中華民國 第 50 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國小組　數學科

080410

四堆石頭

學校名稱：臺北縣永和市永和國民小學

作者：	指導老師：
小五 謝宜芳	李振平 楊壁如

關鍵詞：整數四則計算、數與量的關係、因數與倍數

摘要

在四堆石頭的遊戲中，利用五年級上學期「整數的四則運算」「結合律」、「分配律」「因數與倍數」中的質因數分解，及利用五下的「如何解題」引進未知數進行解題策略，使四組數字皆成爲其總和的平均數，並藉由四組數字的數量關係，歸納出移位時所需的最少次數。

壹、研究動機

有一天，我在一本數學益智書上發現一道題目：四堆石頭分別爲２，６，７，１７，要藉由移動石頭使其變成８，８，８，８，並且只能移動四次，移動時的遊戲規則如下：

一、將石頭分成四堆

A	B	C	D
2	6	7	17

表格 1

二、從任一堆拿幾顆石頭到另一堆，拿過去的石頭數目必須與原來的數目一樣，例如：

D 堆 17 顆移給 C 堆 7 顆　變成→ A,B 兩堆不變,C 堆變 14 顆,D 堆變 10 顆

三、持續上面規則將石頭搬移，到每堆石頭數目皆一樣爲止。

我試了好幾次才有辦法在四次內完成，後來我嘗試不同的數字組合，發現石頭總數一樣但組合方式不同時，所需的移動次數也不同，而且並非所有的數字組合都能順利的平分爲四堆。 這個題目深深的吸引了我，於是我和老師討論，希望能找出各種組合的最少步數，因而有了這次的研究主題！

貳、研究目的

一、計算不同總數的石頭共有幾種組合

二、實驗各種組合之最少移動次數

三、歸納可平分成四堆或不可的因素

四、探討移動過程中各堆石頭數的變化規則與關係

參、研究設備及器材

棋子(代替石頭)、紙、筆

肆、研究過程

一、計算石頭的組合數

（一）老師要我先減少石頭的總數，以便探討。

爲了簡化問題，我先從三堆石頭著手，用實際分堆的方式列出石頭總數爲 12 顆時所有的組合，並記錄做成下面的表格 2。

組別	第一堆	第二堆	第三堆
1	1	1	10
2	1	2	9
3	1	3	8
4	1	4	7
5	1	5	6
6	2	2	8
7	2	3	7
8	2	4	6
9	2	5	5
10	3	3	6
11	3	4	5
12	4	4	4

表格 2

接著我增加石頭的數量，同樣分成三堆，總數增為 24 顆，總共可以排列出 48 種組合，詳細實驗紀錄如表格 3

組別	第一堆	第二堆	第三堆
1	1	1	22
2	1	2	21
3	1	3	20
4	1	4	19
5	1	5	18
6	1	6	17
7	1	7	16
8	1	8	15
9	1	9	14
10	1	10	13
11	1	11	12
12	2	2	20
13	2	3	19
14	2	4	18
15	2	5	17
16	2	6	16
17	2	7	15
18	2	8	14
19	2	9	13
20	2	10	12
21	2	11	11

22	3	3	18
23	3	4	17
24	3	5	16
25	3	6	15
26	3	7	14
27	3	8	13
28	3	9	12
29	3	10	11
30	4	4	16
31	4	5	15
32	4	6	14
33	4	7	13
34	4	8	12
35	4	9	11
36	4	10	10
37	5	5	14
38	5	6	13
39	5	7	12
40	5	8	11
41	5	9	10
42	6	6	12
43	6	7	11
44	6	8	10
45	6	9	9
46	7	7	10
47	7	8	9
48	8	8	8

表格 3

試了三堆的組合後，我開始將堆數增加成四堆，看看會有什麼發現，以下為每堆 **2** 顆石頭，合計 **8** 顆時，共列出 **5** 個組合，紀錄如表格 4

組別	第一堆	第二堆	第三堆	第四堆
1	1	1	1	5
2	1	1	2	4
3	1	1	3	3
4	1	2	2	3
5	2	2	2	2

表格 4

接著我又增加石頭的數量，同樣分成四堆，總數共 16 顆，總共可以排列出 34 種組合，記錄如表格 5。

組別	第一堆	第二堆	第三堆	第四堆
1	1	1	1	13
2	1	1	2	12
3	1	1	3	11
4	1	1	4	10
5	1	1	5	9
6	1	1	6	8
7	1	1	7	7
8	1	2	2	11
9	1	2	3	10
10	1	2	4	9
11	1	2	5	8
12	1	2	6	7
13	1	3	3	9
14	1	3	4	8
15	1	3	5	7
16	1	3	6	6
17	1	4	4	7
18	1	4	5	6
19	1	5	5	5
20	2	2	2	10
21	2	2	3	9
22	2	2	4	8
23	2	2	5	7
24	2	2	6	6
25	2	3	3	8
26	2	3	4	7
27	2	3	5	6
28	2	4	4	6
29	2	4	5	5
30	3	3	3	7
31	3	3	4	6
32	3	3	5	5
33	3	4	4	5
34	4	4	4	4

表格 5

隨著石頭的總數增加，組合的數量也變多，如果要逐一記錄將會需要許多的時間，也難以立刻判斷是否沒有遺漏，於是我和老師討論是否有較快的方式可求得正確的組數。

（二）歸納石頭數量的變化過程，尋找計算組數的規則

（1）從表格 2~5 觀察發現最少的一堆石頭，是由少變化到多，而且一定會從 1 變成石頭總數 T×$\frac{1}{\text{堆數}}$。

例如：3 堆時，若石頭總數 T=12 顆，$\frac{T}{3}$=4，因此最少的一堆會由 1~4

4 堆時，若石頭總數 T=16 顆，$\frac{T}{4}$=4，因此最少的一堆會由 1~4

（2）堆數為 3 堆時，第一堆決定後，剩下的兩堆總和不變，永遠等於石頭總數－第一堆，因此可將剩下兩堆視為一組。

（3）堆數為 4 堆時，第一堆固定後，第二堆也會由 1~$\frac{T}{4}$，而這兩堆合計的變化數較小，而且觀察得知兩堆和一定小於或等於總數的一半($\frac{T}{2}$)。

（4）堆數為 4 堆時，剩下的兩堆總數為扣除較少的兩堆之後的數，會因剩下的石頭數量多寡而有不同的組合變化。

（5）堆數為 4 堆時，依照前面歸納出來的情況，可將最少的兩堆石頭當成一組來看，再將較多的兩堆石頭當成一組來看。

（三）觀察到前面的特點後，與老師討論，我們找出了一些計算組數的規則，利用此方式可減少推算組數的複雜度，下面為我們找出的計算規則

(1)兩堆石頭合起來為一個整數 n 時，如果將 n 分解成兩個正整數，發現可以分出的組數不超過 n 的一半，我們記成[$\frac{n}{2}$]

【例】7 可以分解成（1,6）、（2,5）、（3,4）三組正整數，組數=[$\frac{7}{2}$]=3

(2)我們以三堆石頭，總數 12 顆的情形為例，將 12 分成(a,b,c)，其中$a \le b \le c$，按前面討論的情況，最少的一堆石頭 a，是由少變到多，而且一定會從 1 變成石頭總數 T×$\frac{1}{\text{堆數}}$，因此我們將 a 固定後，就可以將(b、c)視為一組來討論，並利用(1)的原則計算組數。

例如：a=2，則 b+c=10，為了確保 b、c、a，我們先給 b、c 各 1 顆石頭，b、c 的組合數相當於 10－2(2－1)=8 顆石頭分成兩堆時的組合數，也就是[$\frac{8}{2}$]=4，(b、c)有四種組合，(1,7)、(2,6)、(3,5)、(4,4)。

所以我們導出下面的計算公式。

組數= [$\frac{(b+c)-2(a-1)}{2}$]

接著我們用公式驗證表格 2 的結果，
3 堆共 12 顆可求出 12 組的變化，詳細結果如下：

a	(b+c)	(b+c)－2(a-1)	$[\frac{(b+c)-2(a-1)}{2}]$
1	11	11	5
2	10	8	4
3	9	5	2
4	8	2	1
		總組數	12

表格 2-A

再驗證表格 3
3 堆共 24 顆，共可求出 48 組的變化，詳細結果如下：

a	(b+c)	(b+c)－2(a-1)	$[\frac{(b+c)-2(a-1)}{2}]$
1	23	23	11
2	22	20	10
3	21	17	8
4	20	14	7
5	19	11	5
6	18	8	4
7	17	5	2
8	16	2	1
		總組數	48

表格 3-A

(3)接著我們討論 4 堆石頭的情形，以總數 16 顆爲例，將 16 分成（a,b,c,d），其中$a \le b \le c \le d$，將（a,b）視爲一組，（c,d）視爲一組，我們只要固定（a,b），剩下的（c,d）就可以用上面的方法算出組數

【說明】以 a=2，b=3 爲例，此時 c+d=16-2-3=11，但因 c,d 都大於等於 b，所以 c,d 最小爲 3，爲了確保 c,d 會大於 3，因此我們先各分配 2 給 c 和 d，於是 c,d 的組合數相當於 11-2(3-1)=7 顆石頭分成兩堆時的組合。也就是說，組數爲 $[\frac{7}{2}]=3$，我們將上述過程簡化爲$[\frac{(c+d)-2(b-1)}{2}]$以方便計算。

(4)接著我們利用這個方式列表計算表格 5 的組合數和我一個一個推算出來的組數是否相同。

a	b	(c+d)	(c+d)-2(b-1)	$\left[\frac{(c+d)-2(b-1)}{2}\right]$
1	1	14	14	7
1	2	13	11	5

1	3	12	8	4
1	4	11	5	2
1	5	10	2	1
2	2	12	10	5
2	3	11	7	3
2	4	10	4	2
3	3	10	6	3
3	4	9	3	1
4	4	8	2	1
			總組數	34

表格 5-A

(5)利用此方法可以用較少的步驟計算出所有的組數，例如 3 堆共 24 顆原先逐步推算共需要 48 次(如表格 3)，利用此方式只要 8 次(如表格 3-A)就可以計算出來，4 堆共 16 顆原先逐步推算共需要 34 次(如表格 5)，但利用公式只需要 11 次就可以計算(如表格 5-A)；若要推算 4 堆 32 顆石頭，逐一排列計算共要 249 次(如附件表格 3)，但用此方式只要 43 次(如附件表格 4)就可以完成組數推算。另外此方式也可以驗算出採用逐步排列計算出來的總組數是否正確，也較容易推算在哪發生錯誤。

二、依遊戲規則移動石頭使每一堆相等，並紀錄最少移動次數

接著將石頭依照遊戲的規則進行移動的實驗，並記錄各組合的最少移動次數，我先從總數量少的開始進行。

(一)**我們先從三堆石頭開始**，逐一移動並記錄移動次數，結果如下：

3 堆石頭總數 12 顆時的移動記錄

組數	數字 1	數字 2	數字 3	步數
1	1	1	10	4
2	1	2	9	3
3	1	3	8	3
4	1	4	7	2
5	1	5	6	2
6	2	2	8	2
7	2	3	7	2
8	2	4	6	1
9	2	5	5	3
10	3	3	6	∞
11	3	4	5	2
12	4	4	4	0

表格 6

接著實驗 3 堆石頭共 24 顆的移動，記錄如下

組別	數字 1	數字 2	數字 3	步數
1	22	1	1	6
2	21	2	1	5
3	20	3	1	6
4	19	4	1	4
5	18	5	1	6
6	17	6	1	5
7	16	7	1	6
8	15	8	1	3
9	14	9	1	6
10	13	10	1	5
11	12	11	1	6
12	20	2	2	4
13	19	3	2	5
14	18	4	2	3
15	17	5	2	5
16	16	6	2	4
17	15	7	2	5
18	14	8	2	2
19	13	9	2	5
20	12	10	2	4
21	11	11	2	5
22	18	3	3	∞
23	17	4	3	4
24	16	5	3	4
25	15	6	3	∞
26	14	7	3	5
27	13	8	3	3
28	12	9	3	∞
29	11	10	3	3
30	16	4	4	2
31	15	5	4	4
32	14	6	4	3
33	13	7	4	4
34	12	8	4	1
35	11	9	4	4
36	10	10	4	3

37	14	5	5	5
38	13	6	5	3
39	12	7	5	7
40	11	8	5	3
41	10	9	5	5
42	12	6	6	∞
43	11	7	6	4
44	10	8	6	2
45	9	9	6	∞
46	10	7	7	5
47	9	8	7	3
48	8	8	8	0

表格 7

我在三堆，總數 12 顆和三堆，總數 24 顆的移動實驗中發現，只要三堆都是 3 的倍數情況下，不管怎麼移動數字組合皆不會再改變，例如 12,6,6 不管由哪一堆給哪一堆，都還是原來的數字組合，我用∞代表它是一個沒有結束的情況。

與老師討論後，我們推測其原因：3 堆 12 顆時，因最後完成時每堆 4 顆，將 4 做質因數分解，4=2x2，全部都只有 2 的因數，故當石頭數皆有 3 的因數時，再怎麼互給也無法把 3 的因數完全消失，故會形成無限循環的情形。

例：(9,9,6)=(3x3,3x3,2x3)

第一堆給第三堆→(3x3－2x3，3x3，2x3x2) 整理後→(1x3，3x3，4x3)

之後**不管再怎麼移動，3 的因數皆無法消失，故會形成無限循環的情形**。

(二)**接著進行四堆共 16 顆，完成後每堆各為 4 顆的實驗**，結果如下：

數字 1	數字 2	數字 3	數字 4	**步數**
4	4	4	4	0
6	4	4	2	1
5	4	4	3	2
6	5	4	1	2
6	6	2	2	2
7	4	4	1	2
7	4	3	2	2
8	4	2	2	2
5	5	4	2	3
6	6	3	1	3
6	5	3	2	3
7	6	2	1	3
7	5	3	1	3
7	5	2	2	3

8	5	2	1	3
8	4	3	1	3
9	4	2	1	3
10	2	2	2	3
9	3	2	2	3
5	5	5	1	4
5	5	3	3	4
6	4	3	3	4
7	7	1	1	4
8	6	1	1	4
8	3	3	2	4
9	5	1	1	4
9	3	3	1	4
10	4	1	1	4
10	3	2	1	4
11	2	2	1	4
7	3	3	3	5
11	3	1	1	5
12	2	1	1	5
13	1	1	1	6

表格 8

(三)接著進行四堆共 24 顆，完成後每堆各為 6 顆的實驗

四堆各 6 顆時，按照規則實際移動時，我發現有許多的組合無法完成移動。

例如：18,3,2,1 的組合就會無法完成，移動的過程如下

18	3	2	1
15	6	2	1
13	6	4	1
13	6	3	2
10	6	6	2
8	6	6	4
8	2	6	8
8	4	4	8

表格 9

當移動到 8,4,4,8 的組合時，會發生無論如何都無法再移動的情形。

推測原因：4 堆石頭共 24 顆的情況下，最後每堆要有六顆，將 6 質因數分解，6=2×3，**而(8，4，4，8)皆只有 2 的因數，無論再怎麼互給也不可能產生 3 的因數，故會造成無限循環。**

例：(8，4，4，8)=(2×2×2，2×2，2×2，2×2×2)

第一堆移給第二堆時→(2×2×2－2×2，2×2×2，2×2，2×2×2)整理後→(1×2×2，2×2，2×2，2×2×2)，之後再怎麼互給皆無法產生 3 的因數，故造成無限循環。

4 堆 24 顆時，經實驗發現只有以下 4 個組合能正常的完成移動。

15	3	3	3
12	6	3	3
9	9	3	3
9	6	6	3

表格 10

四堆石頭，每堆兩顆時的所有可完成組合數。

5	1	1	1
4	2	1	1
3	3	1	1
3	2	2	1

表格 4

小發現：我發現這 4 種組合，每個數字恰好是表格 4 的 3 倍，如上。

根據以上實驗我發現**四堆石頭，每堆 6 顆時的所有組合數，恰好與四堆石頭，每堆 2 顆的所有組合數一樣多**。這是否為巧合呢？老師鼓勵我繼續實驗下去。

(四)完成 4 堆，每堆 4 顆石頭和 4 堆，每堆 6 顆石頭後，我繼續進行數量較多的 4 堆，每堆 8 顆共 32 顆的移動和分析。

4 堆石頭共 32 顆的組合共有 249 組，扣掉 8,8,8,8 組合有 248 組，我先以筆記方式逐一將所有的組合推算出移動的步數並整理成表格，列於最後的附件表格 3 中。

接著老師要我試著用石頭移動的規則，找出石頭組合與移動次數之間的關聯性。

(1)以未知數來代表各堆石頭的量

遊戲規則:任一堆拿幾顆石頭到另一堆，拿過去的石頭數目必須與原來的一堆數目一樣。

因此我假設石頭總數為 T，三堆石頭時各堆為 A,B,C，四堆石頭時為 W,X,Y,Z，**三堆石頭的情況，我試著以算式表示如下：**

$T = A + B + C$

若第一次的移動是由 B 移到 C，則 B 移到 C 堆的數量必須和 C 原來的一樣多，B 堆變為(B-C)，而 C 將從 B 堆或得到和自己一樣多的數量，C 堆變為$2 \times C$

則移動一次後： $T = A + (B - C) + 2C$

若第二次的移動是由 A 移 C 的位置，此時的 C 的值已經為 2C

則移動兩次後：$T = (A - 2C) + (B - C) + 2(2C)$

實例：

用 3 堆石頭，總數為 24 的其中一組(12,10,2)代入

步驟 1

24=12+10+2 → $24 = 12 + (10 - 2) + (2 \times 2) = 12 + 8 + 4$

步驟 2

$24 = [12 - (2 \times 2)] + (10 - 2) + [2 \times (2 \times 2)] = 8 + 8 + 8$

由此得知此組合只要移動兩次即可完成。

四堆石頭的情況，可以寫成下面的計算式

T=W+X+Y+Z

若第一次移動如果是由 Y 堆移到 Z 堆

則移動一次將會形成以下的計算式

$T = W + X + (Y - Z) + 2Z$

若第二次移動假設爲 W 和 Y 的移動，則運算式會形成

$T = (W - (Y - Z)) + X + (2 * (Y - Z)) + 2Z$

實例：

用 4 堆石頭，總數 16 顆的一組(4,4,7,1)來代入：

步驟 1

16=4+4+7+1 → 16=4+4+(7-1)+(2× 1)=4+4+6+2

步驟 2

16=4+4+[(7-1)- (2×1)]+[2×(2× 1)]=4+4+(6-2)+(2× 2) $= 4 + 4 + 4 + 4$

此組合只要移動兩次就可以完成。

但是我發現如果多次移動後，運算式將變得十分複雜，因此老師建議我減少未知數的量，並從最終結果反推整個移動過程。

(2)以單變量 k 代表石頭的平均數，並由結果反推前一步的組合

我們以 3 堆 24 顆和 4 堆 32 顆的來進行演算時，它最終結果爲 8,8,8 和 8,8,8,8，由此可知，不管用幾顆石頭，完成時各堆的石頭數量都是相等的，

可以統一用一個代數符號來代表，我選擇用 k 代表。

從前面的運算規則，我們知道每次的移動只有兩堆的數量產生變化，因此我們試著用單變數推演上述的運算。

三堆石頭的情況

以 3 堆石頭，總數 24 爲例：我們假設 A,B,C 就是最後的解 k,k,k，因此運算式可以改爲

$24 = k + k + k$

所以它的上一步爲

$$24 = k + \left(k + \frac{k}{2}\right) + \frac{k}{2}$$

往前推一步，可得到三堆石頭的比例爲 2:3:1

再往前推一步運算式將成爲

24=k+($\frac{3k}{2} + (\frac{k}{2} \times \frac{1}{2})) + (\frac{k}{2} \times \frac{1}{2}) = k + \frac{7k}{4} + \frac{k}{4}$

往前推兩步，可得到三堆石頭的比例為 4:7:1

四堆石頭的情況

以 4 堆石頭，總數 32 為例：我們假設 W,X,Y,Z 就是最後的解 k,k,k,k，因此運算式可以改為

$32 = k + k + k + k$

而他的上一步為

$32 = k + k + (k + \frac{k}{2}) + \frac{k}{2} = k + k + \frac{3k}{2} + \frac{k}{2}$

往前推一步，可得到四堆石頭的比例為 2:2:3:1

再往前推一步運算式將成為

$32=k+k+(\frac{3k}{2} + (\frac{k}{2} \times \frac{1}{2})) + (\frac{k}{2} \times \frac{1}{2}) = k + k + \frac{7k}{4} + \frac{k}{4}$

往前推兩步，四堆石頭的比例為 4:4:7:1

用上面的方式並依照規則每次任取 2 組來移動，就可以逐步回推出各種數量變化的情況。

回推過程中由 3 堆或 4 堆中每次任取 2 堆，每往前回推一次，3 堆會產生 6 種情況，4 堆會產生 12 種情況，但需要再扣除之前已出現過的比例、或石頭數目經推算後非整數的情況，但這方法可以逐步推回各組合尚需幾步驟才能完成移動。

下面我 3 堆 24 顆和用 4 堆 16 顆來驗證此方法是否正確

三堆石頭，總數 24 顆：

24=8+8+8

往回推一步

$24 = 8 + \left(8 + \frac{8}{2}\right) + \frac{8}{2} = 8 + 12 + 4$，

對照實驗紀錄表格 7，(8,12,4)為的確需移動一次。

再推一步

$24 = 8 + \left(12 + \frac{4}{2}\right) + \frac{4}{2} = 8 + 14 + 2$，

對照實驗紀錄表格 7，(8,14,2)為的確需移動兩次。

四堆石頭，總數 16 顆：

16 = 4 + 4 + 4 + 4

$16 = 4 + 4 + (4 + \frac{4}{2}) + \frac{4}{2} = 4 + 4 + 6 + 2$，**對照實驗紀錄表格 8，石頭數為 4,4,6,2 的移動次數為一次。**

再進行一次的計算

16=4+4+6+2 會變成 4+4+7+1，**對照實驗紀錄表格 8，石頭數為 4,4,7,1 的移動次數為二次。**

(3) 利用前面的運算式，針對實驗結果來驗算，結果是相同的。運用此方法還可

以藉由各堆石頭的比例得知移動次數。

三、分析石頭比例和移動次數之間的關係，並作成階層圖來輔助驗證

根據前述方法往前推算，可算出每一步的石頭比例，我畫了以下的階層圖，可以清楚表示石頭的比例和移動次數之間的關係。

(一) 三堆石頭，總數 24 顆的移動次數階層圖

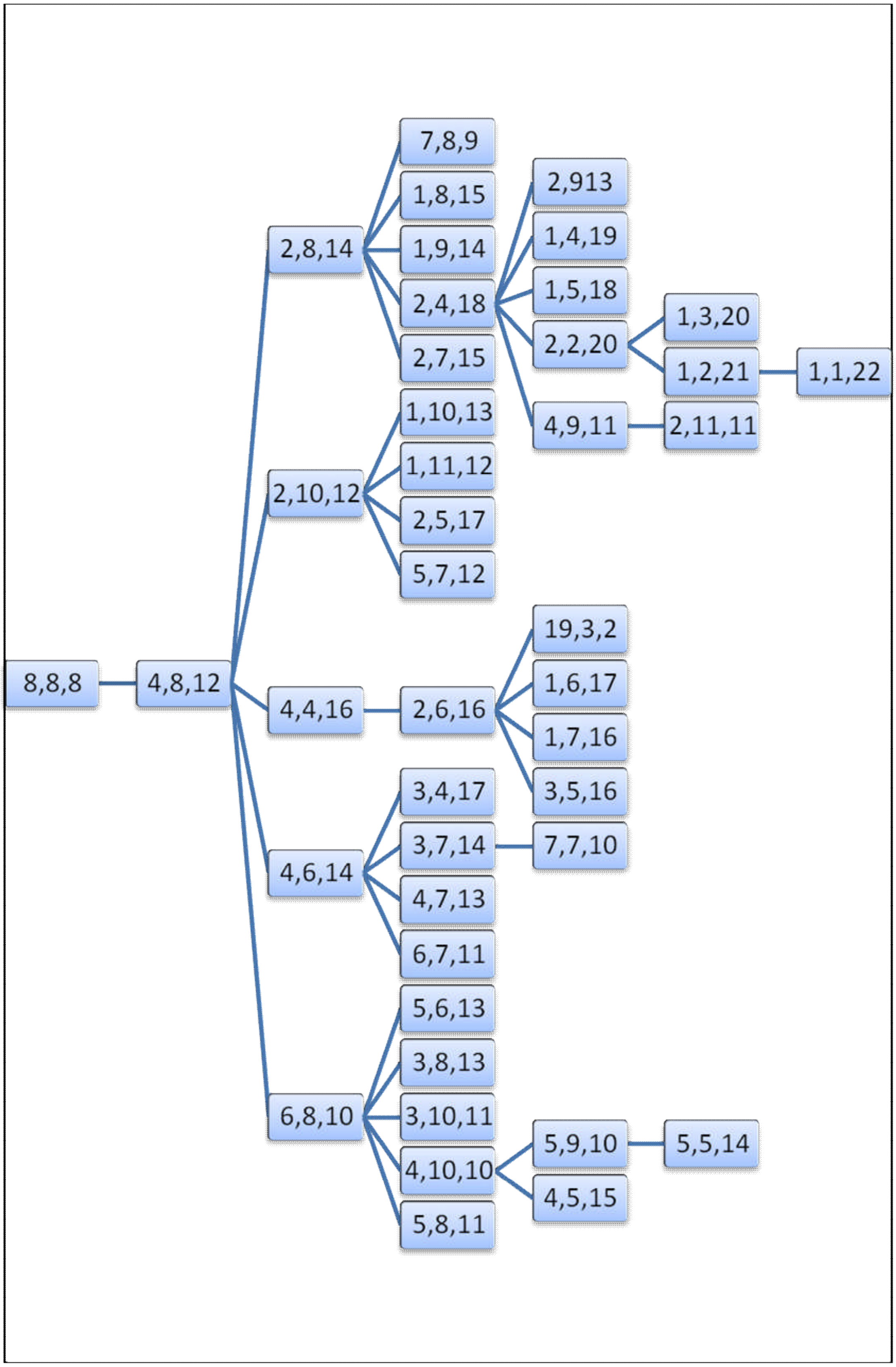

圖 1

(二) 四堆石頭，總數 16 顆的移動次數階層圖

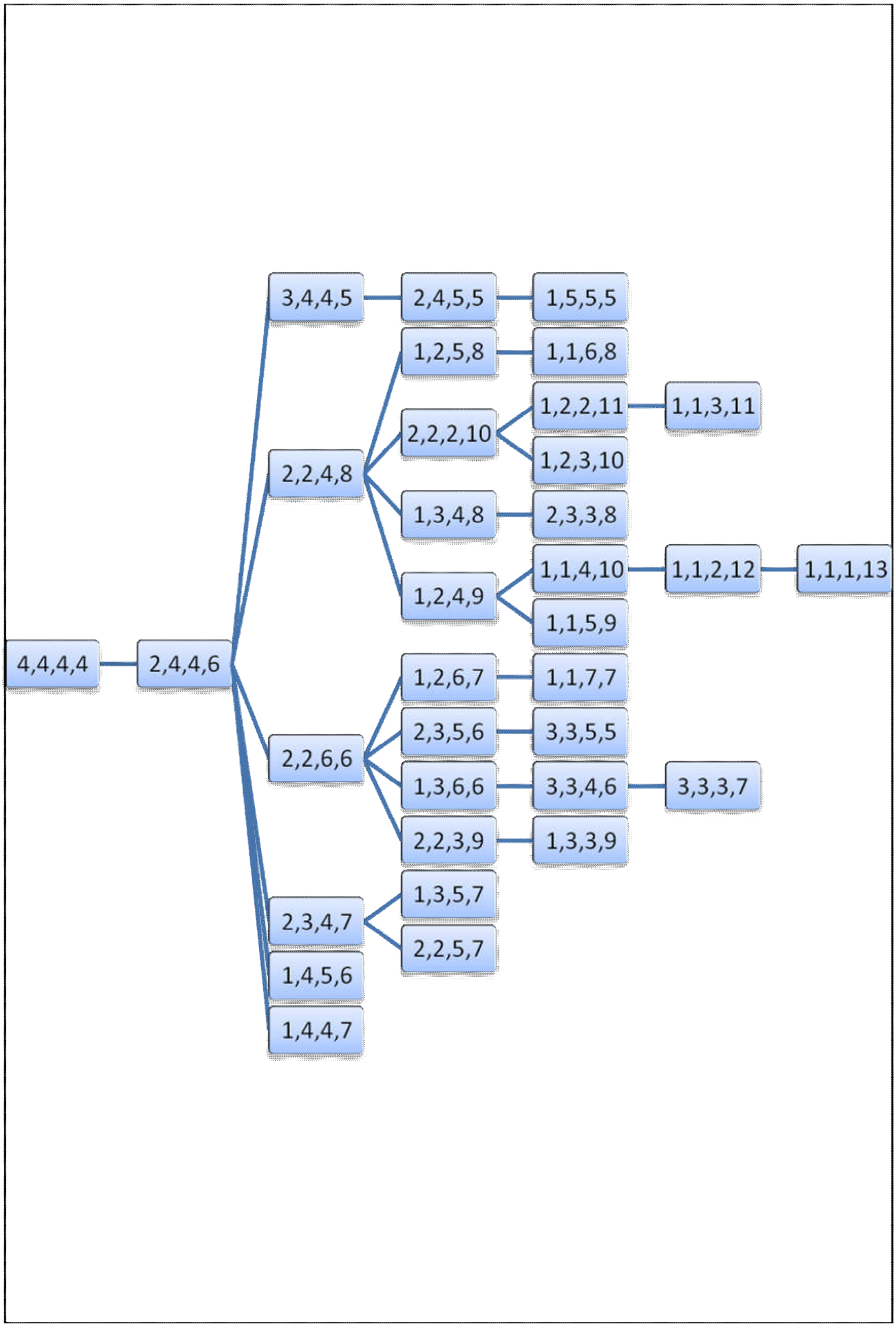

圖 2

伍、研究結果與討論

一、如何簡易計算石頭總組合數

石頭組合數的計算，在一開始的研究過程中我先採用了窮舉法，逐一的列表記錄，在堆數少或石頭總數少的情況，可以逐一比對是否有遺漏並找出所有的組數，但堆數或數量變多以後就會非常的耗時。

經過整理後採用計算的方式來計算出組合數；先固定數量較少的一堆或兩堆，將剩餘兩堆當成一組，利用算式算出組數，大量減少了組數推算的時間，而且還可以用來檢驗組數是否正確，若有遺漏可以立即發現錯誤。

1. 三堆石頭時，組數= $[\frac{(b+c)-2(a-1)}{2}]$

2. 四堆石頭時，組數=$[\frac{(c+d)-2(b-1)}{2}]$

二、石頭比例與移動次數的關係

(一) 以單變數 k 代表石頭平均數量時，可以簡化未知數的量。石頭的數量未必要是 8 或 16 或 24，可以推廣到任何數量。

(二) 由最後結果逆推回去時，三堆石頭時上一步為($\frac{k}{2}$，k，$\frac{3}{2}k$)，石頭比例為 1:2:3；四堆石頭時上一步為(k，k，$\frac{3}{2}k$，$\frac{k}{2}$)，也就是石頭比例為 2:2:3:1，依此方法可推出所有的階層圖。參考階層圖即可知尚差幾步可完成移動。

(三) 每往回推一步，就會有某堆石頭減半，因此變數會逐漸變小，故石頭數目若為 $\frac{k}{2}$，則尚需一步才可完成移動，$\frac{k}{4}$則為兩步，$\frac{k}{8}$則為三步，依此類推。

(四) 推階層圖時發現將 k 因數分解後，如果因數中有越多 2，就可以往回推更多步，例如：12=2x2x3，18=2x3x3，每堆石頭為 12 顆時的階層圖反而比每堆 18 顆時更複雜。

(五) 由(四)便可以解釋 p.11 為何四堆石頭，每堆兩顆的所有組合數和四堆石頭，每堆六顆的所有組合數一樣了。因為 k=2 和 k=6=2x3 都只有一個 2 的因數，所以階層圖一樣複雜。

(六) 當 k=2x2x2x2x2…………時，2 的因數越多時，可往回推越多步，階層圖最複雜。

三、在沒有階層圖的情形下推測出移動次數

(一) 以平均分配後每堆的數量 k=8 的條件下，歸納出來以下幾個數目對移動次數的關係。

起始有以下數字	最少步數	說明
1($\frac{k}{8}$)	3 步	1 為最小數，因此需接收別堆的數量 3 次((1x2)x2)x2)才能到達 8 的數量

$2(\frac{k}{4})$	2 步	2 同樣小於 8，因此((2×2)×2)要接受兩次
$4(\frac{k}{2})$	1 步	4×2=8 一次即可
3	3 步	(1) $3\times2<8$ 因此仍需由其他堆移入一次，因此至少要兩次(3*2)*2 (2) 但(3×2)×2=12 後將大於 8，此堆將從接受者變成移出者 (3) 若同組中有 4(或 1、2)的數量，則由此堆移往該堆將可減少一次。 (4) 若同組中沒有 4(或 1、2)的數量，則可能移動次數會增加。 (5) 6、12 和 3 的情形一樣，只是移動次數比較少。
6	2 步	
12	1 步	
5	2 步	(1) 5×2=10，此堆將從接受者變成移出者。 (2) 同組中有 2(或 1)的數量，則由此堆移往該堆將可減少一次。 (3) 若同組中沒有 2(或 1)的數量，則可能移動次數會增加。 (4) 10 和 5 的情形一樣，只是少一步。
10	1 步	
7	2 步	(1) 7×2=14，將從接受者變成移出者。 (2) 同組中有 2(或 1)的數量，則由此堆移往該堆將可減少一次。 (3) 必須移出 2+4，若同組沒有 2(或 1)時，移動次數會增加。 (4) 14 和 7 的情形一樣，只是少一步。
14	1 步	
9、11、13、15	?	均屬於移出者，9、11、13、15 必須遇到 1 才能順利移出，否則次數可能會增加，判斷易失敗。

表格 11

(二) 藉由表格 1，可猜測移動的最少次數，猜測時先考慮小於平均數的石頭之移動次數，因爲考慮接受者的情形比較簡單(變 2 倍)，例如:

(1)16,10,4,2 我們從實驗結果附件表格 3 知道它需要移動 3 次。

利用表格 11 預測移動次數時

4→我們從表格 11 得知 4×2=8，要接受 1 次。

2→我們從表格 11 得知$2\times2\times2=8$，要接受 2 次。

2＋1=3

實際移動變化：

(16,10,4,2)

(16,8,4,4)→ 10 移給 2，第 2 堆完成移動，第 4 堆變成 4

(12,8,8,4)→16 移給 4，第 3 堆完成移動，第 1 堆變成 12

(8,8,8,8)→ 12 移給 4，完成移動。

(2)2,3,10,17 我們從實驗結果附件表格 3 知道它需要移動 4 次。

我依照表格 11 的特性，推測它可能需要的移動次數

2→移動 2 次

3→移動 3 次，但因有 2(或 4)，故少移動一次，3－1＝2

10→移動一次，但因有 2，故少移動一次，1－1＝0

2＋2＋0＝4

(3)4,6,11,11 我們從實驗結果附件表格 3 知道它需要移動 5 次。

我依照表格 11 的特性，推測它可能需要的移動次數

4→移動 1 次

6→移動 2 次，但因有 4，會少移動 1 次，2－1＝1。

11→11 為特殊數字，需有 1 才能順利移出，但此例中沒有 1，故判斷法則失敗。

由此發現此法在有很多 1、2、4 時易成功，遇到 9、11、13、15 時易失敗。

(三) 當有大於 k 而為奇數的值，若無搭配 1 時，會有接受移入又移出的情況，若又有多個此類的數目，次數的判斷會較為複雜。

四、遊戲的條件與限制

(一) 這個遊戲的平均每堆石頭數 k 一定是要偶數，若 k 為奇數則無法完成移動。因為若 k 為奇數時，完成移動前的上一步一定有一堆石頭是 $\frac{k}{2}$，如果 k 是奇數，$\frac{k}{2}$ 就不是整數，所以平均每堆石頭的數目 k 不能是奇數。

(二) 當各堆石頭的比例不存在於階層圖時，無論怎樣移動都將無法完成。

陸、結論

本次研究的目的在於利用各種數學方法及解題策略，找出四堆石頭移動時的規律性及判斷法則，藉以推測出移動的最少次數，並且從遊戲中了解命題的條件及限制，我們發現了幾項結論。

一、石頭組合數的計算方式

1. 三堆石頭時，組數= $\left[\frac{(b+c)-2(a-1)}{2}\right]$

2. 四堆石頭時，組數=$\left[\frac{(c+d)-2(b-1)}{2}\right]$

二、可以用一個變數 k 代表石頭的平均量，如此便可以推廣到任意顆的情形。

三、各堆石頭的比例如何決定了移動的次數，由階層圖中可以得知不同的比例需要的移動次數不同。

四、石頭的平均顆數 K 不能是奇數，否則將無法進行遊戲。

五、當石頭平均顆數 k 中所含的 2 的因數越多，階層圖會越複雜；當 k 中所含 2 的因數一樣多時，階層圖將會一樣複雜，只是數字不同。

六、石頭數量為 1、2、4 這類只含有 2 的因數的數字，在判斷移動次數時最容易。

七、石頭數量為 3、6、12 時必須有另一堆顆數為 1、2、4 的石頭搭配才不會誤判移動次數。

八、石頭數量為 5、10 時必須有另一堆顆數為 1、2 的石頭搭配才不會誤判移動次數。

九、石頭數量為 7、14 時必須有另一堆顆數為 1、2 的石頭搭配才不會誤判移動次數。

十、石頭數量為 9、11、13、15 時必須有另一堆顆數為 1 的石頭搭配才不會誤判移動次數。

透過這次的主題研究，我學會了許多數學的原理及邏輯思考，並了解應善用解題策略來解決生活上的數學問題，真是一舉兩得。

柒、參考資料及其他

一、康軒版國小數學 5 上第 9 冊，第 2 單元整數四則計算

二、國小數學 6 上第五單元數量關係

三、數學趣味三百題第 12 頁第 28 題，著者：裘宗滬，凡異出版社

捌、附件

附件一、 四堆 16 顆的組合明細、移動次數記錄與堆數間比值

組別	數字 1	數字 2	數字 3	數字 4	步數	比值
1	4	4	4	4	0	
2	6	4	4	2	1	3:2:2:1
3	5	4	4	3	2	5:4:4:3
4	6	5	4	1	2	6:5:4:1
5	6	6	2	2	2	3:3:1:1
6	7	4	4	1	2	7:4:4:1
7	7	4	3	2	2	7:4:3:2
8	8	4	2	2	2	4:2:1:1
9	5	5	4	2	3	5:5:4:2
10	6	6	3	1	3	6:6:3:1
11	6	5	3	2	3	6:5:3:2
12	7	6	2	1	3	7:6:2:1
13	7	5	3	1	3	7:5:3:1
14	7	5	2	2	3	7:5:2:2

15	8	5	2	1	3	8:5:2:1
16	8	4	3	1	3	8:4:3:1
17	9	4	2	1	3	9:4:2:1
18	10	2	2	2	3	5:1:1:1
19	9	3	2	2	3	9:3:2:2
20	5	5	5	1	4	5:5:5:1
21	5	5	3	3	4	5:5:3:3
22	6	4	3	3	4	6:4:3:3
23	7	7	1	1	4	7:7:1:1
24	8	6	1	1	4	8:6:1:1
25	8	3	3	2	4	8:3:3:2
26	9	5	1	1	4	9:5:1:1
27	9	3	3	1	4	9:3:3:1
28	10	4	1	1	4	10:4:1:1
29	10	3	2	1	4	10:3:2:1
30	11	2	2	1	4	11:2:2:1
31	7	3	3	3	5	7:3:3:3
32	11	3	1	1	5	11:3:1:1
33	12	2	1	1	5	12:2:1:1
34	13	1	1	1	6	13:1:1:1

附件表格 1

附件二、 三堆 24 顆的組合明細和移動次數記錄

組別	數字 1	數字 2	數字 3	步數	比值
1	8	8	8	0	
2	12	8	4	1	3:2:1
3	14	8	2	2	7:4:1
4	16	4	4	2	4:1:1
5	10	8	6	2	5:4:3
6	15	8	1	3	15:8:1
7	18	4	2	3	9:2:1
8	13	8	3	3	13:8:3
9	11	10	3	3	11:10:3
10	14	6	4	3	7:3:2
11	10	10	4	3	5:5:2
12	13	6	5	3	13:6:5
13	11	8	5	3	11:8:5
14	9	8	7	3	9:8:7
15	19	4	1	4	19:4:1

16	20	2	2	4	10:1:1
17	16	6	2	4	8:3:1
18	12	10	2	4	6:5:1
19	17	4	3	4	17:4:3
20	16	5	3	4	16:5:3
21	15	5	4	4	15:5:4
22	13	7	4	4	13:7:4
23	11	9	4	4	11:9:4
24	11	7	6	4	11:7:6
25	21	2	1	5	21:2:1
26	17	6	1	5	17:6:1
27	13	10	1	5	13:10:1
28	19	3	2	5	19:3:2
29	17	5	2	5	17:5:2
30	15	7	2	5	15:7:2
31	13	9	2	5	13:9:2
32	11	11	2	5	11:11:2
33	14	7	3	5	14:7:3
34	14	5	5	5	14:5:5
35	10	9	5	5	10:9:5
36	10	7	7	5	10:7:7
37	22	1	1	6	22:1:1
38	20	3	1	6	20:3:1
39	18	5	1	6	18:5:1
40	16	7	1	6	16:7:1
41	14	9	1	6	14:9:1
42	12	11	1	6	12:11:1
43	12	7	5	7	12:7:5
44	18	3	3	999	6:1:1
45	15	6	3	999	5:2:1
46	12	9	3	999	4:3:1
47	12	6	6	999	2:1:1
48	9	9	6	999	3:3:2

附件表格 2

附件三、 四堆 32 顆的組合明細和移動次數記錄

組別	數 1	數 2	數 3	數 4	步數	
1	8	8	8	8	0	
2	12	8	8	4	1	3:2:2:1

3	14	8	8	2	2	7:4:4:1
4	12	10	8	2	2	6:5:4:1
5	16	8	4	4	2	4:2:1:1
6	12	12	4	4	2	3:3:1:1
7	14	8	6	4	2	7:4:3:2
8	10	8	8	6	2	5:4:4:3
9	15	8	8	1	3	15:8:8:1
10	14	9	8	1	3	14:9:8:1
11	13	10	8	1	3	13:10:8:1
12	12	11	8	1	3	12:11:8:1
13	12	10	9	1	3	12:10:9:1
14	18	8	4	2	3	9:4:2:1
15	16	10	4	2	3	8:5:2:1
16	14	12	4	2	3	7:6:2:1
17	17	8	5	2	3	17:8:5:2
18	13	12	5	2	3	13:12:5:2
19	16	8	6	2	3	8:4:3:1
20	14	10	6	2	3	7:5:3:1
21	12	12	6	2	3	6:6:3:1
22	15	8	7	2	3	15:8:7:2
23	17	8	4	3	3	17:8:4:3
24	14	11	4	3	3	14:11:4:3
25	14	8	7	3	3	14:8:7:3
26	13	8	8	3	3	13:8:8:3
27	11	10	8	3	3	11:10:8:3
28	20	4	4	4	3	5:1:1:1
29	18	6	4	4	3	9:3:2:2
30	14	10	4	4	3	7:5:2:2
31	15	7	6	4	3	15:7:6:4
32	12	10	6	4	3	6:5:3:2
33	13	8	7	4	3	13:8:7:4
34	10	10	8	4	3	5:5:4:2
35	13	8	6	5	3	13:8:6:5
36	12	8	7	5	3	12:8:7:5
37	11	8	8	5	3	11:8:8:5
38	11	8	7	6	3	11:8:7:6
39	9	8	8	7	3	9:8:8:7
40	19	8	4	1	4	19:8:4:1

41	18	9	4	1	4	18:9:4:1
42	17	10	4	1	4	17:10:4:1
43	16	11	4	1	4	16:11:4:1
44	15	12	4	1	4	15:12:4:1
45	14	13	4	1	4	14:13:4:1
46	18	8	5	1	4	18:8:5:1
47	17	9	5	1	4	17:9:5:1
48	16	10	5	1	4	16:10:5:1
49	14	12	5	1	4	14:12:5:1
50	13	13	5	1	4	13:13:5:1
51	17	8	6	1	4	17:8:6:1
52	16	9	6	1	4	16:9:6:1
53	15	10	6	1	4	15:10:6:1
54	14	11	6	1	4	14:11:6:1
55	13	12	6	1	4	13:12:6:1
56	16	8	7	1	4	16:8:7:1
57	15	9	7	1	4	15:9:7:1
58	14	10	7	1	4	14:10:7:1
59	12	12	7	1	4	12:12:7:1
60	20	8	2	2	4	10:4:1:1
61	18	10	2	2	4	9:5:1:1
62	16	12	2	2	4	8:6:1:1
63	14	14	2	2	4	7:7:1:1
64	19	8	3	2	4	19:8:3:2
65	17	10	3	2	4	17:10:3:2
66	16	11	3	2	4	16:11:3:2
67	15	12	3	2	4	15:12:3:2
68	14	13	3	2	4	14:13:3:2
69	22	4	4	2	4	11:2:2:1
70	21	5	4	2	4	21:5:4:2
71	20	6	4	2	4	10:3:2:1
72	19	7	4	2	4	19:7:4:2
73	17	9	4	2	4	17:9:4:2
74	15	11	4	2	4	15:11:4:2
75	19	6	5	2	4	19:6:5:2
76	16	9	5	2	4	16:9:5:2
77	14	11	5	2	4	14:11:5:2
78	18	6	6	2	4	9:3:3:1

79	17	7	6	2	4	17:7:6:2
80	15	9	6	2	4	15:9:6:2
81	13	11	6	2	4	13:11:6:2
82	13	10	7	2	4	13:10:7:2
83	12	11	7	2	4	12:11:7:2
84	13	9	8	2	4	13:9:8:2
85	10	10	10	2	4	5:5:5:1
86	21	4	4	3	4	21:4:4:3
87	18	7	4	3	4	18:7:4:3
88	15	10	4	3	4	15:10:4:3
89	13	12	4	3	4	13:12:4:3
90	16	8	5	3	4	16:8:5:3
91	14	10	5	3	4	14:10:5:3
92	13	11	5	3	4	13:11:5:3
93	12	12	5	3	4	12:12:5:3
94	15	7	7	3	4	15:7:7:3
95	12	10	7	3	4	12:10:7:3
96	11	11	7	3	4	11:11:7:3
97	19	5	4	4	4	19:5:4:4
98	17	7	4	4	4	17:7:4:4
99	17	6	5	4	4	17:6:5:4
100	16	7	5	4	4	16:7:5:4
101	15	8	5	4	4	15:8:5:4
102	14	9	5	4	4	14:9:5:4
103	13	10	5	4	4	13:10:5:4
104	12	11	5	4	4	12:11:5:4
105	16	6	6	4	4	8:3:3:2
106	13	9	6	4	4	13:9:6:4
107	14	7	7	4	4	14:7:7:4
108	12	9	7	4	4	12:9:7:4
109	11	10	7	4	4	11:10:7:4
110	11	9	8	4	4	11:9:8:4
111	14	7	6	5	4	14:7:6:5
112	12	9	6	5	4	12:9:6:5
113	10	9	8	5	4	10:9:8:5
114	12	8	6	6	4	6:4:3:3
115	10	10	6	6	4	5:5:3:3
116	10	9	7	6	4	10:9:7:6

117	10	8	7	7	4	10:8:7:7
118	21	8	2	1	5	21:8:2:1
119	20	9	2	1	5	20:9:2:1
120	19	10	2	1	5	19:10:2:1
121	18	11	2	1	5	18:11:2:1
122	17	12	2	1	5	17:12:2:1
123	16	13	2	1	5	16:13:2:1
124	15	14	2	1	5	15:14:2:1
125	20	8	3	1	5	20:8:3:1
126	19	9	3	1	5	19:9:3:1
127	18	10	3	1	5	18:10:3:1
128	17	11	3	1	5	17:11:3:1
129	16	12	3	1	5	16:12:3:1
130	15	13	3	1	5	15:13:3:1
131	14	14	3	1	5	14:14:3:1
132	23	4	4	1	5	23:4:4:1
133	22	5	4	1	5	22:5:4:1
134	21	6	4	1	5	21:6:4:1
135	20	7	4	1	5	20:7:4:1
136	21	5	5	1	5	21:5:5:1
137	20	6	5	1	5	20:6:5:1
138	19	7	5	1	5	19:7:5:1
139	15	11	5	1	5	15:11:5:1
140	19	6	6	1	5	19:6:6:1
141	18	7	6	1	5	18:7:6:1
142	13	11	7	1	5	13:11:7:1
143	13	9	9	1	5	13:9:9:1
144	11	10	10	1	5	11:10:10:1
145	24	4	2	2	5	12:2:1:1
146	23	5	2	2	5	23:5:2:2
147	22	6	2	2	5	11:3:1:1
148	21	7	2	2	5	21:7:2:2
149	19	9	2	2	5	19:9:2:2
150	17	11	2	2	5	17:11:2:2
151	15	13	2	2	5	15:13:2:2
152	23	4	3	2	5	23:4:3:2
153	22	5	3	2	5	22:5:3:2
154	21	6	3	2	5	21:6:3:2

155	20	7	3	2	5	20:7:3:2
156	18	9	3	2	5	18:9:3:2
157	13	13	4	2	5	13:13:4:2
158	18	7	5	2	5	18:7:5:2
159	15	10	5	2	5	15:10:5:2
160	16	7	7	2	5	16:7:7:2
161	14	9	7	2	5	14:9:7:2
162	11	11	8	2	5	11:11:8:2
163	12	9	9	2	5	12:9:9:2
164	11	10	9	2	5	11:10:9:2
165	19	7	3	3	5	19:7:3:3
166	20	5	4	3	5	20:5:4:3
167	19	6	4	3	5	19:6:4:3
168	16	9	4	3	5	16:9:4:3
169	19	5	5	3	5	19:5:5:3
170	18	6	5	3	5	18:6:5:3
171	17	7	5	3	5	17:7:5:3
172	15	9	5	3	5	15:9:5:3
173	16	7	6	3	5	16:7:6:3
174	15	8	6	3	5	15:8:6:3
175	13	10	6	3	5	13:10:6:3
176	12	11	6	3	5	12:11:6:3
177	13	9	7	3	5	13:9:7:3
178	12	9	8	3	5	12:9:8:3
179	10	10	9	3	5	10:10:9:3
180	15	9	4	4	5	15:9:4:4
181	13	11	4	4	5	13:11:4:4
182	18	5	5	4	5	18:5:5:4
183	11	11	6	4	5	11:11:6:4
184	10	9	9	4	5	10:9:9:4
185	14	8	5	5	5	14:8:5:5
186	13	9	5	5	5	13:9:5:5
187	15	6	6	5	5	15:6:6:5
188	11	10	6	5	5	11:10:6:5
189	13	7	7	5	5	13:7:7:5
190	11	9	7	5	5	11:9:7:5
191	10	10	7	5	5	10:10:7:5
192	14	6	6	6	5	7:3:3:3

193	13	7	6	6	5	13:7:6:6
194	11	9	6	6	5	11:9:6:6
195	12	7	7	6	5	12:7:7:6
196	11	7	7	7	5	11:7:7:7
197	22	8	1	1	6	22:8:1:1
198	21	9	1	1	6	21:9:1:1
199	20	10	1	1	6	20:10:1:1
200	19	11	1	1	6	19:11:1:1
201	18	12	1	1	6	18:12:1:1
202	17	13	1	1	6	17:13:1:1
203	16	14	1	1	6	16:14:1:1
204	15	15	1	1	6	15:15:1:1
205	25	4	2	1	6	25:4:2:1
206	24	5	2	1	6	24:5:2:1
207	23	6	2	1	6	23:6:2:1
208	22	7	2	1	6	22:7:2:1
209	24	4	3	1	6	24:4:3:1
210	23	5	3	1	6	23:5:3:1
211	22	6	3	1	6	22:6:3:1
212	21	7	3	1	6	21:7:3:1
213	17	7	7	1	6	17:7:7:1
214	11	11	9	1	6	11:11:9:1
215	26	2	2	2	6	13:1:1:1
216	25	3	2	2	6	25:3:2:2
217	24	3	3	2	6	24:3:3:2
218	20	5	5	2	6	20:5:5:2
219	22	4	3	3	6	22:4:3:3
220	21	5	3	3	6	21:5:3:3
221	18	8	3	3	6	18:8:3:3
222	16	10	3	3	6	16:10:3:3
223	15	11	3	3	6	15:11:3:3
224	14	12	3	3	6	14:12:3:3
225	13	13	3	3	6	13:13:3:3
226	17	6	6	3	6	17:6:6:3
227	14	9	6	3	6	14:9:6:3
228	11	9	9	3	6	11:9:9:3
229	16	6	5	5	6	16:6:5:5
230	15	7	5	5	6	15:7:5:5

231	12	10	5	5	6	12:10:5:5
232	11	11	5	5	6	11:11:5:5
233	9	9	9	5	6	9:9:9:5
234	9	9	8	6	6	9:9:8:6
235	9	9	7	7	6	9:9:7:7
236	26	4	1	1	7	26:4:1:1
237	25	5	1	1	7	25:5:1:1
238	24	6	1	1	7	24:6:1:1
239	23	7	1	1	7	23:7:1:1
240	27	2	2	1	7	27:2:2:1
241	26	3	2	1	7	26:3:2:1
242	25	3	3	1	7	25:3:3:1
243	20	6	3	3	7	20:6:3:3
244	17	9	3	3	7	17:9:3:3
245	17	5	5	5	7	17:5:5:5
246	28	2	1	1	8	28:2:1:1
247	27	3	1	1	8	27:3:1:1
248	23	3	3	3	8	23:3:3:3
249	29	1	1	1	9	29:1:1:1

附件表格 3

附件四、 四堆 32 顆堆數組計算表格

a	b	(c+d)	(c+d)-2(b-1)	$\left[\frac{(c+d)-2(b-1)}{2}\right]$
1	1	30	30	15
1	2	29	27	13
1	3	28	24	12
1	4	27	21	10
1	5	26	18	9
1	6	25	15	7
1	7	24	12	6
1	8	23	9	4
1	9	22	6	3
1	10	21	3	1
2	2	28	26	13
2	3	27	23	11
2	4	26	20	10
2	5	25	17	8
2	6	24	14	7
2	7	23	11	5

2	8	22	8	4
2	9	21	5	2
2	10	20	2	1
3	3	26	22	11
3	4	25	19	9
3	5	24	16	8
3	6	23	13	6
3	7	22	10	5
3	8	21	7	3
3	9	20	4	2
4	4	24	18	9
4	5	23	15	7
4	6	22	12	6
4	7	21	9	4
4	8	20	6	3
4	9	19	3	1
5	5	22	14	7
5	6	21	11	5
5	7	20	8	4
5	8	19	5	2
5	9	18	2	1
6	6	20	10	5
6	7	19	7	3
6	8	18	4	2
7	7	18	6	3
7	8	17	3	1
8	8	16	2	1
			總組數	249

附件表格 4

【評語】080410

1.利用數學方法試圖找出四推石頭移動時的規律性及判斷法則，以推測出移動的最少次數，頗符合數學探究精神。但隨著複雜度增加，尚未討論完整，可再接再勵。

2.能製作出階層圖，呈現石頭比例和移動次數之間的關係，建議作者能進一步觀察階層圖，或許能分析出更完整的結果。