中華民國 第50屆中小學科學展覽會

作品說明書

國小組　數學科

佳作

080411

跳得過嗎？

學校名稱：臺北縣樹林市大同國民小學

作者：	指導老師：
小六 洪銘鴻	顏榮皇 邱文鈞

關鍵詞：2009IMO 第六題、存在性、數學歸納法

摘要

這一篇作品是來自於 2009 年國際數學奧林匹克競賽第六題。

本研究先由直觀觀察思考後利用數學歸納法假設 $n \leqq k$ 成立再分成三種情形證明 $n=k+1$ 可以成立。

本研究除了證明競賽題目存在性並討論其對稱性及其極端現象，同時對於地雷遞增和地雷遞減提出討論，最後再利用 1 對 1 且映成的對應關係說明網路上 $a_i = i$ 和 2009 年國際數學奧林匹克競賽第六題所設條件相異 a_i 是相同思考結構。

壹、前言

一、研究動機

賣一個噱頭，請看官不要先看這篇作品，2009 年 IMO 第六題，你多久才想出來。

第四十九屆全國科學展覽頒獎典禮上一位得獎老師告訴我的老師，這一題難倒費爾茲獎的澳洲華裔數學家陶哲軒，國內數學奧林匹亞教練和許多數學教授都對這個題目很感興趣。
在國內數學奧林匹亞教練的網站找到這個題目：

一隻蚱蜢要回家, 從 0 往右跳, 規定一共要跳 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10 各一次, 但順序它可以自己決定 (所以蚱蜢一共落腳九次, 而且它家在 1+2+...+10=55 的地方). 但是路上有九個地雷, 蚱蜢跳到地雷就拜拜了, 比如在 2,5,6,15,17,21,28,43,52 的地方有地雷, 則蚱蜢就不能按照 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10 這個順序跳, 否則它在第三步會踩到地雷. 好, 問題是這樣: 證明不管路上的九個地雷如何分佈, 蚱蜢一定可以找到一種安全跳回家的方法。

某師範大學教離散數學的教授說他一開始是朝鴿籠原理開始想，可是都想不出來，當他看到我的作品後他才想到可以用數學歸納法。

二、研究目的

證明蚱蜢可以安全回家的方法。

三、研究工具與設備

紙、筆、電腦

貳、直觀觀察

黃色代表走 1 格，綠色代表走 2 格，藍色代表走 3 格，紫色代表走 4 格。
紅色代表新增加的地雷。

一、$n=1$

因為沒有地雷所以沒有。

二、$n=2$

情形一：

編號	1	2	3
M 2001	★		

圖 2~1、$n=2$、情形一

情形二：

編號	1	2	3
M 2002		★	

圖 2~2、$n=2$、情形二

三、 $n=3$

情形一：

編號	1	2	3	4	5	6
M 3001	☆	★				

圖 2~3、 $n=3$ 、情形一

情形二：

編號	1	2	3	4	5	6
M 3002	☆			★		
M 3003	☆				★	
M 3004		☆		★		
M 3005		☆			★	
M 3006				☆	★	

圖 2~4、 $n=3$ 、情形二

情形三：

編號	1	2	3	4	5	6
M 3007	☆		★			
M 3008		☆	★			
M 3009			☆	★		
M 3010			☆		★	

圖 2~5、 $n=3$ 、情形三

四、$n=4$

情形一：

編號	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
M 4001	☆	☆	★							
M 4002	☆	☆		★						
M 4003	☆	☆			★					
M 4004	☆		☆	★						
M 4005	☆		☆		★					
M 4006	☆			☆	★					
M 4007		☆	☆	★						
M 4008		☆	☆		★					
M 4009		☆		☆	★					
M 4010			☆	☆	★					

圖 2~6、n=4、情形一

情形二：

編號	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
M 4011	☆	☆					★			
M 4012	☆	☆						★		
M 4013	☆	☆							★	
M 4014	☆		☆				★			
M 4015	☆		☆					★		
M 4016	☆		☆						★	
M 4017	☆			☆			★			
M 4018	☆			☆				★		
M 4019	☆			☆					★	
M 4020	☆				☆		★			
M 4021	☆				☆			★		
M 4022	☆				☆				★	

M 4023		☆	☆				★			
M 4024		☆	☆					★		
M 4025		☆	☆						★	
M 4026		☆		☆			★			
M 4027		☆		☆				★		
M 4028		☆		☆					★	
M 4029		☆			☆		★			
M 4030		☆			☆			★		
M 4031		☆			☆				★	
M 4032			☆	☆			★			
M 4033			☆	☆				★		
M 4034			☆	☆					★	
M 4035			☆		☆		★			
M 4036			☆		☆			★		
M 4037			☆		☆				★	
M 4038				☆	☆		★			
M 4039				☆	☆			★		
M 4040				☆	☆				★	
M 4041	☆						☆	★		
M 4042	☆						☆		★	
M 4043	☆							☆	★	
M 4044		☆					☆	★		
M 4045		☆					☆		★	
M 4046		☆						☆	★	
M 4047			☆				☆	★		
M 4048			☆				☆		★	
M 4049			☆					☆	★	

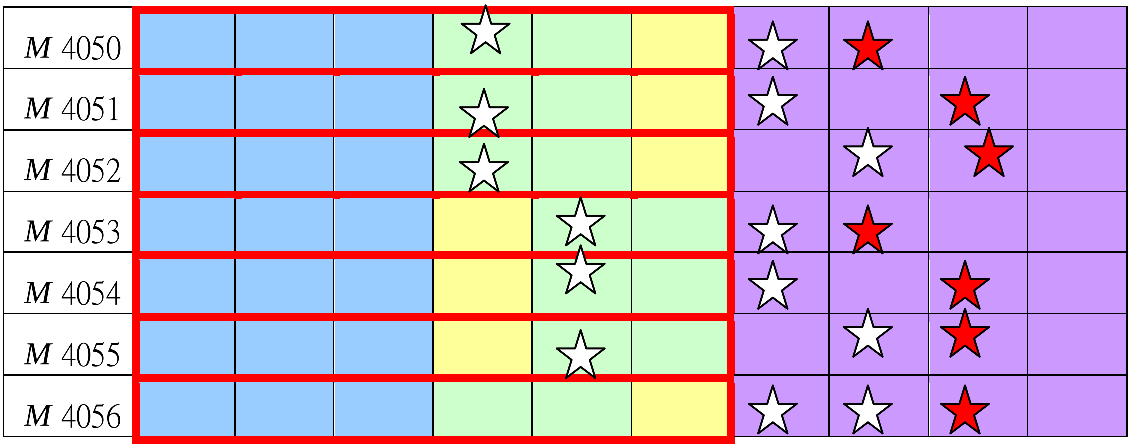
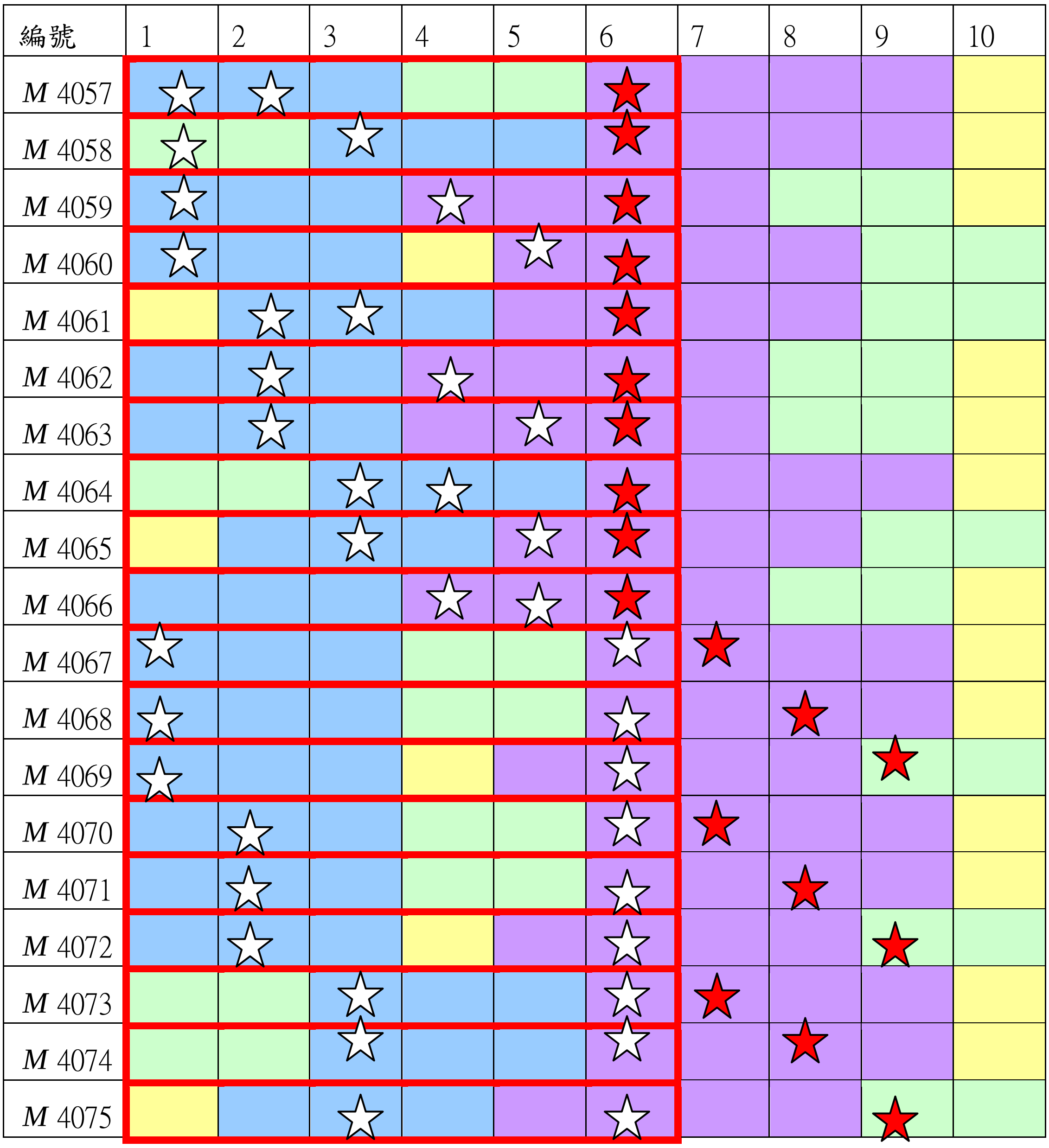


圖 2~7、n=4、情形二

情形三：



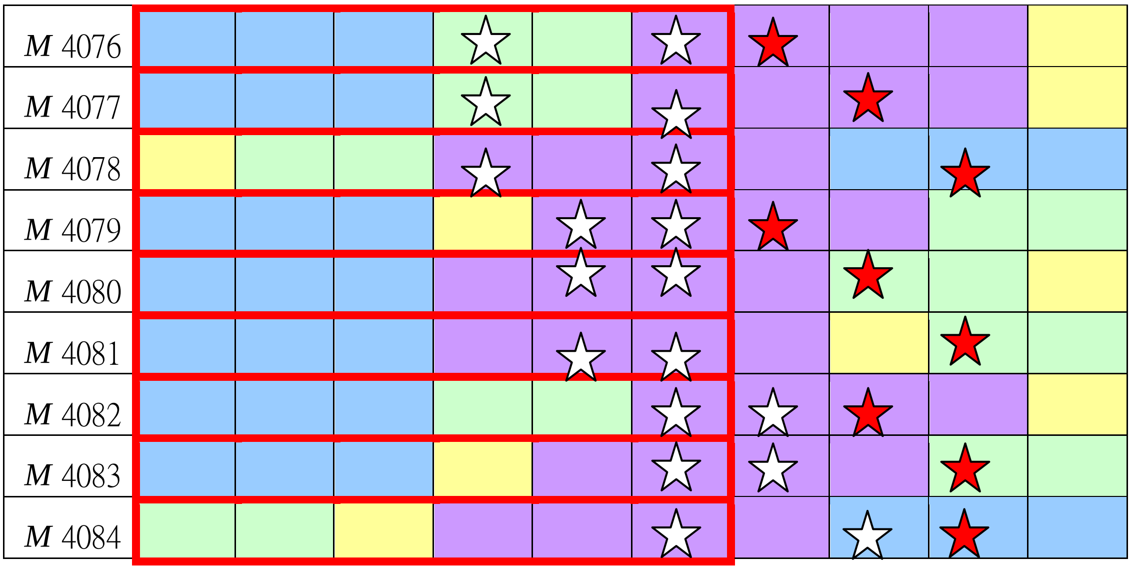


圖 2~8、 n=4、情形三

參、數學歸納法

一、起始階段

n=1，沒有地雷。

n=2，有 1 顆地雷，如前一章的圖 2~1 及圖 2~2。

n=3，有 2 顆地雷，如前一章的圖 2~3、圖 2~4 及圖 2~5。

n=4，有 3 顆地雷，如前一章的圖 2~6、圖 2~7 及圖 2~8。

二、假設

設 $n \leqq k$ ，$\frac{k(k+1)}{2}$ 格子有 k-1 顆地雷成立。

求證 $n=k+1$，$\frac{k(k+1)}{2}+k+1=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$ 格，有 k 顆地雷，蚱蜢可以跳過。

三、歸納階段

（一）情形一：

$\frac{k(k+1)}{2}$-1 格子， k 顆地雷	※	k 格 ，沒有地雷	※

圖 3~1、 $n=k+1$ 情形一

※代表沒有地雷。

有 $\frac{k(k+1)}{2}$-1 格子，針對 $n=k$ 顆地雷時的策略如圖 3~2。

$n-1$顆地雷原始堆數	新增加	策略一	策略二	策略三
一堆	一堆			
	兩堆			
兩堆	一堆			
	兩堆			
	三堆			
三堆	兩堆			
	三堆			
	四堆			
k-1 堆	k-2 堆			
	k-1 堆			
	k 堆			

圖 3~2、k 顆地雷的三種策略

策略一：

原先一堆：沒辦法。因為地雷有四顆，可以走的步數也只有四步。

原先兩堆：沒辦法。原本兩堆可能是 1、2 或 2、1 不過新的剛好在它們中間變成一堆，四顆地雷沒辦法走。

原先三堆：新的那顆剛好在三堆的中間，設三堆是 1、1、1 如果在前面就會變成 3、1 如果在後面就會變成 1、3，如果是 3、1 就先走四再走二或三，如果是 1、3 就先走二或三再走四。

原先 k-1 堆：新增加的那顆有可能在 k-1 堆的前面或後面，如果在前面就先跨過那顆再走 k-1 堆的步數，如果再後面就先走 k-1 的步數再跨過那顆就好了。

策略二：

原先一堆：因為原先是三顆地雷所以新增加的有可能在他的前面或後面，如果再前面就先走二或三跨過它再走四就好了，如果在後面就先走四再走二、三。

原先兩堆：假設兩堆剛好是 1、2，新的那顆如果在前面就會變成 2、2 如果在後面就會變成 1、3，如果是 2、2 就先走三再走四，如果是 1、3 就先走二、三再走四。

原先三堆：假設三堆是 1、1、1 如果新的在前面就會變成 2、1、1 如果在中間就會變成 1、2、1 如果在後面就會變成 1、1、2，如果是 2、1、1 就先走四再走三再走二，如果是 1、2、1 也是先走四再走三再走二，如果是 1、1、2 就先走二再走三再走四。

原先 k-1 堆：先增加的那顆有可能連再第一顆的前面或是連在最後一顆的後面，如果連在前面就把第一步的步數加一就好了，如果再後面就把最後一步加一就好了。

策略三：

原先兩堆：假設兩堆剛好是 1、2，新的那顆如果在前面就會變成 1、1、2 如果在後面就會變成 1、2、1，不過兩個都走二三四就好了。

原先三堆：因為地雷只有四顆所以分成四堆只有一種可能就是 1、1、1、1，就先走四再走二再走三就好了。

原先 k-1 堆：k 堆只有一種可能就是一個有地雷一個沒地雷，這樣就走偶數就好了，如果全部的長度是 $4m$ 那只要走三次就可以跨過所有的地雷了，先走 2 再走 $2m-2$ 再走 $2m$ 就可以了。

情形二：

如圖 3~3，k 格和 $\frac{k(k+1)}{2}$-1 格都有地雷，所以地雷的個數一定少於 k，所以走 $n=k$ 的走法後面再走 $k+1$。

$\frac{k(k+1)}{2}$-1 格子，有地雷	※	k 格，有地雷	※

圖 3~3、$n=k+1$ 情形二

情形三：

如圖 3~4，k 格和 $\frac{k(k+1)}{2}$-1 格都有地雷，所以地雷的個數一定少於 k，所以走 $n=k$ 的走法到最後一步的時候先走 $k+1$ 再走原本的最後一步。

$\frac{k(k+1)}{2}$-1 格子，有地雷	☆	k 格，有地雷	※

圖 3~4、$n=k+1$情形三

從前面數來 $\frac{k(k+1)}{2}$-1 格沒有地雷，則看從後面數來第 1 格有沒有地雷，沒有就可以走。從前面數來 $\frac{k(k+1)}{2}$-2 格沒有地雷，則看從後面數來第 2 格有沒有地雷，沒有就可以走。從前面數來 $\frac{k(k+1)}{2}$-3 格沒有地雷，則看從後面數來第 3 格有沒有地雷，沒有就可以走。從前面數來 $\frac{k(k-1)}{2}$ 格沒有地雷，則看從後面數來第 k 格有沒有地雷，沒有就可以走。

(橘色代表 k+1 步)

<table>
<tr><td>策略</td><td colspan="6">$\frac{k(k+1)}{2}$-1 格</td><td colspan="4">k 格</td><td></td></tr>
<tr><td>1</td><td colspan="5">……</td><td>※</td><td>☆</td><td>…</td><td>☆</td><td>☆</td><td>※</td></tr>
<tr><td>2</td><td colspan="4">……</td><td>※</td><td>☆</td><td>…</td><td>☆</td><td>☆</td><td>※</td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td colspan="3">……</td><td>※</td><td>☆</td><td>…</td><td>☆</td><td>☆</td><td>※</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>…</td><td colspan="6">…</td><td colspan="5">…</td></tr>
<tr><td>k</td><td>……</td><td>※</td><td>☆</td><td>…</td><td>☆</td><td>☆</td><td>※</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>策略</td><td colspan="2">$\frac{k(k-1)}{2}$ 格</td><td colspan="4">k 格</td><td colspan="5">k+1 格</td></tr>
</table>

圖 3~5

$n=k+1$ 的時候 k 顆地雷可以被跳過。
依據數學歸納法，網路森棚教官的題目被證明。

肆、性質

一、對稱性

當地雷的個數是$n=k-1$時，$n=3$有兩種對稱情形，是$n=3$的情形四和情形六。

0	1	2	3	4	5	6
	☆				☆	

圖 4~1、對稱性

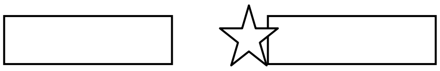
一開始我認為可以走越大步越好，可是我現在發現最大步是先走三在走一二，而另一個則是二一三，結果發現一個是三一二另一個是二一三，剛好兩個相反。

0	1	2	3	4	5	6
		☆		☆		

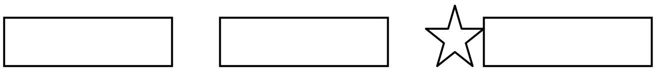
圖 4~2、對稱性

一開始我也認為走三比較好，可是如果一開始走三剛好是三二一，如果先走一剛好是一二三也是相反的。而我也有用了其他有兩種解法的，結果發現都不會相反，只有對稱的會相反。

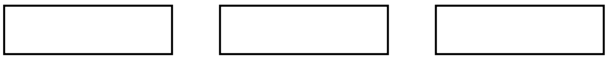
二、極端現象



新增加的地雷剛好讓兩堆地雷變成相同的數量而且中間只差一格，如果一邊地雷的數量大於或等於最大的步數就沒辦法走，就算小一步也不行因為這樣只能走一半，最少要小於兩步以上，所以第一步就先走地雷的個數加一，下一步再走最大步就好了。

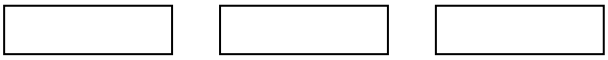


新增加的地雷剛好讓三堆地雷變成相同的數量而且中間都差一格，如果一邊地雷的數量大於或等於最大的步數就沒辦法走，就算少一步也不行，最少要小於三步以上，所以第一步就走地雷的個數加一，再走地雷的個數加二，再走最大步就好了。



$n-1$　　　$n-2$　　　$n-2$

因為第一步只能走n，可是後面有兩個$n-2$走完一個還有一個，n跟$n-1$也都用過不能再用所以就沒辦法走。



$n-1$　　　$n-1$　　　$n-2$

第一步只能走n可是走完就沒辦法走了所以這個沒辦法走。

三、交換性

交換性簡單來說就是有兩種或三種方法，像 $n = 3$ 有兩個地雷時就有五種情形。

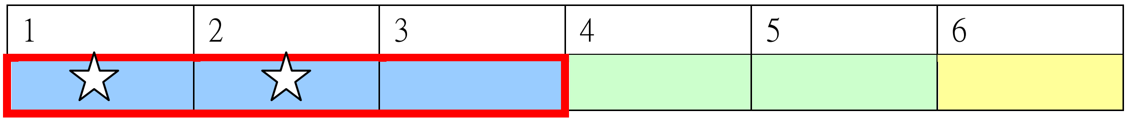


圖 4~3、交換性

原本是走 3.2.1 可是也可以走 3.1.2 把 2.1 交換變成 1.2。

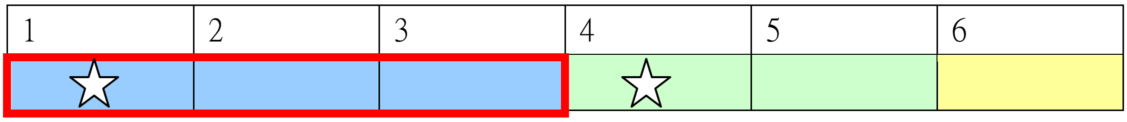


圖 4~4、交換性

原本是走 3.2.1 也可以走成 2.1.3。

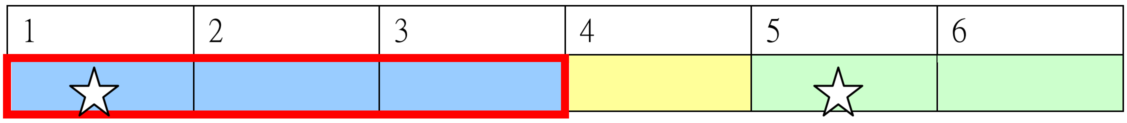


圖 4~5、交換性

原本是 3.1.2 也可以變成先走 2 在走 1 然後再走 3 就好了。

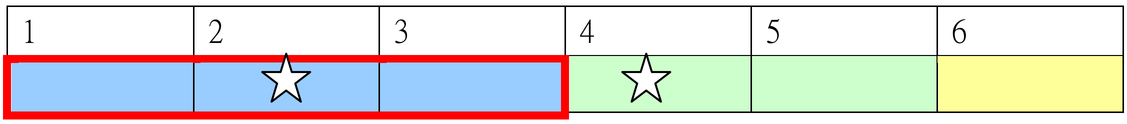


圖 4~6、交換性

原本是走 3.2.1 可以改成走 1.2.3。

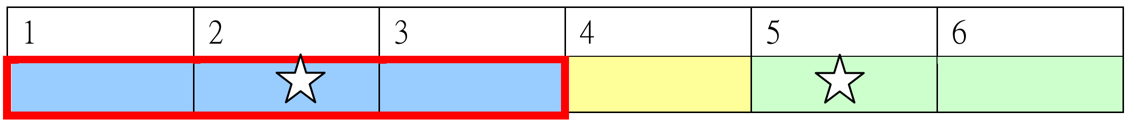


圖 4~7、交換性

一開始是走 3.1.2 後來改成走 1.2.3。經過上面的討論發現連在一起的步數兩種交換，其他四個步數都是全部交換。

伍、地雷數的遞增

更改條件，假設有 n-1+k 顆地雷，保證可以通過的情形如表 5~1。(地雷連在一起的除外)

k =1

n =2，新的地雷擺下去就滿了，所以沒辦法走。

n =3，地雷擺在 1.3.5 就只能走 2，所以沒辦法走。

n =4，地雷擺在 1.3.5.7 除了走 2 還可以走新增加的步數 4，只剩一顆在走 3 就好了。

k =2

n =4，地雷擺在 1.3.5.7.9，只能走 2 和 4 所以沒辦法走。

n =5，地雷擺在 1.3.5.7.9.11，雖然有增加步數，可是增加的是奇數，所以還是沒辦法走。

n =6，地雷擺在 1.3.5.7.9.11.13，新增加一個步數 6，所以可以走 2.4.6，還剩一顆走 5 就好了。

k =3

n =6，地雷擺在 1.3.5.7.9.11.13.15，可以走 2.4.6，還剩二顆走 5 就好了。

k =4

n =6，地雷擺在 1.3.5.7.9.11.13.15.17，只可以走 2.4.6，還剩三顆所以沒辦法走。

n =7，地雷擺在 1.3.5.7.9.11.13.15.17.19，雖然有增加步數，可是增加的是奇數，所以還是沒辦法走。

n =8，地雷擺在 1.3.5.7.9.11.13.15.17.19.21，增加新的步數 8，所以走 2.4.6.8，還剩一顆走 7 就好了。

k =5

n =8，地雷擺在 1.3.5.7.9.11.13.15.17.19.21.23，增加新的步數 8，所以走 2.4.6.8，還剩二顆走 7 就好了。

$k=6$

$n=8$，地雷擺在 1.3.5.7.9.11.13.15.17.19.21.23.25，增加新的步數 8，所以走 2.4.6.8，還剩三顆走 7 就好了。

表 5~1 保證可以通過的情形

$n-1+k$ 顆地雷	保證可以跳得過
$k=0$	本題的研究目的，任何數都可以。
$k=1$	$n\geqq 4$ 才可以保證跳得過。
$k=2$ 及 $k=3$	$n\geqq 6$ 才可以保證跳得過。
$k=4$、$k=5$ 及 $k=6$	$n\geqq 8$ 才可以保證跳得過。
$k=7$、$k=8$、$k=9$ 及 $k=10$	$n\geqq 10$ 才可以保證跳得過。
$k=11$、$k=12$、$k=13$、$k=14$ 及 $k=15$	$n\geqq 12$ 才可以保證跳得過。
$k=\frac{t(t-1)}{2}+1$、$k=\frac{t(t-1)}{2}+2\cdots k=\frac{t(t-1)}{2}+t=\frac{t(t+1)}{2}$	$n\geqq 2t+2$ 才可以保證跳得過。

所以可以知道 $k=1$ 要 $n\geqq 4$ 才可以保證跳得過，$k=2$ 及 $k=3$ 要 $n\geqq 6$ 才可以保證跳得過，$k=4$、$k=5$ 及 $k=6$ 要 $n\geqq 8$ 才可以保證跳得過，$k=\frac{t(t-1)}{2}+1$、$k=\frac{t(t-1)}{2}+2\cdots k=\frac{t(t-1)}{2}+t=\frac{t(t+1)}{2}$ 要 $n\geqq 2t+2$ 才可以保證跳得過。

陸、地雷數的遞減

更改條件，假設有 n-1+k 顆地雷，保證可以通過的情形如表 6~1。(地雷連在一起的除外)

表 6~1 開始出現地雷可以通過的情形

n-1+k 顆地雷	開始出現地雷可以通過的情形
$k=\frac{n(n-1)}{2}-(n+1)$	不會出現跳得過情形。
$k=\frac{n(n-1)}{2}-n$	地雷堆法以 1、2、3、…、n-1 呈現。
$k=\frac{n(n-1)}{2}-n\text{-}1$	地雷堆法以 1、2、3、…、n-2 呈現。
$k=\frac{n(n-1)}{2}-n\text{-}2$	地雷堆法以 1、2、3、…、n-3 呈現。
$k=\frac{n(n-1)}{2}-n\text{-}3$	地雷堆法以 1、2、3、…、n-4 呈現。
$k=\frac{n(n-1)}{2}-n\text{-}4$	地雷堆法以 1、2、3、…、n-5 呈現。
$k=\frac{n(n-1)}{2}-n\text{-}5$	地雷堆法以 1、2、3、…、n-6 呈現。
$k=\frac{n(n-1)}{2}-n\text{-}6$	地雷堆法以 1、2、3、…、n-7 呈現。
$k=\frac{n(n-1)}{2}-n\text{-}t$	地雷堆法以 1、2、3、…、n-(t+1)呈現。

$k=\frac{n(n-1)}{2}-(n+1)$時，因為不管地雷怎麼排都沒辦法走，$k=\frac{n(n-1)}{2}-n$時，只要地雷堆法以 1、2、3、…、n-1 呈現，就可以走 2、3、4...、n 步，$k=\frac{n(n-1)}{2}-n\text{-}1$時，只要地雷堆法以 1、2、3、…、$n$-2 步呈現，就可以走 2、3、4...、$n$-1，所以到$k=\frac{n(n-1)}{2}-n\text{-}t$時，地雷堆法以 1、2、3、…、$n$-($t$+1)呈現，就可以走 2、3、4...、$n$-($t$+1)+1 步。

柒、2009 年國際奧林匹亞數學競試第六題

剛開始，我是由老師的指引，由森棚教官的塗鴉-旁觀下載的題目開始思考。
原始題目是a_i為任意相異的自然數，森棚教官則改為$a_i = i$的條件。
針對原始題目，可以做變數的轉換：

$\{a_i\}$：原始題目，$\forall i = \{1、2、3、4、\cdots、n\}$

$\{b_i\}$：把$\{a_i\}$依序排列，$\min\{a_i\} = b_1$，$\max\{a_i\} = b_n$，

把$\{b_i\}$依序轉換成$b_i = i$。

由$\{a_i\}$轉換成$\{b_i\}$，再由$\{b_i\}$轉成i都是 1 對 1 且映成，所以，數學競試第六題被證明。

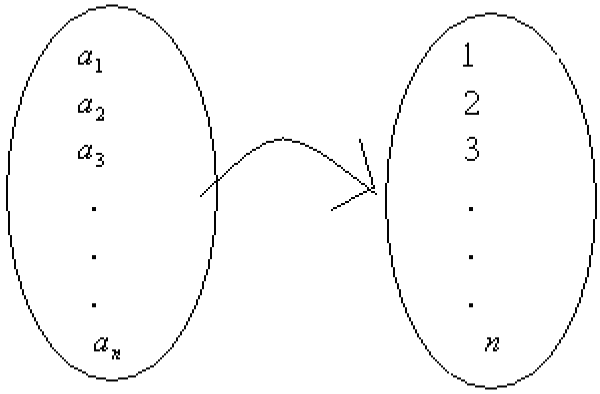


圖 7~1、1 對 1 映成

捌、結論

一、研究主題

就像表 5~1 一樣任何數都可以平安跳過。

二、地雷數的遞增

n-1+k 顆地雷，當 $k=\frac{t(t-1)}{2}+1$、$k=\frac{t(t-1)}{2}+2\cdots k=\frac{t(t-1)}{2}+t=\frac{t(t+1)}{2}$ 要 $n \geqq 2t+2$ 才可以保證跳得過。

三、地雷數的遞減

n-1+k 顆地雷，當 $k=\frac{n(n-1)}{2}-n\text{-}t$ 時，地雷堆法以 1、2、3、…、n-(t+1)呈現才可以保證跳得過。

參考資料

民國 99 年 2 月 28 日，森棚教官的塗鴉-旁觀 IMO 2009，
http://www.wretch.cc/blog/giawgwan/7205340

附錄、陶哲軒網站的摘錄

Everyone who does not already know the solution, and has not worked on the problem already, is welcome to jump in and participate, regardless of mathematical level. However, in order not to spoil the experiment, I would ask that those of you who have already found a solution not to give any hint of the solution here until after the collaborative effort has found its solution. (At that point, everyone is welcome to give out their solutions here.) For instance, I will not be participating in the project except as a moderator.

For similar reasons, I would ask that competitors at the actual 2009 IMO refrain from commenting substantively on the problem on this thread until after the collaborative effort has succeeded. (I know this may require some significant restraint, but I suspect the problem will become too easy if we get comments along the lines of "This was a tough problem! I tried X and Y and Z, and they didn't work; I tried W also but ran out of time. I hear that someone solved the problem using U, though." Of course, after the collaborative effort has succeeded, you are more than welcome to share your own experiences with the problem.)

Participants should avoid explicitly searching for solutions to this problem on the internet (I would imagine spoilers would become available in a few days). If you do accidentally find such a solution online, I would ask that you recuse yourself from the rest of the collaboration, until after they have found a solution also. (In particular, posting links to a solution is strongly discouraged until after the collaborative effort has succeeded.)

In a similar vein, extensive searching of the mathematical literature should only be undertaken if there is a consensus to do so on this thread.

Participants are also discouraged from working too hard on this problem "offline"; if you have a potentially useful observation, one should share it with the other collaborators here, rather than develop it further in private, unless it is "obvious" how to carry the observation further.

Actually, even "frivolous" observations can (and should) be posted on this thread, if there is even a small chance that some other participant may be able to find it helpful for solving the problem.

Similarly, "failed" attempts at a solution are also worth posting; another participant may be able to salvage the argument, or else the failure can be used as a data point to eliminate some approaches to the problem, and to isolate more promising ones.

Participants should view themselves as contributing to a team effort, rather than competing with each other (in contrast to the actual IMO). The point is not to obtain bragging rights for being the first or quickest to solve the problem (which has, after all, already been solved), but instead to experimentally test the hypothesis that a mathematical problem can be solved by a massive collaboration, without requiring serious effort on behalf of any one of the participants. (See Tim Gowers' essay "?" for more discussion.)

To make it easier to reference comments in this thread, I would ask commenters to number their comments (so that the first comment be labeled 1., the second comment be labeled 2., and so forth.)

Unlike the actual IMO, there is no artificial time limit on this exercise, though if there is insufficient participation, or the collaborative effort grinds to a halt, I may at my discretion close the experiment and give out solutions after a reasonable time period.

民國 5 月 15 日，取自於：

http://terrytao.wordpress.com/2009/07/20/imo-2009-q6-as-a-mini-polymath-project/

【評語】080411

1.有關地雷問題的研究，相當具有吸引力，是個很好的問題。

2.討論方法具有一定的創意，可惜分析討論的完整性仍有很大改進的空間，整體來說還算是一件不錯的作品。