為例，其它圖形的探究請見附件一)

四角柱	外凸形體之頂端	面的邊緣外凸									面的內部外凸								
		1 面外凸			2 面外凸			3 面外凸			1 面外凸			2 面外凸			3 面外凸		
		面	頂點	邊	面	頂點	邊	面	頂點	邊	面	頂點	邊	面	頂點	邊	面	頂點	邊
	一點	+3	+1	+4	+6	+2	+8	+9	+3	+12	+4	+5	+8	+8	+10	+16	+12	+15	+24
	一平面	+4	+4	+8	+8	+8	+16	+12	+12	+24	+5	+8	+12	+10	+16	+24	+15	+24	+36
	一線	+3	+2	+5	+6	+4	+10	+9	+6	+15	+4	+6	+9	+8	+12	+18	+12	+18	+27

四角柱	內凹形體之頂端		面的邊緣內凹(四邊形)									面的內部內凹(四邊形)								
			未穿透			穿透						未穿透			穿透			水管狀(中空)		
			面	頂點	邊	面	頂點	邊				面	頂點	邊	面	頂點	邊	面	頂點	邊
	一點	A	+3	+1	+4	+3	+5	+8				+4	+5	+8	+4	+9	+12			
		B				+7	+6	+12							+8	+10	+16			
	一平面	A	+4	+4	+8	+4	+8	+12				+5	+8	+12	+5	+12	+16	+4	+8	+12
		B				+9	+12	+20							+10	+16	+24			
	一線	A	+3	+2	+5	+3	+6	+9				+4	+6	+9	+4	+10	+13			
		B				+7	+8	+14							+8	+12	+18			

四角柱	截切頂點	截切頂點																	
		1 個頂點			2 個頂點			3 個頂點			4 個頂點			5 個頂點			6 個頂點		
		面	頂點	邊	面	頂點	邊	面	頂點	邊	面	頂點	邊	面	頂點	邊	面	頂點	邊
		+1	+2	+3	+2	+4	+6	+3	+6	+9	+4	+8	+12	+5	+10	+15	+6	+12	+18

註：表中的『＋3』即表示比原有的多 3 個

註：藍色區塊表示滿足尤拉公式

2. 錐體的探討(以五角錐為例，其它圖形的探究請見附件一)

五角錐	外凸形體之頂端	面的邊緣外凸									面的內部外凸								
		1 面外凸(三)			2 面外凸(三)			1 面外凸(五)			1 面外凸(三)			2 面外凸(三)			1 面外凸(五)		
		面	頂點	邊	面	頂點	邊	面	頂點	邊	面	頂點	邊	面	頂點	邊	面	頂點	邊
	一點	+2	+1	+3	+4	+2	+6	+4	+1	+5	+3	+4	+6	+6	+8	+12	+5	+6	+10
	一平面	+3	+3	+6	+6	+6	+12	+5	+5	+10	+4	+6	+9	+8	+12	+18	+6	+10	+15
	一線																		

五角錐	內凹形體之頂端	面的邊緣內凹(只探究五邊形面內凹)									面的內部內凹(只探究五邊形面內凹)								
		1 面內凹(五)									三角形內凹			四邊形內凹			五邊形內凹		
		面	頂點	邊							面	頂點	邊	面	頂點	邊	面	頂點	邊
	一點	+4	+1	+5							+3	+4	+6	+4	+5	+8	+5	+6	+10
	一平面	+5	+5	+10							+4	+6	+9	+5	+8	+12	+6	+10	+15
	一線													+4	+6	+9			

五角錐	截切頂點	截切頂點																	
		1 個頂點(3)			2 個頂點(3)			3 個頂點(3)			4 個頂點(3)			5 個頂點(3)			1 個頂點(5)		
		面	頂點	邊	面	頂點	邊	面	頂點	邊	面	頂點	邊	面	頂點	邊	面	頂點	邊
		+1	+2	+3	+2	+4	+6	+3	+6	+9	+4	+8	+12	+5	+10	+15	+1	+4	+5

註 1：三角形及五邊形的面不易凸出(或內凹)一線，因此一線的部分不探討。

註 2：1 面外凸(五)即表示由 1 個五邊形的面外凸。

註 3：1 個頂點(5)即表示截切的頂點為 5 角共頂的頂點；3 個頂點(3)即表示截切三個 3 角共頂的頂點。

註 4：錐體內凹不考慮穿透狀況。

3. 由原立體圖形**邊緣**凸增或內凹『一個頂點』、『一個面』、『一條邊』，甚至內凹呈現中空水管狀時，所形成新的立體圖形其邊、頂點與面的變化，仍是滿足尤拉公式，因為增加的面數與頂點數剛好與增加的邊數相互抵消(但穿透情形若內外面分開計數的話，則沒有滿足尤拉公式)。
4. 由原立體圖形截切頂點後形成新的立體圖形其邊、頂點與面的變化，仍是滿足尤拉公式，因為增加的面數與頂點數剛好與增加的邊數相互抵消。
5. 若由原立體圖形任一面**內部**凸增或內凹，則形成新的立體圖形其邊、頂點與面的變化，已不滿足尤拉公式。
6. 在內凹形體的探究中有一個爭議：如多角星形內凹的點算不算是頂點，請教專家各有不同看法，因此我們回歸到較單純的討論：以平面而言，四邊形的定義是由四個邊圍成的封閉性圖形，而凹四邊形也是四邊形的一種，那麼那個大於 180 度的角也算是一個角，以此想法對應到立體圖形，那麼內凹的多面體中，內凹的點我們也將它稱為為頂點，因為用頂點珠來建構其模型時，那個地方的確需要一個頂點珠。

活動二：運用尤拉公式反推正多面體的類型。

【過程 2-1】探討正多面體有幾種。

註：雖然這個活動已有很多人做過了，但我們一樣將其結果再簡記在此。

結果

1. 至少三個面才可交會成一個頂點，且頂角和不能≥360度，否則將形成一個平面，甚至無法拼組，而正六邊形每一個內角是 120 度($\frac{(6-2)\times180}{6}$)，三個正六邊形交會成一點，已形成平面，更何況當邊數愈來愈多時，正 n 邊形的內角會愈大($\frac{(n-2)\times180}{n}$)。
2. 能夠用來拼組正多面體的就只剩以下的正三角形、正方形及正五邊形：
   每一個面都是正三角形：$60^\circ\times3$、$60^\circ\times4$、$60^\circ\times5$ 三種
   每一個面都是正方形：$90^\circ\times3$ 一種
   每一個面都是正五邊形：$108^\circ\times3$ 一種

【過程 2-2】利用尤拉公式探討這五種多面體是幾面體。

活動一中我們發現凸多面體的面、頂點及邊都符合尤拉公式，那麼我們想：**要利用正三角形（或其它正多邊形）來拼成正多面體，究竟需要多少片正三角形才能拼組成功呢？**希望能利用尤拉公式來找出正多面體的組成類型及元件數，爾後再推衍到二種以上的正多邊形組合。

結果

1. 正多面體每個頂點都是相同的組合模式，其多面體的面數、邊數及頂點數皆可以分別推算出來：
   (1)面　　數：即為所有元件片數。
   (2)共點情形：如果 3 個圖形共點，當每一點都算一次時，一共算了 3 次，因此多面體的頂點數要以總角數除以 3 來計算，若是 4 個圖形共點，則總角數要除以 4，以此類推。
   (3)共邊情形：兩個面一定有一個共同的邊，當每一個面都算一次時，一共算了 2 次，因此多面體的邊數要以總邊數除以 2 來計算。
2. 以正三角形為單一元件，可拼成的三種正多面體究竟是幾面體？我們的推論如下：

①當 3 角共頂點時，n 個正三角形可以組成正多面體，則
面數：n 頂數：$(n\times3)\div3=\frac{3n}{3}=n$ 邊數：$(n\times3)\div2=\frac{3n}{2}$ $\Rightarrow n+\frac{3n}{3}-\frac{3n}{2}=2 \rightarrow \boxed{n=4} \rightarrow$ 即正四面體

②當 4 角共頂點時，n 個正三角形可以組成正多面體，則

面數：n

頂數：$(n\times3)\div4=\frac{3n}{4}=n$

邊數：$(n\times3)\div2=\frac{3n}{2}$

$$\Rightarrow n+\frac{3n}{4}-\frac{3n}{2}=2\rightarrow\boxed{n=8}\rightarrow \text{即正八面體}$$

③當 5 角共頂點時，n 個正三角形可以組成正多面體，則

面數：n

頂數：$(n\times3)\div5=\frac{3n}{5}=n$

邊數：$(n\times3)\div2=\frac{3n}{2}$

$$\Rightarrow n+\frac{3n}{5}-\frac{3n}{2}=2\rightarrow\boxed{n=20}\rightarrow \text{即正二十面體}$$

3. 以正方形為單一元件，可拼成的正多面體究竟是幾面體？我們的推論如下：

當 3 角共頂點時，n 個正方形可以組成正多面體，則

面數：n

頂數：$(n\times4)\div3=\frac{4n}{3}=n$

邊數：$(n\times4)\div2=\frac{4n}{2}$

$$\Rightarrow n+\frac{4n}{3}-\frac{4n}{2}=2\rightarrow\boxed{n=6}\rightarrow \text{即正六面體}$$

4. 以正五邊形為單一元件，可拼成的正多面體究竟是幾面體？我們的推論如下：

當 3 角共頂點時，n 個正五邊形可以組成正多面體，則

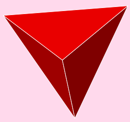
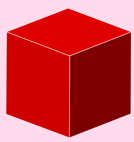
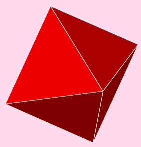
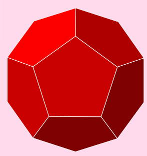
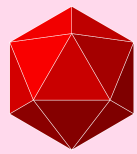
面數：n

頂數：$(n\times5)\div3=\frac{5n}{3}=n$

邊數：$(n\times5)\div2=\frac{5n}{2}$

$$\Rightarrow n+\frac{5n}{3}-\frac{5n}{2}=2\rightarrow\boxed{n=12}\rightarrow \text{即正十二面體}$$

結論：運用單一正多邊形元件，共可拼組出 5 種正多面體(即柏拉圖多面體)。

正四面體	正六面體	正八面體	正十二面體	正二十面體
4 個正三角形	6 個正方形	8 個正三角形	12 個正五邊形	20 個正三角形
				

活動三：探索二種以上正多邊形可組成的相同頂點組合之均勻多面體。

活動二是探索單一正多邊形的組合，因此接下來我們想探討利用二種以上的正多邊形可以組合成怎樣的多面體，又各需要多少數量呢？一切的探究還是都建構在尤拉公式的應用上。

註：由於現有的百力智慧片最大只到正六邊形，因此我們實作到正六邊形，但也嘗試將模式推衍到正八邊形與正十邊形，並比對波麗堡 Poly Pro 軟件之形體，檢驗我們的推衍是否正確。

【過程 3-1】二種元件的組合探討

《3-1-1》利用二種元件可以生成哪幾種頂點組合模式？

結果

1. 我們的探究鎖定在凸多面體，因此共頂點上的正多邊形角度和須小於 360°，因此我們找出有以下幾種組合方式。

註：組合模式❸❸❹即表示頂點組合是正三角形→正三角形→正三角形→正方形

共項模式	組合模式							
三角共項	❸❸❹	❸❹❹	❸❸❺	❸❺❺	❸❻❻	❸❽❽	❸❿❿	❹❹❺
	❹❺❺	❹❹❻	❹❻❻	❹❹❽	❹❹❿	❺❺❻	❺❻❻	❺❺❽
四角共頂	❸❸❸❹	❸❸❹❹	❸❹❸❹	❸❹❹❹	❸❸❸❺	❸❸❺❺	❸❺❸❺	❸❸❸❻
	❸❸❸❽	❸❸❸❿						
五角共頂	❸❸❸❸❹	❸❸❸❸❺						

2. 我們發現三角形拼組任兩邊的和會大於第三邊，其也可以推廣至 n 邊形：**n 邊形中任(n－1)邊的和必大於第 n 邊，才可能凸起變成多邊形**(圖 3-1-1-1)。而立體角中三角共頂的拼組，任兩角的和必須大於第三角，也可以推廣至 n 個多邊形(共頂點)：**任(n－1)個角的和必須大於第 n 角，才可能凸起變成一個錐體**。如❸❻❻或❸❽❽之組合，無法形成一個頂點，只會平貼或根本無法接合(圖 3-1-1-2)。

圖 3-1-1-2

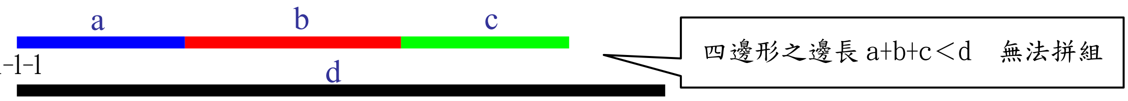


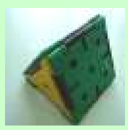
圖 3-1-1-1

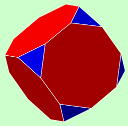
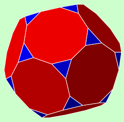
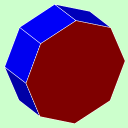
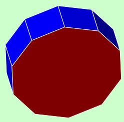
《3-1-2》依據上述的頂點組合，運用尤拉公式及頂點組合模式來檢驗其是否可拼組成一個均勻多面體，及其所需的元件數是多少？

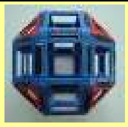
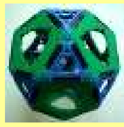
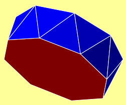
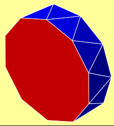
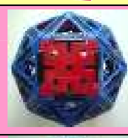
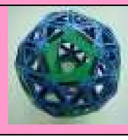
步驟：設定使用的二種正多邊形分別有 m 片及 n 片，再依據 N 角共頂組合模式，搭配尤拉公式推算出 m、n 之值。

註 1：推算出的形體，我們對照波麗堡 Poly Pro 軟件之形體給予簡記，如：<u>阿 1</u> 即阿基米德多面體的第一種，<u>菱 3</u> 即菱柱(柱體)及轉向菱柱(反柱體)的第三種，以此類推。

註 2：f_3 來表示正三角形、f_4 來表示正方形、f_5 來表示正五邊形......以此類推。

共項模式	組合模式	解題過程	結果	組成形體
3 角共項	❸❸❹	$\begin{cases} m+n+\dfrac{3m+4n}{3}-\dfrac{3m+4n}{2}=2\ldots① \\ \dfrac{3m}{2}=\dfrac{4n}{1}\ldots② \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3m+2n=12 \\ 3m=8n \end{cases}$	$n=\dfrac{12}{10}$(n 需為整數)，此模式無解	
3 角共項	❸❹❹ 〈菱 1〉	$\begin{cases} m+n+\dfrac{3m+4n}{3}-\dfrac{3m+4n}{2}=2\ldots① \\ \dfrac{3m}{1}=\dfrac{4n}{2}\ldots② \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3m+2n=12 \\ 6m=4n \end{cases}$	m=2， n=3，即 f_3=2 片 f_4=3 片	
3 角共項	❸❸❺	$\begin{cases} m+n+\dfrac{3m+5n}{3}-\dfrac{3m+5n}{2}=2\ldots① \\ \dfrac{3m}{2}=\dfrac{5n}{1}\ldots② \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3m+n=12 \\ 3m=10n \end{cases}$	11n=12 (n 需為整數)，此模式無解	

3角共頂	❸❺❺	$\begin{cases} m+n+\frac{3m+5n}{3}-\frac{3m+5n}{2}=2\ldots① \\ \frac{3m}{1}=\frac{5n}{2}\ldots② \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3m+n=12 \\ 6m=5n \end{cases}$	7n=24(n 需為整數)，此模式無解	
3角共頂	❸❻❻ 〈阿1〉	$\begin{cases} m+n+\frac{3m+6n}{3}-\frac{3m+6n}{2}=2\ldots① \\ \frac{3m}{1}=\frac{6n}{2}\ldots② \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=4 \\ 6m=6n \end{cases}$	m=4， n=4，即 f_3=4片 f_6=4片	
3角共頂	❸❽❽ 〈阿3〉	$\begin{cases} m+n+\frac{3m+8n}{3}-\frac{3m+8n}{2}=2\ldots① \\ \frac{3m}{1}=\frac{8n}{2}\ldots② \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3m-2n=12 \\ 3m=4n \end{cases}$	m=8， n=6，即 f_3=8片 f_8=6片	
3角共頂	❸❿❿ 〈阿9〉	$\begin{cases} m+n+\frac{3m+10n}{3}-\frac{3m+10n}{2}=2\ldots① \\ \frac{3m}{1}=\frac{10n}{2}\ldots② \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3m-4n=12 \\ 3m=5n \end{cases}$	m=20， n=12，即 f_3=20片 f_{10}=12片	
3角共頂	❹❹❺ 〈菱2〉	$\begin{cases} m+n+\frac{4m+5n}{3}-\frac{4m+5n}{2}=2\ldots① \\ \frac{4m}{2}=\frac{5n}{1}\ldots② \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2m+n=12 \\ 2m=5n \end{cases}$	m=5， n=2，即 f_4=5片 f_5=2片	
3角共頂	❹❺❺	$\begin{cases} m+n+\frac{4m+5n}{3}-\frac{4m+5n}{2}=2\ldots① \\ \frac{4m}{1}=\frac{5n}{2}\ldots② \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2m+n=12 \\ 8m=5n \end{cases}$	9n=48 (n需為整數)，此模式無解	
3角共頂	❹❹❻ 〈菱3〉	$\begin{cases} m+n+\frac{4m+6n}{3}-\frac{4m+6n}{2}=2\ldots① \\ \frac{4m}{2}=\frac{6n}{1}\ldots② \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=6 \\ 2m=6n \end{cases}$	m=6， n=2，即 f_4=6片 f_6=2片	
3角共頂	❹❻❻ 〈阿4〉	$\begin{cases} m+n+\frac{4m+6n}{3}-\frac{4m+6n}{2}=2\ldots① \\ \frac{4m}{1}=\frac{6n}{2}\ldots② \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=6 \\ 4m=3n \end{cases}$	m=6， n=8，即 f_4=6片 f_6=8片	
3角共頂	❹❹❽ 〈菱4〉	$\begin{cases} m+n+\frac{4m+8n}{3}-\frac{4m+8n}{2}=2\ldots① \\ \frac{4m}{2}=\frac{8n}{1}\ldots② \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m-n=6 \\ 2m=8n \end{cases}$	m=8， n=2，即 f_4=8片 f_8=2片	
3角共頂	❹❹❿ 〈菱5〉	$\begin{cases} m+n+\frac{4m+10n}{3}-\frac{4m+10n}{2}=2\ldots① \\ \frac{4m}{2}=\frac{10n}{1}\ldots② \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m-2n=6 \\ 2m=10n \end{cases}$	m=10， n=2，即 f_4=10片 f_{10}=2片	
3角共頂	❺❺❻	$\begin{cases} m+n+\frac{5m+6n}{3}-\frac{5m+6n}{2}=2\ldots① \\ \frac{5m}{2}=\frac{6n}{1}\ldots② \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=12 \\ 5m=12n \end{cases}$	m=12， n=5，即 f_5=12片 f_6=5片	會形成三個五邊形角共頂點的狀況。
3角共頂	❺❻❻ 〈阿10〉	$\begin{cases} m+n+\frac{5m+6n}{3}-\frac{5m+6n}{2}=2\ldots① \\ \frac{5m}{1}=\frac{6n}{2}\ldots② \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=12 \\ 5m=3n \end{cases}$	m=12， n=20，即 f_5=12片 f_6=20片	
3角共頂	❺❺❽	$\begin{cases} m+n+\frac{5m+8n}{3}-\frac{5m+8n}{2}=2\ldots① \\ \frac{5m}{2}=\frac{8n}{1}\ldots② \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m-2n=12 \\ 5m=16n \end{cases}$	m=32， n=10，即 f_5=32片 f_8=10片	會形成三個五邊形角共頂點的狀況。
4角共頂	❸❸❸❹ 〈菱6〉	$\begin{cases} m+n+\frac{3m+4n}{4}-\frac{3m+4n}{2}=2\ldots① \\ \frac{3m}{3}=\frac{4n}{1}\ldots② \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=8 \\ m=4n \end{cases}$	m=8， n=2，即 f_3=8片 f_4=2片	

4角共頂	❸❸❹❹	$\begin{cases} m+n+\frac{3m+4n}{4}-\frac{3m+4n}{2}=2\ldots\text{①} \\ \frac{3m}{2}=\frac{4n}{2}\ldots\text{②} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=8 \\ 3m=4n \end{cases}$	m=8，n=6，即 f_3=8片 f_4=6片	會形成三個三角形角共頂點的狀況。(莊27)
4角共頂	❸❹❸❹ 〈阿2〉	$\begin{cases} m+n+\frac{3m+4n}{4}-\frac{3m+4n}{2}=2\ldots\text{①} \\ \frac{3m}{2}=\frac{4n}{2}\ldots\text{②} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=8 \\ 3m=4n \end{cases}$	m=8，n=6，即 f_3=8片 f_4=6片	
4角共頂	❸❹❹❹ 〈阿5〉	$\begin{cases} m+n+\frac{3m+4n}{4}-\frac{3m+4n}{2}=2\ldots\text{①} \\ \frac{3m}{1}=\frac{4n}{3}\ldots\text{②} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=8 \\ 9m=4n \end{cases}$	m=8，n=18，即 f_3=8片 f_4=18片	
4角共頂	❸❸❸❺ 〈菱7〉	$\begin{cases} m+n+\frac{3m+5n}{4}-\frac{3m+5n}{2}=2\ldots\text{①} \\ \frac{3m}{3}=\frac{5n}{1}\ldots\text{②} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m-n=8 \\ m=5n \end{cases}$	m=10，n=2，即 f_3=10片 f_5=2片	
4角共頂	❸❸❺❺	$\begin{cases} m+n+\frac{3m+5n}{4}-\frac{3m+5n}{2}=2\ldots\text{①} \\ \frac{3m}{2}=\frac{5n}{2}\ldots\text{②} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m-n=8 \\ 3m=5n \end{cases}$	m=20，n=12，即 f_3=20片 f_5=12片	會形成三個三角形角共頂點的狀況。(莊34)
4角共頂	❸❺❸❺ 〈阿8〉	$\begin{cases} m+n+\frac{3m+5n}{4}-\frac{3m+5n}{2}=2\ldots\text{①} \\ \frac{3m}{2}=\frac{5n}{2}\ldots\text{②} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m-n=8 \\ 3m=5n \end{cases}$	m=20，n=12，即 f_3=20片 f_5=12片	
4角共頂	❸❸❸❻ 〈菱8〉	$\begin{cases} m+n+\frac{3m+6n}{4}-\frac{3m+6n}{2}=2\ldots\text{①} \\ \frac{3m}{3}=\frac{6n}{1}\ldots\text{②} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m-2n=8 \\ m=6n \end{cases}$	m=12，n=2，即 f_3=12片 f_6=2片	
4角共頂	❸❸❸❽ 〈菱9〉	$\begin{cases} m+n+\frac{3m+8n}{4}-\frac{3m+8n}{2}=2\ldots\text{①} \\ \frac{3m}{3}=\frac{8n}{1}\ldots\text{②} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m-4n=8 \\ m=8n \end{cases}$	m=16，n=2，即 f_3=16片 f_8=2片	
4角共頂	❸❸❸❿ 〈菱10〉	$\begin{cases} m+n+\frac{3m+10n}{4}-\frac{3m+10n}{2}=2\ldots\text{①} \\ \frac{3m}{3}=\frac{10n}{1}\ldots\text{②} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m-6n=8 \\ m=10n \end{cases}$	m=20，n=2，即 f_3=20片 f_{10}=2片	
五角共頂	❸❸❸❸❹ 〈阿7〉	$\begin{cases} m+n+\frac{3m+4n}{5}-\frac{3m+4n}{2}=2\ldots\text{①} \\ \frac{3m}{4}=\frac{4n}{1}\ldots\text{②} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m-2n=20 \\ 3m=16n \end{cases}$	m=32，n=6，即 f_3=32片 f_4=6片	
	❸❸❸❸❺ 〈阿13〉	$\begin{cases} m+n+\frac{3m+5n}{5}-\frac{3m+5n}{2}=2\ldots\text{①} \\ \frac{3m}{4}=\frac{5n}{1}\ldots\text{②} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m-5n=20 \\ 3m=20n \end{cases}$	m=80，n=12，即 f_3=80片 f_5=12片	

討論：由上表中，我們察覺到有些可以算得出來，但卻無法拼出，再深入探究其原因，有以下幾點發現：

(1) N角共頂中，恰好***有2個相同奇數邊形相連接的組合必定無法拼組成功***，因為奇數邊的關係，會破壞相同頂點面的組合規律，如下：圖3-1-2-1～圖3-1-2-3

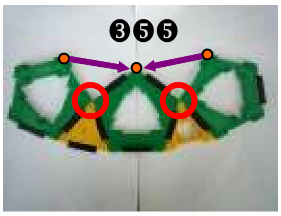


圖3-1-2-1

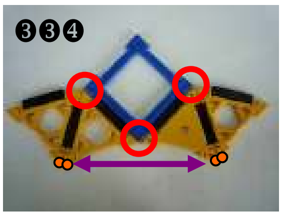


圖3-1-2-2

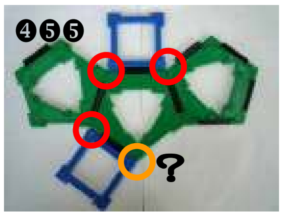


圖3-1-2-3

(2) 上表中❺❺❻、❺❺❽、❸❸❹❹、❸❸❺❺依其(1)的推論，應該無法拼組成功，但奇怪的是我們推算出來竟是有解，目前一直找不到問題出在哪裡。<但在活動四的探究中我們又發現❸❸❹❹、❸❸❺❺此兩組若搭配改變頂點組合的順序，就可以做出另一種封閉性的多面體，如附件中的莊 27(❸❸❹❹、❸❹❸❹)及莊 34(❸❸❺❺、❸❺❸❺)>

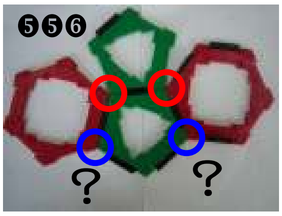


圖 3-1-2-4

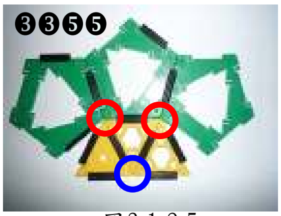


圖 3-1-2-5

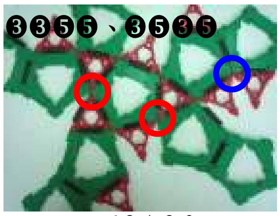


圖 3-1-2-6

圖 3-1-2-7

【過程 3-2】三種元件的組合探討

《3-2-1》選用三種正 N 邊形元件可有幾種不同的頂點組合模式<思考模式同【過程 3-1】>

結果

N 角共頂的限制條件為角度和須小於 360 度，因此初步推算有 21 組符合條件，其列表如下：

共頂模式	頂點組合							
三角共頂	❸❹❺	❸❹❻	❸❹❽	❸❹❿	❸❺❻	❸❺❽	❸❺❿	❸❻❽
	❸❻❿	❸❽❿	❹❺❻	❹❺❽	❹❺❿	❹❻❽	❹❻❿	
四角共頂	❸❸❹❺	❸❸❹❻	❸❸❹❽	❸❸❹❿	❸❸❺❻	❸❹❹❺		

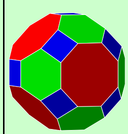
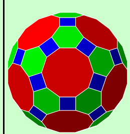
《3-2-2》依據上述各種頂點組合模式探討各需要幾片元件才能組合成功？

說明：設定三種元件分別為 m 片、n 片、k 片，再依據 N 角共頂運用尤拉公式及頂點組合模式來推算出 m、n 及 k 之值。

結果

1. 我們將其運算結果彙整如下表：

共頂模式	組合模式	解題過程	結果	組成形體
3 角共頂	❸❹❺	$\begin{cases} m+n+k+\dfrac{3m+4n+5k}{3}-\dfrac{3m+4n+5k}{2}=2 \\ \dfrac{3m}{1}=\dfrac{4n}{1}=\dfrac{5k}{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3m+2n+k=12 \\ 3m=4n=5k \end{cases} \Rightarrow k=\dfrac{24}{17}$	此題無解	
3 角共頂	❸❹❻	$\begin{cases} m+n+k+\dfrac{3m+4n+6k}{3}-\dfrac{3m+4n+6k}{2}=2 \\ \dfrac{3m}{1}=\dfrac{4n}{1}=\dfrac{6k}{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3m+2n=12 \\ 3m=4n=6k \end{cases} \Rightarrow k=\dfrac{4}{3}$	此題無解	
3 角共頂	❸❹❽	$\begin{cases} m+n+k+\dfrac{3m+4n+8k}{3}-\dfrac{3m+4n+8k}{2}=2 \\ \dfrac{3m}{1}=\dfrac{4n}{1}=\dfrac{8k}{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3m+2n-2k=12 \\ 3m=4n=8k \end{cases} \Rightarrow k=\dfrac{6}{5}$	此題無解	
3 角共頂	❸❹❿	$\begin{cases} m+n+k+\dfrac{3m+4n+10k}{3}-\dfrac{3m+4n+10k}{2}=2 \\ \dfrac{3m}{1}=\dfrac{4n}{1}=\dfrac{10k}{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3m+2n-4k=12 \\ 3m=4n=10k \end{cases} \Rightarrow k=\dfrac{12}{11}$	此題無解	

3 角共頂	❸❺❻	$\begin{cases} m+n+k+\frac{3m+5n+6k}{3}-\frac{3m+5n+6k}{2}=2 \\ \frac{3m}{1}=\frac{5n}{1}=\frac{6k}{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3m+n=12 \\ 3m=5n=6k \end{cases} \Rightarrow k=\frac{5}{2}$	此題無解	
3 角共頂	❸❺❽	$\begin{cases} m+n+k+\frac{3m+5n+8k}{3}-\frac{3m+5n+8k}{2}=2 \\ \frac{3m}{1}=\frac{5n}{1}=\frac{8k}{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3m+n-2k=12 \\ 3m=5n=8k \end{cases} \Rightarrow k=\frac{30}{19}$	此題無解	
3 角共頂	❸❺❿	$\begin{cases} m+n+k+\frac{3m+5n+10k}{3}-\frac{3m+5n+10k}{2}=2 \\ \frac{3m}{1}=\frac{5n}{1}=\frac{10k}{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3m+n-4k=12 \\ 3m=5n=10k \end{cases} \Rightarrow k=\frac{3}{2}$	此題無解	
3 角共頂	❸❻❽	$\begin{cases} m+n+k+\frac{3m+6n+8k}{3}-\frac{3m+6n+8k}{2}=2 \\ \frac{3m}{1}=\frac{6n}{1}=\frac{8k}{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3m+2n+k=12 \\ 3m=6n=8k \end{cases} \Rightarrow k=2,\ m=\frac{16}{3}$	此題無解	
3 角共頂	❸❻❿	$\begin{cases} m+n+k+\frac{3m+6n+10k}{3}-\frac{3m+6n+10k}{2}=2 \\ \frac{3m}{1}=\frac{6n}{1}=\frac{10k}{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3m-4k=12 \\ 3m=6n=10k \end{cases} \Rightarrow k=2,\ m=\frac{20}{3}$	此題無解	
3 角共頂	❸❽❿	$\begin{cases} m+n+k+\frac{3m+8n+10k}{3}-\frac{3m+8n+10k}{2}=2 \\ \frac{3m}{1}=\frac{8n}{1}=\frac{10k}{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3m-2n-4k=12 \\ 3m=8n=10k \end{cases} \Rightarrow k=\frac{24}{7}$	此題無解	
3 角共頂	❹❺❻	$\begin{cases} m+n+k+\frac{4m+5n+6k}{3}-\frac{4m+5n+6k}{2}=2 \\ \frac{4m}{1}=\frac{5n}{1}=\frac{6k}{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2m+n=12 \\ 4m=5n=6k \end{cases} \Rightarrow n=\frac{24}{7}$	此題無解	
3 角共頂	❹❺❽	$\begin{cases} m+n+k+\frac{4m+5n+8k}{3}-\frac{4m+5n+8k}{2}=2 \\ \frac{4m}{1}=\frac{5n}{1}=\frac{8k}{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2m+n-2k=12 \\ 4m=5n=8k \end{cases} \Rightarrow k=\frac{10}{3}$	此題無解	
3 角共頂	❹❺❿	$\begin{cases} m+n+k+\frac{4m+5n+10k}{3}-\frac{4m+5n+10k}{2}=2 \\ \frac{4m}{1}=\frac{5n}{1}=\frac{10k}{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2m+n-4k=12 \\ 4m=5n=10k \end{cases} \Rightarrow k=4,\ m=10,\ n=8$	此題有解但無法拼組	
3 角共頂	❹❻❽ <阿 6>	$\begin{cases} m+n+k+\frac{4m+6n+8k}{3}-\frac{4m+6n+8k}{2}=2 \\ \frac{4m}{1}=\frac{6n}{1}=\frac{8k}{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2m-2k=12 \\ 4m=6n=8k \end{cases} \Rightarrow k=6,\ m=12,\ n=8$	f_4=12 片 f_6=8 片 f_8=6 片	
3 角共頂	❹❻❿ <阿 12>	$\begin{cases} m+n+k+\frac{4m+6n+10k}{3}-\frac{4m+6n+10k}{2}=2 \\ \frac{4m}{1}=\frac{6n}{1}=\frac{10k}{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2m-4k=12 \\ 4m=6n=10k \end{cases} \Rightarrow k=12,\ m=30,\ n=20$	f_4=30 片 f_6=20 片 f_{10}=12 片	
4 角共頂	❸❸❹❺	$\begin{cases} m+n+k+\frac{3m+4n+5k}{4}-\frac{3m+4n+5k}{2}=2 \\ \frac{3m}{2}=\frac{4n}{1}=\frac{5k}{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m-k=8 \\ 3m=8n=10k \end{cases} \Rightarrow k=\frac{24}{7}$	此題無解	
4 角共頂	❸❸❹❻	$\begin{cases} m+n+k+\frac{3m+4n+6k}{4}-\frac{3m+4n+6k}{2}=2 \\ \frac{3m}{2}=\frac{4n}{1}=\frac{6k}{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m-2k=8 \\ 3m=8n=12k \end{cases} \Rightarrow k=4,\ m=16,\ n=6$	此題有解但無法拼組	

4 角共頂	❸❹❽	$\begin{cases} m+n+k+\dfrac{3m+4n+8k}{4}-\dfrac{3m+4n+8k}{2}=2 \\ \dfrac{3m}{2}=\dfrac{4n}{1}=\dfrac{8k}{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m-4k=8 \\ 3m=8n=16k \end{cases} \Rightarrow$	k=6 m=32 n=12	此題有解但無法拼組	
4 角共頂	❸❹❿	$\begin{cases} m+n+k+\dfrac{3m+4n+10k}{4}-\dfrac{3m+4n+10k}{2}=2 \\ \dfrac{3m}{2}=\dfrac{4n}{1}=\dfrac{10k}{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m-6k=8 \\ 3m=8n=20k \end{cases} \Rightarrow$	k=12 m=80 n=30	此題有解但無法拼組	
4 角共頂	❸❺❻	$\begin{cases} m+n+k+\dfrac{3m+5n+6k}{4}-\dfrac{3m+5n+6k}{2}=2 \\ \dfrac{3m}{2}=\dfrac{5n}{1}=\dfrac{6k}{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m-n-2k=8 \\ 3m=10n=12k \end{cases} \Rightarrow$	k=10 m=40 n=12	此題有解但無法拼組	
4 角共頂	~~❸❹❹❺~~ ❸❹❺❹ <阿 11>	$\begin{cases} m+n+k+\dfrac{3m+4n+5k}{4}-\dfrac{3m+4n+5k}{2}=2 \\ \dfrac{3m}{1}=\dfrac{4n}{2}=\dfrac{5k}{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m-k=8 \\ 3m=2n=5k \end{cases} \Rightarrow$	k=12 m=20 n=30	F_3=20 片 F_4=30 片 F_5=12 片	

2. 由上表中，我們察覺到有些可以算得出來但卻無法拼出，再深入探究其原因，有以下幾點發現：

(1)用三個元件組成三角共頂的模式中，若其中有一片是奇數邊形，則無法拼組成功，因為環繞在奇數邊形的組合必會有同樣的一種元件相連，即破壞了原有的組合規準。以（3,4,5）為例，三角形相鄰兩邊必接四邊形、五邊形，由於是奇數邊，所以最後一個邊必定又接回四邊形(如下圖)。

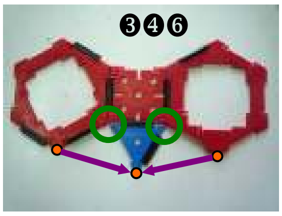


圖 3-2-2-1

圖 3-2-2-2

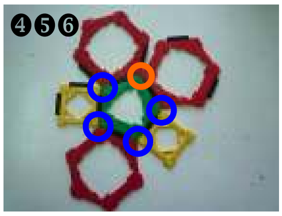


圖 3-2-2-3

(2)用三個元件組成四角共頂的無解模式中，發現有一個共同特徵:4 角中有 2 個正三角形，拼組時必會出現另一種共頂的模式，原因仍出在正三角形奇數邊的緣故(如下圖)，但讓我們不解的是，在正常推論下應該是無法拼組成功，可是推算出來竟是有解，目前尚找不出原因為何。

圖 3-2-2-4

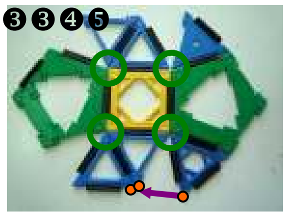


圖 3-2-2-5

圖 3-2-2-6

(3)在最後一組❸❹❹❺之組合中，因為有奇數邊形的原因，不能讓奇數邊形相連（如下圖），所以改採交錯組合即可。

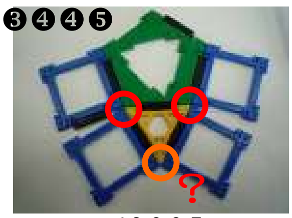


圖 3-2-2-7

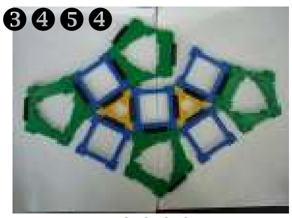


圖 3-2-2-8

圖 3-2-2-9

【過程 3-3】四種元件的組合探討

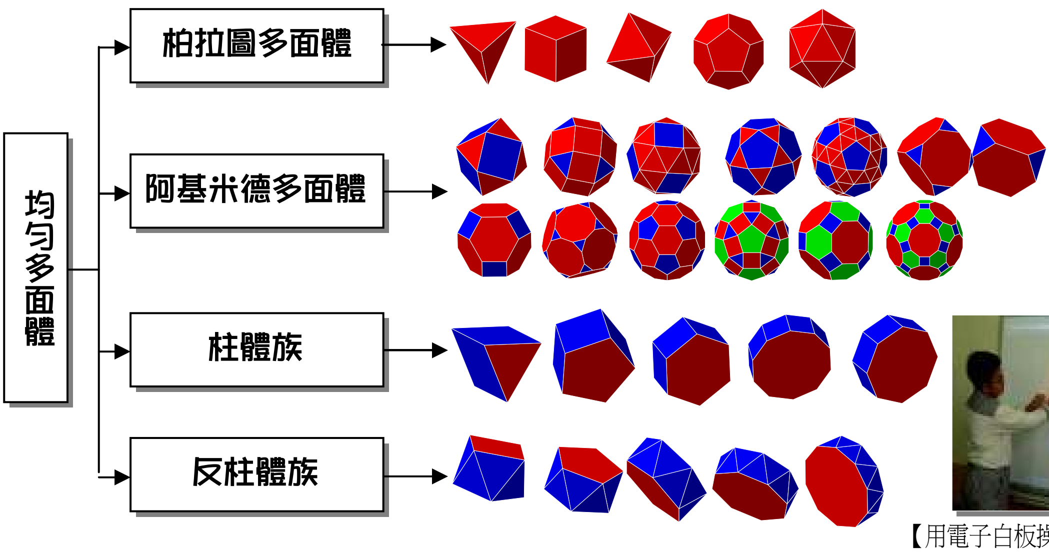
運用四種正 N 邊形元件可有幾種不同的頂點組合模式<思考模式同【過程 3-1】>

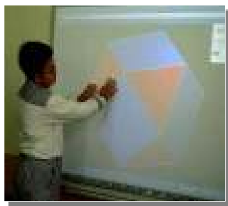
結果

此活動主要是探究相同頂點面的組合，因此每個頂點皆須需包含 4 種元件，又要在 N 角共頂的限制條件為角度和須小於 360 度下，最小的一種組合❸❹❺❻即已超過 360 度了，因此推斷無四種元件同時 4 角共頂的形體。

討論 1：綜合上述【過程 3-1】、【過程 3-2】、【過程 3-3】之內容，共拼組出 23 種均勻多面體（相同頂點組合模式），其中有 13 種是阿基米德多面體，因為從資料中知道阿基米德多面體並不包含”柱體族(Prism)”（❸❹❹、❹❹❺、❹❹❻、❹❹❽、❹❹❿）及”反柱體族(Antiprism)<❸❸❸❹、❸❸❸❺、❸❸❸❻、❸❸❸❽、❸❸❸❿>”（資料來源 MTS2007 第一屆全國高中數學教學研討會論文集）因此，我們所拼組出的圖形繪整如下：

＜註：圖形截取至波麗堡 Poly Pro 軟件＞

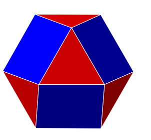
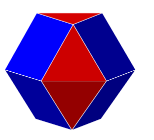
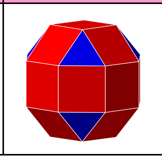
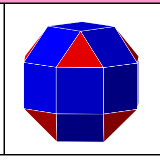
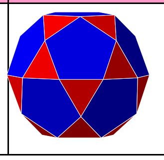
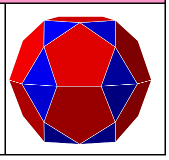


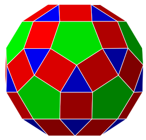
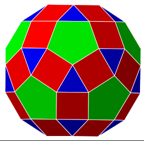
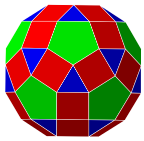
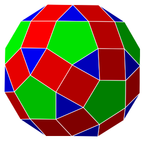
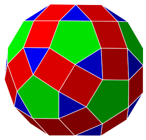


【用電子白板操作 Poly Pro 軟件】

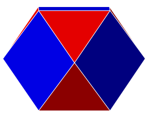
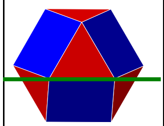
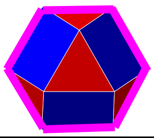
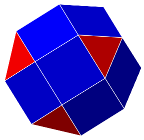
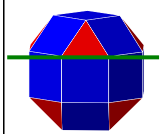
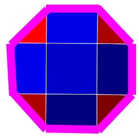
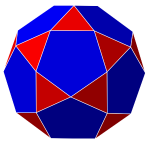
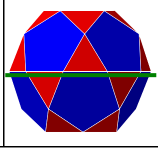
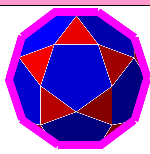
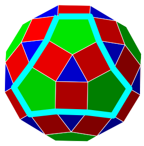
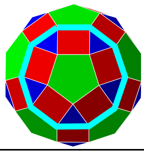
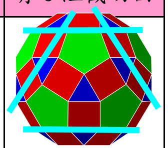
討論 2：當我們在拼組 $f_3=8$、$f_4=6$ 這組形體時，兩組人馬拼出的形體竟不相同(如圖 3-3-1)，因此，我們將兩個形體放在一起觀察，發現與對稱的軸面有關，在 23 種形體中有四組形體可以經由**轉動**而形成另一種新模型的形體，但所形成的頂點組合方式已有不同，會出現 2 種不同的共頂點模式，此已不屬於阿基米德多面體了，而是 Johnson 多面體（莊遜立體），如下表：

圖 3-3-1

頂點組合	❸❹❸❹→❸❸❹❹、❸❹❸❹		❸❹❹❹→❸❹❹❹		❸❺❸❺→❸❺❸❺、❸❸❺❺	
元件	$f_3=8$、$f_4=6$		$f_3=8$、$f_4=18$		$f_3=20$、$f_5=12$	
形體變化						

頂點組合	3454→3454、3445					
元件	f_3=20、f_4=30、f_5=12					
形體變化						

而這四組形體的共通特性是可以找到以一組平行的面為上下底，沿著稜線切出一正多邊形的截面，且截面的邊數會是上(下)底面邊數的 2 倍，分析如下：

元件	f_3=8、f_4=6			f_3=8、f_4=18		
	f_4 當底	側看(f_3 當底)	俯看(正六邊形)	f_3 當底	側看(f_4 當底)	俯看(正八邊形)
不同元件當底						
元件	f_3=20、f_5=12			f_3=20、f_4=30、f_5=12		
	f_3 當底	側看(f_5 當底)	俯看(正十邊形)	俯看(f_3 當底)	俯看(f_5 當底)	有 3 組截切面
不同元件當底						

※下圖為阿 11 的三個截切面

活動四：探索利用正多邊形，組成不同頂點組合之封閉性多面體。

由【過程 3-2】中我們發現不同的頂點組合也可以拼組成多面體，而這些形體查詢結果多屬於 Johnson 多面體(波麗堡 Poly Pro 軟件<圖 4-1>中彙整出)，它與原先探討的均勻多面體不同之處是有二種以上的不同頂點面組合。因此我們再繼續探究：不同頂點面的組合是否也能利用前述方法來推出形體呢？尤其是當給予一組 Johnson 多面體的固定元件要進行拼組時，我們發現沒有形體對照，是很難拼出一個封閉性多面體，連大人都不容易做到，這讓我們感到有興趣，因此再針對此部分做深入探究。

圖 4-1

【過程 4-1】利用正多邊形元件組合成多面體，可有幾種不同的頂點搭配模式。

結果

1. 使用單一元件中只有正三角形才可以有不同的頂點組合搭配，如

(❸❸❸)(❸❸❸❸)、(❸❸❸❸)(❸❸❸❸❸)二種，其餘的正多邊形最多只能三角共頂，所以無其它頂點組合搭配。【註：(❸❸❸)(❸❸❸❸❸)此種組成無法成形，因為(❸❸❸)的模式其底部的面角已固定，最多只能再連接二片正三角形】

2. 使用二種以上元件時，其頂點組合搭配可以多種類型，元件片數是未知，不同的頂點組合又是未知，我們無法用過程三的方式推論出各需多少片或多少種頂點。【例如：用正三角形 n 片、正方形 m 片，頂點組合就有很多種，包含(❸❸❸)、(❸❸❸❸)、(❸❸❸❸❸)、(❹❹❹)、(❸❸❹)、(❸❹❹)、(❸❸❸❹)、(❸❸❸❸❹)、(❸❸❹❹)、(❸❹❸❹)，彼此再互搭，那又可以生出很多種組合，我們無法一一做檢驗。】因此，我們推得：想要順利拼出 Johnson **多面體**需要給予**頂點組合搭配模式**，我們較有可能推出所需的元件要素及拼出形體。

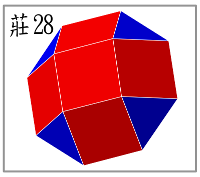
【過程 4-2】給予必要條件（頂點組合模式）看看是否可以推算拼組出 Johnson 多面體。

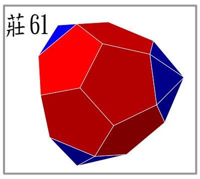
我們挑選波麗堡 Poly Pro 軟件之形體中的幾個 Johnson 多面體(如附件二)，觀察其形體的元件、數量、頂點組合及各種頂點組合之數量記錄之，利用以下兩種模式來推算檢驗，看看能否利用給定的條件有效率地拼組出 Johnson 多面體。

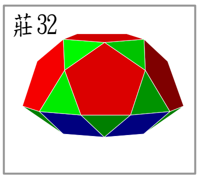
註：以下的 Johnson 多面體之編號及名稱皆是依據波麗堡 Poly Pro 軟件中的名稱來訂，我們無法確認此名稱是否有其依據，感覺上是用形體樣式來訂定形體的名稱。

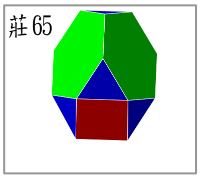
方式一：給予**頂點組合模式**及**每種頂點組合的數量**，推算元件片數，再進行拼組。

註：以 Johnson 多面體第 28 號、第 61 號、第 32 號、第 65 號為例。



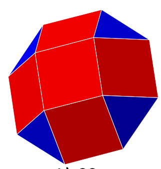






結果

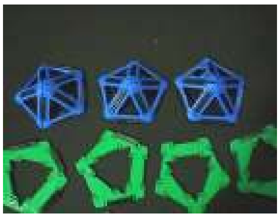
1. 兩種元件：以 Johnson 多面體第 28 號(四邊正向雙頂塔)及第 61 號(三增擴十二面體)為例。

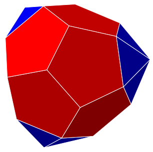
<table>
<tr><td colspan="4">(1) 28 號：頂點組合(❸❸❹❹)＊8 個、頂點組合(❸❹❹❹)＊8 個</td></tr>
<tr><td colspan="4">$\rightarrow f_3=\dfrac{2\times 8+1\times 8}{3}=8$　　$f_4=\dfrac{2\times 8+3\times 8}{4}=10$　……推得元件片數
→先以一個正方形為底，拼組 4 個(❸❹❹❹)，因其具對稱性，所以另一組也是如法炮製，再將 2 組依(❸❸❹❹)的組合接合在一起。此組可以沿著稜線可以找到一個正多邊形的截面，所以又可以轉動成另一種封閉性的多面體。</td></tr>
<tr><td></td><td>
</td><td>
</td><td>
莊 28</td></tr>
</table>

(2)**61 號**：頂點組合(❺❺❺)∗5 個、頂點組合(❸❸❺❺)∗15 個、
頂點組合(❸❸❸❸❸)∗3 個

$\rightarrow f_3=\dfrac{2\times15+5\times3}{3}=15 \quad f_5=\dfrac{3\times5+2\times15}{5}=9$ ......推得元件片數

→先拼組出 3 個(❸❸❸❸❸)，因為圖形多屬對稱性，因此以(❸❸❸❸❸)分散和正五邊形相接，只要(❸❸❸❸❸)與(❸❸❸❸❸)不相接在一起，就不會出現其它組合，在相接之處即能形成(❸❸❺❺)的封閉性的多面體。





莊61

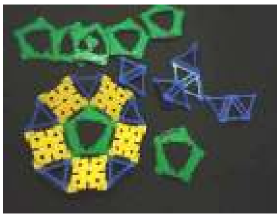
2. 三種元件：以 Johnson 多面體第 32 號(五邊正向項塔圓頂塔)及第 65 號(增擴切角四面體)為例。

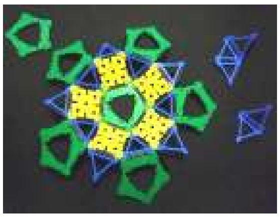
(1)**32 號**：頂點組合(❸❹❺❹)∗5 個、頂點組合(❸❹❸❺)∗10 個、
頂點組合(❸❺❸❺)∗10 個

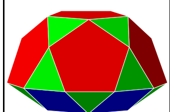
$$\rightarrow f_3=\frac{1\times5+2\times10+2\times10}{3}=15 \quad f_4=\frac{2\times5+1\times10}{4}=5$$

$$f_5=\frac{1\times5+1\times10+2\times10}{5}=7$$ ......推得元件片數

→正方形只有 5 個，又須與正五邊形連接在一起，所以先以正五邊形為底，周圍連上 5 個正方形及 3 個正三角形，即完成 5 個(❸❹❺❹)，正方形固定了，那麼接著就可以完成 10 個(❸❹❸❺)，再做最上方的(❸❺❸❺)即可輕易完成封閉性的多面體。





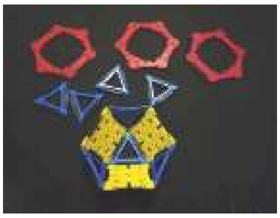
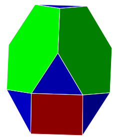


莊32

(2)**65 號**：頂點組合(❸❻❻)∗6 個、頂點組合(❸❹❸❻)∗6 個、
頂點組合(❸❹❸❹)∗3 個

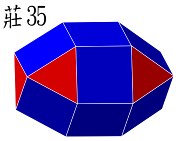
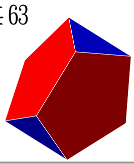
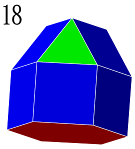
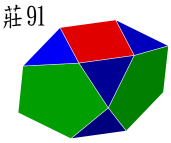
$$\rightarrow f_3=\frac{1\times6+2\times6+2\times3}{3}=8 \quad f_4=\frac{1\times6+2\times3}{4}=3 \quad f_6=\frac{2\times6+1\times6}{6}=3$$

→正方形有 3 個，又須形成(❸❹❸❹)，因此先以正三角形為底，周圍接上 3 個正方形及 3 個正三角形，即完成 3 個(❸❹❸❹)，又正方形需再與正六邊形角接角，因此將 3 個正六邊形接上，再補上正三角形，即完成封閉性的多面體組合。

			 莊 65

方式二：給予<u>**元件數量**</u>及<u>**頂點組合模式**</u>，推算各種頂點組合的數量，再進行拼組。

註：以 Johnson 多面體第 35 號、第 63 號、第 18 號、第 91 號為例。

莊 35 	莊 63 	莊 18 	莊 91 

結果

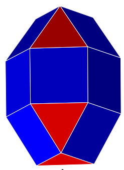
1. 兩種元件：以 Johnson 多面體第 35 號(伸長三邊正向雙頂塔)及第 63 號(三縮平二十面體)為例。

(1)**35 號**：$f_3=8$、$f_4=12$，頂點組合(❸❹❸❹)、(❸❹❹❹)

→設(❸❹❸❹)有 x 個、(❸❹❹❹)有 y 個

→ $\begin{cases} 2x+y=24 \\ 2x+3y=48 \end{cases}$ →x=6 y=12 ……推得頂點組合的個數

→先以正三角形為底，周圍連接 3 個正方形及 3 個正三角形，即形成 3 個(❸❹❸❹)，再如法炮製另一組，最後剩餘的 6 個正方形則環繞在側邊，即完成封閉性多面體的拼組。

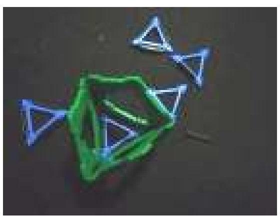
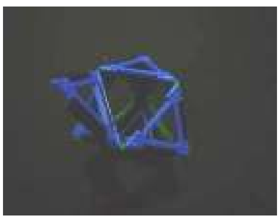
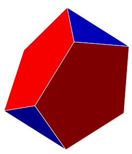
			 莊 35

(2)**63 號**：$f_3=5$、$f_5=3$，頂點組合(❸❺❺)、頂點組合(❸❸❸❺)

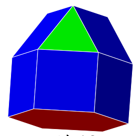
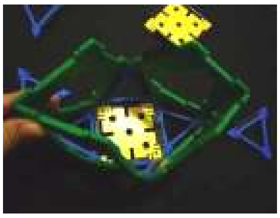
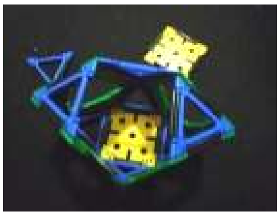
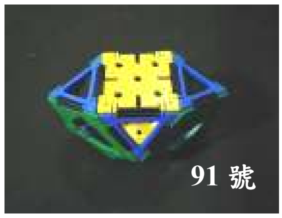
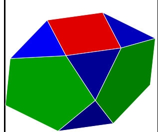
→設(❸❺❺)有 x 個、(❸❸❸❺)有 y 個

→ $\begin{cases} x+3y=15 \\ 2x+y=15 \end{cases}$ →x=6 y=3 ……推得頂點組合的個數

→以正三角形為底，三邊連接正五邊形，上方兩兩正五邊形間也連接上正三角形，即形成 6 組(❸❺❺)，再將最後一個正三角形接在頂部，即完成封閉性多面體的拼組。

			 莊 63

2. 三種元件：以 Johnson 多面體第 18 號(伸長三邊頂塔)及第 91 號(雙弓雙圓頂塔)為例。

<table>
<tr><td colspan="4">(1)18 號：$f_3=4$、$f_4=9$、$f_6=1$，頂點組合(❹❹❻)、(❸❹❸❹)、(❸❹❹❹)</td></tr>
<tr><td colspan="4">→設(❹❹❻)有 x 個、(❸❹❸❹)有 y 個、(❸❹❹❹)有 z 個
→ $\begin{cases} x=6 \\ 2x+2y+3z=36 \\ 2y+z=12 \end{cases}$ →x=6　y=3　z=6　……推得頂點組合的個數
→以正六邊形當底，每邊皆連上正方形，即完成 6 個(❹❹❻)，上層邊上再連接一正方形一正三角形，即完成 6 個(❸❹❹❹)，最後在頂層接上一正三角形，即完成封閉性多面體的拼組。</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>
莊 18</td></tr>
<tr><td colspan="4">(2)91 號：$f_3=8$、$f_4=2$、$f_5=4$，頂點組合(❸❺❺)、(❸❺❸❺)、(❸❹❸❺)</td></tr>
<tr><td colspan="4">→設(❸❺❺)有 x 個、(❸❺❸❺)有 y 個、(❸❹❸❺)有 z 個
→ $\begin{cases} z=8 \\ x+2y+2z=24 \\ 2x+2y+z=20 \end{cases}$ →x=4　y=2　z=8　……推得頂點組合的個數
→先以一個正方形當底，周圍連接 4 個正三角形及 4 個正五邊形，即完成 4 個(❸❹❸❺)及 2 個(❸❺❺)，再以另一個正方形當底，四邊連接正三角形再分別與正五邊形相接，即完成封閉性多面體的拼組。</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>
莊 91</td></tr>
</table>

討論 1：給予一堆固定數量的元件，要拼組出一個封閉性的多面體常不得其門而入，且常常拼到最後才發現元件無法密合，必須再拆解重來，因此【過程 4-2】的目的是希望找出方法，利用已知條件拼組出封閉性的多面體，**＜方法一＞**給予頂點組合模式及每種頂點組合的數量，可利用正多邊形的總角數很快推出元件片數，進行拼組；**＜方法二＞**提供元件數量及頂點組合模式，則需利用聯立方程式解出各種不同的頂點組合數量，再依各頂點的組合數量進行拼組，如此較易成功拼組出封閉性的多面體。

討論 2：仔細觀察這 92 個 Johnson 多面體，發現皆是由均勻多面體切割或凸增錐體，甚至轉動或變形所形成的(相關探究資料如附件三)，且都有正三角形元件，我們嘗試不用三角形元件的狀況下來拼組，都無法形成封閉性多面體，推測其可能原因是在面與面的夾角問題。

討論 3：列出波麗堡 Poly Pro 軟件中的 92 個 Johnson 多面體可供拼組挑戰，如下表 4-2-1(詳細資料如附件四)，而除了這 92 種外，還有沒有其他的形體呢？目前我們不得而知，這將留在日後再繼續探究。

表 4-2-1

Johnson	元件種類及數量	頂點組合類型
1	f3=4、f4=1	(334)(3333)
2	f3=5、f5=1	(335)(33333)
3	f3=4、f4=3、f6=1	(346)(3434)
4	f3=4、f4=5、f8=1	(348)(3444)
5	f3=5、f4=5、f5=1、f10=1	(340)(3454)
6	f3=10、f5=6、f10=1	(350)(3535)
7	f3=4、f4=3	(333)(344)(3344)
8	f3=4、f4=5	(444)(3333)(3344)
9	f3=5、f4=5、f5=1	(445)(3344)(33333)
10	f3=12、f4=1	(3333)(3334)(33333)
11	f3=15、f5=1	(3335)(33333)
12	f3=6	(333)(3333)
13	f3=10	(3333)(33333)
14	f3=6、f4=3	(333)(3344)
15	f3=8、f4=4	(3333)(3344)
16	f3=10、f4=5	(3344)(33333)
17	f3=16	(3333)(33333)
18	f3=4、f4=9、f6=1	(446)(3434)(3444)
19	f3=4、f4=13、f8=1	(448)(3444)
20	f3=5、f4=15、f5=1、f10=1	(440)(3444)(3454)
21	f3=10、f4=10、f5=6、f10=1	(440)(3535)(3445)
22	f3=16、f4=3、f6=1	(3336)(3434)(33334)
23	f3=20、f4=5、f8=1	(3444)(3338)(33334)
24	f3=25、f4=5、f5=1、f10=1	(3330)(3454)(33334)
25	f3=30、f5=6、f10=1	(3330)(3535)(33335)
26	f3=4、f4=4	(344)(3434)
27	f3=8、f4=6	(3344)(3434)
28	f3=8、f4=10	(3344)(3444)
29	f3=8、f4=10	(3434)(3444)
30	f3=10、f4=10、f5=2	(3344)(3454)
31	f3=10、f4=10、f5=2	(3434)(3454)
32	f3=15、f4=5、f5=7	(3454)(3435)(3535)
33	f3=15、f4=5、f5=7	(3454)(3345)(3535)
34	f3=20、f5=12	(3355)(3535)
35	f3=8、f4=12	(3434)(3444)
36	f3=8、f4=12	(3434)(3444)
37	f3=8、f4=18	(3444)
38	f3=10、f4=20、f5=2	(3444)(3454)
39	f3=10、f4=20、f5=2	(3454)(3444)
40	f3=15、f4=15、f5=7	(3535)(3445)(3444)(3454)
41	f3=15、f4=15、f5=7	(3454)(3444)(3445)(3535)
42	f3=20、f4=10、f5=12	(3535)(3445)
43	f3=20、f4=10、f5=12	(3535)(3445)
44	f3=20、f4=6	(3434)(33334)
45	f3=24、f4=10	(3444)(33334)
46	f3=30、f4=10、f5=2	(3454)(33334)
47	f3=35、f4=5、f5=7	(3454)(3535)(33334)(33335)
48	f3=40、f5=12	(3535)(33335)
49	f3=6、f4=2	(344)(3333)(3334)
50	f3=10、f4=1	(3334)(3333)(33333)
51	f3=14	(3333)(33333)
52	f3=4、f4=4、f5=2	(445)(3333)(3345)
53	f3=8、f4=3、f5=2	(445)(3333)(3345)
54	f3=4、f4=5、f6=2	(446)(3333)(3346)
55	f3=8、f4=4、f6=2	(446)(3333)(3346)
56	f3=8、f4=4、f6=2	(446)(3333)(3346)
57	f3=12、f4=3、f6=2	(3333)(3346)
58	f3=5、f5=11	(555)(3355)(33333)
59	f3=10、f5=10	(555)(3355)(33333)
60	f3=10、f5=10	(555)(3355)(33333)
61	f3=15、f5=9	(555)(3355)(33333)
62	f3=10、f5=2	(355)(3335)(33333)
63	f3=5、f5=3	(355)(3335)
64	f3=7、f5=3	(333)(355)(3355)(3335)
65	f3=8、f4=3、f6=3	(366)(3436)(3434)
66	f3=12、f4=5、f8=5	(388)(3438)(3444)
67	f3=16、f4=10、f8=4	(388)(3438)(3444)
68	f3=25、f4=5、f5=1、f10=11	(300)(3430)(3454)
69	f3=30、f4=10、f5=2、f10=10	(300)(3430)(3454)
70	f3=30、f4=10、f5=2、f10=10	(300)(3430)(3454)
71	f3=35、f4=15、f5=3、f10=9	(300)(3430)(3454)
72	f3=20、f4=30、f5=12	(3454)(3445)
73	f3=20、f4=30、f5=12	(3454)(3445)
74	f3=20、f4=30、f5=12	(3454)(3445)
75	f3=20、f4=30、f5=12	(3454)(3445)
76	f3=15、f4=25、f5=11、f10=1	(450)(3454)
77	f3=15、f4=25、f5=11、f10=1	(450)(3445)(3454)
78	f3=15、f4=25、f5=11、f10=1	(450)(3445)(3454)
79	f3=15、f4=25、f5=11、f10=1	(450)(3445)(3454)
80	f3=10、f4=20、f5=10、f10=2	(450)(3454)
81	f3=10、f4=20、f5=10、f10=2	(450)(3454)
82	f3=10、f4=20、f5=10、f10=2	(450)(3454)(3445)
83	f3=5、f4=15、f5=9、f10=3	(450)(3454)
84	f3=12	(3333)(33333)
85	f3=24、f4=2	(33333)(33334)
86	f3=12、f4=2	(3334)(3344)(33333)
87	f3=16、f4=1	(3334)(33333)(33334)
88	f3=16、f4=2	(3333)(3344)(33333)
89	f3=18、f4=3	(3344)(33333)(33334)
90	f3=20、f4=4	(3344)(33333)(33334)
91	f3=8、f4=2、f5=4	(355)(3435)(3535)
92	f3=13、f4=3、f5=3、f6=1	(3335)(3346)(3435)(3535)

活動五：利用等分原理探究均勻多面體的切割模式，並製作立體拼圖。

由於拼出的多面體多具對稱性，因此可以截切成數塊相同（或部分相同）的立體圖形，因此我們想搭此研究列車，比照平面七巧板的拼圖模式，也設計幾組立體拼圖，作為提升立體空間概念的益智教具。

【過程 5-1】觀察收集到的正四面體立體拼圖的截切模式。

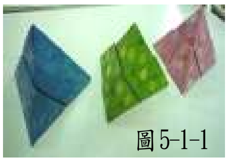
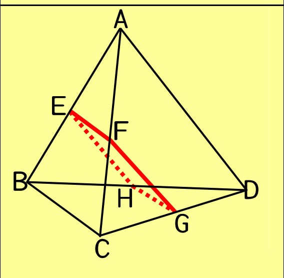
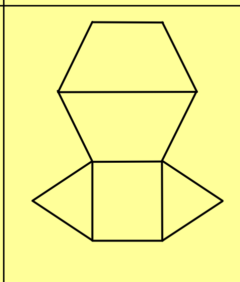
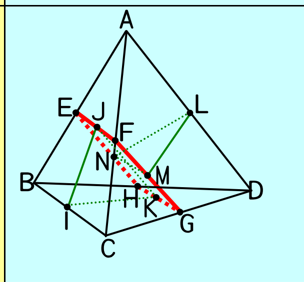
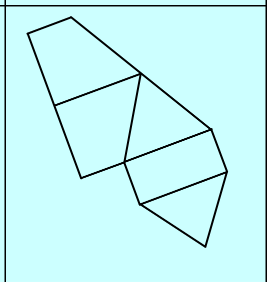
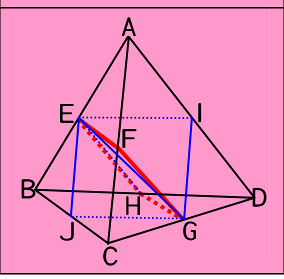
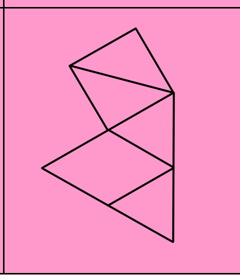
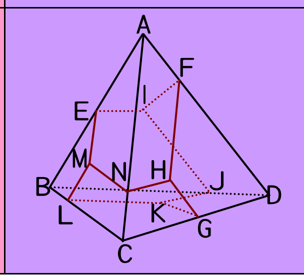
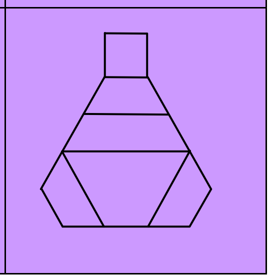


圖5-1-1

教室的教具箱中有正多面體的立體拼圖(如圖 5-1-1)，我們將它拿出來仔細分析，是如何截切的。

結果

註：下列四種正四面體立體拼圖是由台北麗山高中彭良禎老師所設計的。

正四面體	二等分		四等分	
	切割方式	元件展開圖	切割方式	元件展開圖
				
	四等分		四等分	
	切割方式	元件展開圖	切割方式	元件展開圖
				

【過程 5-2】選擇幾種均勻多面體進行切割探究，並製作立體拼圖。

我們選擇正六面體、正八面體及立方八面體(阿 2)，運用稜線等分及頂點截切面來進行切割，並繪製成展開圖，製作成立體的益智拼圖。過程中，我們利用頂點珠製作立體骨架來進行模擬切割並觀察截切面，因而對頂點珠的構造有了一番的認識（如 5-2-1 的探討）。對於曾思考過的立體圖形之面角是多少度，也找到了一種分度器(如右圖)，可測出大約的面角，這算是一種附加的學習吧！


圖5-2-1


圖5-2-2

《5-2-1》觀察頂點珠上的圓洞與拼組角度之關係。

結果

1. 頂點珠上的洞口呈規則排列，分成南北極區(各 1 孔)、南北迴歸線區(各 8 孔)及赤道區(8 孔)，是具對稱性的。(如圖 5-2-1-1)

2. 以南北極為軸心，每條經線圈或赤道區的 8 孔接上連接棒，那麼可形成八個方位，兩兩相連的連接棒皆呈 45 度角(如圖 5-2-1-2、圖 5-2-1-3)，利用南(北)極及赤道區的孔插上連接棒，可形成兩兩相互垂直的角，並生成側邊為等腰直角三角形的三角錐。
3. 若改以穿越北迴歸線區、赤道區及南迴歸線區的孔也能將球體對半切開，而此圈共有 6 孔，每孔間形成 60 度角(如圖 5-2-1-4)，利用 2 個南(北)迴歸線孔及 1 個赤道孔，則可形成正四面體的立體角。

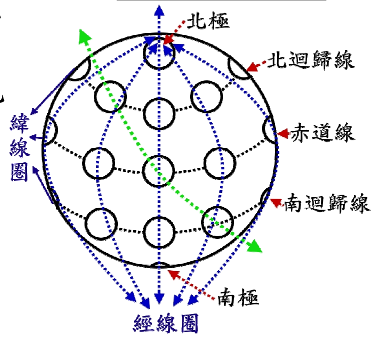


圖 5-2-1-1

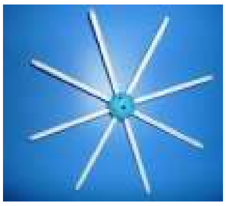


圖 5-2-1-2

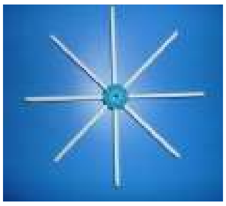


圖 5-2-1-3

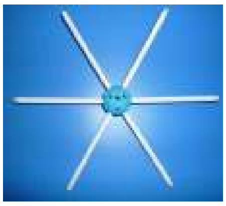


圖 5-2-1-4

《5-2-2》利用頂點珠製作正六面體、正八面體及阿基米德多面體（立方八面體，在此簡記為阿 2 立體），觀察其可能的切割面，其切割的方式儘量以對角線切割、等分切割或對稱型切割為原則(如下圖)，再探究其切割後之展開圖間的邊、角、面關係，最後將成果實際製作成立體拼圖，挑戰眾人拼組的能力。


圖 5-2-2-1

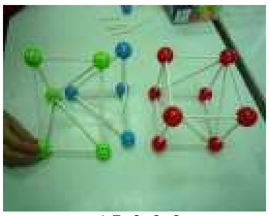


圖 5-2-2-2

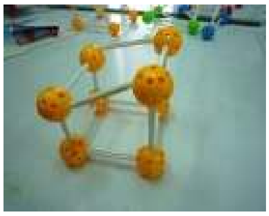


圖 5-2-2-3

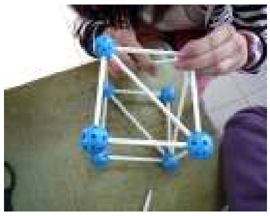
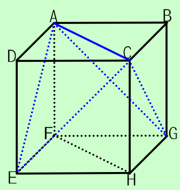
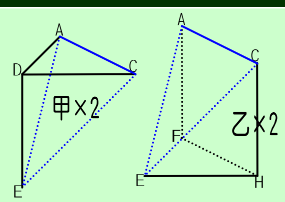
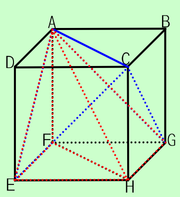
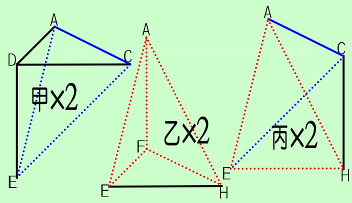
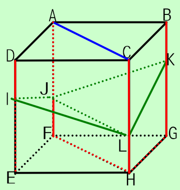
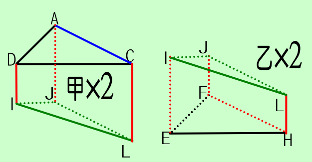
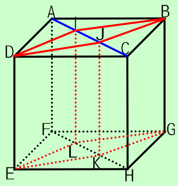
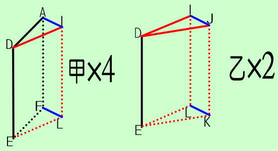
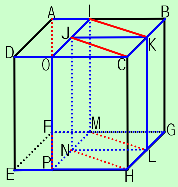
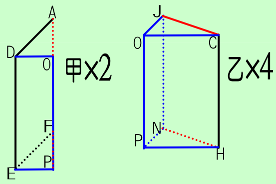
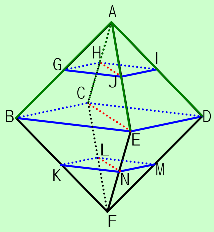
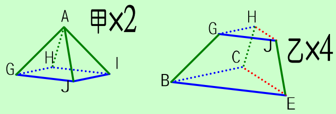
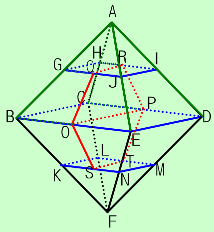
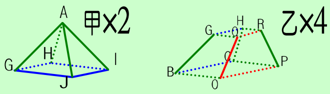
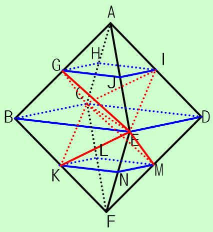
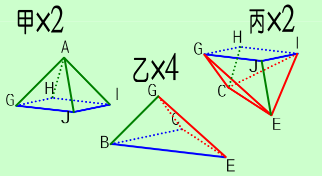
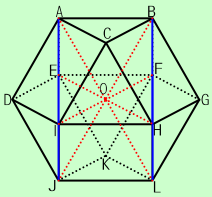
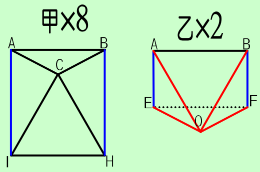
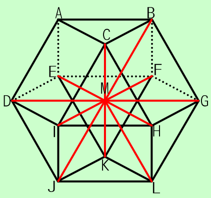
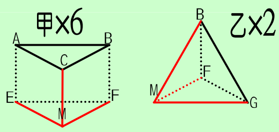
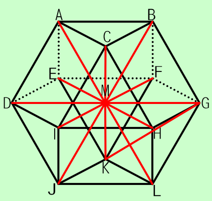
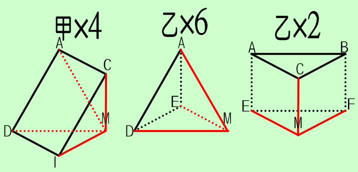
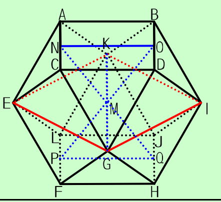
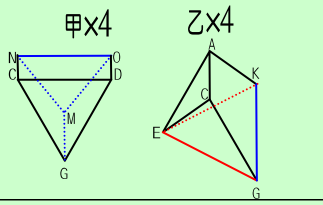
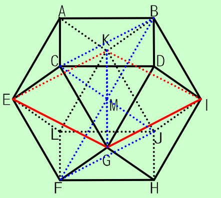
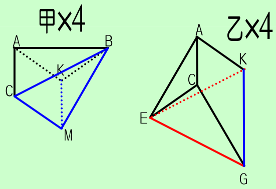
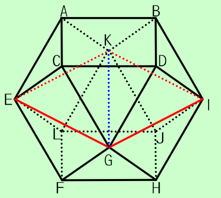
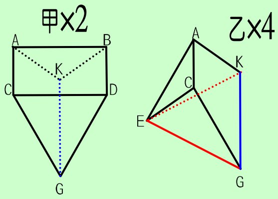
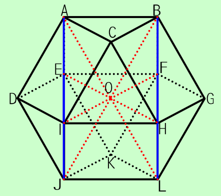
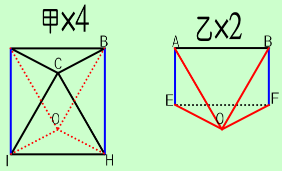


圖 5-2-2-4

◎以下是我們切割設計出來的十五種立體拼圖：(切割圖如附件五)

	切割透視圖	立體元件種類及數量	截切面	成品
正六面體①			→ACHF →ACE 與 ACG	
正六面體②			→ACHF →ACE 與 ACG →AHE 與 AHG	
正六面體③			→ACHF →JLI 與 JLK 2DI=2BK=2LH=2JF=AJ=CL=IE=KG	

正六面體④			→ACHF →ILED、JKED、ILGB、JKGB AI=IJ=JC	
正六面體⑤			→OIMP (2AI=2DO=IB=OC) →JKLN(IJ=JO) →AOPF、IKLM、JCHN	
正八面體①			→BCDE →GHIJ 與 KLMN (AG=GB=AJ=JE=……) →CEJH 與 CENL	
正八面體②			→BCDE →GHIJ 與 KLMN (AG=GB=AJ=JE=……) →OPRQ 與 OPTS (BO=OE=PD=CP)	
正八面體③			→BCDE →GHIJ 與 KLMN (AG=GB=AJ=JE=……) →CEG、CEI、CEK、CEM	
阿2立體①			→ABHI、BHLF、LFEJ、EJIA →OAE、OEF、OFB、OAB、OFL、OLH、OHB、OEJ、OJL、OHI、OAI、OIJ	
阿2立體②			→DEFGHI →BCIF、JKFI →ACME、BMG、DMJ、MHLK	
阿2立體③			→DEFGHI →BCIF、JKFI →ADM、ACM、AME、CMH、BMG(另一半同樣的切法)	

阿2立體④			→EKIG →GKAC、GKBD、GKLF、GKJH →NOM、PQM	
阿2立體⑤			→EKIG →GKAC、GKBD、GKLF、GKJH →CBM、FJM	
阿2立體⑥			→EKIG →GKAC、GKBD、GKLF、GKJH	
阿2立體⑦			→OAE、OEF、OFB、OAB、OFL、OLH、OHB、OEJ、OJL、OHI、OAI、OIJ	

討論一：在推算切割後形體展開圖的邊長時，由於是等分割，使用到對角線切割方式相當多，其邊長就牽扯到畢氏定理，每每推算出來的邊長都是帶根號的，原本想，帶有根號的長度似乎無法畫出來，但後來發現運用尺規作圖，即能輕而易舉地畫出我們所要的長度，甚至夾角也能處理，因為三角形的特性只要知道三邊的長度，那麼角度就固定了。


圖 5-2-2-1


圖 5-2-2-2


圖 5-2-2-3


圖 5-2-2-4

討論二：立體拼圖製作出來在拼組挑戰時，會因無法吸附住而在還沒完成時即散掉，因此我們嘗試了貼磁鐵、貼魔鬼氈及雙面膠，發現都遇到問題，最後改以噴上 3M 完稿膠，讓它的接觸面有點黏又不太黏，其效果還不錯，拼組出來的立體較不易散開來了，再將它放入百力智慧片組成的多面體中，形成一組組的益智拼圖，挺有成就感的(如下圖)。






討論三：平面的七巧板是看<u>邊的關係</u>，而立體拼圖是看<u>面的關係</u>，拼組的過程中透過面與面的關係、面與邊的關係，甚至頂點組合的模式，即能很容易拼組成功。示範如下：

【相同的面接合】

【頂點是❸❹❸❹的組合】

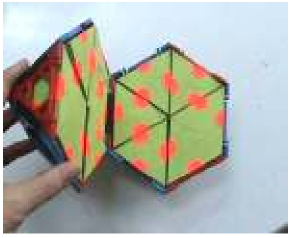
【三個正方形圍繞在正三角形邊】

【依舊保持頂點是❸❹❸❹的組合】

【再放上三角錐即完成半個成品】

【另一組對稱形體也是相同組法】

【放入智慧片組成的阿 2 半球體內】



【蓋上扣住即完成阿 2 立體拼圖】

六、研究結論：

1. 一般的基本立體圖形除了可以用觀察面來點數面數、頂點數及邊數，亦可利用分解元件來推算，且三者皆符合一定的關係：面數＋頂點數－邊數＝2，即尤拉公式。
2. 多面體由**邊緣**外凸、內凹或截切頂點所形成的形體，其面、頂點及邊之關係皆可以**滿足**尤拉公式，若由**內部**內凹所成的形體則並**不滿足**尤拉公式（中空水管狀除外）。
3. 由已知的單一元件及共頂模式，可利用尤拉公式反推得柏拉圖的 5 種立體圖形。
4. 運用指定元件及指定的 N 角共頂模式，即可應用尤拉公式及頂點組合模式推出各需要多少片元件才能拼組出均勻多面體，假設：
   元件為 fx、fy、fz（皆為正多邊形，x、y、z 為邊數或角數），數量各為 m、n、k
   N 角共頂模式為 fx 有 a 個、fy 有 b 個、fz 有 c 個，且角度和小於 360 度

   (1)二種元件：$\begin{cases} m+n+\dfrac{xm+yn}{N}-\dfrac{xm+yn}{2}=2 \\ \dfrac{xm}{a}=\dfrac{yn}{b} \end{cases}$

   - 共可組出 10 種三角共頂的均勻多面體(❸❹❹、❸❻❻、❸❽❽、❸❿❿、❹❹❺、❹❹❻、❹❻❻、❹❹❽、❹❹❿、❺❻❻)，8 種四角共頂的均勻多面體(❸❸❸❹、❸❹❸❹、❸❹❹❹、❸❸❸❺、❸❺❸❺、❸❸❸❻、❸❸❸❽、❸❸❸❿)，2 種五角共頂的均勻多面體（❸❸❸❸❹、❸❸❸❸❺）。
   - 頂點組合若恰有 2 個相同奇數邊形相鄰（例如：❸❺❺、❹❺❺)，必定無法拼組成功，因為會破壞頂點的組合模式。

(2)三種元件：$\begin{cases} m+n+k+\dfrac{xm+yn+zk}{N}-\dfrac{xm+yn+zk}{2}=2 \\ \dfrac{xm}{a}=\dfrac{yn}{b}=\dfrac{zk}{c} \end{cases}$

- 共可組出 2 種三角共頂的均勻多面體（❹❻❽、❹❻❿），1 種四角共頂的均勻多面體（❸❹❺❹）。
- 頂點組合若有 1 個奇數邊形（例如：❸❻❽、❹❺❽），則必定無法拼組成功，因為會破壞頂點的組合模式。

(3)四種元件：最小的組合❸❹❺❻角度已超過 360 度，因此無法組成形體。

5. 利用正多邊形以相同頂點拼組方式組合出的多面體共有 28 種：
   - 單一元件→5 種，是屬於柏拉圖多面體
   - 二種元件以上→23 種，包含 13 種阿基米德多面體，5 種柱體族，5 種反柱體族
6. 沿著稜線可以切出一個正多邊形截面的均勻多面體（❸❹❸❹、❸❺❸❺、❸❹❹❹、❸❹❺❹），經由轉動後，可再生成另一種封閉性多面體，但其所形成的頂點組合方式已有不同（❸❹❹❹例外）。
7. 利用正多邊形也可組成不同頂點組合之封閉性多面體，此類屬於 Johnson 多面體，只要給予必要條件【頂點組合模式】，再給予次要條件【元件種類數量】或【頂點組合模式數量】，即可推算出其它的組合要素，並且能順利拼組出一個封閉性的多面體。
8. 利用百力智慧片及頂點珠可以幫助我們建構立體空間概念，其中教學用頂點珠的構造有其特殊性，可用南北極、南北迴歸線、赤道、經緯線來做角度的延伸觀察，其能做出的角度包含八孔共圈的 45^0、90^0、135^0、180^0 及六孔共圈的 60^0、120^0、180^0。
9. 均勻多面體因具有其對稱性，因此利用各種切割原理（如：對角線切割、等分切割或對稱型切割）來製作立體拼圖，較容易找出切割後之展開圖間的邊、角、面關係，且利用尺規作圖也能輕而易舉繪製出展開圖。
10. 我們製作出來的立體拼圖與七巧板的功能相似，七巧板是**透過邊的觀察來進行平面的拼組**，而此立體拼圖則是**透過面與面或面與邊的關係來進行立體的拼組**，希望透過此立體拼圖可以提升我們的立體空間概念。

七、未來研究方向：

1. 找出活動三算出來有整數解但卻無法拼組的原因。
2. 找出拼組 Johnson 多面體其頂點組合搭配及排列順序是否有其規律性？
3. Johnson 多面體除了軟件中的 92 種外，是否還有其他的形體呢？
4. 任意挑選正 N 邊形元件是否必能組成一個封閉性多面體呢？其拼組又有何規律？

八、參考資料

1. 第三十一屆國小組數學科展第二名。「探索有趣的正多面體」
2. 第三十三屆國小組數學科展第二名。「多面體之旅~妙探點線面」
3. 第四十屆國小組數學科展第一名。「正方體展開圖的探討」。
4. 第四十四屆國中組數學科。「正立方體的展開圖」。
5. 第四十六屆國小組數學科展第三名。「正多面體展開圖之研究」。
6. 陳創義：阿基米得多面體網頁（2010）。2010 年 1 月 11 檢索，取自 http://140.122.140.4/~cyc/_private/m1110.doc
7. 彭良禎：藝術新視界 http://blog.yam.com/ponpon2/category/214485
8. 洪有情：立體圖形的體積公式 http://b020.npue.edu.tw/ezcatfiles/b020/img/img/786/990129-6.ppt
9. 彭君智：三 D 立體變變變 http://www.math.sinica.edu.tw/math_media/d253/25313.pdf
10. 林義強：多面體簡介 http://www.cksh.tp.edu.tw/~cksite08/news/9.pdf
11. Polyhedra 多面體 http://www.ylmass.edu.hk/~mathsclub/ILC/Polyhedra/
12. 數學立體模型製作　蔡志強、孫文先編 九章出版社
13. 歡迎光臨！數學美術館 井上正允著 益智工房

活動剪影


【蕙綺解說❸❸❹❻的拼組問題】


【拼組立體球形】


【十二面體角度不是 120 度】


【轉動稜線的截面】


【討論推理的過程】

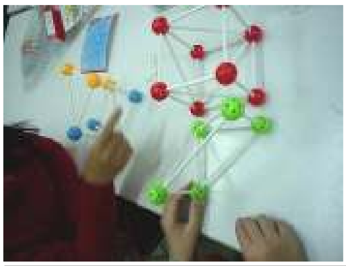

【組出的均勻多面體】


【思考切割的截面】


【我們的成果 15 種拼圖】


【阿 11 的三個截切面探討】


【研究 Poly Pro 軟件裡的形體】


【利用頂點珠製作切割截面】


【觀察頂點珠截切面繪製展開圖】


【❸❹❻拼組的怪現象〈角度問題〉】


【製作正十二面體雙內凹的形體】


【各種內凹外凸的形體】

【評語】080412

1.能以尤拉公式反推正多面體的類型，值得鼓勵，並運用等分原理，製作有趣的立體拼圖，擴大研究的廣度。建議作者立聯立方程式求解時能清楚如何從相關性質訂定條件的脈絡。

2.內容相當活潑，討論的方式也具有創意，是一件難得的好作品。

3.製作出來的立體拼圖可以做益智遊戲提升學生立體幾何概念，相當不錯。